

(Đề thi có 1 trang gồm 9 câu)

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (2,5 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^2+x+2} (C)$.

Tìm tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số và có tung độ nguyên.

Câu 2 (2,5 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{3}{2} (C)$.

Tìm tọa độ tất cả các điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt P, Q khác M thỏa mãn $MP = 3MQ$ với P nằm giữa Q và M .

Câu 3 (2,0 điểm). Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm:

$$\left(\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{x^2-x+1} - m\right) + x + 2m + 6 = 0.$$

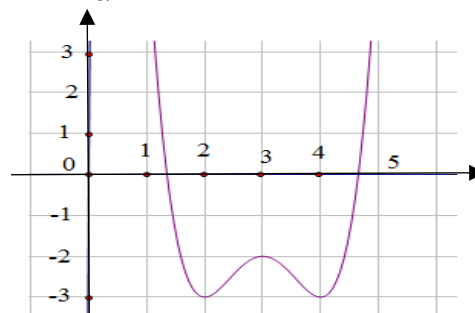
Câu 4 (2,0 điểm). Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(x - 2\log_2 x)\sqrt{9^x - (m-1)3^x - m} = 0$ (với m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để tập hợp S có hai phần tử?

Câu 5 (2,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = \sqrt{5}, AC = BD = \sqrt{10}, AD = BC = \sqrt{13}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) .

Câu 6 (3,0 điểm). Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo x và tìm x để thể tích đó lớn nhất.

Câu 7 (2,0 điểm).

Cho hàm số $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = g(g(x))$.



Câu 8 (2,0 điểm). Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để số chọn được chia hết cho 15.

Câu 9 (2,0 điểm). Cho hàm số $f(x) = 9 \frac{2^x + 2^{-x} - 2}{2^x + 2^{-x} + 2} + 3p \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + q$. Tìm tất cả các giá trị của p, q

để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 1]$ là nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (2,5 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^2+x+2} (C)$.

Tìm tọa độ tất cả các điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số và có tung độ nguyên.

Hướng dẫn

+ Dễ thấy hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Xem y là tham số, xét phương trình ẩn x sau:

$yx^2 + (y-1)x + 2y + 3 = 0 (*)$. Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Xét $y \neq 0$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi: $(y-1)^2 - 4y(2y+3) \geq 0 \Leftrightarrow -7y^2 - 14y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-7-2\sqrt{14}}{7} \leq y \leq \frac{-7+2\sqrt{14}}{7}$.

+ Yêu cầu $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-2; -1; 0\}$. Khi đó tọa độ các điểm cần tìm là $(-1; -2), \left(-\frac{1}{2}; -2\right),$

$(-1-\sqrt{2}; -1), (-1+\sqrt{2}; -1), (3; 0)$.

Câu 2 (2,5 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{3}{2} (C)$.

Tìm tọa độ tất cả các điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt (C) tại hai điểm phân biệt P, Q khác M thỏa mãn $MP = 3MQ$ với P nằm giữa Q và M .

Hướng dẫn

+ Giả sử tồn tại điểm $M\left(m; \frac{m^4}{2} - 3m^2 + \frac{3}{2}\right)$ thuộc đồ thị (C) thỏa mãn bài toán. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $y = (2m^3 - 6m)(x - m) + \frac{m^4}{2} - 3m^2 + \frac{3}{2}$ cắt (C) tại P, Q khác M thỏa mãn $MP = 3MQ$ với P nằm giữa Q và M .

+ Từ đó suy ra $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - 3\overrightarrow{OQ} = -2\overrightarrow{OM} \Rightarrow x_1 - 3x_2 = -2m (*)$.

+ Mặt khác x_1, x_2 khác m là các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{3}{2} = (2m^3 - 6m)(x - m) + \frac{m^4}{2} - 3m^2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^4 - 4m^3x + 3m^4 = 6(x - m)^2$$

$\Rightarrow (x + m)^2 = 6 - 2m^2, |m| \leq \sqrt{3} \Rightarrow x_{1,2} = -m \pm \sqrt{6 - 2m^2}$. Thay vào $(*)$ ta được $m = \pm\sqrt{2}$ (thỏa mãn). Vậy ta có hai điểm M cần tìm là $M\left(-\sqrt{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và $M\left(\sqrt{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

Lời bình:

Bài này giải tương tự đề thi học sinh giỏi tỉnh Khánh Hòa ngày 31/10 năm 2019.

Câu 3 (2,0 điểm). Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm:

$$\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}\right)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - m\right) + x + 2m + 6 = 0.$$

Hướng dẫn

+ Dễ thấy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biế đổi để cô lập m , ta có:

$$m\left[2 - \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}\right)\right] + \left(x^2 + 1 - \sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}\right) + 6 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}}$ đây hàm lẻ đối với x và

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = -1 \text{ như thế ta có}$$

$$t \in (-1; 1).$$

+ Từ đó ta có phương trình ẩn t là: $m(2 - t) + \frac{t^2}{2} + 6 = 0, t \in (-1; 1)$

$$\Rightarrow 2m = \frac{t^2 + 12}{t - 2} = t + 2 + \frac{16}{t - 2} = f(t), t \in (-1; 1) \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{16}{(t - 2)^2} < 0, \forall t \in (-1; 1).$$

$$\text{Suy ra } -13 < 2m < -\frac{13}{3} \Rightarrow -\frac{13}{2} < m < -\frac{13}{6}.$$

+ **Kết luận:** Để phương trình đã cho có nghiệm thì $-\frac{13}{2} < m < -\frac{13}{6}$.

Câu 4 (2,0 điểm). Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(x - 2 \log_2 x) \sqrt{9^x - (m - 1)3^x} - m = 0$ (với m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để tập hợp S có hai phần tử?

Hướng dẫn

+ Xét phương trình $f(x) = x - 2 \log_2 x = 0, x \in (0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = 1 - \frac{2}{x \ln 2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{\ln 2}$ là điểm cực tiểu của $f(x)$ và $\min_{(0; +\infty)} f(x) = \frac{2}{\ln 2} - 2 \log_2 \left(\frac{2}{\ln 2}\right) < 0$ như thế phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x = 2, x = 4$.

+ Bây giờ ta xét $\sqrt{9^x - (m - 1)3^x} - m = 0$. Đặt $3^x = t > 0 \Rightarrow \sqrt{t^2 - (m - 1)t} - m = 0$.

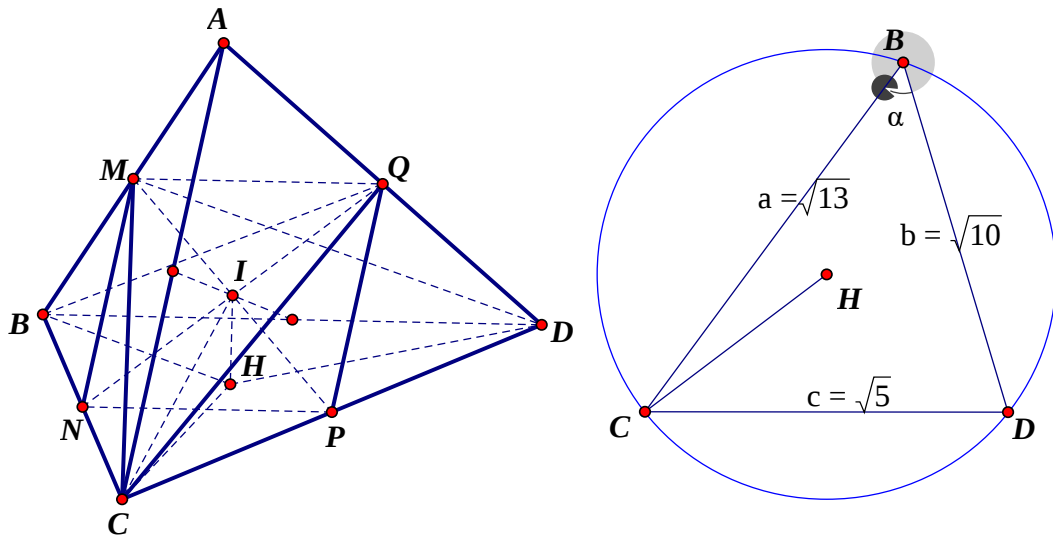
Ta phải có điều kiện $t^2 - (m - 1)t - m \geq 0, t > 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t - m) \geq 0$.

- Trường hợp 1: $t^2 - (m - 1)t - m > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow t > m, \forall t > 0 \Leftrightarrow m \leq 0$. Mà $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \emptyset$
- Trường hợp 2: $t^2 - (m - 1)t - m = 0, t > 0 \Leftrightarrow t = m > 0$. Để S có hai phần tử thì cả hai nghiệm $x = 2, x = 4$ đều là nghiệm của phương trình này $\Rightarrow m = 9 \cup m = 81$.

+ **Kết luận:** Có hai giá trị nguyên dương của m để S có hai phần tử.

Câu 5 (2,0 điểm). Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = \sqrt{5}$, $AC = BD = \sqrt{10}$, $AD = BC = \sqrt{13}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) .

Hướng dẫn



Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Dễ thấy các mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau (c.c.c) nên các trung tuyến tương ứng bằng nhau: $CM = DM$ hay ta có tam giác CMD cân. Suy ra (trong mặt phẳng (MCD)) thì MP là đường trung tuyến cũng là trung trực của CD . Cũng như thế MP là trung trực của AB .

Tương tự có NQ là trung trực của BC và AD . Mặt khác dễ dàng chứng minh được $MNPQ$ là hình bình hành tâm I . Suy ra $IA = IB = IC = ID = R$ và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Hơn nữa bốn mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau nên các bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau, suy ra I cách đều 4 mặt của tứ diện.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên mp (BCD) thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp BCD . Đặt $AB = CD = c = \sqrt{5}$, $AC = BD = b = \sqrt{10}$, $AD = BC = a = \sqrt{13}$, $IH = h$, $HC = r$. Ta có:

$$\cos \hat{B} = \cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{9}{\sqrt{130}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{130}} \text{ nên diện tích mỗi mặt là:}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{7}{2}. \text{ Do đó } r = CH = \frac{abc}{4S} = \frac{5\sqrt{26}}{14}. \text{ Mà } MP^2 = MC^2 - CP^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$

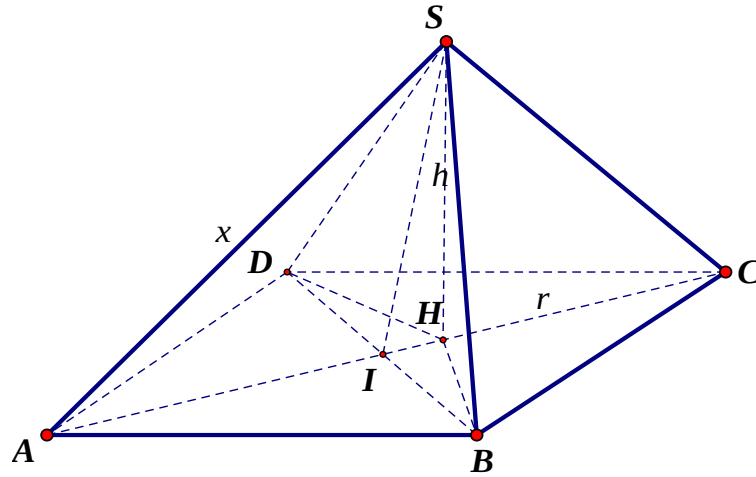
$$\Rightarrow MP = 3 \Rightarrow IP = \frac{3}{2}. \text{ Nên } R^2 = IC^2 = CP^2 + IP^2 = \frac{5}{4} + \frac{9}{4} = \frac{7}{2} \Rightarrow h = IH = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{25 \cdot 26}{196}} = \frac{3}{7}.$$

Từ đó thể tích tứ diện là $V = 4V_{I,BCD} = \frac{4}{3} \cdot h \cdot S = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2} = 2$. Gọi d là khoảng cách từ A đến (BCD) :

Ta có $d = \frac{3V}{S} = \frac{12}{7}.$

Câu 6 (3,0 điểm). Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo x và tìm x để thể tích đó lớn nhất.

Hướng dẫn



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên đáy ABCD. Từ giả thiết ta có ABCD là hình thoi. Ta có các tam giác vuông bằng nhau $SHB = SHC = SHD$ (cạnh chung SH và cạnh huyền bằng nhau và bằng 1), suy ra $HB = HC = HD = r$ và H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, do đó H thuộc AC. Gọi I là tâm hình thoi. Không giảm tổng quát ta giả sử H thuộc đoạn IC.

Đặt $SH = h, IH = y$. Ta có $IB^2 = r^2 - y^2$ và $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2) = 4$ nên:

$$(2r + 2y)^2 + 4(r^2 - y^2) = 4 \Leftrightarrow 2r^2 + 2ry = 1 \Rightarrow y = \frac{1 - 2r^2}{2r}, \quad AH = r + 2y = \frac{1 - r^2}{r}.$$

Mà $h^2 = 1 - r^2 = x^2 - \left(\frac{1 - r^2}{r}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{x^2} - 1 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$. Từ đó $r + y = \frac{1}{2r} = \frac{x}{2\sqrt{1 - x^2}}$,

$$r^2 - y^2 = 1 - (r + y)^2 = \frac{4 - 5x^2}{4(1 - x^2)}, \quad h^2 = 2 - (1 + r^2) = 2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2x^2 - 1}}{x}. \text{ Ta có}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} (2r + 2y) \cdot 2\sqrt{r^2 - y^2} = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \sqrt{\frac{4 - 5x^2}{4(1 - x^2)}} = \frac{x\sqrt{4 - 5x^2}}{2(1 - x^2)}$$

Vậy $V = \frac{\sqrt{2x^2 - 1}\sqrt{4 - 5x^2}}{6(1 - x^2)} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{(2x^2 - 1)(4 - 5x^2)}{(1 - x^2)^2}}.$

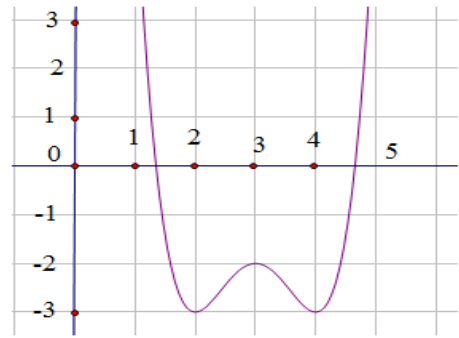
Đặt $x^2 = t \in \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right)$ xét $f(t) = \frac{(2t - 1)(4 - 5t)}{(1 - t)^2} = \frac{-10t^2 + 13t - 4}{t^2 - 2t + 1};$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-10t^2 + 13t - 4}{t^2 - 2t + 1} = \frac{-20t + 13}{2t - 2} \Leftrightarrow t = \frac{5}{7} \in \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right). \text{ Do đó } \max f(t) = \frac{9}{4}.$$

Vậy $V_{\max} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{35}}{7}.$

Câu 7 (2,0 điểm).

Cho hàm số $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = g(g(x))$.

**Hướng dẫn**

Ta có $f'(x) = g'(x) \cdot g'(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) = 0 \\ g'(g(x)) = 0 \end{cases}$.

+ Xét $g'(x) = 0$ có các nghiệm $x = 2, x = 3, x = 4$.

+ Xét $g'(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 2 \\ g(x) = 3 \\ g(x) = 4 \end{cases}$ có 6 nghiệm khác nhau và khác $x = 2, x = 3, x = 4$.

Do đó $f'(x)$ có 9 nghiệm đơn khác nhau và đổi dấu 9 lần nên có 9 cực trị. Bây giờ ta thấy $a > 0$ nên $f(x)$ đạt cực tiểu trước tiên và cực tiểu cuối cùng vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Vậy số điểm cực tiểu của $f(x)$ bằng 5.

Câu 8 (2,0 điểm). Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S . Tính xác suất để số chọn được chia hết cho 15.

Hướng dẫn

Số phần tử không gian mẫu là $n(S) = 9 \cdot A_9^3$.

+ **Trường hợp 1:** Số có dạng $\overline{abc0}$. Như thế ta chỉ cần a, b, c khác nhau đôi một và có tổng chia hết cho 3 từ các tập hợp $A = \{3; 6; 9\}$, $B = \{1; 4; 7\}$, $C = \{2; 5; 8\}$.

- Nếu chọn cả ba số a, b, c từ A thì có C_3^3 cách, và có $C_3^3 \cdot 3!$ số được lập. Tương tự cả ba số a, b, c từ B hay cả ba số a, b, c từ C thì đều có $C_3^3 \cdot 3!$ số được lập.

Và ta có $3 \cdot C_3^3 \cdot 3! = 18$ số.

- Nếu chọn a, b, c mỗi tập hợp A, B, C một số thì có $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1$ cách và có $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot 3!$ số được lập, hay có 162 số.

Không có hai trong ba chữ số a, b, c thuộc một tập hợp và chữ số còn lại thuộc tập khác.

Như thế trong trường hợp 1 ta có: $18 + 162 = 180$ số.

+ **Trường hợp 2:** Số có dạng $\overline{abc5}$. Như thế ta chỉ cần a, b, c khác nhau đôi một và có tổng $a + b + c + 1$ chia hết cho 3 (a khác 0) từ các tập hợp $M = \{0; 3; 6; 9\}$, $N = \{1; 4; 7\}$, $P = \{2; 8\}$.

- Nếu chọn a từ M thì có C_3^1 cách, bộ b, c sao cho một chữ số từ M và một chữ số từ P thì có

$C_3^1 \cdot C_2^1$ cách. Và có $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 2!$ số được lập, hay có 36 số.

- Nếu chọn a từ M thì có C_3^1 cách, và bộ b, c đều từ N thì có C_3^2 cách, và có $C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot 2!$ số được lập, hay có 18 số.

- Nếu chọn a, b, c sao cho hai chữ số từ P thì có C_2^2 cách, một chữ số từ N thì có C_3^1 cách, và có $C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot 3!$ số lập được, hay có 18 số.

Như thế trong trường hợp 2 ta có $36 + 18 + 18 = 72$ số.

Cả hai trường hợp ta có $180 + 72 = 252$ số.

Xác suất cần tìm là $p = \frac{252}{9 \cdot A_9^3} = \frac{1}{18}$.

Câu 9 (2,0 điểm). Cho hàm số $f(x) = 9 \frac{2^x + 2^{-x} - 2}{2^x + 2^{-x} + 2} + 3p \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + q$. Tìm tất cả các giá trị của p, q để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 1]$ là nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn

Đặt $\frac{2^x - 1}{2^x + 1} = t \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ và ta có $g(t) = 9t^2 + 3pt + q$, ta tính:

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 + q - p; g\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + q + p; g\left(-\frac{p}{6}\right) = -\frac{p^2}{4} + q.$$

+ **Trường hợp 1:** $-\frac{p}{6} < -\frac{1}{3} \cup -\frac{p}{6} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow p > 2 \cup p < -2$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $y = |f(x)|$

thuộc $\{|1 + p + q|; |1 + p - q|\}$. Chú ý rằng với $\max\{a, b\} \geq \frac{a+b}{2} \geq \min\{a, b\}$ thì ta ta cho dấu bằng

xảy ra $\Leftrightarrow a = b$, và có: $|1 + p + q| = |1 + p - q| \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ 1 + p + q = q - 1 - p \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ p = -1 \end{cases}$. So sánh với điều kiện thì ta được $\left(\max_{[-1;1]} |f(x)|\right)_{\min} = 1 + p > 3, (p > 2, q = 0)$.

+ **Trường hợp 2:** $p \in [-2; 2]$. Khi đó $\left|-\frac{p^2}{4} + q\right| = \left|\frac{p^2}{4} - q\right| \leq |1 - q|$ và $|1 + p + q| \leq |3 + q|$,

$|1 + p - q| \leq |3 - q|$ nên $\max_{[-1;1]} |f(x)| = |3 + q| \Rightarrow \left(\max_{[-1;1]} |f(x)|\right)_{\min} = 3 \Leftrightarrow p = 2, q = 0$

Hoặc $\max_{[-1;1]} |f(x)| = |3 - q| = 3 - q > 3, (p = 2, q < 0)$.

Kết luận: Với $p = 2, q = 0$ thì $\left(\max_{[-1;1]} \left|f(x)\right|\right)_{\min} = 3.$

----- **HẾT** -----