

(Đề thi có 01 trang và 05 câu)

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (2,0 điểm).

a. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sqrt{2 + \sin 2x}}$.

b. Cho hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng $(d): y = mx - m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

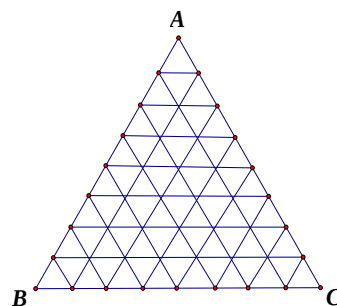
Câu 2 (2,0 điểm).

a. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{1 + 2019^x}$. Tính tỉ số $\frac{P}{Q}$, với $P = f'(1) + 2f'(2) + \dots + 2019f'(2019)$ và $Q = f'(-1) + 2f'(-2) + \dots + 2019f'(-2019)$.

b. Giải phương trình: $\log_2 [3 \log_2 (3x - 1) - 1] = x$.

Câu 3 (2,0 điểm).

a. Cho tam giác đều ABC cạnh 8cm. Chia tam giác này thành 64 tam giác đều cạnh 1cm bởi các đường thẳng song song với các cạnh tam giác ABC (như hình vẽ). Gọi S là tập hợp các đỉnh của các tam giác cạnh 1cm. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh thuộc S . Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của hình bình hành nằm trong miền trong của tam giác ABC và có cạnh chứa các cạnh của các tam giác cạnh 1 cm ở trên.



b. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương và thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + \dots + u_{2020} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1010}) \\ \log_3^2 u_3 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14} = 2 \end{cases}$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Một mặt phẳng (α) qua CD cắt SA, SB lần lượt tại M, N . Đặt $AM = x$, với $0 < x < a$.

a. Tứ giác $MNCD$ là hình gì? Tính diện tích tứ giác $MNCD$ theo a và x .

b. Xác định x để thể tích khối chóp $S.MNCD$ bằng $\frac{2}{9}$ lần thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 5 (1,0 điểm).

a. Cho các số thực phân biệt $a, b > 1$. Chứng minh rằng: $\log_a (\log_a b) > \log_b (\log_a b)$.

b. Cho các số thực $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1, (n \geq 2)$. Chứng minh rằng:

$$\log_{a_1} (\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2} (\log_{a_2} a_3) + \dots + \log_{a_{n-1}} (\log_{a_{n-1}} a_n) + \log_{a_n} (\log_{a_n} a_1) > 0.$$

..... HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI (THAM KHẢO)

Câu 1a (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sqrt{2 + \sin 2x}}$.

Hướng dẫn

Đặt $\sin x + \cos x = t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$, khi đó $y = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}} = f(t), t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Ta có $f'(t) = \frac{1-t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow t = 1$.

Tính $f(-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; f(\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, f(1) = \sqrt{2}$.

Suy ra: $\min y = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi; \max y = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 1b (1,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-1;1)$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng $(d): y = mx - m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

Cách 1:

Dễ thấy đường thẳng $(d): y = mx - m - 1$ luôn đi qua điểm $I(1; -1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Ta có $y' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0, \forall x \neq 1$ nên để đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N thì

$m < 0$. Khi đó $I(1; -1)$ luôn là trung điểm của đoạn MN .

Ta có $AM^2 + AN^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AI}^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 32 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} (*)$.

Do A cố định nên: nếu ta xét được $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ là số dương và trong tam giác AMN có cạnh MN nhỏ nhất thì tìm được giá trị nhỏ nhất. Mà (C) là Hypebol nên khi (d) là đường phân giác của góc tạo bởi hai tiệm cận thì $m = -1$ và $(d): y = -x$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(0;0), N(2;-2)$ và MN nhỏ nhất, ta có: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 1 \cdot 3 + (-1)(-3) = 6 > 0$, hơn nữa $AM^2 + AN^2 = 32 - 12 = 20$. Vậy $\min(AM^2 + AN^2) = 20 \Leftrightarrow m = -1$.

Cách 2:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) cắt và $(C): mx - m - 1 = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$

$\Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0$ (vì $x = 1$ không là nghiệm).

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m(m+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0.$

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{m+1}{m} \end{cases}$

Mặt khác $AM^2 + AN^2 = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (m(x_1 - 1) - 2)^2 + (m(x_2 - 1) - 2)^2$

$$AM^2 + AN^2 = 10 - \frac{2(m+1)}{m} + m^2 \left[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \right] - 4(m(x_1 - 1) + m(x_2 - 1)) + 8$$

$$AM^2 + AN^2 = 18 - \frac{2(m+1)}{m} + m^2 \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2 \right]$$

$$AM^2 + AN^2 = 18 - \frac{2(m+1)}{m} + m^2 \left[2 - \frac{2(m+1)}{m} \right] = 16 + 2 \left(-m - \frac{1}{m} \right) \geq 16 + 4 \sqrt{(-m) \cdot \frac{1}{(-m)}}$$

$$\Rightarrow \min(AM^2 + AN^2) = 20 \Leftrightarrow -m = 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 2a (1,0 điểm). Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{1 + 2019^x}$. Tính tỉ số $\frac{P}{Q}$, với

$$P = f'(1) + 2f'(2) + \dots + 2019f'(2019) \text{ và } Q = f'(-1) + 2f'(-2) + \dots + 2019f'(-2019).$$

Hướng dẫn

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2019^x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2019^x \ln 2019}{(1 + 2019^x)^2} \Rightarrow f'(-x) = -\frac{2019^x \ln 2019}{(1 + 2019^x)^2} = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f'(x)$ là hàm số chẵn, suy ra $g(x) = -x.f'(x)$ là hàm số lẻ.

$$\text{Vậy nếu } P = -\sum_{k=1}^{2019} g(k) \text{ thì } Q = \sum_{k=1}^{2019} g(-k) = -\sum_{k=1}^{2019} g(k) = P \Rightarrow \frac{P}{Q} = 1.$$

Câu 2b (1,0 điểm). Giải phương trình: $\log_2 [3 \log_2 (3x - 1) - 1] = x$.

Hướng dẫn

Đặt $\log_2 (3x - 1) = y \Rightarrow 3x = 1 + 2^y$, từ phương trình đã cho ta có:

$\log_2 (3y - 1) = x \Rightarrow 3y = 1 + 2^x$. Như thế ta có điều kiện $x, y \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ và ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x = 1 + 2^y \\ 3y = 1 + 2^x \end{cases}. \text{ Xét hàm } f(t) = 1 + 2^t - 3t, t \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 - 3, \text{ ta có:}$$

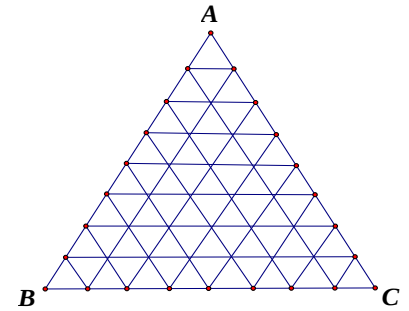
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2^t = \frac{3}{\ln 2} \Leftrightarrow t = \log_2 \left(\frac{3}{\ln 2} \right) = \alpha \in \left(\frac{1}{3}; +\infty \right)$, và $f'(t) = 2^t \ln 2 - 3$ đồng biến nên ta có $t = \alpha$ là điểm cực tiểu của $f(t)$, $f(\alpha) = 1 + 2^\alpha - 3\alpha < 0$ nên phương trình $f(t) = 0$ có đúng hai nghiệm $t = 1, t = 3$.

Mặt khác từ hệ phương trình, trừ theo vế ta có: $3(x - y) = 2^y - 2^x \Leftrightarrow 3x + 2^x = 3y + 2^y$ hay là $g(x) = g(y)$, với $g(t) = 3t + 2^t$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{3}; +\infty \right)$, suy ra $x = y$.

Cuối cùng phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3$.

Câu 3a (1,0 điểm).

Cho tam giác đều ABC cạnh 8cm. Chia tam giác này thành 64 tam giác đều cạnh 1cm bởi các đường thẳng song song với các cạnh tam giác ABC (như hình vẽ). Gọi S là tập hợp các đỉnh của các tam giác cạnh 1cm. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh thuộc S. Tính xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của hình bình hành nằm trong miền trong của tam giác ABC và có cạnh chứa các cạnh của các tam giác cạnh 1 cm ở trên.

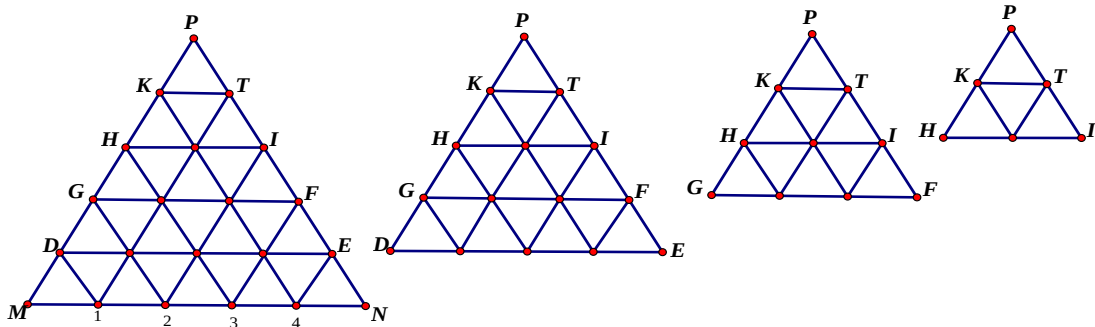


Hướng dẫn

Trên cạnh BC ta có 9 đỉnh của các tam giác đều cạnh 1cm (kể cả B và C), trên đường thẳng tiếp theo song song BC (phía trên BC) ta có 8 đỉnh của các tam giác đều cạnh 1cm, ... cuối cùng đến A có 1 đỉnh của tam giác đều cạnh 1cm. Ta có $n(S) = 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1 = 45$.

Như thế số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{45}^4$.

Theo yêu cầu: nếu có hình bình hành tạo thành từ 4 đỉnh trong S thì 4 đỉnh đó chỉ có thể thuộc tam giác đều cạnh 5cm (tức là bỏ đi tất cả các đỉnh của các tam giác cạnh 1cm nằm trên ba cạnh BC, CA, AB và cạnh có liên quan đến các đỉnh đó).



• **Trường hợp 1:** Các cạnh của hình bình hành nằm trên MN hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc MN.

- Các hình bình hành có cạnh nằm trên MN và

+ Tạo bởi hai đoạn MN, DE: Ta cần chọn thêm 2 đường thẳng song song hoặc trùng với DM (hoặc song song trùng EN) thì tạo ra hình bình hành và mỗi trường hợp này có C_5^2 cách. Như vậy có: $C_5^2 + C_5^2 = 20$ hình bình hành.

+ Tạo bởi hai đoạn MN, GF: Lặp lại lập luận trên ta có có: $C_4^2 + C_4^2 = 12$ hình.

+ Tạo bởi hai đoạn MN, HI: Lặp lại lập luận trên ta có có: $C_3^2 + C_3^2 = 6$ hình.

+ Tạo bởi hai đoạn MN, KT: Lặp lại lập luận trên ta có có: $C_2^2 + C_2^2 = 2$ hình.

Vậy các hình bình hành có cạnh nằm trên MN có $20 + 12 + 6 + 2 = 40$ hình.

- Các hình bình hành có đúng 1 đỉnh thuộc MN

+ Đỉnh số 1 và số 4: đều có 4 hình bình hành

+ Đỉnh số 2 và số 3: đều có 3 hình bình hành.

Vậy các hình bình hành có đúng 1 đỉnh thuộc MN có $2 \cdot (4 + 3) = 14$ hình.

Do đó trường hợp 1 ta có: $40 + 14 = 54$ hình.

• **Trường hợp 2:** Các cạnh hình hành nằm trên DE nhưng không thuộc MN hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc DE.

So với trường hợp 1 thì chỉ số tổ hợp giảm đi 1, ta làm tương tự và có:

$$(C_4^2 + C_4^2) + (C_3^2 + C_3^2) + (C_2^2 + C_2^2) + (3 + 3 + 2) = 28 \text{ hình.}$$

• **Trường hợp 3:** Các cạnh hình hành nằm trên GF nhưng không thuộc MN và DE hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc GF.

$$\text{Tương tự ta có } (C_3^2 + C_3^2) + (C_2^2 + C_2^2) + (2 + 2) = 12 \text{ hình.}$$

• **Trường hợp 4:** Các cạnh hình hành nằm trên HI nhưng không thuộc MN, DE và GF hoặc có đúng 1 đỉnh thuộc HI.

$$\text{Ta có } (C_2^2 + C_2^2) + 1 = 3 \text{ hình.}$$

Số các hình bình hành trong bốn trường hợp là: $54 + 28 + 12 + 3 = 97$ hình.

$$\text{Vậy xác suất cần tìm là: } p = \frac{97}{C_{45}^4} = \frac{97}{148995}.$$

Lưu ý:

Đề bài yêu cầu các đỉnh hình bình hành nằm trong miền trong của tam giác ABC nên số hình bình hành là tương đối nhỏ. Nếu các đỉnh hình hành không ngoài tam giác ABC thì sẽ nhiều hình hơn.

Câu 3b (1,0 điểm). Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương và thỏa

$$\text{mãn: } \begin{cases} u_1 + u_2 + \dots + u_{2020} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1010}) \\ \log_3^2 u_3 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14} = 2 \end{cases}.$$

Hướng dẫn

$$\text{Từ phương trình đầu của hệ ta có: } \frac{2020(2u_1 + 2019d)}{2} = 4 \cdot \frac{1010(2u_1 + 1009d)}{2}$$

$\Leftrightarrow 2u_1 + 2019d = 4u_1 + 2018d \Leftrightarrow d = 2u_1 \Rightarrow u_3 = 5u_1, u_5 = 9u_1, u_{14} = 27u_1$ thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:

$$(\log_3 5 + \log_3 u_1)^2 + (\log_3 9 + \log_3 u_1)^2 + (\log_3 27 + \log_3 u_1)^2 = 2. \text{ Đặt } \log_3 u_1 = t, \log_3 5 = a, \text{ ta có}$$
$$\text{phương trình: } (a + t)^2 + (2 + t)^2 + (3 + t)^2 = 2 \Leftrightarrow 3t^2 + 2(a + 5)t + 11 + a^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-(a+5) \pm \sqrt{-2a^2 + 10a - 8}}{3}. \text{ Suy ra } u_1 = 3^{\frac{-(a+5) \pm \sqrt{-2a^2 + 10a - 8}}{3}}.$$

$$\text{Vậy } d = 2.3^{\frac{-(a+5) \pm \sqrt{-2a^2 + 10a - 8}}{3}}, \text{ với } a = \log_3 5.$$

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$. Một mặt phẳng (α) qua CD cắt SA , SB lần lượt tại M , N . Đặt $AM = x$, với $0 < x < a$.

a. Tứ giác $MNCD$ là hình gì? Tính diện tích tứ giác $MNCD$ theo a và x .

b. Xác định x để thể tích khối chóp $S.MNCD$ bằng $\frac{2}{9}$ lần thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn

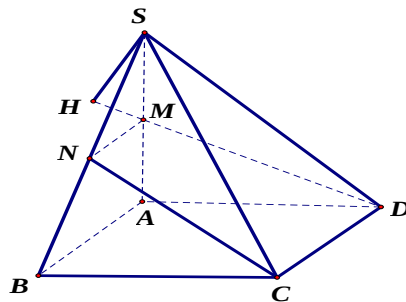
a. Tứ giác $MNCD$ là hình gì? Tính diện tích tứ giác $MNCD$ theo a và x .

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \parallel CD$, suy ra $AB \parallel (\alpha)$ do đó $AB \parallel MN$ hay ta có $MNCD$ là hình thang. Mặt khác: $CD \perp AD$, $CD \perp SA$ nên $CD \perp \text{mp}(SAD)$ suy ra $MN \perp (SAD)$ suy ra $MN \perp MD$. Vậy tứ giác $MNCD$ là hình thang vuông tại D và M .

Từ đó ta có DM là đường cao của hình thang $MNCD$.

Ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = a-x$ và $MA = x$ nên $DM = \sqrt{x^2 + a^2}$. Do đó ta tính diện tích

$$MNCD \text{ là: } S = \frac{(CD + MN) \cdot DM}{2} = \frac{(2a - x)\sqrt{x^2 + a^2}}{2}.$$



b. Xác định x để thể tích khối chóp $S.MNCD$ bằng $\frac{2}{9}$ lần thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$ (1). Kẻ SH vuông góc với DM , (H thuộc DM), ta có:

$MN \perp (SAD)$ (theo chứng minh câu a) nên $MN \perp SH$, suy ra $SH \perp (MNCD)$, từ đó SH là đường cao của khối chóp $S.MNCD$.

Trong hai tam giác vuông đồng dạng SHM và DAM ta có:

$$\frac{SH}{DA} = \frac{SM}{DM} = \frac{a-x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow SH = \frac{a(a-x)}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \text{ do đó thể tích của khối chóp } S.MNCD \text{ là:}$$

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a(a-x)}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{(2a-x)\sqrt{x^2+a^2}}{2} = \frac{a(a-x)(2a-x)}{6} \quad (2).$$

Từ (1), (2) và yêu cầu bài toán ta có phương trình: $\frac{a(a-x)(2a-x)}{6} = \frac{2}{9} \cdot \frac{a^3}{3}$

$$9\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(2 - \frac{x}{a}\right) = 4 \Rightarrow 9(1-t)(2-t) = 4, t = \frac{x}{a} \in (0;1) \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \in (0;1) \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}.$$

Vậy với $x = \frac{2a}{3}$ thì thể tích khối chóp $S.MNCD$ bằng $\frac{2}{9}$ lần thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 5a (0,5 điểm). Cho các số thực phân biệt $a, b > 1$. Chứng minh rằng:

$$\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b).$$

Hướng dẫn

Đặt $\log_a b = t > 0, t \neq 1 \Rightarrow b = a^t$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\log_a t > \log_{a^t}(t) \Leftrightarrow (t-1)\log_a t > 0 \quad (*).$$

Nếu $t > 1$ thì $t-1 > 0$ & $\log_a t > 0 \Rightarrow (*)$ đúng.

Nếu $0 < t < 1$ thì $t-1 < 0$ & $\log_a t < 0 \Rightarrow (*)$ đúng. Vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 5b (0,5 điểm). Cho các số thực $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1, (n \geq 2)$. Chứng minh rằng:

$$\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \dots + \log_{a_{n-1}}(\log_{a_{n-1}} a_n) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0.$$

Hướng dẫn

Áp dụng bất đẳng thức trong câu 5a, ta có:

$$\begin{aligned} \log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) &> \log_{a_2}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) \\ \Leftrightarrow \log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) &> \log_{a_2}(\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3) = \log_{a_2}(\log_{a_1} a_3). \end{aligned}$$

Lặp lại lần nữa:

$$\begin{aligned} \log_{a_2}(\log_{a_1} a_3) + \log_{a_3}(\log_{a_3} a_4) &> \log_{a_3}(\log_{a_1} a_3) + \log_{a_3}(\log_{a_3} a_4) \\ \Leftrightarrow \log_{a_2}(\log_{a_1} a_3) + \log_{a_3}(\log_{a_3} a_4) &> \log_{a_3}(\log_{a_1} a_3 \cdot \log_{a_3} a_4) = \log_{a_3}(\log_{a_1} a_4). \end{aligned}$$

Cứ tiếp tục lặp lại như thế ta lần lượt thay được cơ số ngoài cùng của logarit và số lấy logarit trong cùng (chú ý mỗi lần thay thì cơ số a_1 không đổi), ký hiệu về trái là P, cuối cùng ta có:

$$P > \log_{a_n}(\log_{a_1} a_n) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) = \log_{a_n}(\log_{a_1} a_n \cdot \log_{a_n} a_1) = \log_{a_n}(\log_{a_1} a_1) = 0 \quad (\text{đpcm}).$$

----- HẾT -----