

CHUYÊN ĐỀ 4. SỐ PHỨC

BÀI 4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MÔĐUN SỐ PHỨC

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững các định nghĩa về số phức và các phép toán cộng, trừ hai số phức; phép nhân số phức; phép chia hai số phức.
- + Nắm vững các bài toán cực trị cơ bản về liên quan giữa các yếu tố: Điểm, đường tròn, đường thẳng, đoạn thẳng, tia, miền đa giác, hình tròn, ...
- + Nắm vững các bất đẳng thức cơ bản liên quan đến môđun số phức và bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

❖ Kỹ năng

- + Biết thực hiện thành thạo các định nghĩa, các phép toán trên số phức và vận dụng vào giải được một số bài toán liên quan.
- + Biết thực hiện thành thạo việc chuyển đổi ngôn ngữ số phức sang ngôn ngữ hình học.
- + Giải thành thạo các bài toán cực trị cơ bản về liên quan giữa các yếu tố: Điểm, đường tròn, đường thẳng, đoạn thẳng, tia, miền đa giác, hình tròn, ...
- + Vận dụng linh hoạt các bất đẳng thức liên quan đến môđun số phức và bất đẳng thức Cauchy – Schwarz vào giải các bài toán max, min môđun số phức.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Các bất đẳng thức thường dùng

a. Cho các số phức z_1, z_2 ta có:

$$+) |z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0, z_2 = kz_1 \end{cases}$.

$$+) |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0, z_2 = kz_1 \end{cases}$.

b. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Cho các số thực a, b, x, y ta có: $ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

2. Một số kết quả đã biết

a. Cho hai điểm A, B cố định. Với điểm M bất kỳ luôn có bất đẳng thức tam giác:

+) $MA + MB \geq AB$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa hai điểm A, B .

+) $|MA - MB| \leq AB$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow B$ nằm giữa hai điểm A, M .

b. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng d và M là điểm di động trên d . Ta có:

+) $|MA - MB| \leq AB$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A, M, B thẳng hàng.

+) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d , khi đó ta có

$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A', M, B thẳng hàng.

c. Cho hai điểm A, B nằm khác phía đối với đường thẳng d và M là điểm di động trên d . Ta có:

+) $MA + MB \geq AB$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa hai điểm A, B .

+) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d , khi đó ta có

$|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A', M, B thẳng hàng.

d. Cho đoạn thẳng PQ và điểm A không thuộc PQ , M là điểm di động trên đoạn thẳng PQ , khi đó

$\max AM = \max \{AP, AQ\}$. Để tìm giá trị nhỏ nhất của AM ta xét các trường hợp sau:

+) Nếu hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng PQ nằm trên đoạn PQ thì $\min AM = AH$.

+) Nếu hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng PQ không nằm trên đoạn PQ thì $\min AM = \min \{AP, AQ\}$.

e. Cho đường thẳng Δ và điểm A không nằm trên Δ . Điểm M trên Δ có khoảng cách đến A nhỏ nhất chính là hình chiếu vuông góc của A trên Δ .

f. Cho x, y là các tọa độ của các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2...A_n$. Khi đó giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức $F = ax + by$ (a, b là hai số thực đã cho không đồng thời bằng 0) đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



Các bất đẳng thức thường dùng

Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Với các số thực a, b, x, y ta có

$$|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Bất đẳng thức tam giác

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Dấu “=” xảy ra khi $z_1 = kz_2$ ($k \geq 0$).

$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Dấu “=” xảy ra khi $z_1 = kz_2$ ($k \leq 0$).

$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$. Dấu “=” xảy ra khi $z_1 = kz_2$ ($k \leq 0$).

$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$. Dấu “=” xảy ra khi $z_1 = kz_2$ ($k \geq 0$).

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp hình học

 Phương pháp giải

Ví dụ: Cho số phức z thỏa mãn

$2(z - \bar{z}) = i(z + \bar{z})^2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 3i|$ bằng

A. 3. B. $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3}$. D. 2.

Hướng dẫn giải

Bước 1: Chuyển đổi ngôn ngữ bài toán số phức sang ngôn ngữ hình học.

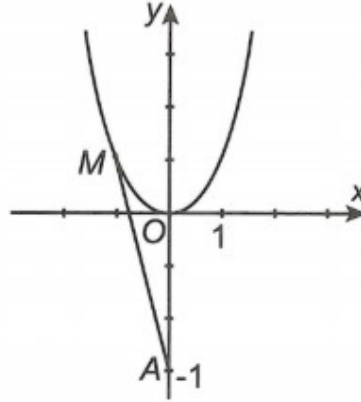
Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Khi đó

$$2(z - \bar{z}) = i(z + \bar{z})^2 \Leftrightarrow 2(2yi) = 4x^2i \Leftrightarrow y = x^2.$$

Gọi $M(x; y)$; $A(0; -3)$ lần lượt là điểm biểu diễn

cho số phức $z; -3i$ thì $|z + 3i| = MA$.

Bước 2: Sử dụng một số kết quả đã biết để giải bài toán hình học.



Parabol $y = x^2$ có đỉnh tại điểm $O(0;0)$, trục đối xứng là đường thẳng $x = 0$. Hơn nữa, điểm A thuộc trục đối xứng của parabol, nên ta có:

$MA \geq OA = 3$. Suy ra, $\min MA = 3$ khi $M \equiv O$.

Bước 3: Kết luận cho bài toán số phức.

Vậy $\min |z + 3i| = 3$, khi $z = 0$. **Chọn A.**

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = 1$. Môđun lớn nhất của số phức z bằng

- A. 7. B. 6.
C. 5. D. 4.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y), I(3; 4)$ là các điểm biểu diễn lần lượt cho các số phức $z; 3 + 4i$. Từ giả thiết $|z - 3 - 4i| = 1 \Rightarrow MI = 1$.

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán kính $r = 1$.

Mặt khác $|z| = OM$. Mà OM đạt giá trị lớn nhất bằng $OI + r$, khi M là giao điểm của đường thẳng OM với đường tròn tâm $I(3; 4)$, bán

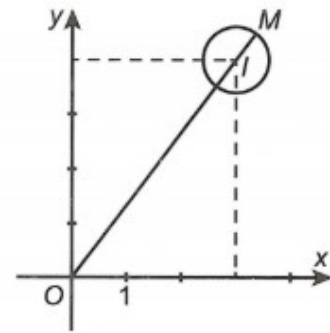
kính $r = 1$. Hay $M\left(\frac{18}{5}; \frac{24}{5}\right)$.

Do đó, $\max |z| = OI + r = 5 + 1 = 6$, khi $z = \frac{18}{5} + \frac{24}{5}i$.

Chọn B.

Nhận xét:

$$OI - r \leq OM = |z| \leq OI + r$$



Ví dụ 2: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$, số phức z có môđun nhỏ nhất là

- A. $z = 2 - 2i$. B. $z = 1 + i$.
C. $z = 2 + 2i$. D. $z = 1 - i$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó $|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$ (d).

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng d .

Do đó $|z| = OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của O trên d .

Suy ra $M(2; 2)$ hay $z = 2 + 2i$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3| + |z - 3| = 10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

- A. 3. B. 4.
C. 5. D. 6.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Gọi $F_1(-3; 0), F_2(3; 0)$, có trung điểm là $O(0; 0)$. Điểm M biểu diễn số phức z .

Theo công thức trung tuyến thì $|z|^2 = OM^2 = \frac{MF_1^2 + MF_2^2}{2} - \frac{F_1F_2^2}{4}$.

Ta có $MF_1^2 + MF_2^2 \geq \frac{(MF_1^2 + MF_2^2)^2}{2} = 50$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} MF_1 = MF_2 \\ MF_1 + MF_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-4; 0) \\ M(4; 0) \end{cases} \Rightarrow \min |z| = \sqrt{\frac{50}{2} - \frac{36}{4}} = 4,$$

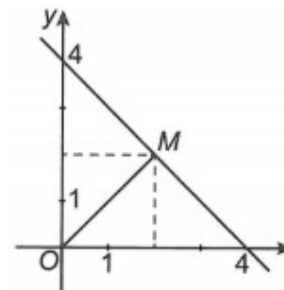
Khi $z = 4i$ hoặc $z = -4i$.

Cách 2:

Gọi $F_1(-3; 0), F_2(3; 0), M(x; y); (x, y \in \mathbb{R})$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $-3; 3; z$.

Ta có $F_1F_2 = 2c = 6 \Rightarrow c = 3$. Theo giả thiết ta có $MF_1 + MF_2 = 10$, tập hợp điểm M là đường elip có trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = 5$; trục bé

Nhận xét: Trong tất cả các đoạn thẳng kẻ từ điểm O đến đường thẳng d , đoạn vuông góc OM ngắn nhất.



Với mọi số thực a, b ta có bất đẳng

thức: $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$

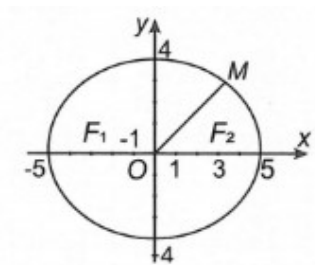
Với mọi điểm M nằm trên elip, đoạn OM ngắn nhất là đoạn nối O với giao điểm của trục bé với elip.

$$2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{25 - 9} = 8.$$

Mặt khác $OM = |z|$ nhỏ nhất bằng 4 khi $z = 4i$ hoặc $z = -4i$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng 4.

Chọn B.



Ví dụ 4: Xét số phức z thỏa mãn $4|z+i|+3|z-i|=10$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

- A. $\frac{60}{49}$. B. $\frac{58}{49}$.
C. $\frac{18}{7}$. D. $\frac{16}{7}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(0;-1), B(0;1)$, đoạn thẳng AB có trung điểm $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z .

Theo công thức trung tuyến $|z|^2 = OM^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$.

Theo giả thiết $4MA + 3MB = 10$. Đặt $MA = a \Rightarrow MB = \frac{10-4a}{3}$.

Khi đó

$$|MA - MB| = \frac{|10-7a|}{3} \leq AB = 2 \Rightarrow -6 \leq 10-7a \leq 6 \Leftrightarrow \frac{4}{7} \leq a \leq \frac{16}{7}.$$

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 = a^2 + \left(\frac{10-4a}{3}\right)^2 = \frac{(5a-8)^2 + 36}{9}.$$

$$\text{Do } -\frac{36}{7} \leq 5a-8 \leq \frac{24}{7} \Rightarrow 0 \leq (5a-8)^2 \leq \frac{576}{49} \text{ nên}$$

$$\begin{cases} MA^2 + MB^2 \geq 4 \\ MA^2 + MB^2 \leq \frac{260}{49} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| \geq 1 \\ |z|^2 \leq \frac{81}{49} \Rightarrow |z| \leq \frac{9}{7} \end{cases}.$$

$$\text{Đẳng thức } |z|=1 \text{ khi } z = \pm \frac{24}{25} + \frac{7}{25}i. \text{ Đẳng thức } |z| = \frac{9}{7} \text{ khi } z = \frac{9}{7}i.$$

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\frac{16}{7}$.

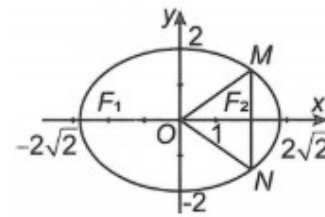
Chọn D.

Ví dụ 5: Cho z là số phức thay đổi thỏa mãn $|z-2|+|z+2|=4\sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng tọa độ gọi M, N là điểm biểu diễn số phức z và $\bar{z}$.

Giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN là

- A. 1. B. $\sqrt{2}$.
C. $4\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.



Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Gọi $F_1(-2;0), F_2(2;0), M(x;y), N(x;-y)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $-2; 2; z; \bar{z}$.

Do M, N là điểm biểu diễn số phức z và $\bar{z}$ nên suy ra M, N đối xứng nhau qua Ox .

Khi đó $S_{\triangle OMN} = |xy|$.

Ta có $F_1F_2 = 2c = 4 \Rightarrow c = 2$. Theo giả thiết ta có $MF_1 + MF_2 = 4\sqrt{2}$, tập hợp điểm M thỏa điều kiện trên là elip có trục lớn

$$2a = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}; \text{ trục bé } 2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{8 - 4} = 4 \Rightarrow b = 2.$$

Nên elip có phương trình $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

$$\text{Do đó } 1 = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{8} \cdot \frac{y^2}{4}} = \frac{|xy|}{2\sqrt{2}} \Rightarrow S_{\triangle OMN} = |xy| \leq 2\sqrt{2}.$$

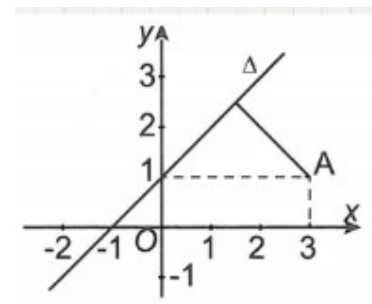
$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Chọn D.

Ví dụ 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z+i| = |\bar{z}+2+i|$. Giá trị nhỏ nhất

của $P = |(i-1)z + 4 - 2i|$ là

- A. 1. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
C. 3. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$; $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

$$\text{Ta có } |z+i| = |\bar{z}+2+i| \Leftrightarrow |x+(y+1)i| = |x+2-(y-1)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \quad (\Delta) .$$

$$\text{Ta có } P = |(i-1)z + 4 - 2i| = |(i-1)| \left| z + \frac{4-2i}{(i-1)} \right| = \sqrt{2} |z - 3 - i|$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2} MA, \text{ với } A = (3; 1).$$

$$\Rightarrow P_{\min} = \sqrt{2} MA_{\min} = \sqrt{2} d(A, \Delta) = \sqrt{2} \frac{|3-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi M là hình chiếu vuông góc của A trên đường

$$\text{thẳng } \Delta \text{ hay } M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i.$$

Chọn C.

Ví dụ 7: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 6$ và $|z_1 - z_2| = 2$.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z_1| + |z_2|. \text{ Khi đó môđun của số phức } M + mi \text{ là}$$

A. $\sqrt{76}$.

B. 76.

C. $2\sqrt{10}$.

D. $2\sqrt{11}$.

Hướng dẫn giải

Ta gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 .

$$\text{Từ giả thiết } |z_1 + z_2| = 6 \Rightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 6 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OI}| = 3 \text{ với } I \text{ là trung}$$

điểm của đoạn thẳng AB .

$$|z_1 - z_2| = 2 \Rightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2 \Leftrightarrow AB = 2.$$

$$\text{Ta có } OA^2 + OB^2 = 2OI^2 + \frac{AB^2}{2} = 20.$$

$$P = |z_1| + |z_2| = OA + OB \Rightarrow P^2 \leq (1^2 + 1^2)(OA^2 + OB^2) = 40.$$

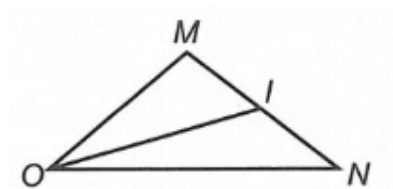
$$\text{Vậy } \max P = 2\sqrt{10} = M.$$

$$\text{Mặt khác, } P = |z_1| + |z_2| = |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}| \geq |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 6.$$

$$\text{Vậy } \min P = 6 = m.$$

$$\text{Suy ra } |M + mi| = \sqrt{40 + 36} = \sqrt{76}.$$

Chọn A.



Ví dụ 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| - |z + 1 - 3i| = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1 - 4i|$ bằng

- A. 1. B. $\frac{3}{5}$.
C. $\frac{1}{5}$. D. $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z ; gọi $A(2; -1), B(-1; 3)$ là điểm biểu diễn số phức $2 - i; -1 + 3i$. Ta có $AB = 5$.

Từ giả thiết $|z - 2 + i| - |z + 1 - 3i| = 5$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} - \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = 5$$

$$\Rightarrow MA - MB = 5 \Rightarrow MA - MB = AB \Rightarrow MA = MB + AB.$$

Suy ra M, A, B thẳng hàng (B nằm giữa M và A). Do đó quỹ tích điểm M là tia Bt ngược hướng với tia BA .

$$P = |z + 1 - 4i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}, \text{ với } C(-1; 4) \Rightarrow P = MC.$$

Ta có $\overline{AB} = (-3; 4)$ phương trình đường thẳng $AB: 4x + 3y - 5 = 0$.

$$CH = d(C, AB) = \frac{|4(-1) + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}, \quad CB = \sqrt{(-1+1)^2 + (3-4)^2} = 1.$$

Do đó $\min P = CH = \frac{3}{5}$ khi H là giao điểm của đường thẳng AB và

đường thẳng đi qua điểm C và vuông góc với AB .

Chọn B.

Ví dụ 9: Cho số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn

$$|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z - 2 + i| \leq 5. \text{ Gọi } m, M \text{ lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị}$$

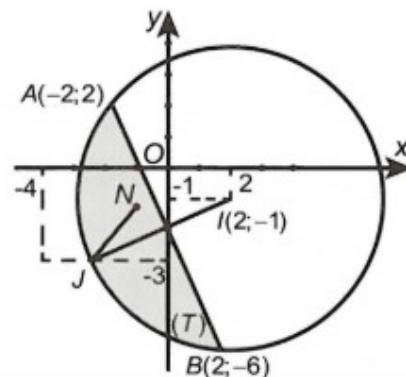
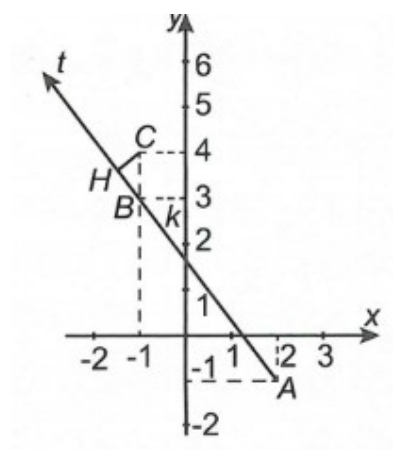
lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 8x + 6y$. Giá trị $m + M$ là

- A. $60 - 20\sqrt{10}$. B. $44 - 20\sqrt{10}$.
C. $\frac{9}{5}$. D. $52 - 20\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $N(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z = x + yi$.

$$\text{Ta có } |\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z - 2 + i| \Leftrightarrow 2x + y + 2 \leq 0;$$



$$|z - 2 + i| \leq 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 25 \text{ (hình tròn tâm } I(2; -1) \text{ bán}$$

kính $r = 5$);

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện

$$|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z - 2 + i| \leq 5 \text{ thuộc miền } (T) \text{ (xem hình vẽ với}$$

$$A(-2; 2), B(2; -6) \text{).}$$

$$\text{Ta có } P + 25 = (x + 4)^2 + (y + 3)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{P + 25} = \sqrt{(x + 4)^2 + (y + 3)^2} = NJ \text{ (với } J(-4; -3) \text{).}$$

Bài toán trở thành tìm điểm N thuộc miền (T) sao cho NJ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Ta có

$$IJ - r \leq NJ \leq JB \Leftrightarrow 2\sqrt{10} - 5 \leq \sqrt{P + 25} \leq 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 40 - 20\sqrt{10} \leq P \leq 20$$

P đạt giá trị nhỏ nhất khi N là giao điểm của đường thẳng JI với

đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $r = 5$ và $NJ = 2\sqrt{10} - 5$.

P đạt giá trị lớn nhất khi $N \equiv B$.

$$\text{Vậy } m + M = 60 - 20\sqrt{10}.$$

Chọn A.

Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1: Gọi M và m là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của môđun số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Giá trị của $M + m$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| + |z + 2| = 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị $M + m$ là

A. $M + m = \frac{17}{2}$.

B. $M + m = 8$.

C. $M + m = 1$.

D. $M + m = 4$.

Câu 3: Cho số phức z thỏa $|z - 1 - 2i| = |z - 3 - i|$. Khi đó, $|z|$ nhỏ nhất bằng

A. 1.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. 2.

Câu 4: Cho số phức z thỏa $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của $P = |z^2 + z| + |z^2 - z|$ là

A. $\frac{14}{5}$.

B. 4.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Câu 5: Cho số phức z và w biết chúng thỏa mãn hai điều kiện $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 2; w = iz$. Giá trị lớn nhất của $P = |w - z|$ bằng

- A. 4. B. $2\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 6: Cho số phức z thỏa $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là

- A. 4. B. 7. C. 6. D. 5.

Bài tập nâng cao

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| - |z - 1 - i| = \sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |iz + 3 - 4i|$ là

- A. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{13}$. D. $\frac{7}{5}$.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 3 + 2i| = \sqrt{34}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z - 1 - 2i|$. Giá trị $P = m.M$ bằng

- A. $P = 5\sqrt{34}$. B. $P = 10\sqrt{2}$. C. $\frac{14\sqrt{85}}{17}$. D. $\frac{14\sqrt{170}}{17}$.

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 - i| = |\bar{z} + 2 - 2i|$. Biết khi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì biểu thức

$\|z - 1 - 2i| - |z + 2 - i|\|$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị $T = 3b - a$ là

- A. 5. B. -2. C. 3. D. 4.

Câu 10: Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z} + 2| + 3|z - \bar{z} - 2i| \leq 6$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 - 3i|$. Giá trị của $M + 5m$ bằng

- A. $8\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{10}$. C. $6\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{10}$.

Câu 11: Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3 - 4i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 1 - i|$ là

- A. 1. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| + |z - 3 - 2i| = \sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $\left| z - \frac{1}{2} + i \right|$. Giá trị của $M^2 + m^2$ là

- A. $\frac{39}{2}$. B. $\frac{137}{10}$. C. $\frac{157}{10}$. D. $\frac{33}{2}$.

Câu 13: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = a + (a^2 - 2a + 2)i$ (với a là số thực thay đổi) và N là điểm biểu diễn số phức z_2 biết $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z}_2 - 6 - i|$. Độ dài ngắn nhất của đoạn MN bằng

- A. $2\sqrt{5}$. B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. C. 1. D. 5.

Câu 14: Cho hai số phức z và $w = a + bi$ thỏa mãn $|z + \sqrt{5}| + |z - \sqrt{5}| = 6$; $5a - 4b - 20 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - w|$ là

- A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$. B. $\frac{5}{\sqrt{41}}$. C. $\frac{4}{\sqrt{41}}$. D. $\frac{3}{41}$.

Câu 15: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z + 2w = 8 - 6i$ và $|z - w| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z| + |w|$ bằng

- A. $4\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{26}$. C. $\sqrt{66}$. D. $3\sqrt{6}$.

Câu 16: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = \sqrt{34}$ và $|z + 1 + mi| = |z + m + 2i|$ (trong đó $m \in \mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng

- A. 2. B. 10. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{130}$.

Câu 17: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + 2 - 3i} \right| = 1$; $\left| \frac{z_2 + i}{z_2 - 1 + i} \right| = \sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $\sqrt{2} - 1$.

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| = 8$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 3 - 3i|$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. $\sqrt{10} + \sqrt{34}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\sqrt{10} + \sqrt{58}$. D. $\sqrt{5} + \sqrt{58}$.

Câu 19: Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 1 - 2i| + |z + 2 - 3i| = \sqrt{10}$ và có môđun nhỏ nhất. Giá trị của $S = 7a + b$ là

- A. 7. B. 0. C. 5. D. -12.

Câu 20: Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|\bar{z} + 2 - 3i| \leq |z - 2 + i| \leq 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 14x + 8y$. Giá trị $m^2 + M^2$ là

- A. $\frac{118661 - 3000\sqrt{34}}{25}$ B. $3472 - 120\sqrt{34}$ C. $4732 - 120\sqrt{34}$ D. $3436 - 120\sqrt{34}$

ĐÁP ÁN – Dạng 1. Phương pháp hình học

1-C	2-D	3-C	4-C	5-C	6-C	7-A	8-D	9-A	10-D
11-B	12-A	13-B	14-A	15-C	16-A	17-A	18-D	19-A	20-C

Dạng 2: Phương pháp đại số

Phương pháp giải

Các bất đẳng thức thường dùng:

1. Cho các số phức z_1, z_2 ta có:

a. $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0, z_2 = kz_1 \end{cases}$

b. $|z_1 + z_2| \geq \|z_1\| - \|z_2\|$. (2)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0, z_2 = kz_1 \end{cases}$

2. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Cho các số thực a, b, x, y ta có $ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho số phức $z = a + (a - 3)i, (a \in \mathbb{R})$. Giá trị của a để khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức z đến gốc tọa độ là nhỏ nhất bằng

A. $a = \frac{3}{2}$.

B. $a = \frac{1}{2}$.

C. $a = 1$.

D. $a = 2$.

Nhận xét: Lời giải có sử dụng đánh giá

$$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hướng dẫn giải

$$|z| = \sqrt{a^2 + (a - 3)^2} = \sqrt{2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{3}{2}$. Hay $z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$.

Chọn A.

Ví dụ 2: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$, số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z = 1 + 2i$.

B. $z = -1 - i$.

C. $z = 2 + 2i$.

D. $z = -1 + i$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

$$|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |(a - 2) + (b - 4)i| = |a + (b - 2)i| \Leftrightarrow -a - b + 4 = 0.$$

$$\Rightarrow z = (4 - b) + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{(4 - b)^2 + b^2} = \sqrt{2(b - 2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $\min |z| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow z = 2 + 2i$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z-2i} \right| = 1$, biết $\left| z + \frac{3}{2} - 5i \right|$ đạt giá trị

nhỏ nhất. Giá trị của $|z|$ bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$ ($z \neq 2i$) ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\left| \frac{z-1}{z-2i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-2i| \Leftrightarrow 2a-4b+3=0 \Rightarrow 2a+3=4b$$

$$\Rightarrow \left| z + \frac{3}{2} - 5i \right| = \sqrt{(2b)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{5(b-1)^2 + 20} \geq 2\sqrt{5}$$

$$\text{Suy ra } \min \left| z + \frac{3}{2} - 5i \right| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{2} + i$$

$$\text{Vậy } |z| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Chọn C.

Ví dụ 4: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 - z_2 = 3 + 4i$ và $|z_1 + z_2| = 5$.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ là

- A. 5. B. $5\sqrt{3}$.
C. $12\sqrt{5}$. D. $5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 5^2 + 3^2 + 4^2 = 50.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$$|z_1| + |z_2| \leq \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Gọi $z_1 = x + yi, z_2 = a + bi; a, b, x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} z_1 - z_2 = 3 + 4i \\ |z_1 + z_2| = 5 \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 25 \\ |z_1| = |z_2| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{7}{2} \end{cases}. \text{ Hay } z_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i; z_2 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i.$$

Thay z_1, z_2 vào giả thiết thỏa mãn.

Vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng $5\sqrt{2}$.

Chọn D.

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |1+z| + 3|1-z| \text{ bằng}$$

- A. $2\sqrt{10}$. B. $6\sqrt{5}$.
C. $3\sqrt{15}$. D. $2\sqrt{5}$.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } P \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)(|1+z|^2 + |1-z|^2)} = \sqrt{20(|1|^2 + |z|^2)} = 2\sqrt{10}$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |1+z| = \frac{|1-z|}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 1 + \frac{5x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = \pm \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i.$$

$$\text{Vậy } \max P = 2\sqrt{10}.$$

Chọn A.

Ví dụ 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i| = 2$. Giá trị lớn nhất của

$$|z+3-i| \text{ bằng}$$

- A. 6. B. 7.
C. 8. D. 9.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } |z+3-i| = |(z-1+2i) + (4-3i)| \leq |z-1+2i| + |4-3i| = 7.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} z-1+2i = k(4-3i), k > 0 \\ |z-1+2i| = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{13}{5} - \frac{16}{5}i.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z+3-i|$ bằng 7.

Chọn B.

Ví dụ 7: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i| = 4$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của môđun số phức z . Giá trị của

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức

M, m bằng

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \text{ và}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $|z| = |(z - 3 + 4i) + (3 - 4i)| \leq |z - 3 + 4i| + |3 - 4i| = 4 + 5 = 9 = M$.

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} z - 3 + 4i = k(3 - 4i), (k > 0) \\ |z - 3 + 4i| = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{5} \\ z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i \end{cases}.$$

Mặt khác

$$|z| = |(z - 3 + 4i) + (3 - 4i)| \geq ||z - 3 + 4i| - |3 - 4i|| = |4 - 5| = 1 = m.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} z - 3 + 4i = k(3 - 4i), (k < 0) \\ |z - 3 + 4i| = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{4}{5} \\ z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \end{cases}$$

Chọn A.

Ví dụ 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 4| = |z(z + 2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$ bằng

A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chú ý: Với mọi số phức

$$z_1, z_2 :$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } |z^2 + 4| = |z(z + 2i)| \Leftrightarrow |(z + 2i)(z - 2i)| = |z(z + 2i)|$$

$$\Leftrightarrow |z + 2i| \cdot |z - 2i| = |z| \cdot |z + 2i|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z + 2i| = 0 \\ |z| = |z - 2i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2i \\ |z| = |z - 2i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2i \\ z = a + i, a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} |z + i| = |-2i + i| = 1 \\ |z + i| = |(a + i) + i| = \sqrt{a^2 + 4} \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \min |z + i| = 1.$$

Chọn C.

Ví dụ 9: Tìm số phức z thỏa mãn $(z - 1)(\bar{z} + 2i)$ là số thực và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

B. $z = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

C. $z = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$. D. $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $(z-1)(\bar{z}+2i) = [(a-1)a - b(2-b)] + (2a+b-2)i$

Do đó $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực $\Leftrightarrow 2a+b-2=0 \Leftrightarrow b=2-2a$

Khi đó $|z| = \sqrt{a^2 + (2-2a)^2} = \sqrt{5\left(a-\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$

$\min|z| = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$. Vậy $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

Chọn D.

Ví dụ 10: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức $T = |z+i| + |z-2-i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$. B. $\max T = 4$.

C. $\max T = 4\sqrt{2}$. D. $\max T = 8$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$|z-1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x-1+yi| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x+1$ (*).

Lại có

$T = |z+i| + |z-2-i| = |x+(y+1)i| + |x-2+(y-1)i|$

$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2y+1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y+5}$

Kết hợp với (*) ta được

$T = \sqrt{2x+2y+2} + \sqrt{6-2x-2y} = \sqrt{2(x+y)+2} + \sqrt{6-2(x+y)}$

Đặt $T = x+y$, khi đó $T = f(t) = \sqrt{2t+2} + \sqrt{6-2t}$ với $t \in [-1; 3]$.

Cách 1: Sử dụng phương pháp hàm số

Ta có $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+2}} - \frac{1}{\sqrt{6-2t}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Mà $f(1) = 4, f(-1) = 2\sqrt{2}, f(3) = 2\sqrt{2}$. Vậy $\max f(t) = f(1) = 4$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$T = \sqrt{2t+2} + \sqrt{6-2t} \leq \sqrt{(1+1) \cdot 8} = 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $t = 1$.

Chọn B.

Ví dụ 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+1| + |z^2+z+1|$. Khi đó giá trị của $M+m$ bằng

A. 5.

B. 6.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $t = |z+1|$. Khi đó

$$t^2 = (z+1)(\bar{z}+1) = |z|^2 + 1 + z + \bar{z} = 2 + 2a \Rightarrow a = \frac{t^2 - 2}{2}.$$

Ta có

$$|z^2 + z + 1| = |a^2 - b^2 + 2abi + a + bi + 1| = |a^2 + (1 - b^2) + a + b(2a + 1)i|$$

$$= \sqrt{(2a^2 + a)^2 + b^2(2a + 1)^2} = \sqrt{a^2(2a + 1)^2 + (1 - a^2)(2a + 1)^2}$$

$$= |2a + 1| = |t^2 - 1|$$

$$\Rightarrow |z+1| + |z^2 + z + 1| = t + |t^2 - 1| \text{ (với } 0 \leq t \leq 2, \text{ do } a^2 \leq 1).$$

Xét hàm số $f(t) = t + |t^2 - 1|$ với $t \in [0; 2]$.

$$\text{Trường hợp 1: } t \in [0; 1] \Rightarrow f(t) = t + 1 - t^2 = -t^2 + t + 1 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\text{và có } f(0) = f(1) = 1 \text{ nên } \begin{cases} \max_{[0;1]} f(t) = \frac{5}{4} \\ \min_{[0;1]} f(t) = 1 \end{cases}.$$

Trường hợp 2:

$$t \in [1; 2] \Rightarrow f(t) = t + t^2 - 1 = t^2 + t - 1, f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [1; 2]$$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên $[1; 2] \Rightarrow \begin{cases} \max_{[1;2]} f(t) = f(2) = 5 \\ \min_{[1;2]} f(t) = f(1) = 1 \end{cases}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} M = \max_{[0;2]} f(t) = 5 \\ m = \min_{[0;2]} f(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 6.$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 2

Bài tập cơ bản

Câu 1: Cho z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + 1| + |z_2 + 1| + |z_1 z_2 + 1|$ là

- A. 1. B. 2. C. 8. D. 4.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a (a > 0)$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M + m$ bằng

- A. a . B. $a + \sqrt{a^2 + 4}$. C. $\sqrt{a^2 + 4}$. D. $2(\sqrt{a^2 + 4} - a)$.

Câu 3: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng

- A. $8i$. B. 4. C. -8 . D. 8.

Câu 4: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 1 - 4i|$, số phức z có môđun nhỏ nhất là

- A. $z = 1 + 2i$. B. $z = -1 - i$. C. $z = 2 + 2i$. D. $z = -1 + i$.

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = |z + 2i||z - 2|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + i|$ bằng

- A. $\min|z - 1 + i| = \sqrt{3}$. B. $\min|z - 1 + i| = 2$. C. $\min|z - 1 + i| = \sqrt{2}$. D. $\min|z - 1 + i| = 1$.

Bài tập nâng cao

Câu 6: Số phức z thỏa mãn $|2z + 1| = |z + \bar{z} + 3|$ và số phức $w = z - 8$ có môđun nhỏ nhất. Tổng phần thực các số phức z thỏa mãn là

- A. 5. B. 7. C. 10. D. 14.

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2i| = 2$. Giá trị lớn nhất của $P = 2|z + 2 - i| + 3|z - 2 - 3i|$ là

- A. $\max P = 3\sqrt{26}$. B. $\max P = 3\sqrt{13}$. C. $\max P = 4\sqrt{13}$. D. $\max P = 2\sqrt{13}$.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$. Giá trị của $S = M^2 + m^2$ là

- A. $S = 34$. B. $S = 82$. C. $S = 68$. D. $S = 36$.

Câu 9: Cho các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$. Ký hiệu $M = \max|z|, m = \min|z|$. Môđun của số phức $w = M + mi$ là

A. $|w| = \sqrt{6}$.

B. $|w| = 2$.

C. $|w| = 2\sqrt{2}$.

D. $|w| = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 10: Trong các số phức z thỏa mãn $|2z + \bar{z}| = |z - i|$, số phức có phần thực không âm sao cho $|z^{-1}|$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $z = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{2}i$.

B. $z = \frac{1}{2}i$.

C. $z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{8}i$.

D. $z = \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{1}{8}i$.

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn các điều kiện z không phải là số thực đồng thời số phức $w = \frac{z}{z^4 + 1}$ là một số thực. Biết rằng phần thực đó là một số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của phần thực của z là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 12: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = 2|z|$. Đặt $P = 8(b^2 - a^2)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min P = 12$.

B. $\max P = 12$.

C. $\min P = 8$.

D. $\max P = 0$.

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3|$ là

A. 1.

B. 2.

C. $\sqrt{5}$.

D. 4.

Câu 14: Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3 - i)|z| = \frac{z}{w - 1} + 1 - i$. Giá trị lớn nhất $T = |w + i|$ là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 15: Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3| + |z_1 + 3| = |z_2 - 4| + |z_2 + 4| = 10$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ là

A. 7.

B. 20.

C. 14.

D. 10.

ĐÁP ÁN – Dạng 2. Phương pháp đại số

1-B	2-C	3-D	4-B	5-C	6-D	7-A	8-C	9-A	10-D
11-A	12-A	13-B	14-B	15-D					