

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề có 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I. (5,5 điểm) 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m-2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại

$x = 0$.

2. Một tổ gồm 10 học sinh gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ trong đó có hai học sinh nữ tên Trang và Thủy. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh trên thành một hàng ngang. Tính xác suất để xếp được một hàng ngang mà hai học sinh nữ Trang và Thủy luôn đứng cạnh nhau, đồng thời các học sinh nữ còn lại không đứng cạnh nhau và cũng không đứng cạnh Trang và Thủy.

Câu II. (7,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\angle ABC = 30^\circ$ và $BC = 2a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC . Biết hai mặt phẳng (SHA) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đồng thời SA tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° .

a) Tính góc tạo bởi SA và mặt phẳng (SBC) .

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) theo a .

2. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC , các điểm M, N lần lượt là trung điểm của HB và HC ; điểm K là trực tâm tam giác AMN .

a) Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh rằng K là trung điểm của IH .

b) Tìm tọa độ điểm A ; biết $M(2; -1)$, $K(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ và điểm A nằm trên đường thẳng $x + 2y + 4 = 0$ đồng thời điểm A có tung độ âm.

Câu III. (4,0 điểm) 1. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực $\begin{cases} 4x^3 - y^3 + x - y = 3xy(2x - y) \\ \sqrt{3-y} + \sqrt{2+x} = x^2y + xy - 4x - 1 \end{cases}$.

2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$(\sin x - 1) \cdot [2\sin^2 x - (2m - 3)\sin x + m - 2] = 0 \text{ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn } \left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right].$$

Câu IV. (3,5 điểm) 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3n \cdot u_n}{n+1} - \frac{2n^2 + 6n + 3}{n^2 \cdot (n+1)^3}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Xác định công

thức tổng quát u_n theo n và tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \cdot u_n}{4^n} \right)$.

2. Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

a) Chứng minh rằng $\frac{z}{y+1} \leq \frac{x}{x+y}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x(2y+z+2) + z(4y+3)}{(x+2y+1)(y+1)} - \frac{3x^2}{(x+y)^2}$.

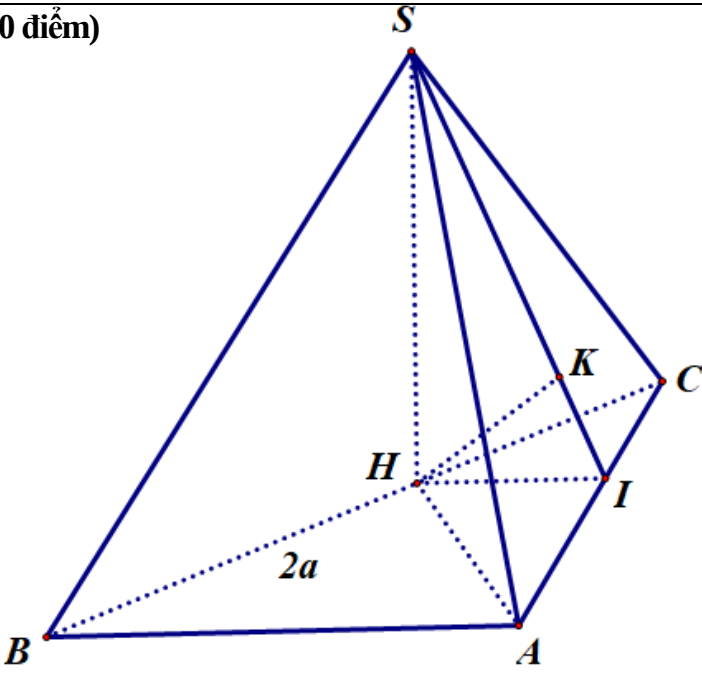
-----HẾT-----

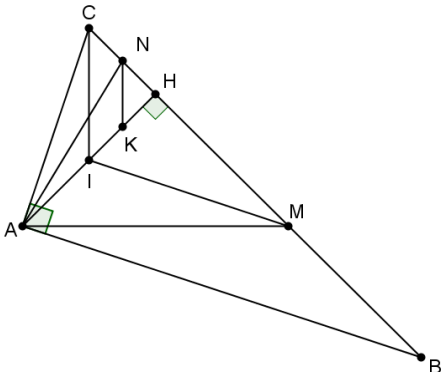
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và MTCT (đối với môn Toán).

Cán bộ coi thi không giải thích thêm.

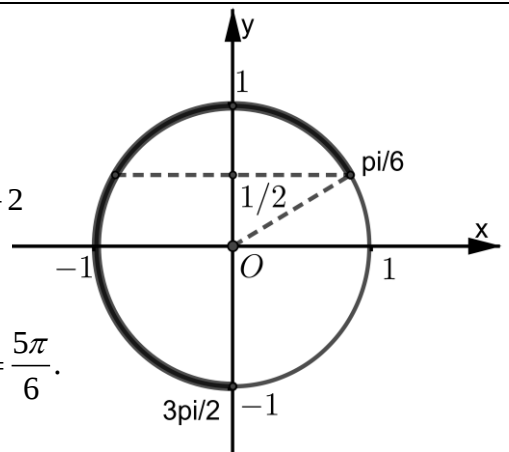
Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG 11 NĂM HỌC 2019-2020.

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu I (5,5 điểm)	1. (2,5 điểm). TXĐ $D = [-1; +\infty)$, $x = 0 \in D$ và $f(0) = m - 2$.	0,5
	Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1 + 1 + \sqrt[3]{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt[3]{x-1}}{x}$.	0,5
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt[3]{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x-1} + (\sqrt[3]{x-1})^2} = \frac{1}{3}$.	0,5
	Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.	0,5
	Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m - 2 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow m = \frac{17}{6}$.	0,5
	2. (3,0 điểm). Không gian mẫu $ \Omega = 10!$.	0,5
	-Gọi A là biến cố xếp được theo yêu cầu bài toán. -Xếp 6 học sinh nam có $6!$ cách xếp. Mỗi cách xếp 6 học sinh nam ta xem mỗi học sinh nam là một vách ngăn tạo ra 7 vị trí trống bao gồm 5 vị trí trống ở giữa và 2 vị trí trống ở hai đầu hàng. -Số cách xếp hai bạn nữ Trang và Thủy cạnh nhau là $2!$ -Hai hs nữ Trang và Thủy luôn cạnh nhau nên xem 2 bạn như 1 bạn và 2 bạn nữ còn lại ta có 3 bạn nữ. -Số cách xếp sao cho hai bạn nữ còn lại không cạnh nhau và không cạnh Trang và Thủy là A_7^3 . Khi đó, $ \Omega_A = 6! \cdot 2! \cdot A_7^3$. Vậy $p(A) = \frac{6! \cdot 2! \cdot A_7^3}{10!} = \frac{1}{12}$.	0,5 0,5 0,5 0,5 1,0
Câu II (7,0 điểm)	1. (5,0 điểm)  a) (2,5 điểm). (Ta có $(SHA) \perp (ABC)$ $(SBC) \perp (ABC)$ } $\Rightarrow SH \perp (ABC)$ và $AH \subset (ABC)$ nên $SH \perp AH$ (1) Mặt khác $AH \perp BC$ (2)	0,5

	Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$, suy ra hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng (SBC) là SH. Do đó, $(SA, (SBC)) = (SA, SH) = ASH$ (vì tam giác SHA vuông tại H). Theo gt $(SA, (ABC)) = (SA, AH) = SAH = 60^\circ \Rightarrow ASH = 30^\circ$. Vậy $(SA, (SBC)) = 30^\circ$. b) (2,5 điểm). Ta có $AB = BC \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$ và $AC = a$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên AC, suy ra $AC \perp (SHI) \Rightarrow (SAC) \perp (SHI)$ và $(SHI) \cap (SAC) = SI$. Trong tam giác SHI kẻ $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SAC)$ hay $d(H; (SAC)) = HK$. Mặt khác. $\frac{d(B; (SAC))}{d(H; (SAC))} = \frac{BC}{HC} = \frac{BC^2}{HC \cdot BC} = \frac{BC^2}{AC^2} = \left(\frac{2a}{a}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow d(B; (SAC)) = 4d(H; (SAC)) = 4HK.$ Ta có $HI = \frac{AB}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Trong tam giác vuông SHI ta có $HK = \sqrt{\frac{SH^2 \cdot HI^2}{SH^2 + HI^2}} = \sqrt{\frac{\frac{9a^2}{4} \cdot \frac{3a^2}{16}}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{13}}. \text{ Vậy } d(B; (SAC)) = 4HK = 4 \cdot \frac{3a}{2\sqrt{13}} = \frac{6a}{\sqrt{13}}.$ 2. (2,0 điểm)  a) (1,0 điểm). I là trung điểm của AH, ta có $MI \parallel AB \Rightarrow MI \perp AC \Rightarrow I$ là trực tâm tam giác $AMC \Rightarrow CI \perp AM$. Mặt khác $NK \perp AM \Rightarrow NK \parallel CI \Rightarrow K$ là trung điểm của HI. b) (1,0 điểm). Giả sử $A(-2a-4; a)$, từ $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KH} \Rightarrow H\left(\frac{2a+2}{3}; \frac{2-a}{3}\right)$ Lại từ $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MH} = 0 \Rightarrow 10a^2 - 13a - 23 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{23}{10} \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-2; -1)}$	0,5 0,5 1,0 0,5 0,5 1,0 0,5 0,5 0,5 0,5
	1. (2,5 điểm). $\begin{cases} 4x^3 - y^3 + x - y = 3xy(2x - y) & (1) \\ \sqrt{3-y} + \sqrt{2+x} = x^2y + xy - 4x - 1 & (2) \end{cases}$	

Câu III (4,0 điểm)	1) Điều kiện $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 3 \end{cases}$. (1) $\Leftrightarrow (2x-y)^3 + (2x-y) = y^3 + y$ $\Leftrightarrow (2x-y-y)\left((2x-y)^2 + y(2x-y) + y^2 + 1\right) \Leftrightarrow x = y.$ Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được: $\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3-x} - \frac{-x+5}{3}\right) + \left(\sqrt{2+x} - \frac{x+4}{3}\right) = x^3 + x^2 - 4x - 1 - \frac{-x+5}{3} - \frac{x+4}{3} \quad (*)$ Với $-2 \leq x \leq 3$, ta có $\begin{cases} \sqrt{3-x} + \frac{-x+5}{3} > 0 \\ \sqrt{2+x} + \frac{x+4}{3} > 0 \end{cases}$ $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{9} \left(\frac{-x^2+x+2}{\sqrt{3-x} + \frac{-x+5}{3}} + \frac{-x^2+x+2}{\sqrt{2+x} + \frac{x+4}{3}} \right) = -(-x^2+x+2)(x+2)$ $\Leftrightarrow (-x^2+x+2) \left(\frac{1}{\sqrt{3-x} + \frac{-x+5}{3}} + \frac{1}{\sqrt{2+x} + \frac{x+4}{3}} + 9(x+2) \right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+x+2=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3-x} + \frac{-x+5}{3}} + \frac{1}{\sqrt{2+x} + \frac{x+4}{3}} + 9(x+2) = 0 \end{cases} \text{ vn do VT} > 0, \forall x \in [-2; 3]$ $\Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=-1. \\ x=2 \Rightarrow y=2. \end{cases}$ Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(-1; -1)$ và $(2; 2)$.	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
	2) (1,5 điểm). $(\sin x - 1) \cdot [2\sin^2 x - (2m-3)\sin x + m-2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = m-2 \end{cases}$ +) pt $\sin x = 1$ có đúng một nghiệm $x = \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$ +) pt $\sin x = \frac{1}{2}$ có đúng 2 nghiệm $\in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$ là $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}.$ Ycbt $\Leftrightarrow -1 \leq m-2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 \leq m < \frac{5}{2}.$	0,5 0,5 0,5



	1) (1,5 điểm) Ta có: $u_{n+1} = \frac{3n.u_n}{n+1} - \frac{2n^2+6n+3}{n^2.(n+1)^3} \Leftrightarrow (n+1).u_{n+1} = 3n.u_n - \frac{2n^2+6n+3}{n^2.(n+1)^2} \Leftrightarrow (n+1).u_{n+1} = 3n.u_n - \left(\frac{3}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$ $\Leftrightarrow (n+1).u_{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = 3 \left(n.u_n - \frac{1}{n^2} \right), \forall n \geq 1.$ Đặt $v_n = n.u_n - \frac{1}{n^2}, \forall n \geq 1$. Khi đó ta có dãy (v_n) xác định bởi $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = 3v_n, \forall n \geq 1. \end{cases}$ Suy ra dãy (v_n) là cấp số nhân công bội $q = 3$, suy ra $v_n = v_1.q^{n-1} = 3^n \Leftrightarrow n.u_n - \frac{1}{n^2} = 3^n$ $\Leftrightarrow u_n = \frac{3^n}{n} + \frac{1}{n^3}, \forall n \geq 1 \text{ và}$ $\lim \left(\frac{n.u_n}{4^n} \right) = \lim \left[\left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{1}{n^2.4^n} \right] = 0.$	0,5 0,5 0,5
Câu IV (3,5 điểm)	2) (2,0 điểm). a) (0,5 điểm). Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 2x \Leftrightarrow 2x + 2xy = (x+y)^2 + z^2 \geq 2(x+y)z$ (1). $\Leftrightarrow x(y+1) \geq (x+y)z \Leftrightarrow \frac{z}{y+1} \leq \frac{x}{x+y}.$ b) (1,5 điểm). Ta có $P = \frac{x(2y+z+2)+z(4y+3)}{(x+2y+1)(y+1)} - \frac{3x^2}{(x+y)^2} = \frac{2(x+z)}{x+2y+1} + \frac{z}{y+1} - \frac{3x^2}{(x+y)^2}$ Theo a) $\frac{z}{y+1} \leq \frac{x}{x+y} \Leftrightarrow y+1 \geq \frac{(x+y)z}{x}.$ Khi đó $x+2y+1 = x+y+(y+1) \geq x+y + \frac{(x+y)z}{x} \Rightarrow x+2y+1 \geq \frac{(x+y)(x+z)}{x}.$ Ta được $\frac{2(x+z)}{x+2y+1} \leq \frac{2(x+z)x}{(x+y)(x+z)} = \frac{2x}{x+y}.$ Do đó $P = \frac{2(x+z)}{x+2y+1} + \frac{z}{y+1} - \frac{3x^2}{(x+y)^2} \leq \frac{2x}{x+y} + \frac{x}{x+y} - \frac{3x^2}{(x+y)^2}$ $\Leftrightarrow P \leq 3 \cdot \frac{x}{x+y} - 3 \cdot \left(\frac{x}{x+y} \right)^2 = \frac{3}{4} - 3 \left(\frac{x}{x+y} - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{4} \quad (2).$ Vậy $P_{\max} = \frac{3}{4}$ khi (1) và (2) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=z \\ \frac{x}{x+y} = \frac{1}{2} \\ x^2+y^2+z^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=z \\ z=2x \\ x^2+y^2+z^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{2}{3} \end{cases}.$	0,25 0,25 0,5 0,5 0,5