

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT



I LÝ THUYẾT.

Để giải các phương trình mũ và lôgarit, ngoài việc phải thành thạo các công thức biến đổi biểu thức mũ và lôgarit, cần nhớ các biến đổi tương đương cơ bản sau (dưới đây ta luôn giả thiết $0 < a \neq 1$).

- ✓ $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ ($b > 0$, nếu $b \leq 0$ thì phương trình này vô nghiệm)
- ✓ Tổng quát hơn, $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ ($b > 0$).
- ✓ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
- ✓ $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$
- ✓ Tổng quát hơn, $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH MŨ – PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CƠ BẢN**I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN** $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Phương trình có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $b > 0$.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

- Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $b \leq 0$.

Câu 1. Giải phương trình $3^{x-1} = 9$.

Câu 2. Giải phương trình $5^{x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^x$.

Câu 3. Giải phương trình $3^{x^4-3x^2} = 81$.

Câu 4. Giải phương trình $7^{2x^2+5x+4} = 49$.

Câu 5. Giải phương trình $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-x-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3}$.

Câu 6. Giải phương trình $9^{\sin 2x} = 1$.

Câu 7. Giải phương trình $2^{\sqrt{-x^2+2x+4}-x+4} = 4$.

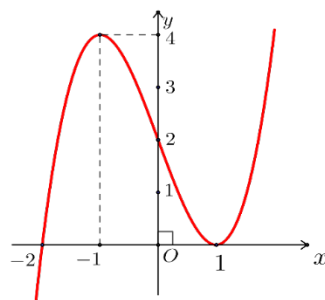
Câu 8. Tìm m để phương trình $2020^{mx^2-2x+m-2} = 1$ có hai nghiệm trái dấu.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			4		-2	
	$-\infty$					$+\infty$

Tìm m phương trình $3^{2f(x)-m+3} = 27$ có 3 nghiệm phân biệt?

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^3-3x-1-2m} = \frac{1}{64}$ có ba nghiệm thực phân biệt.



II. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CƠ BẢN $\log_a x = b$ ($x > 0, a > 0, a \neq 1$) luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$ với mọi b .

Câu 1. Giải phương trình sau: $\log_3 x = 4$.

Câu 2. Giải phương trình sau: $\log_2 (2x - 2) = 3$.

Câu 3. Giải phương trình sau: $\log_4 (x^2 + 5x + 10) = 2$.

Câu 4. Giải phương trình sau: $\log (x - 1)^2 = 2$.

Câu 5. Giải phương trình sau: $\log_5 \sqrt{x^2 - 3x + 1} = 1$.

Câu 7. Giải phương trình sau: $\log_2 (\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x + 1}) = \log_2 (x + 2)$.

Câu 9. Giải phương trình sau: $\log (|\sin x|) = 0$.

Câu 10. Giải phương trình sau: $\log_2 (x - 5) + \log_2 (x + 2) = 3$.

Câu 11. Giải phương trình $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2018} x} = 2018$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 (1 - x^2) + \log_{\frac{1}{3}} (x + m - 4) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.



HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

KIẾN THỨC CẦN NHỚ VỀ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Để giải các phương trình mũ và lôgarit, ngoài việc phải thành thạo các công thức biến đổi biểu thức mũ và lôgarit, cần nhớ các biến đổi tương đương cơ bản sau (dưới đây ta luôn giả thiết $0 < a \neq 1$).

- ✓ $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ ($b > 0$, nếu $b \leq 0$ thì phương trình này vô nghiệm)
- ✓ Tổng quát hơn, $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ ($b > 0$).
- ✓ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
- ✓ $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$
- ✓ Tổng quát hơn, $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH MŨ – PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CƠ BẢN

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Phương trình có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $b > 0$.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

- Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $b \leq 0$.

Câu 1. Giải phương trình $3^{x-1} = 9$.

Lời giải

$$3^{x-1} = 9 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Câu 2. Giải phương trình $5^{x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^x$.

Lời giải

$$5^{x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^x \Leftrightarrow 5^{x-1} = 5^{-2x} \Leftrightarrow x-1 = -2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Câu 3. Giải phương trình $3^{x^4-3x^2} = 81$.

Lời giải

$$3^{x^4-3x^2} = 81 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 4 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Câu 4. Giải phương trình $7^{2x^2+5x+4} = 49$.

Lời giải

$$7^{2x^2+5x+4} = 49 \Leftrightarrow 7^{2x^2+5x+4} = 7^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Câu 5. Giải phương trình $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-x-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3}$.

Lời giải

Ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-x-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-x-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x-3} \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = -2x - 3$
 $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$

Câu 6. Giải phương trình $9^{\sin 2x} = 1$.

Lời giải

Ta có $9^{\sin 2x} = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 7. Giải phương trình $2^{\sqrt{-x^2+2x+4}-x+4} = 4$.

Lời giải

Ta có $2^{\sqrt{-x^2+2x+4}-x+4} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+4} - x + 4 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+4} = x - 2$.
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 4 = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 0 \Leftrightarrow x = 3 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Câu 8. Tìm m để phương trình $2020^{mx^2-2x+m-2} = 1$ có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

$2020^{mx^2-2x+m-2} = 1 \Leftrightarrow mx^2 - 2x + m - 2 = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $m(m-2) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

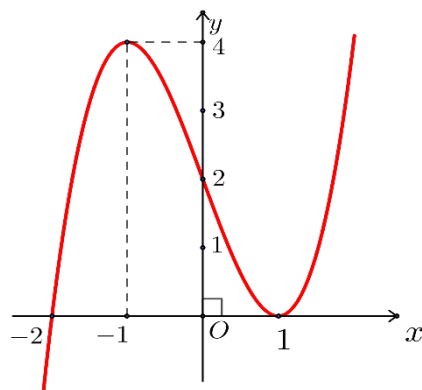
Tìm m phương trình $3^{2f(x)-m+3} = 27$ có 3 nghiệm phân biệt?

Lời giải

Ta có $3^{2f(x)-m+3} = 27 \Leftrightarrow 2f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = \frac{m}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi $-2 < \frac{m}{2} < 4 \Leftrightarrow -4 < m < 8$.

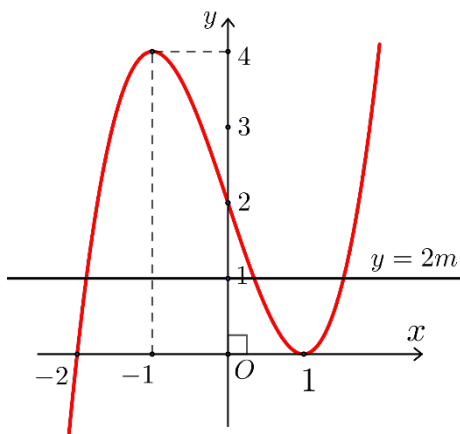
Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^3-3x-1-2m} = \frac{1}{64}$ có ba nghiệm thực phân biệt.



Lời giải

Ta có $4^{x^3-3x-1-2m} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow x^3 - 3x - 1 - 2m = -3 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 2m$.

Số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + 2 - 2m = 0$ là số giao điểm của đồ thị $y = x^3 - 3x + 2$ và đường thẳng $y = 2m$.



Nhìn vào đồ thị suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < 2m < 4 \Leftrightarrow 0 < m < 2$.

II. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT CƠ BẢN $\log_a x = b$ ($x > 0, a > 0, a \neq 1$) luôn có nghiệm duy nhất

$x = a^b$ với mọi b .

Câu 1. Giải phương trình sau: $\log_3 x = 4$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 81$.

Câu 2. Giải phương trình sau: $\log_2 (2x - 2) = 3$.

Lời giải

Điều kiện: $2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Ta có: $\log_2 (2x - 2) = 3 \Leftrightarrow 2x - 2 = 8 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$ (nhận).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5$.

Câu 3. Giải phương trình sau: $\log_4 (x^2 + 5x + 10) = 2$.

Lời giải

Vì $x^2 + 5x + 10 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\log_4(x^2 + 5x + 10) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$ hay $x = -6$.

Câu 4. Giải phương trình sau: $\log(x-1)^2 = 2$.

Lời giải

Điều kiện: $(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Ta có: $\log(x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 100 \Leftrightarrow |x-1| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=10 \\ x-1=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=-9 \end{cases} \text{ (nhận)}.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 11$ hay $x = -9$.

Câu 5. Giải phương trình sau: $\log_5 \sqrt{x^2 - 3x + 1} = 1$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Pt $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 1} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{105}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{105}}{2} \end{cases} \text{ (nhận)}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{3-\sqrt{105}}{2}$ hay $x = \frac{3+\sqrt{105}}{2}$.

Câu 7. Giải phương trình sau: $\log_2(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1}) = \log_2(x+2)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x + 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1} > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1 \quad (1).$

$\log_2(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1}) = \log_2(x+2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1} = x+2$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 + x + 1 + 2\sqrt{(x^2 - x + 1)(x+1)} = x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^3 + 1} = 4x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 1} = 2x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^3 + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^3 - 4x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 2 + 2\sqrt{2} \\ x = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 + 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa (1)).}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$ hay $x = 2 + 2\sqrt{2}$.

Câu 9. Giải phương trình sau: $\log(|\sin x|) = 0$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\text{Ta có: } \log(|\sin x|) = 0 \Leftrightarrow |\sin x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 10. Giải phương trình sau: $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-5 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$$

$$\text{Ta có: } \log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x-5)(x+2) = 3 \Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình là $x = 6$.

Câu 11. Giải phương trình $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2018} x} = 2018$.

Lời giải

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2018} x} = 2018 \Leftrightarrow \log_x 2 + \log_x 3 + \dots + \log_x 2018 = 2018$$

$$\Leftrightarrow \log_x (2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2018) = 2018 \Leftrightarrow \log_x (2018!) = 2018 \Leftrightarrow x^{2018} = 2018! \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[2018]{2018!}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình là $x = \sqrt[2018]{2018!}$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3(1-x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+m-4) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

Điều kiện $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_3(1 - x^2) = \log_3(x + m - 4) \Leftrightarrow 1 - x^2 = x + m - 4 \Leftrightarrow m = -x^2 - x + 5.$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 - x + 5$ trên khoảng $(-1; 1)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = -2x - 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	5	$\frac{21}{4}$	3

Dựa vào BBT, ta thấy phương trình có hai nghiệm khi $m \in \left(5; \frac{21}{4}\right)$.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH MŨ – PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I LÝ THUYẾT.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Tính tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x} = 8^{2-x}$.

Câu 2. Giải phương trình: $5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$

Câu 3. Giải phương trình: $\sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x} \cdot \sqrt[3]{0.125}} = 4\sqrt[3]{2}$.

Câu 4. Giải phương trình: $4^{x^2-3x+2} + 4^{2x^2+6x+5} = 4^{3x^2+3x+7} + 1$.

Câu 5. Tìm m để phương trình $5^{mx^2+2x+3+2m} = 5^{m+x}$ có hai nghiệm trái dấu

Câu 6. Tìm m để phương trình $7^{mx^2+2x} = 7^{2mx-m}$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} \leq 2$

Câu 7. Tìm m để phương trình: $m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + m$ (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Tìm m để phương trình: $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1$ có 4 nghiệm phân biệt.

II. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT:

I LÝ THUYẾT.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Giải phương trình: $\log_{25} (4x+5)^2 + \log_5 x = \log_3 27$.

Câu 2. Giải phương trình: $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$

Câu 3. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

Câu 4. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$. Tính $x_1 \cdot x_2$.

Câu 5. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2 x \cdot \log_2(32x) + 4 = 0$ bằng

Câu 6. Ba số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân này bằng

Câu 7. Cho phương trình $\log_3^2 x - 2 \log_{\sqrt{3}} x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức $P = \log_3 x_1 + \log_{27} x_2$ biết $x_1 < x_2$.

Câu 8. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_9(x-1)^8 = \log_3(4x)$

Câu 9. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

Câu 10. Giải phương trình: $\log_3(x-2)^2 + \log_{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 - 3x + 3} = 0$.

Câu 11. Giải phương trình: $\log_2(8-x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0$.

Câu 12. Tìm m để phương trình: $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2 \log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH MŨ – PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I LÝ THUYẾT.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Tính tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x} = 8^{2-x}$.

Lời giải

$$2^{x^2+2x} = 8^{2-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+2x} = (2^3)^{2-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+2x} = 2^{6-3x} \Leftrightarrow x^2 + 2x = 6 - 3x \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x} = 8^{2-x}$ bằng $1 + (-6) = -5$

Câu 2. Giải phương trình: $5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$

Lời giải

$$5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3} \Leftrightarrow 5 \cdot 5^x - 5^x = 2 \cdot 2^x + 2^3 \cdot 2^x$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 5^x = 10 \cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình cho có nghiệm $x = 1$.

Câu 3. Giải phương trình: $\sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x} \cdot \sqrt[3]{0.125}} = 4\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 3x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\sqrt{2^x \cdot 2^{\frac{x}{3}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3x}}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{-1}{3x}} = 2^{\frac{7}{3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{-1}{3x}} = 2^{\frac{7}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2x}} = 2^{\frac{7}{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{2x} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ x = 3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

Câu 4. Giải phương trình: $4^{x^2-3x+2} + 4^{2x^2+6x+5} = 4^{3x^2+3x+7} + 1$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$4^{x^2-3x+2} + 4^{2x^2+6x+5} = 4^{x^2-3x+2} \cdot 4^{2x^2+6x+5} + 1$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2} - 1 + 4^{2x^2+6x+5} - 4^{x^2-3x+2} \cdot 4^{2x^2+6x+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4^{x^2-3x+2} - 1)(4^{2x^2+6x+5} - 1) = 0$$

$$4^{x^2-3x+2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$4^{2x^2+6x+5} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 5 = 0, \text{ phương trình này vô nghiệm.}$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu 5. Tìm m để phương trình $5^{mx^2+2x+3+2m} = 5^{m+x}$ có hai nghiệm trái dấu

Lời giải

$$5^{mx^2+2x+3+2m} = 5^{m+x} \quad (1) \Leftrightarrow mx^2 + 2x + 3 + 2m = m + x \Leftrightarrow mx^2 + x + 3 + m = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$

$$ac < 0 \Leftrightarrow m(3+m) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 0$$

Vậy $m = \{-3; -2; -1\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Tìm m để phương trình $7^{mx^2+2x} = 7^{2mx-m}$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} \leq 2$

Lời giải

$$7^{mx^2+2x} = 7^{2mx-m} \quad (1) \Leftrightarrow mx^2 + 2x = 2mx - m \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + m = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 1 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases} (*)$$

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} \leq 2 \Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4 \leq 2x_1^2x_2^2 \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ -\frac{b}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện (*) ta suy ra $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 7. Tìm m để phương trình: $m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + m \quad (1)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Viết lại phương trình (1) dưới dạng:

$$m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{7-5x} + m \Leftrightarrow m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{(x^2-5x+6)+(1-x^2)} + m$$

$$\Leftrightarrow m \cdot 2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-5x+6} \cdot 2^{1-x^2} + m$$

$$\Leftrightarrow (2^{x^2-5x+6} - 1)(2^{1-x^2} - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ 2^{1-x^2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ 2^{1-x^2} = m \quad (*) \end{cases}.$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - x^2 = \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x^2 = 1 - \log_2 m \end{cases}$$

(1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - \log_2 m > 0 \\ 1 - \log_2 m \neq 4 \\ 1 - \log_2 m \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 2 \\ m \neq \frac{1}{8} \\ m \neq \frac{1}{256} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{8}; \frac{1}{256} \right\}.$$

Câu 8. Tìm m để phương trình: $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1$ có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phương trình cho tương đương với phương trình:

$$\left|x^2 - 4x + 3\right| = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1).$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y'		-	+	-	+
y	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$0 < \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^4 - m^2 < 0 \\ 5m^4 - 5m^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

II. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT:**LÝ THUYẾT.**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$$

**HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

Câu 1. Giải phương trình: $\log_{25} (4x+5)^2 + \log_5 x = \log_3 27$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình đã cho trở thành: $\log_5 (4x+5) + \log_5 x = 3 \Leftrightarrow 4x^2 + 5x - 125 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -\frac{25}{4} \end{cases}$.

Câu 2. Giải phương trình: $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{\log_2 20}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \left(1 + \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_2 4} - \frac{1}{\log_2 20} \right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Câu 3. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3 (2x+1) - \log_3 (x-1) = 1$.

Lời giải

+ Ta có: Điều kiện xác định $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

$$+ \log_3 (2x+1) - \log_3 (x-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{2x+1}{x-1} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{2x+1}{x-1} \right) = \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 3 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 4. \text{ Thỏa mãn điều kiện xác định.}$$

Câu 4. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$. Tính $x_1 \cdot x_2$.

Lời giải

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\log_x 2 - \log_{16} x = 0 \Leftrightarrow \log_x 2 - \log_{2^4} x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{4} \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (nhận).}$$

$$\text{Vậy tích } x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Câu 5. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2 x \cdot \log_2 (32x) + 4 = 0$ bằng

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > 0$.

$$\text{Khi đó } \log_2 x \cdot \log_2 (32x) + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot (\log_2 x + 5) + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 5 \log_2 x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{16} \end{cases}.$$

Do đó tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho bằng $\frac{9}{16}$.

Câu 6. Ba số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân này bằng

Lời giải

Do các số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự là cấp số nhân nên

$$(a + \log_4 3)^2 = (a + \log_2 3)(a + \log_8 3)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a \log_4 3 + \log_4^2 3 = a^2 + a \log_2 3 + a \log_8 3 + \log_2 3 \cdot \log_8 3$$

$$\Leftrightarrow a \log_2 3 + \frac{1}{4} \log_2^2 3 = \frac{4}{3} a \log_2 3 + \frac{1}{3} \log_2^2 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} a = -\frac{1}{12} \log_2 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} \log_2 3.$$

$$\text{Suy ra công bội của cấp số nhân là: } \frac{-\frac{1}{4} \log_2 3 + \log_4 3}{-\frac{1}{4} \log_2 3 + \log_2 3} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Câu 7. Cho phương trình $\log_3^2 x - 2 \log_{\sqrt{3}} x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 , x_2 . Tính giá

trị của biểu thức $P = \log_3 x_1 + \log_{27} x_2$ biết $x_1 < x_2$.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$.

$$\log_3^2 x - 2 \log_{\sqrt{3}} x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 4 \log_3 x + 2 \log_3 x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - 2 \log_3 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -1 \\ \log_3 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 27 \end{cases}.$$

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 = \frac{1}{3}$ và $x_2 = 27$.

Vậy $P = \log_3 x_1 + \log_{27} x_2 = \log_3 \frac{1}{3} + \log_{27} 27 = 0$.

Câu 8. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_9(x-1)^8 = \log_3(4x)$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$.

Ta có: $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_9(x-1)^8 = \log_3(4x)$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+3) + \log_3|x-1| = \log_3(4x)$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x+3) \cdot |x-1|] = \log_3(4x)$$

$$\Leftrightarrow (x+3) \cdot |x-1| = 4x \quad (1).$$

+ Nếu $0 < x < 1$ thì phương trình (1) trở thành

$$(x+3) \cdot (1-x) = 4x \Leftrightarrow -x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2\sqrt{3} (tm) \\ x = -3 - 2\sqrt{3} (l) \end{cases}.$$

+ Nếu $x > 1$ thì phương trình (1) trở thành

$$(x+3) \cdot (x-1) = 4x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 (tm) \\ x = -1 (l) \end{cases}.$$

Phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-3 + 2\sqrt{3}; 3\}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $2\sqrt{3}$.

Câu 9. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

Lời giải

Điều kiện: $a, b > 0$ và $a - 4b > 0$

$$\text{Đặt } \log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12} = t \Rightarrow \begin{cases} a = 100^t \\ b = 40^t \\ a - 4b = 12 \cdot 16^t \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 100^t - 4 \cdot 40^t - 12 \cdot 16^t = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2t} - 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^t = 6 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^t = -2 (l) \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b} = \left(\frac{5}{2}\right)^t = 6.$$

Câu 10. Giải phương trình: $\log_3(x-2)^2 + \log_{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 - 3x + 3} = 0$.

Lời giải

Điều kiện: $0 < x \neq 2$.

Phương trình cho tương đương với phương trình: $\log_3 (x-2)^2 + \log_3 \left(\frac{x}{x^2-3x+3} \right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3 \left((x-2)^2 \cdot \left(\frac{x}{x^2-3x+3} \right)^2 \right) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot \left(\frac{x}{x^2-3x+3} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 11x^2 + 18x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 11. Giải phương trình: $\log_2 (8-x^2) + \log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0$.

Lời giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\log_2 (8-x^2) = 2 + \log_2 (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$$

$$\Leftrightarrow 8-x^2 = 4(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, phương trình (*) trở thành:

$$(t-2)^2 (t^2 + 4t + 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow x = 0.$$

Câu 12. Tìm m để phương trình: $\log_{\sqrt{2}} (mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}} (-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\log_2 (mx - 6x^3) = \log_2 (-14x^2 + 29x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2 + 29x - 2 > 0 \\ mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{14} < x < 2 \\ m = 6x^2 - 14x + 29 - \frac{2}{x} \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $x \in \left(\frac{1}{14}; 2 \right)$.

Xét hàm số $f(x) = 6x^2 - 14x + 29 - \frac{2}{x}$, $\frac{1}{14} < x < 2$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 12x - 14 + \frac{2}{x^2} = \frac{12x^3 - 14x^2 + 2}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 14x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases} \quad \left(\text{do } \frac{1}{14} < x < 2 \right).$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{98}$	$\frac{39}{2}$	19	24	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (*) có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(\frac{1}{14}; 2\right)$ khi $19 < m < \frac{39}{2}$.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I. ẨN PHỤ KHÔNG THAM SỐ



LÝ THUYẾT.

DẠNG 1: $A.a^{2f(x)} + B.a^{f(x)} + C = 0$ (1)**PHƯƠNG PHÁP GIẢI:****Cách 1:**Đặt $t = a^{f(x)}$ ($t > 0$). Khi đó phương trình (1) trở thành $A.t^2 + B.t + C = 0$. (2)

Giải (2), đối chiếu điều kiện rồi trả lại ẩn cũ ta được các phương trình cơ bản.

Cách 2: $A.a^{2f(x)} + B.a^{f(x)} + C = 0 \Leftrightarrow A.(a^{f(x)})^2 + B.a^{f(x)} + C = 0$. Đây là phương trình dạng bậc hai đối với $a^{f(x)}$, ta có thể tính nhanh nghiệm bằng máy tính.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Giải phương trình sau $8^x - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$ **Câu 2.** Giải phương trình sau $7^{\sqrt{x}} - 7^{1-\sqrt{x}} + 6 = 0$ **Câu 3.** Giải phương trình sau $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ **Câu 4.** Giải phương trình sau $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 10$ **Lời giải****DẠNG 2:** $A.a^x + B.b^x + C.c^x = 0$ (1)**PHƯƠNG PHÁP GIẢI:**Với PT này ta có thể giải theo cách chia cả hai vế của phương trình cho c^x (hoặc b^x hoặc a^x).Khi đó ta được PT $A.\left(\frac{a}{c}\right)^x + B.\left(\frac{b}{c}\right)^x + C = 0$.**Câu 1.** Giải phương trình sau $9^x - 3.6^x + 2.4^x = 0$.**Câu 2.** Giải phương trình sau $2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$ **Câu 3.** Giải phương trình sau $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$

DẠNG 3: $A.\log_a^2 f(x) + B.\log_a f(x) + C = 0$ (1), với $0 < a \neq 1$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Cách 1:

ĐK: $f(x) > 0$

Đặt $t = \log_a f(x)$. Khi đó phương trình (1) trở thành $A.t^2 + B.t + C = 0$. (2)

Giải (2), trả lại ẩn cũ ta được các phương trình cơ bản.

Cách 2: $A.\log_a^2 f(x) + B.\log_a f(x) + C = 0 \Leftrightarrow A.(\log_a f(x))^2 + B.\log_a f(x) + C = 0$.

Đây là phương trình dạng bậc hai đối với $\log_a f(x)$, ta có thể tính nhanh nghiệm bằng máy tính.

Câu 1. Giải phương trình sau $4\log_3^2 \sqrt{x+1} - 6\log_9(x+1) + 2 = 0$

Câu 2. Giải phương trình sau $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 12$

Câu 3. Giải phương trình sau $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) - 2 = 0$

Câu 4. Giải phương trình sau $3\log_x 4 + 4\log_{4x} 2 + 2\log_{16x} 8 = 0$

Câu 5. Giải phương trình sau $5^{\log x} + x^{\log 5} = 50$

Câu 7. Giải phương trình sau $(\sqrt{10} + 1)^{\log_3 x} - (\sqrt{10} - 1)^{\log_3 x} = \frac{2x}{3}$

Câu 8. Giải phương trình sau $(2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} + x(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2$

Câu 9. Giải phương trình sau $7^{x-1} = 6\log_7(6x - 5) + 1$.

DẠNG 4: ẨN PHỤ CÓ THAM SỐ

Câu 1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số thực m để phương trình $9^x - m \cdot 3^x + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $(m+1) \cdot 16^x - 2(2m-3) \cdot 4^x + 6m+5 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

Câu 3. Tìm tất cả giá trị thực của tham số a để phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (1-a)(2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $4^x - 2 \cdot 2^x + 2 = m$ có nghiệm $x \in (-1; 2)$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x + \log_3 x - 2m - 1 = 0$ có nghiệm

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log_5^2 x + \sqrt{\log_5^2 x + 1} - 2m + 1 = 0$ có nghiệm

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $(m+1)25^{\log_2 x} + (m-2)x^{\log_2 5} - 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 4$.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

I. ẨN PHỤ KHÔNG THAM SỐ



LÝ THUYẾT.

DẠNG 1: $A.a^{2f(x)} + B.a^{f(x)} + C = 0$ (1)**PHƯƠNG PHÁP GIẢI:****Cách 1:**Đặt $t = a^{f(x)}$ ($t > 0$). Khi đó phương trình (1) trở thành $A.t^2 + B.t + C = 0$. (2)

Giải (2), đối chiếu điều kiện rồi trả lại ẩn cũ ta được các phương trình cơ bản.

Cách 2: $A.a^{2f(x)} + B.a^{f(x)} + C = 0 \Leftrightarrow A.(a^{f(x)})^2 + B.a^{f(x)} + C = 0$. Đây là phương trình dạng bậc hai đối với $a^{f(x)}$, ta có thể tính nhanh nghiệm bằng máy tính.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Giải phương trình sau $8^x - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$ **Lời giải**

$$(*) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{3}{x}}\right)^2 - 8.2^{\frac{3}{x}} + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{3}{x}} = 2 \\ 2^{\frac{3}{x}} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{3}{\log_2 6} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{3; \frac{3}{\log_2 6}\right\}$ **Câu 2.** Giải phương trình sau $7^{\sqrt{x}} - 7^{1-\sqrt{x}} + 6 = 0$ **Lời giải**

$$(*) \Leftrightarrow 7^{\sqrt{x}} - \frac{7}{7^{\sqrt{x}}} + 6 = 0 \Leftrightarrow (7^{\sqrt{x}})^2 + 6.7^{\sqrt{x}} - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{\sqrt{x}} = 1 \\ 7^{\sqrt{x}} = -7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.**Câu 3.** Giải phương trình sau $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ **Lời giải**

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^x} + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[(\sqrt{2}+1)^x \right]^2 - 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1)^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}+1 \\ (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -1\}$.

Câu 4. Giải phương trình sau $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 10$

Lời giải

$$(*) \Leftrightarrow 9^{\sin^2 x} + \frac{1}{9^{\sin^2 x}} = 10 \Leftrightarrow \left(9^{\sin^2 x} \right)^2 - 10 \cdot 9^{\sin^2 x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{\sin^2 x} = 1 \\ 9^{\sin^2 x} = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

DẠNG 2: $A \cdot a^x + B \cdot b^x + C \cdot c^x = 0$ (1)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Với PT này ta có thể giải theo cách chia cả hai vế của phương trình cho c^x (hoặc b^x hoặc a^x).

Khi đó ta được PT $A \cdot \left(\frac{a}{c} \right)^x + B \cdot \left(\frac{b}{c} \right)^x + C = 0$.

Câu 1. Giải phương trình sau $9^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$.

Lời giải

Chia cả hai vế của phương trình (1) cho 4^x ta được: $\left(\frac{3}{2} \right)^{2x} - 3 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^x + 2 = 0$ (*)

Đặt $t = \left(\frac{3}{2} \right)^x > 0$, (*) trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$.

$$+) t = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$+) t = 2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = \log_{\frac{3}{2}} 2$.

Câu 2. Giải phương trình sau $2^{2x^2+1} - 9 \cdot 2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$

Lời giải

$$(*) \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x^2} - 9 \cdot 2^{x^2+x} + 4 \cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2(x^2-x)} - 9 \cdot 2^{x^2-x} + 4 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = 2^{x^2-x} > 0$ thì phương trình (1) trở thành $2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$.

$$+) t = 4 \Rightarrow 2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$+) t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{x^2-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x = -1 \text{ (PT vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Câu 3. Giải phương trình sau $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$

Lời giải

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^x + 4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^3 + 4 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.

DẠNG 3: $A \cdot \log_a^2 f(x) + B \cdot \log_a f(x) + C = 0$ (1), với $0 < a \neq 1$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Cách 1:

ĐK: $f(x) > 0$

Đặt $t = \log_a f(x)$. Khi đó phương trình (1) trở thành $A \cdot t^2 + B \cdot t + C = 0$. (2)

Giải (2), trả lại ẩn cũ ta được các phương trình cơ bản.

Cách 2: $A \cdot \log_a^2 f(x) + B \cdot \log_a f(x) + C = 0 \Leftrightarrow A \cdot (\log_a f(x))^2 + B \cdot \log_a f(x) + C = 0$.

Đây là phương trình dạng bậc hai đối với $\log_a f(x)$, ta có thể tính nhanh nghiệm bằng máy tính.

Câu 1. Giải phương trình sau $4 \log_3^2 \sqrt{x+1} - 6 \log_3 (x+1) + 2 = 0$

Lời giải

$$(*) \Leftrightarrow \log_3^2 (x+1) - 3 \log_3 (x+1) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 (x+1) = 1 \\ \log_3 (x+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 8 \end{cases}$$

Vậy PT có nghiệm là $x = 2; x = 8$.

Câu 2. Giải phương trình sau $\log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 12$

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$

$$(*) \Leftrightarrow \log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 3(3^x - 1) = 12 \Leftrightarrow \log_3 (3^x - 1) [\log_3 (3^x - 1) + 1] = 12$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 (3^x - 1) + \log_3 (3^x - 1) - 12 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt: } \log_3 (3^x - 1) = t, \text{ phương trình (1) trở thành: } t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$t = -4 \Rightarrow \log_3(3^x - 1) = -4 \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{82}{81} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

$$t = 3 \Rightarrow \log_3(3^x - 1) = 3 \Leftrightarrow x = \log_3 28 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là: } S = \left\{ \log_3 \frac{82}{81}; \log_3 28 \right\}.$$

Câu 3. Giải phương trình sau $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) - 2 = 0$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } x < \frac{1}{3}, x \neq 0$$

$$(*) \Leftrightarrow \log_{1-2x}[(1-2x)(1-3x)] - \log_{1-3x}(1-2x)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_{1-2x}(1-3x) - 2\log_{1-3x}(1-2x) - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_{1-2x}(1-3x) \Rightarrow \log_{1-3x}(1-2x) = \frac{1}{t}.$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t - \frac{2}{t} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -1 \Rightarrow \log_{1-2x}(1-3x) = -1 \Rightarrow \frac{1}{1-2x} = 1-3x \Rightarrow 6x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{6} \end{cases} \text{ (Không thỏa mãn).}$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow \log_{1-2x}(1-3x) = 2 \Rightarrow 1-4x+4x^2 = 1-3x \Leftrightarrow 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện ta thấy nghiệm của PT là } x = \frac{1}{4}.$$

Câu 4. Giải phương trình sau $3\log_x 4 + 4\log_{4x} 2 + 2\log_{16x} 8 = 0$

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } 0 < x \notin \left\{ 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16} \right\}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{6}{\log_2 x} + \frac{4}{\log_2 4x} + \frac{6}{\log_2 16x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\log_2 x} + \frac{2}{2 + \log_2 x} + \frac{3}{4 + \log_2 x} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt: } \log_2 x = t, t \notin \{0; -2; -4\}. \text{ Phương trình (1) trở thành:}$$

$$\frac{3}{t} + \frac{2}{2+t} + \frac{3}{4+t} = 0 \Leftrightarrow 3(2+t)(4+t) + 2t(4+t) + 3t(2+t) = 0 \Leftrightarrow 8t^2 + 32t + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$+) t = -1 \Rightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$+) t = -3 \Rightarrow \log_2 x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{8} \right\}$.

Câu 5. Giải phương trình sau $5^{\log x} + x^{\log 5} = 50$

Lời giải

ĐKXD: $x > 0$. Đặt $t = \log x \Leftrightarrow x = 10^t$. Khi đó ta có (*) trở thành

$$5^t + (10^t)^{\log 5} = 50 \Leftrightarrow 5^t + 5^t = 50 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x = 100.$$

Vậy PT có nghiệm $x = 100$.

Câu 6. Giải phương trình sau $4^{\log 10x} - 6^{\log x} = 2.3^{\log(100x^2)}$

Lời giải

$$(*) \Leftrightarrow 4^{\log 10x} - 6^{\log x} = 2.3^{\log(100x^2)} \Leftrightarrow 4.4^{\log x} - 6^{\log x} = 18.9^{\log x}$$

$$\Leftrightarrow 4.\left(\frac{4}{9}\right)^{\log x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \log x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{100}.$$

Vậy PT có nghiệm $x = \frac{1}{100}$.

Câu 7. Giải phương trình sau $(\sqrt{10} + 1)^{\log_3 x} - (\sqrt{10} - 1)^{\log_3 x} = \frac{2x}{3}$

Lời giải

ĐKXD: $x > 0$

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{10} + 1)^{\log_3 x} - (\sqrt{10} - 1)^{\log_3 x} = \frac{2}{3}.3^{\log_3 x} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10} + 1}{3}\right)^{\log_3 x} - \left(\frac{\sqrt{10} - 1}{3}\right)^{\log_3 x} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{10} + 1}{3}\right)^{\log_3 x}$; $t > 0$ phương trình (1) trở thành:

$$t - \frac{1}{t} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \quad (tm) \\ t = \frac{1 - \sqrt{10}}{3} \quad (l) \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10} + 1}{3}\right)^{\log_3 x} = \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{3\}$.

Câu 8. Giải phương trình sau $(2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} + x(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2$

Lời giải

Điều kiện $x > 0$. Ta có $(2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} \cdot (2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = x$. Đặt $t = (2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} \Rightarrow (2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = \frac{x}{t} (t > 0)$.

Khi đó ta có (*) trở thành $t + \frac{x^2}{t} = 1 + x^2 \Leftrightarrow t(t-1) = (t-1)x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=x^2 \end{cases}$

+ $t=1 \Rightarrow x=1$.

+ $t=x^2 \Rightarrow (2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} = x^2 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_2 (2 + \sqrt{2}) = 2 \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy PT có nghiệm $x=1$.

Câu 9. Giải phương trình sau $7^{x-1} = 6 \log_7 (6x-5) + 1$.

Lời giải

Điều kiện: $x > \frac{5}{6}$.

Đặt $y-1 = \log_7 (6x-5)$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7^{x-1} = 6(y-1) + 1 \\ y-1 = \log_7 (6x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{x-1} = 6y-5 \\ 7^{y-1} = 6x-5 \end{cases} \Rightarrow 7^{x-1} + 6x = 7^{y-1} + 6y \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 7^{t-1} + 6t$ với $t > \frac{5}{6}$ thì $f'(t) = 7^{t-1} \ln 7 + 6 > 0, \forall t > \frac{5}{6} \Rightarrow f(t)$ đồng biến nên

$(2) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ khi đó ta có phương trình $7^{x-1} - 6x + 5 = 0$. (3)

Xét hàm số $g(x) = 7^{x-1} - 6x + 5$ với $x > \frac{5}{6}$ thì $g'(x) = 7^{x-1} \ln 7 - 6 \Rightarrow g''(x) = 7^{x-1} (\ln 7)^2 > 0$

$$\forall x > \frac{5}{6}$$

nên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có không quá hai nghiệm.

Mặt khác $g(1) = g(2) = 0$ nên $x=1$ và $x=2$ là 2 nghiệm của phương trình (3).

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=1$ và $x=2$.

DẠNG 4: ẨN PHỤ CÓ THAM SỐ

Câu 1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số thực m để phương trình $9^x - m \cdot 3^x + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

Lời giải

Đặt $t = 3^x (t > 0)$ thì phương trình trở thành $t^2 - mt + 6 = 0$ (1).

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm dương t_1, t_2 phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 24 > 0 \\ m > 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 2\sqrt{6} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt{6}.$$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $(m+1) \cdot 16^x - 2(2m-3) \cdot 4^x + 6m+5 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$, khi đó phương trình trở thành: $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0$. (*)

Để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu thì phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa

$$\text{mãn } 0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m-3)^2 - (m+1)(6m+5) > 0 \\ (t_1-1)(t_2-1) < 0 \\ t_1+t_2 = \frac{2(2m-3)}{m+1} > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{6m+5}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - 23m + 4 > 0 \\ \frac{6m+5}{m+1} - \frac{2(2m-3)}{m+1} + 1 < 0 \\ \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} m > -\frac{5}{6} \\ m < -1 \end{cases} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-23-\sqrt{561}}{4} < m < \frac{-23+\sqrt{561}}{4} \\ \frac{3m+12}{m+1} < 0 \\ \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-23-\sqrt{561}}{4} < m < \frac{-23+\sqrt{561}}{4} \\ -4 < m < -1 \\ \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -1$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2\}$.

Câu 3. Tìm tất cả giá trị thực của tham số a để phương trình $(2+\sqrt{3})^x + (1-a)(2-\sqrt{3})^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$.

Lời giải

Phương trình: $(2+\sqrt{3})^x + (1-a)(2-\sqrt{3})^x - 4 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right)^x + (1-a) - \frac{4}{(2-\sqrt{3})^x} = 0 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{2x} - 4 \cdot (2+\sqrt{3})^x + 1 - a = 0.$$

Đặt $(2+\sqrt{3})^x = t > 0$ ta có phương trình $t^2 - 4t + 1 - a = 0$. (2)

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\text{dương } t_1, t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 1 + a > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = 1 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < a < 1 \quad (*)$$

Khi đó: $\begin{cases} x_1 = \log_{2+\sqrt{3}} t_1 \\ x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} t_2 \end{cases}$ suy ra $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$

$$\Rightarrow \log_{2+\sqrt{3}} t_1 - \log_{2+\sqrt{3}} t_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2.$$

Mặt khác theo Viet ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - a \end{cases}$ nên $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \end{cases}$

suy ra $a = -2$ thỏa mãn (*). Vậy $a = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $4^x - 2.2^x + 2 = m$ có nghiệm $x \in (-1; 2)$.

Lời giải

Đặt $t = 2^x$; vì $x \in (-1; 2)$ nên $t \in \left(\frac{1}{2}; 4\right)$.

Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 2t + 2 = m$ (*).

PT đã cho có nghiệm $x \in (-1; 2)$ khi và chỉ khi (*) có nghiệm $t \in \left(\frac{1}{2}; 4\right)$.

Xét $f(t) = t^2 - 2t + 2$; $t \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

Ta thấy $f(t)$ liên tục trên $t \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$

Có $f'(t) = 2t - 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

$\underset{t \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]}{\text{Max}} f(t) = f(4) = 10$; $\underset{t \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]}{\text{Min}} f(t) = f(1) = 1$

Từ đó suy ra (*) có nghiệm $t \in \left(\frac{1}{2}; 4\right) \Leftrightarrow 1 < m < 10$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x + \log_3 x - 2m - 1 = 0$ có nghiệm

Lời giải

Đặt $t = \log_3 x$; $t \in (0; 1)$.

Phương trình trở thành: $t^2 + t - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 2m$. (1)

PT đã cho có nghiệm $x \in (1; 3)$ khi và chỉ khi (1) có nghiệm $t \in (0; 1)$.

Xét hàm số: $f(t) = t^2 + t - 1$, với $t \in [0; 1]$

Có: $f'(t) = 2t + 1 > 0 \quad \forall t \in (0; 1) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; 1)$

Phương trình (1) có nghiệm $t \in (0; 1) \Leftrightarrow f(0) < 2m < f(1) \Leftrightarrow -1 < 2m < 1 \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy với $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ thì bài toán được thỏa mãn.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log_5^2 x + \sqrt{\log_5^2 x + 1} - 2m + 1 = 0$ có nghiệm

Lời giải

Đặt $x \in [1; 5^{\sqrt{3}}] \Rightarrow t = \sqrt{\log_5^2 x + 1}; t \in [1; 2]$ phương trình trở thành:

$$t^2 + t - 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2 = 2m. \quad (1)$$

PT đã cho có nghiệm $x \in [1; 5^{\sqrt{3}}]$ khi và chỉ khi (1) có nghiệm $t \in [1; 2]$.

Xét hàm số: $f(t) = t^2 + t + 2 \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 > 0$ với $t \in [1; 2]$, suy ra hàm số luôn đồng biến trên $(1; 2)$

Do đó (1) có nghiệm $t \in [1; 2] \Leftrightarrow f(1) \leq 2m \leq f(2) \Leftrightarrow 4 \leq 2m \leq 8 \Leftrightarrow m \in [2; 4]$.

Vậy với $m \in [2; 4]$ thì phương trình trình có nghiệm trên $[1; 5^{\sqrt{3}}]$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $(m+1)25^{\log_2 x} + (m-2)x^{\log_2 5} - 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 4$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $(m+1)25^{\log_2 x} + (m-2)x^{\log_2 5} - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)25^{\log_2 x} + (m-2)5^{\log_2 x} - 2m + 1 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = 5^{\log_2 x} \quad (t > 0)$

Khi đó phương trình (1) trở thành $(m+1)t^2 + (m-2)t - 2m + 1 = 0 \quad (*)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1 và x_2 phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm t_1 và t_2

$$\text{đương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ (m-2)^2 - 4(m+1)(-2m+1) = 9m^2 > 0 \\ \frac{-(m-2)}{m+1} > 0 \\ \frac{-2m+1}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 0 \\ -1 < m < 2 \\ -1 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -1 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có: $x_1 \cdot x_2 = 4 \Leftrightarrow \log_2 (x_1 \cdot x_2) = 2 \Leftrightarrow \log_2 (x_1) + \log_2 (x_2) = 2$

$$\Leftrightarrow 5^{\log_2 (x_1) + \log_2 (x_2)} = 5^2 \Leftrightarrow 5^{\log_2 (x_1)} \cdot 5^{\log_2 (x_2)} = 25 \Leftrightarrow t_1 \cdot t_2 = 25$$

Áp dụng hệ thức vi-ét cho phương trình $(*)$, ta có:

$$t_1 \cdot t_2 = 25 \Leftrightarrow \frac{-2m+1}{m+1} = 25 \Leftrightarrow -2m+1 = 25m+25 \Leftrightarrow -24 = 27m \Leftrightarrow m = -\frac{24}{27} \quad (t/m).$$

Vậy với giá trị của $m = -\frac{24}{27}$ thì bài toán được thỏa mãn.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

DẠNG 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ, PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP
LOGARIT HÓA.

I LÝ THUYẾT.

I. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LOGARIT HÓA

DẠNG 1: $a^{f(x)} = b$.**Phương pháp giải:** Điều kiện: $1 \neq a > 0$, $b > 0$. Lấy logarit cơ số a cho hai vế, phương trình trở thành: $f(x) = \log_a b$.**DẠNG 2:** $a^{f(x)} = b^{g(x)}$.**Phương pháp giải:** Điều kiện: $1 \neq a > 0$, $b > 0$. Lấy logarit cơ số a cho hai vế phương trình trở thành: $f(x) = g(x) \cdot \log_a b$.**DẠNG 3:** $a^{f(x)} = \frac{b^{g(x)} \cdot c^{h(x)}}{d^{k(x)}}$.**Phương pháp giải:** Điều kiện: $1 \neq a > 0$; $b, c, d > 0$. Lấy logarit cơ số a cho hai vế, phương trình trở thành: $f(x) = g(x) \cdot \log_a b + h(x) \cdot \log_a c - k(x) \cdot \log_a d$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CÓ THAM SỐ:**Câu 1.** Giải phương trình sau: $2^{x^2-2} = \frac{3}{2}$.**Câu 2.** Giải phương trình sau: $7^x \cdot 27^{\frac{x-1}{x}} = 3087$.**Câu 3.** Giải phương trình sau: $4^{\log x \cdot \log_{0,5} x} = \frac{1}{10^{2020} \cdot x^{2018}}$.**Câu 5.** Giải các phương trình sau:

a) $3^{x^2-2} \cdot 4^{\frac{2x-3}{x}} = 18$.

b) $3^{\log_{25}^2(10x)-1} = (2x)^{\log_5 3}$.

c) $2^{x^2-4} \cdot 7^{x-2} = 1$.

d) $5^x - 3^x + 5^{x+1} - 3^{x+1} + 5^{x+2} - 3^{x+3} = 0$.

e) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}} = -2^{2x-1}$

PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ.

Câu 1. Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-2-m}{x-m}} = 15$, m là tham số khác 2.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^{x^2} \cdot 5^{2x+m} = 3$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-2	3	$-\infty$

Cho phương trình $5^{f(x)} \cdot 8^{\frac{2f(x)+2m}{2f(x)+3m+2}} = 100$, m là tham số khác -2 . Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm phân biệt.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP MŨ HÓA.

DẠNG 1: $\log_a f(x) = b$

Phương pháp giải: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương:

Từ phương trình $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$.

DẠNG 2: $\log_a f(x) = g(x)$

Phương pháp giải: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương:

Từ phương trình $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^{g(x)} \end{cases}$.

DẠNG 3: $\log_a f(x) = \log_b g(x)$

Phương pháp giải: Đặt $\log_a f(x) = \log_b g(x) = t \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^t \\ g(x) = b^t \end{cases}$. Khử x trong hệ phương trình

để thu được phương trình theo ẩn t , giải phương trình này tìm t , từ đó tìm x .

PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỨA THAM SỐ.

Câu 1. Giải phương trình sau: $\log_2(2^x - 1) = -2$.

Câu 2. Giải phương trình sau: $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

Câu 3. Giải phương trình sau: $\log_5 x = \log_7(x + 2)$.

Câu 4. Giải phương trình sau: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) = -2$.

Câu 5. Giải phương trình sau: $\log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_3 2$.

Câu 6. Giải phương trình sau: $\log_5(6 - 5^x) = 1 - x$.

Câu 7. Giải phương trình sau: $\log_2(9 - 2^x) = 5^{\log_5(3-x)}$.

Câu 8. Giải phương trình sau: $\log_3|x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5(x^2 - \sqrt{2}x + 2)$.

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3 \left(\frac{9^x}{2} - 2m \cdot 3^x + 6m - \frac{3}{2} \right) = x$

có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2 (4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 8) = x + 1$ có hai nghiệm trái dấu.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(x - 1) \cdot \log(e^{-x} + m) = x - 2$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2019 của tham số m để phương trình $\log_6 (2020x + m) = \log_4 (1010x)$ có nghiệm.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

DẠNG 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ, PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP
LOGARIT HÓA.

I LÝ THUYẾT.

I. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LOGARIT HÓA

DẠNG 1: $a^{f(x)} = b$.**Phương pháp giải:** Điều kiện: $1 \neq a > 0$, $b > 0$. Lấy logarit cơ số a cho hai vế, phương trình trở thành: $f(x) = \log_a b$.**DẠNG 2:** $a^{f(x)} = b^{g(x)}$.**Phương pháp giải:** Điều kiện: $1 \neq a > 0$, $b > 0$. Lấy logarit cơ số a cho hai vế phương trình trở thành: $f(x) = g(x) \cdot \log_a b$.**DẠNG 3:** $a^{f(x)} = \frac{b^{g(x)} \cdot c^{h(x)}}{d^{k(x)}}$.**Phương pháp giải:** Điều kiện: $1 \neq a > 0$; $b, c, d > 0$. Lấy logarit cơ số a cho hai vế, phương trình trở thành: $f(x) = g(x) \cdot \log_a b + h(x) \cdot \log_a c - k(x) \cdot \log_a d$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CÓ THAM SỐ:**Câu 1.** Giải phương trình sau: $2^{x^2-2} = \frac{3}{2}$.**Lời giải**

Lấy logarit cơ số 2 hai vế, phương trình đã cho tương đương:

$$x^2 - 2 = \log_2 \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2 = \log_2 3 - 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 + \log_2 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 + \log_2 3} \\ x = -\sqrt{1 + \log_2 3} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{\sqrt{1 + \log_2 3}; -\sqrt{1 + \log_2 3}\}$.**Câu 2.** Giải phương trình sau: $7^x \cdot 27^{\frac{x-1}{x}} = 3087$.**Lời giải**Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned}
 7^x \cdot 3^{3\left(\frac{x-1}{x}\right)} &= 7^3 \cdot 3^2 \\
 \Leftrightarrow 7^{x-3} \cdot 3^{\frac{x-3}{x}} &= 1 \Leftrightarrow \log_3 \left(7^{x-3} \cdot 3^{\frac{x-3}{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \log_3 7 + \frac{x-3}{x} \log_3 3 = 0 \\
 \Leftrightarrow (x-3) \left(\log_3 7 + \frac{1}{x} \right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{\log_3 7} = -\log_7 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là $S = \{3; -\log_7 3\}$.

Câu 3. Giải phương trình sau: $4^{\log x \cdot \log_{0,5} x} = \frac{1}{10^{2020} \cdot x^{2018}}$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Với điều kiện trên, lấy logarit cơ số 4 cho hai vế của phương trình, ta được phương trình tương đương:

$$\begin{aligned}
 \log x \cdot \log_{0,5} x &= \log_4 \left(10^{2020} \cdot x^{2018} \right)^{-1} \\
 \Leftrightarrow -\log_2 x^{\log x} &= \log_2 \left(10^{2020} \cdot x^{2018} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 \Leftrightarrow \log_2 x^{\log x} &= \log_2 \left(10^{2020} \cdot x^{2018} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \Leftrightarrow x^{\log x} &= 10^{1010} \cdot x^{1009} \\
 \Leftrightarrow \log \left(x^{\log x} \right) &= \log \left(10^{1010} \cdot x^{1009} \right) \\
 \Leftrightarrow \log x \cdot \log x &= 1010 + 1009 \log x \\
 \Leftrightarrow \log^2 x - 1009 \log x - 1010 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = -1 \\ \log x = 1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ x = 10^{1010} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{10}; 10^{1010} \right\}$.

Câu 5. Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 3^{x^2-2} \cdot 4^{\frac{2x-3}{x}} &= 18. & \text{b) } 3^{\log_{25}^2(10x)-1} &= (2x)^{\log_5 3}. & \text{c) } 2^{x^2-4} \cdot 7^{x-2} &= 1. \\
 \text{d) } 5^x - 3^x + 5^{x+1} - 3^{x+1} + 5^{x+2} - 3^{x+3} &= 0. & \text{e) } 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}} &= -2^{2x-1}
 \end{aligned}$$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \neq 0$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned}
 3^{x^2-2} \cdot 2^{2\left(\frac{2x-3}{x}\right)} &= 3^2 \cdot 2^1 \Leftrightarrow 3^{x^2-4} \cdot 2^{\frac{3x-6}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 + \frac{3(x-2)}{x} \log_3 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow (x-2) \left(x + 2 + \frac{3 \log_3 2}{x} \right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + 2x + 3 \log_3 2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2
 \end{aligned}$$

b) Điều kiện: $x > 0$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} 3^{\log_{25}^2(10x)-1} &= (2x)^{\log_5 3} \\ \Leftrightarrow (\log_{25}^2(10x)-1) \cdot \log_5 3 &= \log_5 3 \cdot \log_5 (2x) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_5^2(5 \cdot 2x) - 1 - \log_5 (2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} (\log_5 (2x) + \log_5 5)^2 - 1 - \log_5 (2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_5^2(2x) - \frac{1}{2} \log_5 (2x) - \frac{3}{4} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 (2x) = -1 \\ \log_5 (2x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{1}{5} \\ 2x = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ x = \frac{125}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$2^{x^2-4} \cdot 7^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 + (x-2) \log_2 7 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2+\log_2 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 - \log_2 7 \end{cases}.$$

d) Ta có:

$$\begin{aligned} 5^x - 3^x + 5^{x+1} - 3^{x+1} + 5^{x+2} - 3^{x+3} &= 0 \Leftrightarrow 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+3} \\ \Leftrightarrow (1 + 5^1 + 5^2) 5^x &= (1 + 3^1 + 3^3) 3^x \Leftrightarrow 31 \cdot 5^x = 31 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

e) Ta có:

$$\begin{aligned} 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}} &= -2^{2x-1} \Leftrightarrow 4^x + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 4^x \cdot \frac{3}{2} = 3^{x+\frac{1}{2}} \cdot \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow 4^x \cdot \frac{3}{2} &= 3^{x+\frac{1}{2}} \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{4^x}{4 \cdot 4^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{x+\frac{1}{2}}}{3^2} \Leftrightarrow 4^{x-\frac{3}{2}} = 3^{x-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

PHƯƠNG TRÌNH CÓ THAM SỐ.

Câu 1. Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-2-m}{x-m}} = 15$, m là tham số khác 2.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-2-m}{x-m}} = 3 \cdot 5 \Leftrightarrow 5^{\frac{2x-2-m}{x-m}-1} = 3^{1-(x-1)} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{x-m}} = 3^{2-x}. (*)$$

Lấy logarit cơ số 5 hai vế của (*), ta được

$$\frac{x-2}{x-m} = (2-x) \log_5 3 \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{1}{x-m} + \log_5 3 \right) = 0$$

Với $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn).

$$\text{Với } \frac{1}{x-m} + \log_5 3 = 0 \Leftrightarrow x-m = -\frac{1}{\log_5 3} \Leftrightarrow x = m - \log_3 5 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2; m - \log_3 5\}$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2^{x^2} \cdot 5^{2x+m} = 3$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$.

Lời giải

Lấy logarit cơ số 2 của hai vế phương trình đã cho ta được

$$\log_2(2^{x^2} \cdot 5^{2x+m}) = \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2x+m)\log_2 5 - \log_2 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2\log_2 5)x + m\log_2 5 - \log_2 3 = 0$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$ thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 = 2x_1x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 5 - m\log_2 5 + \log_2 3 > 0 & (1) \\ -2\log_2 5 = 2m\log_2 5 - 2\log_2 3 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{5} = \log_2 \frac{5^m}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{5^m}{3} \Leftrightarrow 5^{m+1} = 3 \Leftrightarrow m = -1 + \log_5 3.$$

Thay $m = -1 + \log_5 3$ vào (1) thấy thỏa mãn. Vậy $m = -1 + \log_5 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-2	3	$-\infty$

Cho phương trình $5^{f(x)} \cdot 8^{\frac{2f(x)+2m}{2f(x)+3m+2}} = 100$, m là tham số khác -2 . Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm phân biệt.

Lời giải

$$\text{Đkxđ: } 2f(x) + 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq -\frac{3m+2}{2}.$$

$$\begin{aligned} 5^{f(x)} \cdot 8^{\frac{2f(x)+2m}{2f(x)+3m+2}} = 100 &\Leftrightarrow 5^{f(x)} \cdot 2^{\frac{6f(x)+6m}{2f(x)+3m+2}} = 5^2 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{f(x)-2} = 2^{\frac{6f(x)+6m}{2f(x)+3m+2}-2} \\ &\Leftrightarrow 5^{f(x)-2} = 2^{\frac{4-2f(x)}{2f(x)+3m+2}} \end{aligned}$$

Lấy logarit cơ số 5 của hai vế phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{2(2-f(x))}{2f(x)+3m+2} \log_5 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ 1 = \frac{-2}{2f(x)+3m+2} \log_5 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 & (1) \\ 2f(x) + 3m + 2 = -2 \log_5 2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Với $m \neq -2$ thì phương trình (1) và (2) luôn thỏa mãn điều kiện xác định.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt. Để phương trình ban đầu có đúng 7 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) thỏa mãn điều kiện xác định và có 3 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1).

Dựa vào bảng biến thiên để phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt thì

$$\frac{-2\log_5 2 - 2 - 3m}{2} = -2 \Leftrightarrow m = \frac{2 - 2\log_5 2}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy $m = \frac{2 - 2\log_5 2}{3}$ thì phương trình đã cho có 7 nghiệm.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP MŨ HÓA.

DẠNG 1: $\log_a f(x) = b$

Phương pháp giải: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương:

$$\text{Từ phương trình } \log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}.$$

DẠNG 2: $\log_a f(x) = g(x)$

Phương pháp giải: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương:

$$\text{Từ phương trình } \log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^{g(x)} \end{cases}.$$

DẠNG 3: $\log_a f(x) = \log_b g(x)$

Phương pháp giải: Đặt $\log_a f(x) = \log_b g(x) = t \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^t \\ g(x) = b^t \end{cases}$. Khử x trong hệ phương trình

để thu được phương trình theo ẩn t, giải phương trình này tìm t, từ đó tìm x.

PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỨA THAM SỐ.

Câu 1. Giải phương trình sau: $\log_2(2^x - 1) = -2$.

Lời giải

Điều kiện: $2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_2(2^x - 1) = -2 &\Leftrightarrow 2^x - 1 = 2^{-2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \log_2 5 - \log_2 4 \\ &\Leftrightarrow x = -2 + \log_2 5 \text{ (tm)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -2 + \log_2 5$.

Câu 2. Giải phương trình sau: $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

Lời giải

Điều kiện: $3^x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2\log_3 2$.

$$\text{Ta có: } \log_3(3^x - 8) = 2 - x \Leftrightarrow 3^x - 8 = 3^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = -1 \text{ (vn)} \\ 3^x = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Câu 3. Giải phương trình sau: $\log_5 x = \log_7(x + 2)$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có: } \log_5 x = \log_7(x + 2) = t \Rightarrow \begin{cases} \log_5 x = t \\ \log_7(x + 2) = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^t \\ x + 2 = 7^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^t & (1) \\ 5^t + 2 = 7^t & (2) \end{cases}.$$

Từ phương trình (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t = 1$.

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{5}{7}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t, \forall t \in \mathbb{R}$.

$f'(t) = \left(\frac{5}{7}\right)^t \ln \frac{5}{7} + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t \ln \frac{1}{7} < 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(t) = 1 \Leftrightarrow f(t) = f(1)$ nên $t = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2).

Thay $t = 1$ vào phương trình (1) ta có $x = 5$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 5$.

Câu 4. Giải phương trình sau: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) = -2$.

Lời giải

Điều kiện $6^{x+1} - 36^x > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 2x \Leftrightarrow x < 1$.

Ta có $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) = -2 \Leftrightarrow -2 \log_5 (6^{x+1} - 36^x) = -2 \Leftrightarrow 6^{x+1} - 36^x - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 6^{2x} - 6 \cdot 6^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 1 \\ 6^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_6 5 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ hoặc $x = \log_6 5$.

Câu 5. Giải phương trình sau: $\log_3 (3^{x+1} - 1) = 2x + \log_3 2$.

Lời giải

Điều kiện: $3^{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Ta có : $\log_3 (3^{x+1} - 1) = 2x + \log_3 2 \Leftrightarrow \log_3 (3^{x+1} - 1) - \log_3 2 = 2x \Leftrightarrow \log_3 \frac{(3^{x+1} - 1)}{2} = 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{x+1} - 1}{2} = 3^{2x} \Leftrightarrow 3^{x+1} - 1 = 2 \cdot 3^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_3 \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ hoặc $x = \log_3 \frac{1}{2}$.

Câu 6. Giải phương trình sau: $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x$.

Lời giải

Điều kiện : $6 - 5^x > 0 \Leftrightarrow 5^x < 6 \Leftrightarrow x < \log_5 6$.

Ta có $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x \Leftrightarrow 6 - 5^x = 5^{1-x} \Leftrightarrow 6 - 5^x = \frac{5}{5^x}$

$$\Leftrightarrow -5^{2x} + 6 \cdot 5^x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (tm) \\ x = 1 (tm) \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Câu 7. Giải phương trình sau: $\log_2 (9 - 2^x) = 5^{\log_5 (3-x)}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 9 - 2^x > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \log_2(9 - 2^x) = 5^{\log_5(3-x)} \Leftrightarrow \log_2(9 - 2^x) = 3 - x$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2^x = \frac{8}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8 \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(l) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

Câu 8. Giải phương trình sau: $\log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2)$.

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } \log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2)$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 - \sqrt{2}x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } \log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2) = t \Rightarrow \begin{cases} |x^2 - \sqrt{2}x| = 3^t & (1) \\ x^2 - \sqrt{2}x + 2 = 5^t & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2) thay vào (1) ta được: } |5^t - 2| = 3^t$$

$$\text{Trường hợp 1: Xét } 5^t - 2 = 3^t \Leftrightarrow 5^t = 3^t + 2 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^t + 2\left(\frac{1}{5}\right)^t \quad (3)$$

Dễ thấy phương trình (3) có nghiệm $t = 1$.

Vì xét hàm số $f(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^t + 2\left(\frac{1}{5}\right)^t$ có $f'(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{3}{5} + 2\left(\frac{1}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{1}{5} < 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, do đó $t = 1$ là nghiệm duy nhất của (3).

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta có: } x^2 - \sqrt{2}x = 3 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{14} + \sqrt{2}}{2} \end{cases} (tm).$$

$$\text{Trường hợp 2: } |5^t - 2| = -3^t \Leftrightarrow 5^t = 2 - 3^t \Leftrightarrow 5^t + 3^t = 2 \quad (4)$$

Tương tự như trường hợp 1, ta có $t = 0$ là nghiệm duy nhất của (4)

Với $t = 0$, ta có: $x^2 - \sqrt{2}x = -1 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$ - phương trình vô nghiệm

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm là } x = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{2}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-\sqrt{14} + \sqrt{2}}{2}.$$

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3 \left(\frac{9^x}{2} - 2m \cdot 3^x + 6m - \frac{3}{2} \right) = x$

có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_3 \left(\frac{9^x}{2} - 2m \cdot 3^x + 6m - \frac{3}{2} \right) = x \Leftrightarrow \frac{9^x}{2} - 2m \cdot 3^x + 6m - \frac{3}{2} = 3^x$$

$$\Leftrightarrow 9^x - 2(2m + 1) \cdot 3^x + 3(4m - 1) = 0$$

Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$) thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$ (1)

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 3(4m-1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 4m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó} \begin{cases} t = 4m-1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x_1} = 4m-1 \\ 3^{x_2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \log_3(4m-1) \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Ta có $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12 \Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m = \frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_2(4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 8) = x + 1$ có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_2(4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 8) = x + 1 &\Leftrightarrow 4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 8 = 2^{x+1} \\ &\Leftrightarrow 4^x - 2(m+1) \cdot 2^x + 3m - 8 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, \text{ ta có phương trình } t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0 \quad (1)$$

Với $x_1 < 0 < x_2$ thì $0 < 2^{x_1} < 1 < 2^{x_2}$, nên phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm t_1, t_2 sao cho $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = m(2t - 3) \quad (2).$$

$$\text{Vì } t = \frac{3}{2} \text{ không là nghiệm phương trình (2) nên: } (2) \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t - 8}{2t - 3} = m \quad (3).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 - 2t - 8}{2t - 3}, \text{ với } 0 < t \neq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{2t^2 - 6t + 22}{(2t - 3)^2} > 0 \text{ với } 0 < t \neq \frac{3}{2}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+		+
$f(t)$	$\frac{8}{3}$	9	$+\infty$	$+\infty$

Phương trình (1) có hai nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm

$0 < t_1 < 1 < t_2$. Từ bảng biến thiên ta suy ra giá trị cần tìm của m là $\frac{8}{3} < m < 9$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(x-1) \cdot \log(e^{-x} + m) = x-2$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

Vì $x=1$ không là nghiệm nên phương trình :

$$(x-1) \cdot \log(e^{-x} + m) = x-2 \Leftrightarrow \log(e^{-x} + m) = \frac{x-2}{x-1} \Leftrightarrow e^{-x} + m = 10^{\frac{x-2}{x-1}} \Leftrightarrow m = 10^{\frac{x-2}{x-1}} - e^{-x}.$$

Đặt $y = g(x) = 10^{\frac{x-2}{x-1}} - e^{-x}$.

Ta có: $y' = \frac{1}{(x-1)^2} 10^{\frac{x-2}{x-1}} \ln 10 + e^{-x} > 0, \forall x \neq 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		+	
y	$-\infty$		$+\infty$	$-\frac{1}{e}$	10

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt khi $-\frac{1}{e} < m < 10$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2019 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x+m) = \log_4(1010x)$ có nghiệm.

Lời giải

Đặt $\log_6(2020x+m) = \log_4(1010x) = t \Rightarrow \begin{cases} 2020x+m = 6^t \\ 1010x = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 4^t + m = 6^t \Leftrightarrow m = -2 \cdot 4^t + 6^t$.

Đặt $f(t) = -2 \cdot 4^t + 6^t$. Ta có: $f'(t) = 6^t \ln 6 - 2 \cdot 4^t \cdot \ln 4$.

Xét $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{2 \ln 4}{\ln 6} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \log_6 16 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	0	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right)$	$+\infty$

Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right) \approx -2,01$.

Mà $\begin{cases} m < 2019 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên ta có: $\begin{cases} -2 \leq m \leq 2018 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Vậy có 2021 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

DẠNG 5: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ, ĐÁNH GIÁ.



LÝ THUYẾT.

I. DÙNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT MŨ

Dựa vào các tính chất sau

Tính chất 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = k$ có không quá một nghiệm trên $(a; b)$ và $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \forall u, v \in (a; b)$.

Tính chất 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì phương trình $f(x) = m$ có không quá một nghiệm trên D .

Tính chất 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến); hàm số $y = g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì phương trình: $f(x) = g(x)$ có không quá một nghiệm trên D .

Tính chất 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp k liên tục trên $(a; b)$. Nếu phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có đúng m nghiệm thì phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m + 1$ nghiệm.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Giải các phương trình: $(\sqrt{15})^x + 1 = 4^x$

Câu 2. Giải các phương trình: $x + \sqrt{x^2 + 1} = 5^x$

Câu 3. Giải các phương trình: $3 \cdot 4^x + (3x - 10)2^x + 3 - x = 0$

Câu 4. Giải các phương trình: $3^x + 2^x = 3x + 2$

Câu 5. Giải các phương trình: $\log_5 x + 2x - 11 = 0$

Câu 6. Giải phương trình: $\log_2 (x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$

Câu 7. Giải phương trình: $\log_2^2 x + (x - 1)\log_2 x + 2x = 6$

Câu 8. Giải phương trình $\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 4} = x^2 - 4x + 1$.

Câu 9. Giải phương trình: $\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0$.

II. DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT - MŨ

Tóm tắt phương pháp

Cho các biểu thức $f(x)$, $g(x)$ xác định trên tập D .

Nếu $f(x) \leq a$ và $g(x) \geq a$ với mọi $x \in D$ thì $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) = a \\ x \in D \end{cases}$.

Câu 1. Giải phương trình $2^{x^2+1} = 2 - \sqrt{x}$.

Câu 2. Giải phương trình $\log_3(9 - \sqrt{x-1}) = \log_2(x^2 - 2x + 5)$.

III. BÀI TOÁN ĐỊNH M TRONG PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT MŨ.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m^3 \cdot 8^x + m2^{1+x} = x^3 + 2x$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 5]$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

DẠNG 5: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ, ĐÁNH GIÁ.



LÝ THUYẾT.

I. DÙNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT MŨ

Dựa vào các tính chất sau

Tính chất 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = k$ có không quá một nghiệm trên $(a; b)$ và $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \forall u, v \in (a; b)$.

Tính chất 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì phương trình $f(x) = m$ có không quá một nghiệm trên D .

Tính chất 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến); hàm số $y = g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì phương trình: $f(x) = g(x)$ có không quá một nghiệm trên D .

Tính chất 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp k liên tục trên $(a; b)$. Nếu phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có đúng m nghiệm thì phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m + 1$ nghiệm.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Giải các phương trình: $(\sqrt{15})^x + 1 = 4^x$

Lời giải

$$(\sqrt{15})^x + 1 = 4^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x = 1 \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^x \cdot \ln \frac{\sqrt{15}}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{4} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy f là hàm số nghịch biến, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $(*)$ nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của $(*)$.

Vậy phương trình cho có $S = \{2\}$.

Câu 2. Giải các phương trình: $x + \sqrt{x^2 + 1} = 5^x$

Lời giải

Nhận xét: $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| \geq x - x \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = 5^x$$

$$\Leftrightarrow \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x \ln 5 = 0$$

Xét hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x \ln 5$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \ln 5 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ là hàm nghịch biến, liên tục trên } \mathbb{R}.$$

Hơn nữa $f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Vậy phương trình cho có $S = \{0\}$.

Câu 3. Giải các phương trình: $3 \cdot 4^x + (3x - 10)2^x + 3 - x = 0$

Lời giải

Đặt $t = 2^x, t > 0$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } 3t^2 + (3x - 10)t + 3 - x = 0 \quad (1)$$

Ta xem (1) là phương trình bậc hai ẩn t và x là tham số.

$$\text{Phương trình này có: } \Delta = (3x - 10)^2 - 12(3 - x) = (3x - 8)^2$$

$$(1) \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \text{ hay } t = -x + 3.$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\log_2 3$$

Với $t = -x + 3 \Leftrightarrow 2^x + x = 3 \Leftrightarrow x = 1$ (Do $VT = f(x) = 2^x + x$ là hàm số đồng biến, liên tục trên $\mathbb{R}$ nên phương trình có tối đa một nghiệm và $f(1) = 3$)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = -\log_2 3; x = 1$.

Câu 4. Giải các phương trình: $3^x + 2^x = 3x + 2$

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3^x + 2^x - 3x - 2$ trên $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 - 3$$

$$f''(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^2 + 2^x \cdot (\ln 2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \text{ là hàm đồng biến, liên tục trên } \mathbb{R} \text{ nên}$$

$$f'(x) = 0 \text{ có nhiều nhất một nghiệm trên } \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

Mà ta thấy $f(1) = f(0) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Vậy $S = \{0; 1\}$.

Câu 5. Giải các phương trình: $\log_5 x + 2x - 11 = 0$

Lời giải

Điều kiện $x > 0$, phương trình cho viết lại $\log_5 x = -2x + 11$.

Xét $f(x) = \log_5 x$ và $g(x) = -2x + 11$ trên khoảng $(0; +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 5} + 2 > 0$, $\forall x > 0$ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến, liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$

và $g'(x) = -2 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến, liên tục trên $(0; +\infty)$.

Vậy phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa một nghiệm trên $(0; +\infty)$.

Mà $f(5) = g(5)$ nên $x = 5$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Câu 6. Giải phương trình: $\log_2(x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_6 x \Rightarrow x = 6^t$.

PT đã cho trở thành: $6^t + 3^t = 2^t$, chia cả 2 vế cho 2^t ta được $3^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 \Leftrightarrow 3^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1$ có $f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 + \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(-1) = 0$ nên phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất là $t = -1$ tức $x = \frac{1}{6}$.

Vậy phương trình cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{6}$.

Câu 7. Giải phương trình: $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x + 2x = 6$

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, phương trình cho trở thành $t^2 + (x-1)t + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t+x-3) = 0$.

+ Với $t = -2$ thì $x = \frac{1}{4}$.

+ Với $t = 3 - x$ ta có: $\log_2 x = 3 - x$ (*)

Ta xét $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 3 - x$ với $x > 0$.

Hàm số $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $g(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Lại có: $f(2) = g(2)$ nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Vậy phương trình cho có nghiệm $x = \frac{1}{4}$ và $x = 2$.

Câu 8. Giải phương trình $\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 4} = x^2 - 4x + 1$.

Lời giải

Vì $3x^2 - 5x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên điều kiện của phương trình là $x^2 + 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -1 \end{cases}$.

Ta có $\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 4} = x^2 - 4x + 1$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3x + 2) - \log_2 (3x^2 - 5x + 4) = \frac{1}{2} [(3x^2 - 5x + 4) - (x^2 + 3x + 2)]$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{2} (x^2 + 3x + 2) = \log_2 (3x^2 - 5x + 4) + \frac{1}{2} (3x^2 - 5x + 4) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + \frac{1}{2}t$ trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + \frac{1}{2} > 0; \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + 3x + 2) = f(3x^2 - 5x + 4)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 4 = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$.

Câu 9. Giải phương trình: $\ln \left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2} \right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0$.

Lời giải

Điều kiện $x > -\frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương $\ln(5^x + 3^x) - \ln(6x + 2) + 5(5^x + 3^x) - 5(6x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(5^x + 3^x) + 5(5^x + 3^x) = \ln(6x + 2) + 5(6x + 2) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + 5t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t} + 5 > 0, \forall t > 0$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Từ (1) ta thấy $f(5^x + 3^x) = f(6x + 2) \Leftrightarrow 5^x + 3^x = 6x + 2 \Leftrightarrow 5^x + 3^x - 6x - 2 = 0$

Xét $g(x) = 5^x + 3^x - 6x - 2$, ta có

$$g'(x) = 5^x \ln 5 + 3^x \ln 3 - 6, \quad g''(x) = 5^x (\ln 5)^2 + 3^x (\ln 3)^2 > 0, \forall x > -\frac{1}{3}$$

và $g'(x)$ liên tục trên $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Nên $g'(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm trên $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ suy ra $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm trên $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Mà $g(0) = g(1) = 0$.

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{0; 1\}$.

II. DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT - MŨ

Tóm tắt phương pháp

Cho các biểu thức $f(x)$, $g(x)$ xác định trên tập D .

Nếu $f(x) \leq a$ và $g(x) \geq a$ với mọi $x \in D$ thì $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) = a \\ x \in D \end{cases}$.

Câu 1. Giải phương trình $2^{x^2+1} = 2 - \sqrt{x}$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Đánh giá: Với $x \geq 0$ thì $x^2 + 1 \geq 1$ và $\sqrt{x} \geq 0$ nên $\begin{cases} 2^{x^2+1} \geq 2 \\ 2 - \sqrt{x} \leq 2 \end{cases}$.

Do đó phương trình đã cho tương đương: $\begin{cases} 2^{x^2+1} = 2 \\ 2 - \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 2. Giải phương trình $\log_3(9 - \sqrt{x-1}) = \log_2(x^2 - 2x + 5)$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 9 - \sqrt{x-1} > 0 \\ x^2 - 2x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 < 81 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 82$.

Đánh giá: Với $1 \leq x < 82$ thì $9 - \sqrt{x-1} \leq 9$ và $x^2 - 2x + 5 \geq 4$ nên

$\begin{cases} \log_3(9 - \sqrt{x-1}) \leq \log_3 9 = 2 \\ \log_2(x^2 - 2x + 5) \geq \log_2 4 = 2 \end{cases}$.

Do đó phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} \log_3(9 - \sqrt{x-1}) = 2 \\ \log_2(x^2 - 2x + 5) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

III. BÀI TOÁN ĐỊNH M TRONG PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT MŨ.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m^3 \cdot 8^x + m2^{1+x} = x^3 + 2x$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 5]$.

Lời giải

$$m^3 \cdot 8^x + m2^{1+x} = x^3 + 2x$$

$$\Leftrightarrow (m \cdot 2^x)^3 + 2(m \cdot 2^x) = x^3 + 2x \quad (1)$$

$$\text{Xét } f(t) = t^3 + 2t$$

$$f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \text{ với } \forall t \in \mathbb{R} \text{ suy ra } f(t) \text{ là hàm đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Khi đó, phương trình (1) tương đương với } m \cdot 2^x = x \Leftrightarrow m = \frac{x}{2^x}.$$

$$\text{Xét: } g(x) = \frac{x}{2^x} \text{ với } x \in [2; 5].$$

$$\text{Có } g'(x) = \frac{1 - x \ln 2}{2^x} < 0 \quad \forall x \in [2; 5].$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ là hàm nghịch biến trên } [2; 5].$$

$$\text{Suy ra để phương trình (1) có nghiệm thì } g(5) \leq m = g(x) \leq g(2) \Leftrightarrow \frac{5}{32} \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{5}{32} \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 + 2mx + 2 \\ v = 2x^2 + 4mx + m + 2 \end{cases} \Rightarrow v - u = x^2 + 2mx + m.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } 5^u - 5^v = v - u \Leftrightarrow 5^u + u = 5^v + v \quad (*)$$

$$\text{Vì hàm số } f(t) = 5^t + t \text{ là hàm đồng biến nên phương trình } (*) \Leftrightarrow u = v$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0.$$

$$\text{Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hay } m > 1.$$

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } 3x^2 + 3x + m + 1 > 0.$$

$$\text{Ta có: } \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x + 2 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{4x^2 - 2x + 2} = x^2 - 5x + 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2 (4x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2 (4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = t + \log_2 t \text{ trên } D = (0; +\infty), \text{ có } f'(t) = 1 + \frac{1}{t \cdot \ln 2} > 0, \quad \forall t \in D$$

$$\text{Do đó hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } D$$

$$(1) \Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1 \cdot$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2).$$

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 5x$ trên $\mathbb{R}$, có $g'(x) = 2x - 5 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1		$5/2$		$+\infty$
y'	-	0	-	0	+	
y	$+\infty$					$+\infty$

Theo bảng biến thiên ta thấy: phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ

$$\text{khi } -\frac{25}{4} < m - 1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4\}$, hay có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

- Câu 1:** (MĐ 101-2022) Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 3^{2-x}$ là
 A. $x = \frac{1}{3}$. B. 0. C. $x = -1$. D. $x = 1$.
- Câu 2:** (MĐ 102-2022) Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 3^{2-x}$ là
 A. $x = \frac{1}{3}$. B. $x = 0$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.
- Câu 3:** (MĐ 103-2022) Số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2+1} = 4$ là
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 4:** (MĐ 104-2022) Số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2+1} = 4$ là
 A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.
- Câu 5:** (MĐ 103-2022) Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 0$ là
 A. $x = \frac{3}{4}$. B. $x = 1$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = \frac{2}{3}$.
- Câu 6:** (MĐ 104-2022) Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 0$ là
 A. $x = 1$. B. $x = \frac{3}{4}$. C. $x = \frac{2}{3}$. D. $x = \frac{1}{2}$.
- Câu 7:** (TK 2020-2021) Nghiệm của phương trình $5^{2x-4} = 25$ là:
 A. $x = 3$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.
- Câu 8:** (TK 2020-2021) Nghiệm của phương trình $\log_2(3x) = 3$ là:
 A. $x = 3$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{8}{3}$. D. $x = \frac{1}{2}$.
- Câu 9:** (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Nghiệm của phương trình $\log_5(3x) = 2$ là
 A. $x = 25$. B. $x = \frac{32}{3}$. C. $x = 32$. D. $x = \frac{25}{3}$.
- Câu 10:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Tập nghiệm của bất phương trình: $2^x > 3$ là
 A. $(\log_3 2; +\infty)$. B. $(-\infty; \log_2 3)$. C. $(-\infty; \log_3 2)$. D. $(\log_2 3; +\infty)$.
- Câu 11:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Nghiệm của phương trình $\log_3(2x) = 2$ là

- A. $x = \frac{9}{2}$. B. $x = 9$. C. $x = 4$. D. $x = 8$.

Câu 12: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Nghiệm của phương trình $\log_2(5x) = 3$ là:

- A. $x = \frac{8}{5}$. B. $x = \frac{9}{5}$. C. $x = 8$. D. $x = 9$.

Câu 13: Nghiệm của phương trình $5^x = 3$ là:

- A. $x = \sqrt[3]{5}$. B. $x = \frac{3}{5}$. C. $x = \log_3 5$. D. $x = \log_5 3$.

Câu 14: Nghiệm của phương trình $5^x = 2$ là:

- A. $x = \log_2 5$. B. $x = \log_5 2$. C. $x = \frac{2}{5}$. D. $x = \sqrt{5}$

Câu 15: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Nghiệm của phương trình $7^x = 2$ là

- A. $x = \log_2 7$. B. $x = \log_7 2$. C. $x = \frac{2}{7}$. D. $x = \sqrt{7}$.

Câu 16: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Nghiệm của phương trình $7^x = 3$ là

- A. $x = \frac{3}{7}$. B. $x = \sqrt[3]{7}$. C. $x = \log_7 3$. D. $x = \log_3 7$.

Câu 17: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1) = 2$ là:

- A. $x = 3$. B. $x = 5$. C. $x = \frac{9}{2}$. D. $x = \frac{7}{2}$.

Câu 18: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1) = 2$ là

- A. $x = 8$. B. $x = 9$. C. $x = 7$. D. $x = 10$.

Câu 19: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$ là

- A. $x = 10$. B. $x = 8$. C. $x = 9$. D. $x = 7$.

Câu 20: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_2(x-2) = 3$ là:

- A. $x = 6$. B. $x = 8$. C. $x = 11$. D. $x = 10$.

Câu 21: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2) = 2$ là

- A. $x = 11$. B. $x = 10$. C. $x = 7$. D. 8.

Câu 22: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+9) = 5$ là

- A. $x = 41$. B. $x = 23$. C. $x = 1$. D. $x = 16$.

Câu 23: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+6) = 5$ là:

- A. $x = 4$. B. $x = 19$. C. $x = 38$. D. $x = 26$.

Câu 24: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+7) = 5$ là

- A. $x = 18$. B. $x = 25$. C. $x = 39$. D. $x = 3$.

Câu 25: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+8) = 5$ bằng

- A. $x = 17$. B. $x = 24$. C. $x = 2$. D. $x = 40$.

Câu 26: (Đề Tham Khảo 2019) Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$ là :

- A. $\{0\}$ B. $\{0;1\}$ C. $\{-1;0\}$ D. $\{1\}$

Câu 27: (Đề Minh Họa 2017) Giải phương trình $\log_4(x-1) = 3$.

- A. $x = 65$ B. $x = 80$ C. $x = 82$ D. $x = 63$

Câu 28: (Mã 110 2017) Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1-x)=2$.

- A. $x=5$. B. $x=-3$. C. $x=-4$. D. $x=3$.

Câu 29: (Mã 102 2018) Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-1)=3$ là

- A. $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$ B. $\{-3; 3\}$ C. $\{-3\}$ D. $\{3\}$

Câu 30: (Mã 104 2017) Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-5)=4$.

- A. $x=11$ B. $x=13$ C. $x=21$ D. $x=3$

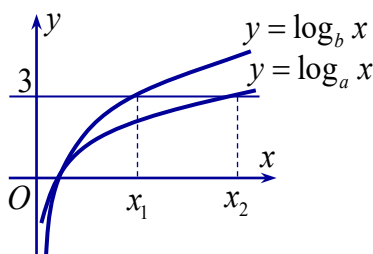
Câu 31: (Mã 103 2018) Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-7)=2$ là

- A. $\{4\}$ B. $\{-4\}$ C. $\{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\}$ D. $\{-4; 4\}$

Câu 32: (Mã 105 2017) Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x+1)=\frac{1}{2}$.

- A. $x=6$ B. $x=4$ C. $x=\frac{23}{2}$ D. $x=-6$

Câu 33: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình bên.



Đường thẳng $y=3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là $x_1; x_2$. Biết rằng $x_1=2x_2$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. 2. D. $\sqrt[3]{2}$.

Câu 34: (Đề Tham Khảo 2017) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=3$.

- A. $S=\{3\}$ B. $S=\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$ C. $S=\{-3; 3\}$ D. $S=\{4\}$

Câu 35: (Mã 103 - 2019) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)$ là

- A. $x=1$. B. $x=2$. C. $x=-1$. D. $x=3$.

Câu 36: (Mã 105 2017) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$.

- A. $S=\{3\}$ B. $S=\{4\}$ C. $S=\{1\}$ D. $S=\{-2\}$

Câu 37: (Mã 101 - 2019) Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$

- A. $x=4$. B. $x=2$. C. $x=3$. D. $x=-3$.

Câu 38: (Mã 104 - 2019) Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$ là

- A. $x=4$. B. $x=-2$. C. $x=1$. D. $x=2$.

Câu 39: (Mã 102 -2019) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)=1+\log_2(x-1)$ là

- A. $x=3$. B. $x=2$. C. $x=1$. D. $x=-2$.

Câu 40: (Mã 110 2017) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=1$.

- A. $S=\{3\}$ B. $S=\{2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}\}$

C. $S = \{2 + \sqrt{5}\}$

D. $S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

Câu 41: (Đề Tham Khảo 2018) Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$ bằng

- A. 0. B. $\frac{80}{9}$. C. 9. D. $\frac{82}{9}$.

Câu 42: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$ là

- A. $x = 4$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Câu 43: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 9$ là:

- A. $x = -2$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = -3$.

Câu 44: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $3^{x-2} = 9$ là

- A. $x = -3$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = -4$.

Câu 45: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $3^{x+1} = 9$ là

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = -2$. D. $x = -1$.

Câu 46: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $3^{x+2} = 27$ là

- A. $x = -2$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Câu 47: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $2^{2x-4} = 2^x$ là

- A. $x = 16$. B. $x = -16$. C. $x = -4$. D. $x = 4$.

Câu 48: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $2^{2x-3} = 2^x$ là

- A. $x = 8$. B. $x = -8$. C. $x = 3$. D. $x = -3$.

Câu 49: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $2^{2x-2} = 2^x$ là

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = -4$. D. $x = 4$.

Câu 50: (Mã 101 - 2019) Nghiệm của phương trình: $3^{2x-1} = 27$ là

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = 4$. D. $x = 5$.

Câu 51: (Mã 102 - 2019) Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 52: (Mã 104 2018) Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{5}{2}$ B. $x = 1$ C. $x = 3$ D. $x = \frac{3}{2}$

Câu 53: (Mã 101 2018) Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

- A. $x = 3$ B. $x = \frac{5}{2}$ C. $x = 2$ D. $x = \frac{3}{2}$

Câu 54: (Mã 104 - 2019) Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 32$ là

- A. $x = 2$. B. $x = \frac{17}{2}$. C. $x = \frac{5}{2}$. D. $x = 3$.

Câu 55: (Mã 103 - 2019) Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 8$ là

- A. $x = 2$. B. $x = \frac{5}{2}$. C. $x = 1$. D. $x = \frac{3}{2}$.

Câu 56: (Mã 104 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

- A. $m \geq 1$ B. $m \geq 0$ C. $m > 0$ D. $m \neq 0$

Câu 57: (Mã 110 2017) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$.

B. $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$

D. $S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

Câu 58: (Mã 104 2017) Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

D. $S_{\min} = 33$

Câu 59: (Đề tham khảo 2017) Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

D. 4

Câu 60: (Mã 123 2017) Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$ ta được phương trình nào sau đây

D. $t^2 + 2t - 3 = 0$

Câu 61: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ là

D. $[2; +\infty)$.

Câu 62: (Mã 102 2019) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

D. Vô số.

Câu 63: (Mã 103 2019) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (5x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

D. 5.

Câu 64: (Mã 101 - 2019) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (3x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

D. Vô số.

Câu 65: (Mã 104 2019) Cho phương trình $\log_9 x^2 - 4\log_3(4x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

D. 4.

Câu 66: (Đề Tham Khảo 2017) Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

D. 2017.

Câu 67: (Mã 101 2018) Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

D. 3

Câu 68: (Mã 104 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

A. $m = 3$ B. $m = 1$ C. $m = 6$ D. $m = -3$

Câu 69: (Mã 102 2018) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 7 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 70: (Mã 103 2018) Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 2 B. 1 C. 3 D. 5

Câu 71: (Mã 110 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt

A. $m \in (0; +\infty)$ B. $m \in (-\infty; 1)$ C. $m \in (0; 1]$ D. $m \in (0; 1)$

Câu 72: (Mã 104 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 5 B. 8 C. 4 D. 19

Câu 73: (Đề Tham Khảo 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2) \cdot 9^x = 0$ có nghiệm dương?

A. 2 B. 4 C. 3 D. 1

Câu 74: (Mã 103 -2019) Cho phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. Vô số. B. 124. C. 123. D. 125.

Câu 75: (Mã 102 - 2019) Cho phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. vô số. B. 81. C. 79. D. 80.

Câu 76: (Mã 104 2019) Cho phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{4^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 64. B. Vô số. C. 62. D. 63.

Câu 77: (Mã 101 2019) Cho phương trình $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 49. B. 47. C. Vô số. D. 48.

Câu 78: (Mã 102 2018) Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 15 B. 16 C. 9 D. 14

Câu 79: (Mã 101 2018) Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 19 B. 9 C. 21 D. 20

Câu 80: (Mã 103 -2018) Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9 B. 25 C. 24 D. 26

- Câu 81:** (Mã 104 2018) Cho phương trình $2^x + m = \log_2(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-18; 18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?
A. 9 B. 19 C. 17 D. 18

Câu 82: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x + 3) + x = 2y + 9^y$?
A. 2019. B. 6. C. 2020. D. 4.

Câu 83: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x + y) = \log_4(x^2 + y^2)$?
A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Câu 84: (Mã 103 – 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m; n)$ sao cho $m + n \leq 10$ và ứng với mỗi cặp $(m; n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?
A. 7. B. 8. C. 10. D. 9.

Câu 85: (Mã 101 – 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 14$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng ba số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?
A. 14. B. 12. C. 11. D. 13.

Câu 86: (Mã 104 – 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $m + n \leq 12$ và ứng với mỗi cặp (m, n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1, 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$?
A. 12. B. 10. C. 11. D. 9.

Câu 87: (TK 2020-2021) Có bao nhiêu số nguyên $a (a \geq 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2$?
A. 8. B. 9. C. 1. D. Vô số

Câu 88: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy).27^{9x}$?
A. 27. B. 9. C. 11. D. 12.

Câu 89: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy).27^{12x}$?
A. 14. B. 27. C. 12. D. 15.

Câu 90: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy).27^{15x}$?
A. 17. B. 16. C. 18. D. 15.

Câu 91: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy).27^{18x}$?
A. 19. B. 20. C. 18. D. 21.

- Câu 92:** Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1;6)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x = y(e^x + xy - 2x^2 - 3)$?
- A. 18. B. 15. C. 16. D. 17.
- Câu 93:** Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1;5)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x = y(e^x + xy - 2x^2 - 3)$?
- A. 14. B. 12. C. 10. D. 11.
- Câu 94:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1;6)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x = y(e^x + xy - 2x^2 - 3)$?
- A. 15. B. 18. C. 17. D. 16.

CHƯƠNG

II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: (MĐ 101-2022) Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 3^{2-x}$ là

A. $x = \frac{1}{3}$.

B. 0 .

C. $x = -1$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{2x+1} = 3^{2-x} \Leftrightarrow 2x+1 = 2-x \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Câu 2: (MĐ 102-2022) Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 3^{2-x}$ là

A. $x = \frac{1}{3}$.

B. $x = 0$.

C. $x = -1$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{2x+1} = 3^{2-x} \Leftrightarrow 2x+1 = 2-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Câu 3: (MĐ 103-2022) Số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2+1} = 4$ là

A. 1 .

B. 2 .

C. 3 .

D. 0 .

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x^2+1} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

Vậy số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2+1} = 4$ là 2 .

Câu 4: (MĐ 104-2022) Số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2+1} = 4$ là

A. 1 .

B. 2 .

C. 0 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2+1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2+1} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Câu 5: (MĐ 103-2022) Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 0$ là

A. $x = \frac{3}{4}$.

B. $x = 1$.

C. $x = \frac{1}{2}$.

D. $x = \frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} (*)$.

Với điều kiện $(*)$ phương trình tương đương: $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$
(thỏa mãn).

Câu 6: (MĐ 104-2022) Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 0$ là

A. $x = 1$.

B. $x = \frac{3}{4}$.

C. $x = \frac{2}{3}$.

D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 7: (TK 2020-2021) Nghiệm của phương trình $5^{2x-4} = 25$ là:

A. $x = 3$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Ta có $5^{2x-4} = 25 \Leftrightarrow 5^{2x-4} = 5^2 \Leftrightarrow 2x-4 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 8: (TK 2020-2021) Nghiệm của phương trình $\log_2(3x) = 3$ là:

A. $x = 3$.

B. $x = 2$.

C. $x = \frac{8}{3}$.

D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\log_2(3x) = 3 \Leftrightarrow 3x = 2^3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$.

Câu 9: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Nghiệm của phương trình $\log_5(3x) = 2$ là

A. $x = 25$.

B. $x = \frac{32}{3}$.

C. $x = 32$.

D. $x = \frac{25}{3}$.

Lời giải

Ta có

$$\log_5(3x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 0 \\ 3x = 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{25}{3}.$$

Câu 10: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Tập nghiệm của bất phương trình: $2^x > 3$ là

- A. $(\log_3 2; +\infty)$. B. $(-\infty; \log_2 3)$. C. $(-\infty; \log_3 2)$. **D. $(\log_2 3; +\infty)$.**

Lời giải

Ta có: $2^x > 3 \Leftrightarrow x > \log_2 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $2^x > 3$ là $(\log_2 3; +\infty)$.

Câu 11: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Nghiệm của phương trình $\log_3(2x) = 2$ là

- A. $x = \frac{9}{2}$.** B. $x = 9$. C. $x = 4$. D. $x = 8$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$. Với điều kiện phương trình đã cho tương đương $2x = 3^2 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$.

Câu 12: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Nghiệm của phương trình $\log_2(5x) = 3$ là:

- A. $x = \frac{8}{5}$.** B. $x = \frac{9}{5}$. C. $x = 8$. D. $x = 9$.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$

$\log_2(5x) = 3 \Leftrightarrow 5x = 2^3 \Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$ (nhận).

Câu 13: Nghiệm của phương trình $5^x = 3$ là:

- A. $x = \sqrt[3]{5}$. B. $x = \frac{3}{5}$. C. $x = \log_3 5$. **D. $x = \log_5 3$.**

Lời giải

Ta có $5^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_5 3$.

Vậy nghiệm của phương trình $5^x = 3$ là $x = \log_5 3$.

Câu 14: Nghiệm của phương trình $5^x = 2$ là:

- A. $x = \log_2 5$. **B. $x = \log_5 2$.** C. $x = \frac{2}{5}$. D. $x = \sqrt{5}$

Lời giải

Ta có: $5^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_5 2$. **Chọn B**

Câu 15: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Nghiệm của phương trình $7^x = 2$ là

- A. $x = \log_2 7$. **B. $x = \log_7 2$.** C. $x = \frac{2}{7}$. D. $x = \sqrt{7}$.

Lời giải

Ta có $7^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_7 2$.

Câu 16: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Nghiệm của phương trình $7^x = 3$ là

- A. $x = \frac{3}{7}$. B. $x = \sqrt[3]{7}$. **C. $x = \log_7 3$.** D. $x = \log_3 7$.

Lời giải

Ta có $7^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_7 3$

Câu 17: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1) = 2$ là:

- A. $x = 3$. B. $x = 5$. C. $x = \frac{9}{2}$. D. $x = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

$$\text{Ta có } \log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x-1 = 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$.

Câu 18: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1) = 2$ là

- A. $x = 8$. B. $x = 9$. C. $x = 7$. D. $x = 10$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = (1; +\infty)$

$$\log_3(x-1) = 2 \Leftrightarrow x-1 = 3^2 \Leftrightarrow x = 10$$

Câu 19: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$ là

- A. $x = 10$. B. $x = 8$. C. $x = 9$. D. $x = 7$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_2(x-1) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Câu 20: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_2(x-2) = 3$ là:

- A. $x = 6$. B. $x = 8$. C. $x = 11$. D. $x = 10$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

$$\log_2(x-2) = 3 \Leftrightarrow x-2 = 8 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (thỏa)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 10$.

Câu 21: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2) = 2$ là

- A. $x = 11$. B. $x = 10$. C. $x = 7$. D. 8.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 2$

Phương trình tương đương với $x - 2 = 3^2 \Leftrightarrow x = 11$

Câu 22: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+9) = 5$ là

- A. $x = 41$. B. $x = 23$. C. $x = 1$. D. $x = 16$.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x > -9$

Ta có: $\log_2(x+9) = 5 \Leftrightarrow x+9 = 2^5 \Leftrightarrow x = 23$.

Câu 23: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+6) = 5$ là:

- A. $x = 4$. B. $x = 19$. C. $x = 38$. D. $x = 26$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x+6 > 0 \Leftrightarrow x > -6$

Ta có: $\log_2(x+6) = 5 \Leftrightarrow \log_2(x+6) = \log_2 2^5 \Leftrightarrow (x+6) = 32 \Leftrightarrow x = 32 - 6 \Leftrightarrow x = 26(TM)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = 26$

Câu 24: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+7) = 5$ là

- A. $x = 18$. B. $x = 25$. C. $x = 39$. D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

$\log_2(x+7) = 5 \Leftrightarrow x+7 = 2^5 \Leftrightarrow x = 25$.

Câu 25: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+8) = 5$ bằng

- A. $x = 17$. B. $x = 24$. C. $x = 2$. D. $x = 40$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(x+8) = 5 \Leftrightarrow x+8 = 2^5 \Leftrightarrow x = 24$.

Câu 26: (Đề Tham Khảo 2019) Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$ là :

- A. $\{0\}$ B. $\{0;1\}$ C. $\{-1;0\}$ D. $\{1\}$

Lời giải

Chọn B

$\log_2(x^2 - x + 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Câu 27: (Đề Minh Họa 2017) Giải phương trình $\log_4(x-1) = 3$.

- A. $x = 65$ B. $x = 80$ C. $x = 82$ D. $x = 63$

Lời giải

Chọn A

ĐK: $\Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Phương trình $\log_4(x-1) = 3 \Leftrightarrow x-1 = 4^3 \Leftrightarrow x = 65$.

Câu 28: (Mã 110 2017) Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1-x) = 2$.

- A.** $x = 5$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = -4$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(1-x) = 2 \Leftrightarrow 1-x = 4 \Leftrightarrow x = -3$.

Câu 29: (Mã 102 2018) Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-1) = 3$ là

- A.** $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$ **B.** $\{-3; 3\}$ **C.** $\{-3\}$ **D.** $\{3\}$

Lời giải

Chọn B

$\log_2(x^2-1) = 3 \Leftrightarrow x^2-1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Câu 30: (Mã 104 2017) Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-5) = 4$.

- A.** $x = 11$ **B.** $x = 13$ **C.** $x = 21$ **D.** $x = 3$

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Khi đó $\log_2(x-5) = 4 \Leftrightarrow x-5 = 16 \Leftrightarrow x = 21$.

Câu 31: (Mã 103 2018) Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-7) = 2$ là

- A.** $\{4\}$ **B.** $\{-4\}$ **C.** $\{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\}$ **D.** $\{-4; 4\}$

Lời giải

Chọn D

$\log_3(x^2-7) = 2 \Leftrightarrow x^2-7 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$

Câu 32: (Mã 105 2017) Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x+1) = \frac{1}{2}$.

- A.** $x = 6$ **B.** $x = 4$ **C.** $x = \frac{23}{2}$ **D.** $x = -6$

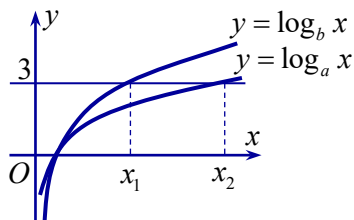
Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > -1$

Xét phương trình $\log_{25}(x+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_5(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = 5 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 33: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình bên.



Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là $x_1; x_2$. Biết rằng $x_1 = 2x_2$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. 2. D. $\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\log_a x = 3 \Leftrightarrow x_1 = a^3$, và $\log_b x = 3 \Leftrightarrow x_2 = b^3$.

Ta có $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow a^3 = 2b^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.

Câu 34: (Đề Tham Khảo 2017) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

- A. $S = \{3\}$ B. $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$ C. $S = \{-3; 3\}$ D. $S = \{4\}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 1$. Phương trình đã cho trở thành $\log_2(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Đối chiếu điều kiện, ta được nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

Câu 35: (Mã 103 - 2019) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1)$ là

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = -1$. D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện phương trình: $x > \frac{1}{3}$.

$\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1) \Leftrightarrow \log_2[(x+1).2] = \log_2(3x-1) \Leftrightarrow 2(x+1) = 3x-1 \Leftrightarrow x = 3$.

Ta có $x = 3$ (Thỏa mãn điều kiện phương trình)

Vậy nghiệm phương trình là $x = 3$.

Câu 36: (Mã 105 2017) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

- A. $S = \{3\}$ B. $S = \{4\}$ C. $S = \{1\}$ D. $S = \{-2\}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Ta có } \log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x+1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa)}$$

Câu 37: (Mã 101 - 2019) Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1) + 1 = \log_3(4x+1)$

A. $x = 4$.

B. $x = 2$.

C. $x = 3$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > -\frac{1}{4}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \log_3(x+1) + 1 &= \log_3(4x+1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{4} \\ 3(x+1) = 4x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{4} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Vậy: Nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Câu 38: (Mã 104 - 2019) Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) = 1 + \log_3(x-1)$ là

A. $x = 4$.

B. $x = -2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Ta có: } \log_3(2x+1) = 1 + \log_3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x+1) = \log_3[3 \cdot (x-1)]$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = 3x-3$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ (nhận).}$$

Câu 39: (Mã 102 -2019) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1)$ là

A. $x = 3$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) = \log_2 2 \cdot (x-1)$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 2x-2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (Thỏa mãn).}$$

Câu 40: (Mã 110 2017) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$.

A. $S = \{3\}$ B. $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$

C. $S = \{2 + \sqrt{5}\}$ D. $S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \quad (*)$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\log_2(x-1) - \log_2(x+1) = 1$

$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1) = \log_2(x+1) + \log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2[2(x+1)]$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} (L) \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases}$. Vậy tập nghiệm phương trình $S = \{2 + \sqrt{5}\}$

Câu 41: (Đề Tham Khảo 2018) Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$ bằng

A. 0. B. $\frac{80}{9}$. C. 9. D. $\frac{82}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$\log_3 x \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_3 x \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_3 x \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_3 x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$

Câu 42: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$ là

A. $x = 4$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 4$.

Câu 43: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 9$ là:

A. $x = -2$.

B. $x = 3$.

C. $x = 2$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn B

$$3^{x-1} = 9 \Leftrightarrow x-1 = \log_3 9 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$$

Câu 44: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $3^{x-2} = 9$ là

A. $x = -3$.

B. $x = 3$.

C. $x = 4$.

D. $x = -4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 3^{x-2} = 9 \Leftrightarrow x-2 = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Câu 45: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $3^{x+1} = 9$ là

A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = -2$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 3^{x+1} = 9 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^2 \Leftrightarrow x+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 46: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Nghiệm của phương trình $3^{x+2} = 27$ là

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 2$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 3^{x+2} = 27 \Leftrightarrow 3^{x+2} = 3^3 \Leftrightarrow x+2 = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 47: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $2^{2x-4} = 2^x$ là

A. $x = 16$.

B. $x = -16$.

C. $x = -4$.

D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 2^{2x-4} = 2^x \Leftrightarrow 2x-4 = x \Leftrightarrow x = 4.$$

Câu 48: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $2^{2x-3} = 2^x$ là

A. $x = 8$.

B. $x = -8$.

C. $x = 3$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2^{2x-3} = 2^x \Leftrightarrow 2x-3 = x \Leftrightarrow x = 3. \text{ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm } x = 3.$$

Câu 49: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Nghiệm của phương trình $2^{2x-2} = 2^x$ là

A. $x = -2$.

B. $x = 2$.

C. $x = -4$.

D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$2^{2x-2} = 2^x \Leftrightarrow 2x-2 = x \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 50: (Mã 101 - 2019) Nghiệm của phương trình: $3^{2x-1} = 27$ là

A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 4$.

D. $x = 5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x-1=3 \Leftrightarrow x=2$.

Câu 51: (Mã 102 - 2019) Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2x+1=3 \Rightarrow x=1$.

Câu 52: (Mã 104 2018) Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

A. $x = \frac{5}{2}$

B. $x = 1$

C. $x = 3$

D. $x = \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $5^{2x+1} = 125 \Leftrightarrow 5^{2x+1} = 5^3 \Leftrightarrow 2x+1=3 \Leftrightarrow x=1$.

Câu 53: (Mã 101 2018) Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

A. $x = 3$

B. $x = \frac{5}{2}$

C. $x = 2$

D. $x = \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2^{2x+1} = 2^5 \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow x=2$.

Câu 54: (Mã 104 - 2019) Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 32$ là

A. $x = 2$.

B. $x = \frac{17}{2}$.

C. $x = \frac{5}{2}$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn D

$2^{2x-1} = 32 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 2^5 \Leftrightarrow 2x-1=5 \Leftrightarrow x=3$.

Câu 55: (Mã 103 - 2019) Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 8$ là

A. $x = 2$.

B. $x = \frac{5}{2}$.

C. $x = 1$.

D. $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{2x-1} = 8 \Leftrightarrow 2x-1=3 \Leftrightarrow x=2$.

Câu 56: (Mã 104 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

A. $m \geq 1$

B. $m \geq 0$

C. $m > 0$

D. $m \neq 0$

Lời giải

Chọn C

Đề phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực thì $m > 0$.

Câu 57: (Mã 110 2017) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$.

A. $S = \{3\}$ **B.** $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$

C. $S = \{2 + \sqrt{5}\}$ **D.** $S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \quad (*)$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\log_2(x-1) - \log_2(x+1) = 1$

$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1) = \log_2(x+1) + \log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2[2(x+1)]$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} (L) \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases}$. Vậy tập nghiệm phương trình $S = \{2 + \sqrt{5}\}$

Câu 58: (Mã 104 2017) Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

A. $S_{\min} = 17$ **B.** $S_{\min} = 30$ **C.** $S_{\min} = 25$ **D.** $S_{\min} = 33$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$, điều kiện mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $b^2 > 20a$.

Đặt $t = \ln x, u = \log x$ khi đó ta được $at^2 + bt + 5 = 0(1), 5t^2 + bt + a = 0(2)$.

Ta thấy với mỗi một nghiệm t thì có một nghiệm x , một u thì có một x .

Ta có $x_1 \cdot x_2 = e^{t_1} \cdot e^{t_2} = e^{t_1+t_2} = e^{-\frac{b}{a}}, x_3 \cdot x_4 = 10^{u_1+u_2} = 10^{-\frac{b}{5}}$, lại có $x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{5} \ln 10 \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \Leftrightarrow a \geq 3$ (do a, b nguyên dương), suy ra $b^2 > 60 \Rightarrow b \geq 8$.

Vậy $S = 2a + 3b \geq 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 = 30$, suy ra $S_{\min} = 30$ đạt được $a = 3, b = 8$.

Câu 59: (Đề tham khảo 2017) Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1 = 0$.

Xét hàm số $y = 3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1$ liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

$$y' = 6(x-1) + \frac{3}{x+1} = \frac{6x^2 - 3}{x+1}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$f(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$+\infty$	

Vì $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 60: (Mã 123 2017) Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$ ta được phương trình nào sau đây

A. $2t^2 - 3t = 0$

B. $4t - 3 = 0$

C. $t^2 + t - 3 = 0$

D. $t^2 + 2t - 3 = 0$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$

Câu 61: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ là

A. $(1; 2)$.

B. $[1; 2]$.

C. $[1; 2)$.

D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow [1 + \log_2(x)]^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = \log_2 x = g(x) \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$ và mỗi giá trị của x sẽ cho một giá trị của t

$(*)$ trở thành $(1+t)^2 - (m+2)t + m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 - mt - 2t + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 1 = m(t - 1)$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t + 1 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = m - 1 & (1) \\ t = 1 & (2) \end{cases}$$

Với $t = 1$ thì phương trình có một nghiệm $x = 2$

Vậy để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có một nghiệm $t \neq 1$

$$0 \leq m - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$$

Vậy $m \in [1; 2)$ để thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 62: (Mã 102 2019) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (6x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (6x - 1) = -\log_3 m$.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > \frac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases}$$

Khi đó

$$\log_9 x^2 - \log_3 (6x - 1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 m = \log_3 (6x - 1)$$

$$\Leftrightarrow mx = 6x - 1 \Leftrightarrow x(6 - m) = 1 \quad (1)$$

+) Với $m = 6$, phương trình (1) trở thành $0 = 1$ (vô lý).

+) Với $m \neq 6$, phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{1}{6 - m}$

$$\Rightarrow \frac{1}{6 - m} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6 - m} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{6 - m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6.$$

Vậy $0 < m < 6$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 63: (Mã 103 2019) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (5x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 4.

B. 6.

C. Vô số.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$$

Xét phương trình: $\log_9 x^2 - \log_3 (5x - 1) = -\log_3 m \quad (1)$.

Cách 1.

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3 (5x - 1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{5x - 1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow \frac{5x - 1}{x} = m \Leftrightarrow 5 - \frac{1}{x} = m \quad (2).$$

Xét $f(x) = 5 - \frac{1}{x}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

Có $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{x}\right) = 5$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	5

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ phương trình (2) có nghiệm $x > \frac{1}{5}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Cách 2.

Với $\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3 (5x - 1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{5x - 1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow \frac{5x - 1}{x} = m \Leftrightarrow (5 - m)x = 1 \quad (2)$$

Với $m = 5$, phương trình (2) thành $0 \cdot x = 1$ (vô nghiệm).

Với $m \neq 5$, (2) $\Leftrightarrow x = \frac{1}{5 - m}$.

$$\text{Xét } x > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5 - m} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{m}{5 \cdot (5 - m)} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 64: (Mã 101 - 2019) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (3x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

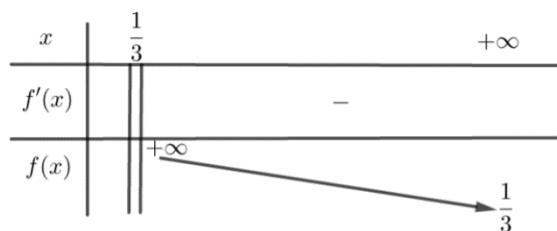
Chọn A

Điều kiện: $x > \frac{1}{3}$ và $m > 0$.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương: } \log_3 x - \log_3 (3x - 1) = \log_3 \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{x}{3x - 1} = \frac{1}{m}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{3x-1}$ với $x > \frac{1}{3}$

Có $f'(x) = -\frac{1}{(3x-1)^2} < 0, \forall x > \frac{1}{3}$



Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm khi $\frac{1}{m} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < m < 3$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1, 2\}$.

Câu 65: (Mã 104 2019) Cho phương trình $\log_9 x^2 - 4\log_3(4x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 5.

B. 3.

C. Vô số.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

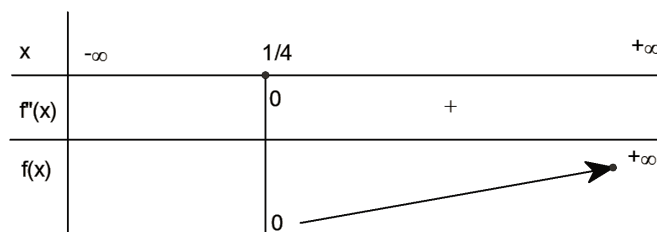
Điều kiện: $x > \frac{1}{4}$. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 x - 4\log_3(4x-1) = -\log_3 m$

$$\Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(4x-1)^4 = \log_3 \frac{1}{m} \Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{(4x-1)^4} = \log_3 \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{(4x-1)^4}{x} = f(x)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(4x-1)^4}{x}$ có

$$f'(x) = \frac{16x(4x-1)^3 - (4x-1)^4}{x^2} = \frac{(4x-1)^3(12x+1)}{x^2} > 0, \forall x > \frac{1}{4}.$$

Suy ra bảng biến thiên:



Do đó phương trình có nghiệm khi $m > 0$. Vậy có vô số giá trị nguyên của m .

Câu 66: (Đề Tham Khảo 2017) Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 4014.

B. 2018.

C. 4015.

D. 2017.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > -1, mx > 0$.

$$\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{(x+1)^2}{x}$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{(x+1)^2}{x} \quad (x > -1, x \neq 0); \quad f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} (l)$$

Lập bảng biến thiên

x	-1	0	1	$+\infty$
y'			0	+
y	0	$+\infty$	4	$+\infty$

Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} m=4 \\ m<0. \end{cases}$

Vì $m \in [-2017; 2017]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên chỉ có 2018 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu là $m \in \{-2017; -2016; \dots; -1; 4\}$.

Chú ý: Trong **Lời giải**, ta đã có thể bỏ qua điều kiện $mx > 0$ vì với phương trình $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ với $0 < a \neq 1$ ta chỉ cần điều kiện $f(x) > 0$.

Câu 67: (Mã 101 2018) Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 6

B. 4

C. 13

D. 3

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 4^x, (t > 0)$. Phương trình trở thành:

$$t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0 \quad (1).$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m < -3 \vee m > 3 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{4; 5; 6\}$. Vậy S có 3 phần tử.

Câu 68: (Mã 104 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

A. $m = 3$

B. $m = 1$

C. $m = 6$

D. $m = -3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + m = 0$.

Phương trình có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - m > 0 \\ 3^{x_1} + 3^{x_2} = 6 > 0 \Leftrightarrow m = 3. \\ 3^{x_1+x_2} = 3 = m \end{cases}$

Câu 69: (Mã 102 2018) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 7

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ (1).

Đặt $t = 5^x$ ($t > 0$). Phương trình trở thành $t^2 - 5mt + 7m^2 - 7 = 0$ (2).

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 4(7m^2 - 7) > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2\sqrt{21}}{3}.$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 70: (Mã 103 2018) Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 2

B. 1

C. 3

D. 5

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m \cdot 2^x + 2m^2 - 5 = 0$ (1)

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình (1) thành: $t^2 - 2m \cdot t + 2m^2 - 5 = 0$ (2)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ m < -\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ hoặc } m > \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$

Do m nguyên nên $m = 2$. Vậy S chỉ có một phần tử

Câu 71: (Mã 110 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt

- A. $m \in (0; +\infty)$ B. $m \in (-\infty; 1)$ C. $m \in (0; 1]$ D. $m \in (0; 1)$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + m = 0, (1).$

Đặt $t = 2^x > 0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2t + m = 0, (2).$

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt và lớn hơn 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ -\frac{2}{1} > 0 \\ \frac{m}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Câu 72: (Mã 104 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 5 B. 8 C. 4 D. 19

Lời giải

Chọn C

$9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0(1) \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3m \cdot 3^x + 3m^2 - 75 = 0$

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$

Phương trình trở thành: $t^2 - 3mt + 3m^2 - 75 = 0(2)$

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 300 - 3m^2 > 0 \\ 3m > 0 \\ 3m^2 - 75 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 10 \\ m > 0 \\ \begin{cases} m < -5 \\ m > 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 10$$

Do m nguyên nên $m = \{6; 7; 8; 9\}$

Câu 73: (Đề Tham Khảo 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2) \cdot 9^x = 0$ có nghiệm dương?

- A. 2 B. 4 C. 3 D. 1

Lời giải

Chọn A

Phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2) \cdot 9^x = 0$ có nghiệm $\forall x \in (0; +\infty)$

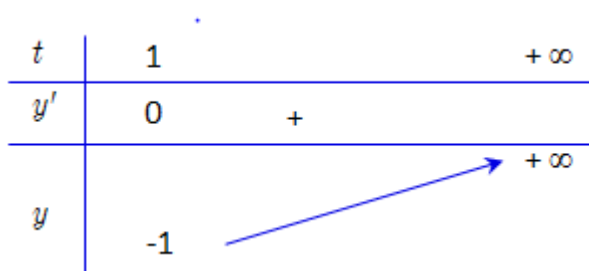
Phương trình tương đương $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + (m-2) = 0$ có nghiệm $\forall x \in (0; +\infty)$

Đặt $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x, t \in (1; +\infty)$

$$\Rightarrow t^2 - 2t + (m-2) = 0, \forall t \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t = 2 - m, \forall t \in (1; +\infty)$$

Xét $y = t^2 - 2t$



Phương trình có nghiệm $\forall t \in (1; +\infty)$ khi $2 - m > -1 \Leftrightarrow m < 3$

Câu 74: (Mã 103 -2019) Cho phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. Vô số.

B. 124.

C. 123.

D. 125.

Lời giải

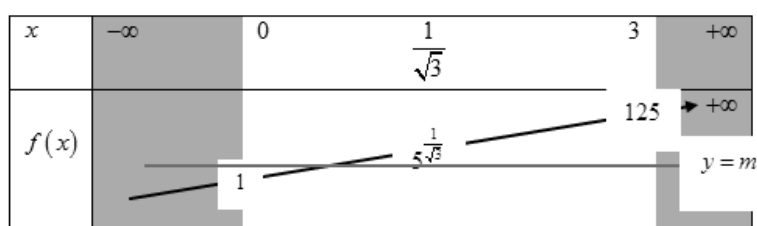
Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ 5^x - m \geq 0 \ (m > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_5 m \end{cases}$$

$$(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{5^x - m} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0 \\ 5^x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ f(x) = 5^x = m \end{cases}$$

Xét $f(x) = 5^x$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} m = 1 \\ 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \leq m < 125 \end{cases}, m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 1 \\ 3 \leq m \leq 124 \end{cases}$$

Nên có 123 giá trị m thỏa mãn.

Câu 75: (Mã 102 - 2019) Cho phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. vô số.

B. 81.

C. 79.

D. 80.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ 3^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ m \leq 3^x \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có } (2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 & (2) \\ \sqrt{3^x - m} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Trong đó } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} .(4)$$

Với $m > 0$ thì $3^x = m \Leftrightarrow \log_3 m = x$.

Do đó, phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi xảy ra các trường hợp sau:

TH1: (3) có nghiệm $x = \log_3 m \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$. Kết hợp điều kiện (*) và (4) ta được $m = 1$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $x = 4$.

TH2: $m > 1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x \geq \log_3 m > 0$.

Và do $4 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \log_3 m < 4 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq m < 3^4$.

Mà m nguyên dương nên ta có $m \in \{3, 4, \dots, 80\}$, có 78 giá trị của m .

Vậy có 79 giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt

Câu 76: (Mã 104 2019) Cho phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{4^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 64.

B. Vô số.

C. 62.

D. 63.

Lời giải

Chọn C

Ta có điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_4 m \end{cases}$ (*) (với m nguyên dương).

$$\text{Phương trình } (2 \log_3^2 x - \log_3 x - 1) \sqrt{4^x - m} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0 \quad (2) \\ 4^x = m \quad (3) \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } (3) \Leftrightarrow x = \log_4 m.$$

Do m nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:

TH 1: $m = 1$ thì $\log_4 m = 0$. Do đó (*) là $x > 0$.

Khi đó nghiệm của phương trình (3) bị loại và nhận nghiệm của phương trình (2).

Do đó nhận giá trị $m = 1$.

TH 2: $m \geq 2$ thì (*) là $x \geq \log_4 m$ (vì $\log_4 m \geq \frac{1}{2}$)

Để phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \log_4 m < 3$$

$$\Leftrightarrow 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \leq m < 4^3$$

Suy ra $m \in \{3; 4; 5; \dots; 63\}$.

Vậy từ cả 2 trường hợp ta có: $63 - 3 + 1 + 1 = 62$ giá trị nguyên dương m .

Câu 77: (Mã 101 2019) Cho phương trình $(4 \log_2^2 x + \log_2 x - 5) \sqrt{7^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 49.

B. 47.

C. Vô số.

D. 48.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ 7^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 7^x \geq m \end{cases}.$$

$$* \text{ Trường hợp } m \leq 0 \text{ thì } (4 \log_2^2 x + \log_2 x - 5) \sqrt{7^x - m} = 0 \Leftrightarrow 4 \log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(4\log_2 x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{-\frac{5}{4}} \end{cases}.$$

Trường hợp này không thỏa điều kiện m nguyên dương.

* Trường hợp $m > 0$, ta có $\begin{cases} x > 0 \\ 7^x \geq m \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \log_7 m$ nếu $m > 1$ và $x > 0$ nếu $0 < m \leq 1$.

$$\text{Khi đó } (4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \\ \sqrt{7^x - m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{-\frac{5}{4}} \\ x = \log_7 m \end{cases}.$$

+ Xét $0 < m \leq 1$ thì nghiệm $x = \log_7 m \leq 0$ nên trường hợp này phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x = 2; x = 2^{-\frac{5}{4}}$ thỏa mãn điều kiện.

+ Xét $m > 1$, khi đó điều kiện của phương trình là $x \geq \log_7 m$.

Vì $2 > 2^{-\frac{5}{4}}$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2 > \log_7 m \geq 2^{-\frac{5}{4}}$

$$\Leftrightarrow 7^{2^{-\frac{5}{4}}} \leq m < 7^2.$$

Trường hợp này $m \in \{3; 4; 5; \dots; 48\}$, có 46 giá trị nguyên dương của m .

Tóm lại có 47 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Chọn phương án

B.

Câu 78: (Mã 102 2018) Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 15

B. 16

C. 9

D. 14

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^x + m = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x + x = \log_3(x - m) + x - m \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$, với $t \in \mathbb{R}$. Có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập xác định. Mặt khác phương trình $(*)$ có dạng: $f(x) = f(\log_3(x - m))$. Do đó ta có $f(x) = f(\log_3(x - m)) \Leftrightarrow x = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x = x - m \Leftrightarrow 3^x - x = -m$

Xét hàm số $g(x) = 3^x - x$, với $x \in \mathbb{R}$. Có $g'(x) = 3^x \ln 3 - 1$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy các giá trị của tham số để phương trình có nghiệm là:

$m \in \left(-\infty; -g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)\right]$. Vậy số giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm là: 14.

Câu 79: (Mã 101 2018) Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 19 B. 9 C. 21 D. 20

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > m$

$$\text{Đặt: } t = \log_5(x - m) \Rightarrow \begin{cases} x - m = 5^t \\ 5^x + m = t \end{cases} \Rightarrow 5^x + x = 5^t + t \quad (1).$$

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u \Rightarrow f'(u) = 5^u \ln 5 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow x = t \Leftrightarrow x = 5^x + m \Leftrightarrow m = x - 5^x$.

Xét hàm số $f(x) = x - 5^x, x > m$

Do: $5^x > 0 \Rightarrow m < x$, suy ra phương trình có nghiệm luôn thỏa điều kiện.

$$f'(x) = 1 - 5^x \ln 5, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 5^x \ln 5 = 0 \Leftrightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right).$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\approx -0,295$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\approx -0,917$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m \leq \approx -0,917 \xrightarrow{m \in (-20; 20)} m = \{-19; -18; \dots; -1\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 80: (Mã 103 -2018) Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 9 B. 25 C. 24 D. 26

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x > m$

Đặt $t = \log_7(x - m)$ ta có $\begin{cases} 7^x + m = t \\ 7^t + m = x \end{cases} \Rightarrow 7^x + x = 7^t + t \quad (1)$

Do hàm số $f(u) = 7^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó:

$$7^x + m = x \Leftrightarrow m = x - 7^x.$$

Xét hàm số $g(x) = x - 7^x \Rightarrow g'(x) = 1 - 7^x \ln 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_7(\ln 7)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_7(\ln 7)$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$g(-\log_7(\ln 7))$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq g(-\log_7(\ln 7)) \approx -0,856$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 7^x > 0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-25; 25)$, nên $m \in \{-24; -16; \dots; -1\}$.

Câu 81: (Mã 104 2018) Cho phương trình $2^x + m = \log_2(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-18; 18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9

B. 19

C. 17

D. 18

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x > m$

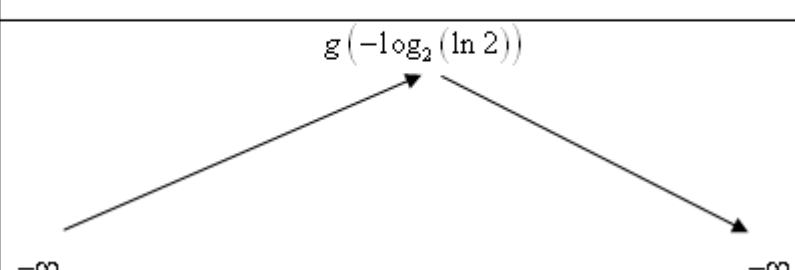
Đặt $t = \log_2(x - m)$ ta có $\begin{cases} 2^x + m = t \\ 2^t + m = x \end{cases} \Rightarrow 2^x + x = 2^t + t \quad (1)$

Do hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó:

$$2^x + m = x \Leftrightarrow m = x - 2^x.$$

Xét hàm số $g(x) = x - 2^x \Rightarrow g'(x) = 1 - 2^x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_2(\ln 2)$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq g(-\log_2(\ln 2)) \approx -0,914$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 2^x > 0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-18; 18)$, nên $m \in \{-17; -16; \dots; -1\}$.

Câu 82: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019.

B. 6.

C. 2020.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có: $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 2y + 3^{2y}$. (1)

Đặt $\log_3(x+1) = t \Rightarrow x+1 = 3^t$.

Phương trình (1) trở thành: $t + 3^t = 2y + 3^{2y}$ (2)

Xét hàm số $f(u) = u + 3^u$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(u) = 1 + 3^u \ln 3 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow f(t) = f(2y) \Leftrightarrow t = 2y \Rightarrow \log_3(x+1) = 2y \Leftrightarrow x+1 = 9^y \Leftrightarrow x = 9^y - 1$

Vì $0 \leq x \leq 2020 \Rightarrow 0 \leq 9^y - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 9^y \leq 2021 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_9 2021$

($\log_3 2021 \approx 3,464$)

Do $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$, có 4 giá trị của y nên cũng có 4 giá trị của x

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$.

Cách 2:

Ta có: $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 2y + 3^{2y}$

Xét hàm số $f(x) = \log_3(x+1) + x + 1$ với $x \in [0; 2020]$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 3} + 1 > 0, \forall x \in [0; 2020] \Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn

$[0; 2020]$.

Suy ra $f(0) \leq f(x) = \log_3(x+1) + x + 1 \leq f(2020) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq \log_3 2021 + 2021$

$\Rightarrow 1 \leq 2y + 9^y \leq \log_3 2021 + 2021 < 2028$

Nếu $y < 0 \Rightarrow 2y + 9^y < 9^y < 9^0 = 1 \Rightarrow y \geq 0$

Khi đó $y \in \mathbb{N} \Rightarrow (2y + 9^y) \in \mathbb{N} \Rightarrow 2y + 9^y \leq 2027 \Rightarrow 9^y \leq 2027 - 2y \leq 2027$

$\Rightarrow y \leq \log_9 2027 \approx 3,465 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow 0 \leq y \leq 3$

$\Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$. Do $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến nên với mỗi giá trị của y chỉ cho 1 giá trị của x .

+) $y = 0 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

+) $y = 1 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 11 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x = 10 \Leftrightarrow x = 8$

+) $y = 2 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 85 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x = 84 \Leftrightarrow x = 80$

+) $y = 3 \Rightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 735 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x = 734 \Leftrightarrow x = 729$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$.

Câu 83: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\text{Đặt } t = \log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3^t \\ x^2+y^2 = 4^t \end{cases} (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$9^t = (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 4^t \Rightarrow \frac{9^t}{4^t} \leq 2 \Rightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2$$

Như vậy,

$$x^2+y^2 = 4^t \Rightarrow x^2 \leq 4^t \leq 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2} \approx 1,89 \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$$

$$\text{➤ Trường hợp 1: } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\text{➤ Trường hợp 2: } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{➤ Trường hợp 3: } x = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^2 + 1 = 4^t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ y = 3^t + 1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 5 \text{ mâu thuẫn với}$$

$$x^2 + y^2 \leq 4^{\log_{\frac{9}{4}} \sqrt{2}} \text{ suy ra loại } x = -1.$$

Vậy có hai giá trị $x \in \{0; 1\}$

Cách 2:

$$\text{Đặt } t = \log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) \Rightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases} (1).$$

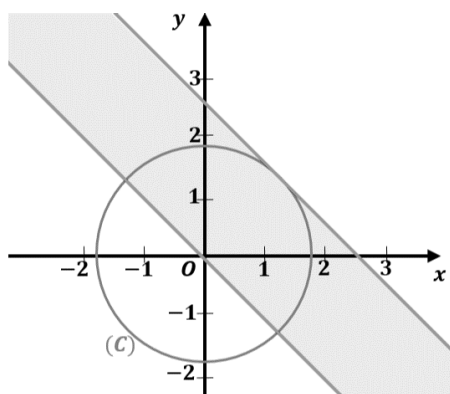
Suy ra x, y là tọa độ của điểm M với M thuộc đường thẳng $d: x+y=3^t$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=4^t$.

Để tồn tại y tức tồn tại M nên $d, (C)$ có điểm chung, suy ra $d(O, d) \leq R$ trong đó

$$O(0;0), R=2^t \text{ nên } \frac{|-3^t|}{\sqrt{2}} \leq 2^t \Leftrightarrow t \leq \log_3 \sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó } (1) \Rightarrow \begin{cases} 0 < x+y \leq 3^{\log_3 \sqrt{2}} \\ x^2+y^2 \leq 4^{\log_3 \sqrt{2}} \end{cases}.$$

Minh họa quỹ tích điểm M như hình vẽ sau



Ta thấy có 3 giá trị $x \in \mathbb{Z}$ có thể thỏa mãn là $x=-1; x=0; x=1$.

Thử lại:

$$\text{➤ Trường hợp 1: } x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=1 \end{cases}.$$

$$\text{➤ Trường hợp 2: } x=1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

$$\text{➤ Trường hợp 3: } x=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t+1 \\ y^2+1=4^t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ y=3^t+1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 \geq 5 \text{ mâu thuẫn với}$$

$$x^2+y^2 \leq 4^{\log_3 \sqrt{2}} \text{ suy ra loại } x=-1.$$

Câu 84: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m; n)$ sao cho $m+n \leq 10$ và ứng với mỗi cặp $(m; n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1; 1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2+1})$?

A. 7.

B. 8.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2+1}) \Leftrightarrow \frac{2a^m}{n} = \ln(a + \sqrt{a^2+1}).$$

$$\text{Xét hai hàm số } f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \text{ và } g(x) = \frac{2}{n} x^m \text{ trên } (-1; 1).$$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ nên $f(x)$ luôn đồng biến và $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

+ Nếu m chẵn thì $g(x)$ là hàm số chẵn và có bảng biến thiên dạng

x	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$g(-1)$	0	$g(1)$

Suy ra phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm, do đó m lẻ.

+ Nếu m lẻ thì hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ và luôn đồng biến.

Ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x = 0$. Dựa vào tính chất đối xứng của đồ thị hàm số lẻ, suy ra phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $(-1;1)$ khi có 1 nghiệm trên $(0;1)$, hay

$$f(1) > g(1) \Leftrightarrow \ln(1+\sqrt{2}) < \frac{2}{n} \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})} \approx 2,26 \Rightarrow n \in \{1;2\}.$$

Đối chiếu điều kiện, với $n = 1$ suy ra $m \in \{1;3;5;7;9\}$, có 5 cặp số thỏa mãn

Với $n = 2$ thì $m \in \{1;3;5;7\}$ có 4 cặp số thỏa mãn.

Vậy có 9 cặp số thỏa mãn bài toán.

Câu 85: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n \leq 14$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng ba số thực $a \in (-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2+1})$?

A. 14.

B. 12.

C. 11.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

Xét $f(x) = \frac{2}{n} \cdot x^m - \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ trên $(-1;1)$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{2m}{n} x^{m-1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

Theo đề bài $f(x) = 0$ có ba nghiệm nên $\frac{2m}{n} x^{m-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ có ít nhất hai nghiệm

Xét đồ thị của hàm $y = x^{m-1}; y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $m-1$ chẵn và $m-1 > 0$

Suy ra $m \in \{3;5;7;9;11;13\}$. Khi đó $f'(x) = 0$ có nghiệm $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$

Phương trình có 3 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) > 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{n} > \ln(\sqrt{2}+1) \\ -\frac{2}{n} < \ln(\sqrt{2}-1) \end{cases} \Leftrightarrow n \leq 2 \Rightarrow n = \{1;2\}$$

$n \in \{1;2\}$ và $m \in \{3;5;7;9;11;13\}$, do $m+n \leq 14$ nên ta có 11 cặp $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 86: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n \leq 12$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1,1)$ thỏa mãn $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2+1})$?

A. 12.

B. 10.

C. 11.

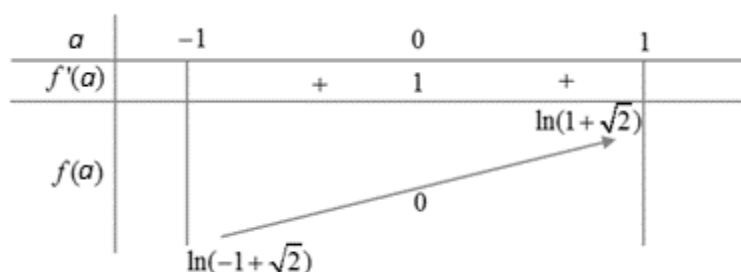
D. 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a^m = n \ln(a + \sqrt{a^2+1}) \Leftrightarrow \frac{2}{n} a^m = \ln(a + \sqrt{a^2+1})$ (*).

Xét hàm $f(a) = \ln(a + \sqrt{a^2+1})$ trên $(-1,1)$ (dễ thấy hàm f lẻ, đồng biến trên R), có BBT:



Xét hàm $g(a) = \frac{2}{n} a^m$ trên $(-1,1)$.

Với m chẵn, $g(a)$ là hàm chẵn và $g(a) \geq 0, \forall a \in R$, do đó (*) không thể có 3 nghiệm.

Với m lẻ, $g(a)$ là hàm lẻ, đồng biến trên R và tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a = 0$ là đường thẳng $y = 0$.

Dễ thấy (*) có nghiệm $a = 0 \in (-1;1)$. Để (*) có đúng 3 nghiệm tức là còn có 2 nghiệm nữa là $\pm a_0$ với $0 < a_0 < 1$.

Muốn vậy, thì $g(1) = \frac{2}{n} \cdot 1^m = \frac{2}{n} > f(1) = \ln(1 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow n < \frac{2}{\ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2,26 \Rightarrow n = 1; n = 2$

Cụ thể:

+ $m \in \{3; 5; 7; 9\}$ thì $n \in \{1; 2\}$: Có 8 cặp (m, n)

+ $m = 11$ thì $n \in \{1\}$: Có 1 cặp (m, n)

+ $m = 1$: Đồ thị hàm số $g(a)$ là đường thẳng ($g(a) = a; g(a) = 2a$) không thể cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại giao điểm $a_0 \neq 0$ được vì tiếp tuyến của hàm số $f(a)$ tại điểm có hoành độ $a = 0$ là đường thẳng $y = a$.

Vậy có cả thảy 9 cặp (m, n) .

Câu 87: (TK 2020-2021) Có bao nhiêu số nguyên $a (a \geq 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2$?

A. 8.

B. 9.

C. 1.

D. Vô số

Lời giải

Điều kiện $x > 0$. Đặt $y = a^{\log x} + 2 > 0$ thì $y^{\log a} = x - 2 \Leftrightarrow a^{\log y} + 2 = x$. Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} y = a^{\log x} + 2 \\ x = a^{\log y} + 2 \end{cases}$$

Do $a \geq 2$ nên hàm số $f(t) = a^t + 2$ là đồng biến trên $\mathbb{R}$. Giả sử $x \geq y$ thì $f(y) \geq f(x)$ sẽ kéo theo $y \geq x$, tức là phải có $x = y$. Tương tự nếu $x \leq y$.

Vì thế, ta đưa về xét phương trình $x = a^{\log x} + 2$ với $x > 0$ hay $x - x^{\log a} = 2$.

Ta phải có $x > 2$ và $x > x^{\log a} \Leftrightarrow 1 > \log a \Leftrightarrow a < 10$.

Ngược lại, với $a < 10$ thì xét hàm số liên tục $g(x) = x - x^{\log a} - 2 = x^{\log a} (x^{1-\log a} - 1) - 2$ có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ và } g(2) < 0.$$

nên $g(x)$ sẽ có nghiệm trên $(2; +\infty)$. Do đó, mọi số $a \in \{2, 3, \dots, 9\}$ đều thỏa mãn.

Câu 88: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy) \cdot 27^{9x}$?

A. 27.

B. 9.

C. 11

D. 12.

Lời giải

$$+) \text{ Ta có } (1) \Leftrightarrow 3x^2 + xy = \log_{27}(1+xy) + 9x$$

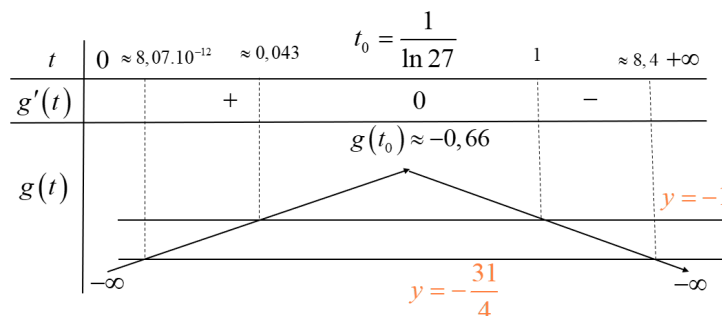
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 9x - 1 = \log_{27} t - t, \text{ với } t = 1 + xy > 0.$$

$$+) \text{ Xét hàm số } f(x) = 3x^2 - 9x - 1.$$

$$\text{Ta có } -\frac{31}{4} \leq f(x) < -1 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right).$$

$$+) \text{ Xét hàm số } g(t) = \log_{27} t - t, t > 0.$$

$$g'(t) = \frac{1}{t \ln 27} - 1; \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\ln 27}$$



Ta có $-\frac{31}{4} \leq f(x) < -1 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$. Suy ra $-\frac{31}{4} \leq g(t) < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (\approx 8,07.10^{-12}; \approx 0,04) \\ t \in (1; \approx 8,4) \end{cases}$

$$\text{hay } \begin{cases} \approx 8,07.10^{-12} < 1+xy < \approx 0,04 \\ 1 < 1+xy < \approx 8,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \approx \frac{-1+8,07.10^{-12}}{x} < y < \approx \frac{-1+0,04}{x} \\ 0 < y < \approx \frac{7,4}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 < y < -\frac{1}{3}, (x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right), y \text{ nguyên}). \\ 0 < y \leq 22 \end{cases}$$

+) Nhận thấy $y = -2; y = -1$ thỏa mãn đề.

+) Với $0 < y \leq 22$, ta có (1) $\Leftrightarrow 3x^2 - 9x - 1 - \log_{27}(1+xy) + (1+xy) = 0$.

Nhập hàm, thay các giá trị nguyên của y , kiểm tra nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ dẫn đến chọn $1 \leq y \leq 9$.

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 9\}$ nên có 11 giá trị nguyên của y thỏa mãn đề.

Câu 89: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$ thỏa mãn

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x}?$$

A. 14.

B. 27.

C. 12.

D. 15.

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có } 27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x} \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} = 1+xy \quad (1).$$

$$\text{Suy ra } 1+xy > 0 \Rightarrow y > \frac{-1}{x}. \text{ Mà } x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right) \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 4 \Rightarrow -3 < \frac{-1}{x} < \frac{-1}{4}, \text{ nên}$$

$$y > -3 \Rightarrow y \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

$$(1) \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy = 0. \text{ Đặt } f(x) = 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy.$$

$$f'(x) = (6x + y - 12)27^{3x^2+xy-12x} \ln 27 - y$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6 \ln 27 \cdot 27^{3x^2+xy-12x} + (6x + y - 12)^2 27^{3x^2+xy-12x} \ln^2 27 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Suy ra đồ thị hàm số $f(x) = 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy$ là lõm trên $\mathbb{R}$, hay phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm. Dễ thấy $x = 0$ là một nghiệm của $f(x) = 0$.

Mà yêu cầu bài toán là có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$, nên nghiệm còn lại phải thuộc $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$. Hơn nữa

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(4) < 0$

Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) = 27^{\frac{-1+y}{3}} - 1 - \frac{y}{3}$; $f(4) = 27^{4y} - 1 - 4y$

Suy ra $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(4) = \left(27^{\frac{-1+y}{3}} - 1 - \frac{y}{3}\right)(27^{4y} - 1 - 4y) = g(y)$.

Dùng chức năng table của máy tính để tính các giá trị $g(y)$ với $y \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

(nhập hàm $\left(27^{\frac{-1+X}{3}} - 1 - \frac{X}{3}\right)(27^{4X} - 1 - 4X)$ và chọn start $X = -2$, end $X = 15$, step là 1)

Ta nhận thấy $g(-2); g(-1); g(1); g(2); \dots; g(12)$ đều nhận giá trị âm, tức là $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(4) < 0$.

Nên $y \in \{-2; -1; 1; 2; 3; \dots; 12\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; 3; \dots; 12\}$, hay có 14 giá trị y

Cách 2: CASIO

Ta có

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x} \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} = 1+xy \quad (1).$$

Suy ra $1+xy > 0 \Rightarrow y > \frac{-1}{x}$. Mà $x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right) \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 4 \Rightarrow -3 < \frac{-1}{x} < \frac{-1}{4}$, nên

$$y > -3 \Rightarrow y \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

$$(1) \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy = 0. \text{ Đặt } f(x) = 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy.$$

Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) = 27^{\frac{-1+y}{3}} - 1 - \frac{y}{3}$; $f(4) = 27^{4y} - 1 - 4y$

Suy ra $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(4) = \left(27^{\frac{-1+y}{3}} - 1 - \frac{y}{3}\right)(27^{4y} - 1 - 4y) = g(y)$.

Dùng chức năng table của máy tính để tính các giá trị $g(y)$ với $y \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

(nhập hàm $\left(27^{\frac{-1+X}{3}} - 1 - \frac{X}{3}\right)(27^{4X} - 1 - 4X)$ và chọn start $X = -2$, end $X = 15$, step là 1)

$$\square \text{ Ta nhận thấy } g(0) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 4 \end{cases}, \text{ nên } y = 0 \text{ loại vì } x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$$

□ Ta nhận thấy $g(-2); g(-1); g(1); g(2); \dots; g(12)$ đều nhận giá trị âm, tức là $f\left(\frac{1}{3}\right).f(4) < 0$.

Mà $f(x)$ liên tục trên $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$ nên $f(x) = 0$ tồn tại ít nhất một nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$. Tức là

$y \in \{-2; -1; 1; 2; 3; \dots; 12\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

□ Ta nhận thấy $g(y) > 0$ với $y \geq 13$.

Khi $y \geq 13$ thì $f(x) = 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$ nên loại $y \geq 13$.

Vậy $y \in \{-2; -1; 1; 2; 3; \dots; 12\}$, hay có 14 giá trị y

Câu 90: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$ thỏa mãn

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy).27^{15x} ?$$

A. 17.

B. 16.

C. 18.

D. 15.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 27^{3x^2+xy} = (1+xy).27^{15x} \Leftrightarrow 3x^2 + (y-15)x - \frac{1}{3}\log_3(1+xy) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Với mỗi } y \text{ xét } f(x) = 3x^2 + (y-15)x - \frac{1}{3}\log_3(1+xy)$$

Tập xác định: $D = \{x \in \mathbb{R} | 1+xy > 0\}$; D là một khoảng theo y và hàm số $f(x)$ liên tục trên D (*)

$$\text{Ta có: } f'(x) = 6x + y - 15 - \frac{y}{3(1+xy)\ln 3}; f''(x) = 6 + \frac{y^2}{3(1+xy)^2 \ln 3} > 0 \forall x \in D$$

Suy ra: $f'(x)$ đồng biến trên D

$$\text{Ta có: } f'\left(\frac{1}{3}\right) = y - 13 - \frac{y}{(y+3)\ln 3}; f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}[y - 14 - \log_3(1 + \frac{1}{3}y)] \quad f(5) = 5y - \frac{1}{3}\log_3(1+5y)$$

$$\text{Đặt: } g(y) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}[y - 14 - \log_3(1 + \frac{1}{3}y)] \text{ ta có: } g'(y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{y \ln 3 - 1 + 3 \ln 3}{(y+3)\ln 3}$$

Nếu có $x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$ sao cho (1) thỏa mãn ta phải có: $y > -\frac{1}{x} > -3$ mà $y \in \mathbb{Z}$ ta có: $y \geq -2$

$$y = -2: f(x) = 3x^2 - 17x - \frac{1}{3}\log_3(1-2x); D = (-\infty; \frac{1}{2})$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \text{ mà } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty \Rightarrow (1) \text{ có nghiệm } x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{3}; 5\right) \text{ do } (*)$$

$$y = -1: f(x) = 3x^2 - 16x - \frac{1}{3}\log_3(1-x); D = (-\infty; 1)$$

$f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ mà $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow (1)$ có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \subset \left(\frac{1}{3}; 5\right)$ do (*)

$$y = 0: (1) \Leftrightarrow 3x^2 - 15x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases} \text{ không có nghiệm thuộc } \left(\frac{1}{3}; 5\right)$$

$$1 \leq y \leq 15: f\left(\frac{1}{3}\right) < 0 < f(5) \text{ khi đó } (1) \text{ có nghiệm } x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$$

$$y \geq 16: g'(y) > 0 \forall y \geq 16 \Rightarrow g(y) \text{ đồng biến trên } [16; +\infty) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = g(y) \geq g(16) > 0$$

$$y \geq 16 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \text{ mà } f'(x) \text{ đồng biến} \Rightarrow f'(x) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \forall x \geq \frac{1}{3}, x \in D$$

$$\text{Suy ra: } \forall x \geq \frac{1}{3}, x \in D \text{ ta có: } f(x) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow (1) \text{ không có nghiệm } x \in \left(\frac{1}{3}; 5\right)$$

Vậy theo điều kiện đề bài ta có: $y \in \{-2; -1\} \cup \{1, 2, \dots, 15\}$; Có 17 giá trị y thoả mãn.

Câu 91: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$ thoả mãn

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy) \cdot 27^{18x} ?$$

A. 19.

B. 20.

C. 18.

D. 21.

Lời giải

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy) \cdot 27^{18x} \quad (1)$$

Do $VT_{(1)} > 0$ nên $1+xy > 0$. Với điều kiện trên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 27^{3x^2-18x+xy} = 1+xy \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + xy = \log_{27}(1+xy) \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + (y-18)x - \log_{27}(1+xy) = 0 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + (y-18)x - \log_{27}(1+xy)$ với $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 6x + y - 18 - \frac{y}{(xy+1)\ln 27}.$$

$$f''(x) = 6 + \frac{y^2}{(1+xy)^2 \ln 27} > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right).$$

$$\text{Suy ra hàm số } f'(x) \text{ đồng biến trên } \left(\frac{1}{3}; 6\right) \Rightarrow f'(x) > f'\left(\frac{1}{3}\right) = y - 16 - \frac{y}{(y+3)\ln 3}$$

TH1: $y \geq 19$

$$\text{Khi đó } y - 16 \geq 3; \frac{y}{(y+3)\ln 3} \geq \frac{19}{22\ln 3}, \text{ suy ra } f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$$

$$\Rightarrow f(x) > f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{y}{3} - \log_{27}\left(1 + \frac{y}{3}\right) - \frac{17}{3}.$$

Xét hàm $g(t) = t - \log_{27}(1+t)$ với $t > 0$

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{(1+t)\ln 27}; \quad g''(t) = \frac{1}{(1+t)^2 \ln 27} > 0 \Rightarrow g'(t) > 1 - \frac{1}{\ln 27} > 0 \quad \forall t > 0$$

Suy ra hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow f(x) > g\left(\frac{19}{3}\right) - \frac{17}{3} \quad \forall y \geq 19$

$$\Rightarrow f(x) > 0$$

Vậy với $y \geq 19$ phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

TH2: $1 \leq y \leq 18$

$$\text{Ta có } f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{17}{3} + \frac{1}{3}y - \log_{27}\left(1 + \frac{y}{3}\right) = -\frac{17}{3} + g\left(\frac{y}{3}\right) \leq -\frac{17}{3} + g(6) < 0 \quad \text{với } 1 \leq y \leq 18$$

$$f(6) = 6y - \log_{27}(1+6y) = g(6y) \geq g(6) > 0 \quad \forall y \in [1; 18].$$

Suy ra $f\left(\frac{1}{3}\right)f(6) < 0$, mà hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 6\right]$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có

nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$. Vậy $1 \leq y \leq 18$ thỏa mãn.

TH3: $y = 0$

Phương trình (1) có nghiệm $x = 0; x = 6$ không thỏa mãn $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

TH4: $y < 0$

$$\text{Do } 1+xy > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{x} \Rightarrow -y < \frac{1}{x} < 3 \quad \left(\text{do } x > \frac{1}{3}\right) \Rightarrow y > -3.$$

Mà $y < 0$, y nguyên nên $y = -2$ hoặc $y = -1$.

- Với $y = -2$, ta có $f(x) = 3x^2 - 20x - \log_{27}(1-2x)$.

$$\text{Ta có } f\left(\frac{1}{3}\right) < 0; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists a \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right): f(a) > 0$$

Vậy $f\left(\frac{1}{3}\right)f(a) < 0$, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; a\right)$ hay phương trình

$$f(x) = 0 \text{ có nghiệm trên } \left(\frac{1}{3}; 6\right). \text{ Do đó } y = -2 \text{ thỏa mãn.}$$

- Với $y = -1$, ta có $f(x) = 3x^2 - 19x - \log_{27}(1-x)$

Tương tự như trường hợp $y = -2$

$$\text{Ta có } f\left(\frac{1}{3}\right) < 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists b \in \left(\frac{1}{3}; 1\right): f(b) > 0$$

Vậy $f\left(\frac{1}{3}\right)f(b) < 0$, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; b\right)$ hay phương trình $f(x) = 0$

có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3}; 6\right)$. Do đó $y = -1$ thỏa mãn.

Kết hợp bốn trường hợp ta có $y \in \{-2; -1; 1; 2; \dots; 18\}$.

Vậy có 20 số nguyên y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Xét $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

Giả thiết ta có: $1 + xy > 0 \Leftrightarrow y > \frac{-1}{x} \Rightarrow y \geq -2$ vì $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$. Đặt $f(x) = 27^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy$

+) Với $y \in \{-2; -1\}$ ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) < 0, f(6) > 0$ suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$

+) Với $y = 0$ không thỏa bài toán

+) Với $y \geq 1$, ta có: $27^{3x^2+xy-18x} = 1 + xy \Leftrightarrow (3x^2 + xy - 18x) \ln 27 = \ln(1 + xy) \leq xy$

$$\Rightarrow y \leq \frac{(18-3x) \ln 27}{\ln 27 - 1} < \frac{17 \ln 27}{\ln 27 - 1} \approx 24,4 \quad (1)$$

Ta lại có $g(y) = 27^{3x^2+xy-18x} - 1 - xy, g'(y) = x(27^{3x^2+x(y-18)} \ln 27 - 1) > 0, \forall y \geq 19$

+) $\forall y \geq 19, g(y) \geq g(19) = g(y) = 27^{3x^2+x} - 1 - 19x > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right) \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra $y \leq 18$. Với $y \leq 18$ ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) = 27^{\frac{y}{3} - \frac{17}{3}} - 1 - \frac{y}{3} < 0, f(6) = 27^{6y} - 1 - 6y > 0$.

Do đó với $y \leq 18$ pt $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$

Vậy có 20 giá trị y nguyên thỏa bài toán.

Câu 92: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1; 6)$ thỏa mãn

$$4(x-1)e^x = y(e^x + xy - 2x^2 - 3)?$$

A. 18.

B. 15.

C. 16.

D. 17.

Lời giải

Ta có $4(x-1)e^x = y(e^x + xy - 2x^2 - 3) \Leftrightarrow 4(x-1)e^x - y(e^x + xy - 2x^2 - 3) = 0 \quad (*)$.

Xét hàm số $f(x) = 4(x-1)e^x - y(e^x + xy - 2x^2 - 3)$ trên $(1; 6)$.

$$f'(x) = 4e^x + 4(x-1)e^x - y(e^x + y - 4x) = 4xe^x - ye^x + y(4x - y) = (4x - y)(e^x + y).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - y)(e^x + y) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y}{4} \text{ (do } e^x + y > 0, \forall y \in \mathbb{N}^* \text{)}.$$

Trường hợp 1: $\frac{y}{4} \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 4$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1; 6)$:

x	1	6
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$f(1)$	$f(6)$



$$f(1) = -y(e + y - 5); f(6) = 20e^6 - y(e^6 + 6y - 75) = -6y^2 + (75 - e^6)y + 20e^6.$$

$$\text{Ta có } f(6) > 0 \Leftrightarrow -6y^2 + (75 - e^6)y + 20e^6 > 0 \Leftrightarrow -72,1 < y < 18,4.$$

Suy ra $\forall y \in \mathbb{N}^*, y \leq 4$, thì $f(6) > 0$.

Do đó phương trình (*) có nghiệm $x \in (1; 6) \Leftrightarrow f(1) < 0 \Leftrightarrow e + y - 5 > 0 \Leftrightarrow y > 5 - e \approx 2,3$.

Cùng điều kiện $y \leq 4$ và y nguyên dương, ta có $y \in \{3; 4\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $\frac{y}{4} \geq 6 \Leftrightarrow y \geq 24$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1; 6)$:

x	1	6
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$f(1)$	$f(6)$

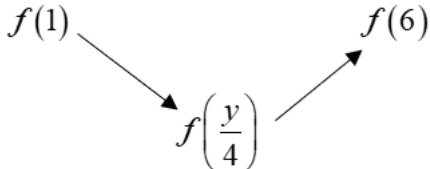


Với $y \geq 24$ ta luôn có $f(1) = -y(e + y - 5) < 0$ nên không tồn tại $x \in (1; 6)$ thỏa mãn (*).

Trường hợp 3: $1 < \frac{y}{4} < 6 \Leftrightarrow 4 < y < 24$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(1; 6)$:

x	1	$\frac{y}{4}$	6
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(1)$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	$f(6)$



Với $y \in (4; 24)$ ta luôn có $f(1) = -y(e + y - 5) < 0$ nên phương trình (*) có nghiệm $x \in (1; 6) \Leftrightarrow f(6) > 0 \Leftrightarrow -72,1 < y < 18,4$.

Cùng điều kiện $y \in (4; 24)$ và y nguyên dương ta có $y \in \{5; 6; \dots; 18\}$.

Do đó, tập các giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\{3; 4; \dots; 18\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 93: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1;5)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x = y(e^x + xy - 2x^2 - 3)$?

A. 14.

B. 12.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Đặt $f(x) = 4(x-1)e^x - y(e^x + xy - 2x^2 - 3)$.

Suy ra $f'(x) = 4xe^x - y(e^x + y - 4x) = (e^x + y)(4x - y)$.

Với mọi số nguyên dương y ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow y = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y}{4}$, do $e^x + y > 0$.

$x \in (1;5) \Leftrightarrow 4x \in (4;20)$. Ta có $f(1) = -y(e + y - 5)$; $f(5) = 16e^5 - y(e^5 + 5y - 53)$

Do y nguyên dương, ta có 3 trường hợp:

TH1: $4 < y < 20 \Leftrightarrow 1 < \frac{y}{4} < 5$, ta có bảng biến thiên

x	1	$\frac{y}{4}$	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-y(e+y-5)$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	$16e^5 - y(e^5 + 5y - 53)$

$4 < y < 20 \Rightarrow f(1) < 0$ nên yêu cầu bài toán suy ra.

$f(5) > 0 \Leftrightarrow 16e^5 - y(e^5 + 5y - 53) > 0 \Rightarrow -33 < y < 14,2$.

Suy ra ở trường hợp 1 ta được $5 \leq y \leq 14$.

TH2: $0 < y \leq 4 \Leftrightarrow 0 < \frac{y}{4} \leq 1$, ta có bảng biến thiên

x	$\frac{y}{4}$	1	5
$f'(x)$	0	+	+
$f(x)$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	$f(1)$	$f(5)$

Yêu cầu bài toán suy ra

$$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y(e+y-5) < 0 \\ 16e^5 - y(e^5 + 5y - 53) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 5-e \\ -33 < y < 14,2 \end{cases} \Rightarrow 5-e < y < 14,2$$

Suy ra ở trường hợp 2 ta được $y \in \{3; 4\}$.

TH3: $y \geq 20 \Leftrightarrow \frac{y}{4} \geq 5$, ta có bảng biến thiên

x	1	5	$\frac{y}{4}$
$f'(x)$	-	-	0
$f(x)$	$f(1)$	$f(5)$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$

Với $y \geq 20 \Rightarrow -y(e+y-5) < 0 \Rightarrow f(1) < 0 \Rightarrow f(5) < 0$. Nên ở trường hợp 3 không có giá trị y thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $y \in \{3; 4; 5; \dots; 14\}$ hay có 12 giá trị nguyên dương y thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 94: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1; 6)$ thỏa mãn $4(x-1)e^x = y(e^x + xy - 2x^2 - 3)$?

A. 15.

B. 18.

C. 17.

D. 16.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 4(x-1)e^x - y(e^x + xy - 2x^2 - 3), \forall x \in (1; 6), y \in \mathbb{N}^*$

Ta có $f'(x) = 4e^x + 4(x-1)e^x - y.e^x - y^2 + 4xy = (e^x + y)(4x - y)$

Và $f(1) = -y(e+y-5); f(6) = 20e^6 - y(e^6 + 6y - 75)$.

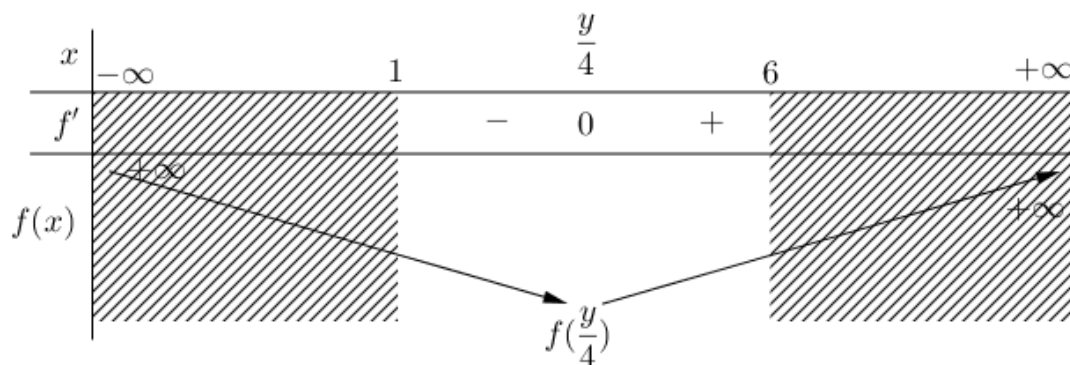
TH1: $y \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (1; 6)$. Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên $(1; 6)$. Mà $f(6) > 0 \forall y \in \{1; 2; 3; 4\}$ nên yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow f(1) = -y(e+y-5) < 0 \Leftrightarrow y \in \{3; 4\}$.

TH2: $y \geq 24 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in (1; 6)$. Suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến trên $(1; 6)$. Mà $\Rightarrow f(6) < 0 \forall y \geq 24$ nên yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow f(1) = -y(e+y-5) > 0 \Rightarrow$ không có giá trị $y \geq 24$ thỏa mãn.

TH3: $y \in \{5; 6; 7; \dots; 22; 23\}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y}{4}.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $(1;6)$



Do $f(1) = -y(e + y - 5) < 0$ nên yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow f(6) > 0$

$$\Leftrightarrow 20e^6 - y(e^6 + 6y - 75) > 0 \Leftrightarrow -6y^2 - y(e^6 - 75) + 20e^6 > 0$$

$$\Leftrightarrow -73,127... < y < 18,389... \Rightarrow y \in \{5; 6; 7; ...; 17; 18\}.$$

Kết hợp cả 3 trường hợp, ta có 16 giá trị y nguyên dương thỏa mãn yêu cầu của đề ra.

CHƯƠNG

II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Phương pháp đưa về cùng cơ số.

$$+ \text{ Nếu } a > 0, a \neq 1 \text{ thì } a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$+ \text{ Nếu } a \text{ chứa ẩn thì } a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$+ a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \cdot g(x) \text{ (logarit hóa).}$$

Câu 1: Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$

A. $x = 10$

B. $x = 9$

C. $x = 3$

D. $x = 4$

Câu 2: Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{2x^2-x} = 5$.

A. $S = \emptyset$

B. $S = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

C. $S = \{0; 2\}$

D. $S = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$

Câu 3: Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1} = 8$.

A. $S = \{4\}$.

B. $S = \{1\}$.

C. $S = \{3\}$.

D. $S = \{2\}$.

Câu 4: Phương trình $(\sqrt{5})^{x^2+4x+6} = \log_2 128$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1

B. 3

C. 2

D. 0

Câu 5: Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $e^{x^2} = \sqrt{3}$ là:

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 6: Phương trình $5^{x+2} - 1 = 0$ có tập nghiệm là

A. $S = \{3\}$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \{0\}$.

D. $S = \{-2\}$.

Câu 7: Cho biết $9^x - 12^2 = 0$, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{3^{-x-1}} - 8 \cdot 9^{\frac{x-1}{2}} + 19$.

A. 31.

B. 23.

C. 22.

D. 15.

Câu 8: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+5x+4} = 4$

A. $-\frac{5}{2}$.

B. -1.

C. 1.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^{2x-1} + 2m^2 - m - 3 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $m \in (0; +\infty)$. D. $m \in \left[-1; \frac{3}{2}\right]$.

Câu 10: Phương trình $5^{2x^2+5x+4} = 25$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

- A. 1 B. $\frac{5}{2}$ C. -1 D. $-\frac{5}{2}$

Câu 11: Phương trình $7^{2x^2+5x+4} = 49$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

- A. $-\frac{5}{2}$. B. 1. C. -1. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 12: Tập nghiệm của phương trình: $4^{x+1} + 4^{x-1} = 272$ là

- A. $\{3; 2\}$. B. $\{2\}$. C. $\{3\}$. D. $\{3; 5\}$.

Câu 13: Phương trình $27^{2x-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}$ có tập nghiệm là

- A. $\{-1; 7\}$. B. $\{-1; -7\}$. C. $\{1; 7\}$. D. $\{1; -7\}$.

Câu 14: Phương trình $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $x = 3$.

Câu 15: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3} = 5^{x+1}$ là

- A. $x = -1; x = 2$. B. $x = 1; x = -2$. C. $x = 1; x = 2$. D. Vô nghiệm.

Câu 16: Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$ là

- A. $\{-1\}$. B. $\{-1; 2\}$. C. $\{-1; 4\}$. D. $\{2\}$.

Câu 17: Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x} = 8^{2-x}$ bằng

- A. -6. B. -5. C. 5. D. 6.

Câu 18: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó $x_1^2 + x_2^2$ bằng:

- A. 17. B. 1. C. 5. D. 3.

Câu 19: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng

- A. 2. B. 5. C. 0. D. 3.

Câu 20: Nghiệm của phương trình $2^{7x-1} = 8^{2x-1}$ là

- A. $x = 2$. B. $x = -3$. C. $x = -2$. D. $x = 1$.

Câu 21: Phương trình $3^{x^2-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $x_1 x_2$.

- A. -6. B. -5. C. 6. D. -2.

Câu 22: Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x} = 8^{2-x}$ bằng

- A. 5. B. -5. C. 6. D. -6.

Câu 23: Tìm nghiệm của phương trình $(7 + 4\sqrt{3})^{2x+1} = 2 - \sqrt{3}$.

A. $x = \frac{1}{4}$.

B. $x = -1 + \log_{7+4\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})$.

C. $x = -\frac{3}{4}$.

D. $x = \frac{25 - 15\sqrt{3}}{2}$.

Câu 24: Tích các nghiệm của phương trình $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là

A. -2 .

B. -4 .

C. 4 .

D. 2 .

Câu 25: Giải phương trình $4^{2x+3} = 8^{4-x}$.

A. $x = \frac{6}{7}$.

B. $x = \frac{2}{3}$.

C. $x = 2$.

D. $x = \frac{4}{5}$.

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

+ Nếu $a > 0, a \neq 1: \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

+ Nếu $a > 0, a \neq 1: \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

+ Nếu $a > 0, a \neq 1: \log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ (mũ hóa)

Câu 26: Phương trình $\log_3(3x - 2) = 3$ có nghiệm là

A. $x = \frac{25}{3}$.

B. $x = 87$.

C. $x = \frac{29}{3}$.

D. $x = \frac{11}{3}$.

Câu 27: Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - x + 3) = 1$ là

A. $\{1\}$.

B. $\{0; 1\}$.

C. $\{-1; 0\}$.

D. $\{0\}$.

Câu 28: Tập nghiệm của phương trình $\log(x^2 - 2x + 2) = 1$ là

A. $\emptyset$.

B. $\{-2; 4\}$.

C. $\{4\}$.

D. $\{-2\}$.

Câu 29: Cho phương trình $\log_2(2x - 1)^2 = 2\log_2(x - 2)$. Số nghiệm thực của phương trình là:

A. 1 .

B. 0 .

C. 3 .

D. 2 .

Câu 30: Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 + 2x) = 1$ là

A. $\{1; -3\}$.

B. $\{1; 3\}$.

C. $\{0\}$.

D. $\{-3\}$.

Câu 31: Tập hợp các số thực m để phương trình $\log_2 x = m$ có nghiệm thực là

A. $[0; +\infty)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $(0; +\infty)$

Câu 32: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) = 0$ bằng

A. 6

B. 5

C. 13

D. 7

Câu 33: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$ là

A. 6

B. 5

C. 4

D. 0

Câu 34: Tập nghiệm của phương trình $\log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1$ là:

A. $\{4\}$.

B. $\{1; -4\}$.

C. $\left\{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}; \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$.

D. $\{-1; 4\}$.

- Câu 35:** Số nghiệm dương của phương trình $\ln|x^2 - 5| = 0$ là
 A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.
- Câu 36:** Số nghiệm của phương trình $(x + 3)\log_2(5 - x^2) = 0$.
 A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.
- Câu 37:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $(2x^2 - 5x + 2)[\log_x(7x - 6) - 2] = 0$ bằng
 A. $\frac{17}{2}$. B. 9. C. 8. D. $\frac{19}{2}$.
- Câu 38:** Số nghiệm của phương trình $\ln(x + 1) + \ln(x + 3) = \ln(x + 7)$ là
 A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.
- Câu 39:** Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_2(x - 1) = 2$
 A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 40:** Số nghiệm của phương trình $\log_3(6 + x) + \log_3 9x - 5 = 0$.
 A. 0 B. 2 C. 1 D. 3
- Câu 41:** Tìm tập nghiệm S của phương trình: $\log_3(2x + 1) - \log_3(x - 1) = 1$.
 A. $S = \{3\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{2\}$. D. $S = \{4\}$.
- Câu 42:** Phương trình $\log_2 x + \log_2(x - 1) = 1$ có tập nghiệm là
 A. $S = \{-1; 3\}$. B. $S = \{1; 3\}$. C. $S = \{2\}$. D. $S = \{1\}$.
- Câu 43:** Số nghiệm của phương trình $\log_3 x + \log_3(x - 6) = \log_3 7$ là
 A. 0 B. 2 C. 1 D. 3
- Câu 44:** Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) = 0$ là
 A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.
- Câu 45:** Nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$ là
 A. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. B. $x = \sqrt[3]{3}$. C. $x = \frac{1}{3}$. D. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Câu 46:** Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(x - 1) - \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)^3 = 3$ là
 A. 3 B. 1 C. 2 D. 0
- Câu 47:** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$ là $S = a + b\sqrt{2}$ (với a, b là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $Q = a.b$ bằng
 A. 0. B. 3. C. 9. D. 6.
- Câu 48:** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\frac{1}{2}\log(x^2 - 4x - 1) = \log 8x - \log 4x$ bằng
 A. 4. B. 3. C. 5. D. 1.
- Câu 49:** Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x - 2) + \log_2(x - 3)^2 = 2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng
 A. $6 + \sqrt{2}$. B. $8 + \sqrt{2}$. C. 8. D. $4 + \sqrt{2}$.

- Câu 50:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{81}} (x+3)^4$ bằng
- A. $\sqrt{10}$. B. $3\sqrt{10}$. C. 0. D. 3.
- Câu 51:** Biết phương trình $\log_2 (x^2 - 5x + 1) = \log_4 9$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 . Tích $x_1 \cdot x_2$ bằng:
- A. -8. B. -2. C. 1. D. 5.
- Câu 52:** Số nghiệm của phương trình $\log_3 (x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}} (2x-1) = 2$ là
- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.
- Câu 53:** Biết nghiệm lớn nhất của phương trình $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (2x-1) = 1$ là $x = a + b\sqrt{2}$ (a, b là hai số nguyên). Giá trị của $a + 2b$ bằng
- A. 4. B. 6. C. 0. D. 1.
- Câu 54:** Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_{\sqrt{3}} (x-2) + \log_3 (x-4)^2 = 0$.
- A. $6 + \sqrt{2}$. B. 6. C. $3 + \sqrt{2}$. D. 9.
- Câu 55:** Gọi S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2} \log x^2 + \log (x+10) = 2 - \log 4$. Tính S ?
- A. $S = -10$. B. $S = -15$. C. $S = -10 + 5\sqrt{2}$. D. $S = 8 - 5\sqrt{2}$.
- Câu 56:** Cho phương trình $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$. Tổng các nghiệm của phương trình trên là
- A. $4 + 2\sqrt{6}$. B. -4. C. $4 - 2\sqrt{6}$. D. $2 - 2\sqrt{3}$.
- Câu 57:** Phương trình $\log_{49} x^2 + \frac{1}{2} \log_7 (x-1)^2 = \log_7 (\log_{\sqrt{3}} 3)$ có bao nhiêu nghiệm?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 58:** Phương trình $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$ có bao nhiêu nghiệm?
- A. Vô nghiệm. B. Một nghiệm. C. Hai nghiệm. D. Ba nghiệm.
- Câu 59:** Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 (x+2) + \log_4 (x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ bằng
- A. 6. B. 3. C. 9. D. 12.

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

① Loại 1. $P(\log_a f(x)) = 0 \xrightarrow{PP}$ đặt $t = \log_a f(x)$.

② Loại 2. Sử dụng công thức $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ để đặt $t = a^{\log_b x} \Rightarrow t = x^{\log_b a}$.

- Câu 60:** Tập nghiệm của phương trình $5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1$ là
- A. $\{1; -1; 3\}$. B. $\{-1; 1; 3; 6\}$. C. $\{-6; -1; 1; 3\}$. D. $\{1; 3\}$.
- Câu 61:** Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?
- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.
- Câu 62:** Tổng các nghiệm của phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 2 = 0$ bằng
- A. 0. B. 1. C. 6. D. 2.
- Câu 63:** Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$ là
- A. 1. B. 0. C. -1. D. 3.

- Câu 64:** Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 4$. Khi đó $x_1^2 + 2x_2^2$ bằng
A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.
- Câu 65:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2.4^x - 9.2^x + 4 = 0$ bằng.
A. 2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.
- Câu 66:** Phương trình $6^{2x-1} - 5.6^{x-1} + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó tổng hai nghiệm $x_1 + x_2$ là.
A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 67:** Cho phương trình $25^x - 20.5^{x-1} + 3 = 0$. Khi đặt $t = 5^x$, ta được phương trình nào sau đây.
A. $t^2 - 3 = 0$. **B.** $t^2 - 4t + 3 = 0$. **C.** $t^2 - 20t + 3 = 0$. **D.** $t - \frac{20}{t} + 3 = 0$.
- Câu 68:** Tập nghiệm của phương trình $9^x - 4.3^x + 3 = 0$ là
A. $\{0; 1\}$ **B.** $\{1\}$ **C.** $\{0\}$ **D.** $\{1; 3\}$
- Câu 69:** Số nghiệm thực của phương trình $4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0$ là:
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4
- Câu 70:** Tập nghiệm của phương trình $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$ là
A. $S = \left\{3; \frac{1}{3}\right\}$ **B.** $S = \{-1\}$ **C.** $S = \{1; -1\}$ **D.** $S = \{3; 1\}$.
- Câu 71:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$ bằng
A. 9. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 27.
- Câu 72:** Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?
A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2
- Câu 73:** Phương trình $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ có tích các nghiệm là?
A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.
- Câu 74:** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3$. Tính $|x_1 - x_2|$
A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1
- Câu 75:** Giải phương trình: $4^{1+x} + 4^{1-x} = 2(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 8$
- Câu 76:** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x+8} - 4.3^{x+5} + 27 = 0$?
A. 5. **B.** -5. **C.** $\frac{4}{27}$. **D.** $-\frac{4}{27}$.
- Câu 77:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$ bằng
A. 0. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 27.
- Câu 78:** Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x} - 6^{\log x} - 18.3^{2\log x} = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về a ?
A. $(a-10)^2 = 1$. **B.** a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4}$.
C. $a^2 + a + 1 = 2$. **D.** $a = 10^2$.
- Câu 79:** Nghiệm của phương trình $25^x - 2(3-x)5^x + 2x - 7 = 0$ nằm trong khoảng nào sau đây?
A. $(5; 10)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(1; 3)$. **D.** $(0; 1)$
- Câu 80:** Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $\sqrt{15.2^{x+1}} + 1 \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$ bằng bao nhiêu?
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

- Câu 81:** Gọi S là tập nghiệm của của phương trình: $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$. Khi đó S là
A. $\{1; 2\}$. **B.** $\{1; 2; -1\}$. **C.** $\{1; 2; -1; -5\}$. **D.** $\emptyset$.

PHƯƠNG PHÁP LOGARIT HÓA

Dạng 1: Phương trình: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$

Dạng 2: Phương trình:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$$

$$\text{hoặc } \log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x).$$

- Câu 82:** Tính tích các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-1} = 3^{2x+3}$
A. $-3\log_2 3$. **B.** $-\log_2 54$. **C.** -1 . **D.** $1 - \log_2 3$.
- Câu 83:** Phương trình $3^{x^2} \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{3^x} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $T = x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2$.
A. $T = -\log_3 4$. **B.** $T = \log_3 4$. **C.** $T = -1$. **D.** $T = 1$.
- Câu 84:** Phương trình $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó tổng $x_1^2 + x_2$ bằng
A. $\frac{9}{2}$. **B.** 3 . **C.** 6 . **D.** $\frac{9}{4}$.
- Câu 85:** Số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x^2 + 8\log_2 x + 4 = 0$ là:
A. 2 . **B.** 3 . **C.** 0 . **D.** 1 .
- Câu 86:** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0$ là
A. 9 . **B.** -7 . **C.** 1 . **D.** 2 .
- Câu 87:** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - \log_2 9 \cdot \log_3 x = 3$ là
A. 2 . **B.** $\frac{17}{2}$. **C.** 8 . **D.** -2 .
- Câu 88:** Biết phương trình $\log_2^2(2x) - 5\log_2 x = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Tính $x_1 \cdot x_2$.
A. 8 . **B.** 5 . **C.** 3 . **D.** 1 .
- Câu 89:** Biết rằng phương trình $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 9 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Giá trị của $x_1 x_2$ bằng
A. 128 . **B.** 64 . **C.** 9 . **D.** 512 .
- Câu 90:** Cho phương trình $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng
A. $(0; 1)$. **B.** $(3; 5)$. **C.** $(5; 9)$. **D.** $(1; 3)$.
- Câu 91:** Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính T .
A. $L = 4$. **B.** $T = -5$. **C.** $T = 84$. **D.** $T = 5$.
- Câu 92:** Biết rằng phương trình $\log_2^2 x - \log_2(2018x) - 2019 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 . Tích $x_1 \cdot x_2$ bằng
A. $\log_2 2018$. **B.** $0,5$. **C.** 1 . **D.** 2 .

- Câu 93:** Cho phương trình $\log_3^2(3x) - \log_3^2 x^2 - 1 = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm, tính tích P của hai nghiệm đó.
- A. $P = 9$. B. $P = \frac{2}{3}$. C. $P = \sqrt[3]{9}$. D. $P = 1$.
- Câu 94:** Biết rằng phương trình $\log_3^2 x = \log_3 \frac{x^4}{3}$ có hai nghiệm a và b . Khi đó ab bằng
- A. 8. B. 81. C. 9. D. 64.
- Câu 95:** Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x - 5 \log_3 x + 4 = 0$. Tính T .
- A. $T = 4$ B. $T = -4$ C. $T = 84$ D. $T = 5$
- Câu 96:** Cho phương trình $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $(1; 3)$. B. $(5; 9)$. C. $(0; 1)$. D. $(3; 5)$.
- Câu 97:** Cho hai số thực dương m, n thỏa mãn $\log_4\left(\frac{m}{n}\right) = \log_6 n = \log_9(m+n)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{m}{n}$.
- A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = 4$. D. $P = \frac{1}{2}$.
- Câu 98:** Giả sử p, q là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} p = \log_{20} q = \log_{25}(p+q)$. Tính giá trị của $\frac{p}{q}$.
- A. $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$. B. $\frac{8}{5}$. C. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. D. $\frac{4}{5}$.
- Câu 99:** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x) \log_{25}^2 x = 1$ bằng
- A. $\frac{7}{25}$. B. $\frac{630}{625}$. C. $\frac{1}{125}$. D. 630.
- Câu 100:** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$
- A. $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$. B. 1. C. $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 101:** Gọi x, y các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T = a^2 + b^2$.
- A. $T = 26$. B. $T = 29$. C. $T = 20$. D. $T = 25$.
- Câu 102:** Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(4a-5b) - 1$. Đặt $T = \frac{b}{a}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $1 < T < 2$. B. $\frac{1}{2} < T < \frac{2}{3}$. C. $-2 < T < 0$. D. $0 < T < \frac{1}{2}$.

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP MŨ HÓA

+ Nếu $a > 0, a \neq 1$: $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ (mũ hóa)

Câu 103: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(12 - 2^x) = 5 - x$ bằng

- A. 2. B. 32. C. 6. D. 3.

Câu 104: Phương trình $\log_4(3 \cdot 2^x) = x - 1$ có nghiệm là x_0 thì nghiệm x_0 thuộc khoảng nào sau đây

- A. $(1; 2)$. B. $(2; 4)$. C. $(-2; 1)$. D. $(4; +\infty)$.

Câu 105: Phương trình $\log_4(3 \cdot 2^x - 1) = x - 1$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Tính giá trị của $P = x_1 + x_2$.

- A. $6 + 4\sqrt{2}$. B. 12. C. $\log_2(6 - 4\sqrt{2})$. D. 2.

Câu 106: Gọi x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) là nghiệm của phương trình $\log_3(3^{2x-1} - 3^{x-1} + 1) = x$ khi đó giá trị của biểu thức $\sqrt{3^{x_1}} - \sqrt{3^{x_2}}$ là:

- A. $1 - \sqrt{3}$. B. $1 + \sqrt{3}$. C. $2 - \sqrt{3}$. D. $2 - \sqrt{3}$.

Câu 107: Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)} = x$ là:

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 108: Phương trình $\log_2(5 - 2^x) = 2 - x$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $P = x_1 + x_2 + x_1 x_2$.

- A. 11. B. 9. C. 3. D. 2.

Câu 109: Cho phương trình $\log_4(3 \cdot 2^x - 1) = x - 1$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tổng $x_1 + x_2$ là:

- A. $\log_2(6 - 4\sqrt{2})$. B. 2. C. 4. D. $6 + 4\sqrt{2}$.

DẠNG 5: PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ, ĐÁNH GIÁ

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu một chiều trên D thì phương trình $f(x) = 0$ không quá một nghiệm trên D.

—→ Để vận dụng định lý này, ta cần nắm được 1 nghiệm $x = x_0$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.

② Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a; b)$ và tồn tại $u; v \in (a; b)$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

—→ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

Câu 110: Số nghiệm của phương trình $\ln(x-1) = \frac{1}{x-2}$ là:

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 111: Giải phương trình $\log_2 x \cdot \log_3 x + x \cdot \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3 \log_3 x + x$. Ta có tổng tất cả các nghiệm bằng

- A. 35. B. 5. C. 10. D. 9.

Câu 112: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2} \log_2(x+3) = \log_2(x+1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x+3}$.

- A. $S = 2$. B. $S = 1$. C. $S = -1$. D. $S = 1 - \sqrt{2}$.

- Câu 113:** Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $2a + b$.
- A. 3. B. 8. C. 4. D. 5.
- Câu 114:** Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.
- A. $a + b = 16$. B. $a + b = 11$. C. $a + b = 14$. D. $a + b = 13$.
- Câu 115:** Số nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{2} + x - \ln(x^2 - 2) = 2018$ là
- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.
- Câu 116:** Phương trình $\log_3(x^2 + 2x - 3) + x^2 - x - 7 = \log_3(x + 1)$ có số nghiệm là T và tổng các nghiệm là S . Khi đó $T + S$ bằng
- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.
- Câu 117:** Biết $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và $x_1 + 3x_2 = \frac{1}{4}(a + 2\sqrt{b})$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $a + b$
- A. $a + b = 14$. B. $a + b = 16$. C. $a + b = 17$. D. $a + b = 15$.
- Câu 118:** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$ bằng.
- A. -1. B. 2. C. 1. D. 0.
- Câu 119:** Cho số thực α sao cho phương trình $2^x - 2^{-x} = 2\cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ là
- A. 2019. B. 2018. C. 4037. D. 4038.
- Câu 120:** Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.
- A. $a + b = 13$. B. $a + b = 11$. C. $a + b = 16$. D. $a + b = 14$.
- Câu 121:** Phương trình $x(2^{x-1} + 4) = 2^{x+1} + x^2$ có tổng các nghiệm bằng
- A. 7 B. 3 C. 5 D. 6
- Câu 122:** Hỏi phương trình $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x + 5 \cdot 4^x = 6 \cdot 5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?
- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 123:** Số nghiệm của phương trình $3^{\log_7(x+4)} = x$ là
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.
- Câu 124:** Tích các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) = -2$ bằng
- A. 0. B. $\log_6 5$. C. 5. D. 1.
- Câu 125:** Số nghiệm của phương trình $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)$

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2

Câu 126: Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình: $\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0$.

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = -1$.

D. $S = 3$

CHƯƠNG

II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ
MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Phương pháp đưa về cùng cơ số.

+ Nếu $a > 0, a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

+ $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \cdot g(x)$ (logarit hóa).

Câu 1: Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$

A. $x=10$

B. $x=9$

C. $x=3$

D. $x=4$

Lời giải

Chọn D

$$3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4.$$

Câu 2: Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{2x^2-x} = 5$.

A. $S = \emptyset$

B. $S = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

C. $S = \{0; 2\}$

D. $S = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$

Lời giải

Chọn D

$$5^{2x^2-x} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 3: Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1} = 8$.

A. $S = \{4\}$.

B. $S = \{1\}$.

C. $S = \{3\}$.

D. $S = \{2\}$.

Lời giải

Ta có: $2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^3 \Leftrightarrow x+1=3 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2\}$.

Câu 4: Phương trình $(\sqrt{5})^{x^2+4x+6} = \log_2 128$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 0

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với: $x^2 + 4x + 6 = \log_{\sqrt{5}} 7 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 6 - \log_{\sqrt{5}} 7 = 0$

Sử dụng máy tính bỏ túi ta thấy phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

Câu 5: Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $e^{x^2} = \sqrt{3}$ là:

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Ta có $e^{x^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = \ln \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\ln \sqrt{3}}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu 6: Phương trình $5^{x+2} - 1 = 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = \{3\}$. B. $S = \{2\}$. C. $S = \{0\}$. D. $S = \{-2\}$.

Lời giải

Ta có $5^{x+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 5^{x+2} = 1 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy $S = \{-2\}$.

Câu 7: Cho biết $9^x - 12^2 = 0$, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{3^{-x-1}} - 8 \cdot 9^{\frac{x-1}{2}} + 19$.

- A. 31. B. 23. C. 22. D. 15.

Lời giải

Ta có $9^x - 12^2 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 12$.

$P = 3^{x+1} - 8 \cdot 3^{x-1} + 19 = 3 \cdot 3^x - 8 \cdot \frac{3^x}{3} + 19 = 3 \cdot 12 - 8 \cdot \frac{12}{3} + 19 = 23$.

Câu 8: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+5x+4} = 4$

- A. $-\frac{5}{2}$. B. -1. C. 1. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

$2^{2x^2+5x+4} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy tổng hai nghiệm bằng $-\frac{5}{2}$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^{2x-1} + 2m^2 - m - 3 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $m \in (0; +\infty)$. D. $m \in \left[-1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn A

$$3^{2x-1} + 2m^2 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3 + m - 2m^2$$

Phương trình có nghiệm khi $3 + m - 2m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{3}{2}$.

Vậy $m \in \left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 10: Phương trình $5^{2x^2+5x+4} = 25$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 1

B. $\frac{5}{2}$

C. -1

D. $-\frac{5}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$5^{2x^2+5x+4} = 5^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

Tổng các nghiệm là $-\frac{5}{2}$.

Câu 11: Phương trình $7^{2x^2+5x+4} = 49$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. $-\frac{5}{2}$.

B. 1.

C. -1.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

$$7^{2x^2+5x+4} = 49 \Leftrightarrow 7^{2x^2+5x+4} = 7^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng: $-2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$.

Câu 12: Tập nghiệm của phương trình: $4^{x+1} + 4^{x-1} = 272$ là

A. $\{3; 2\}$.

B. $\{2\}$.

C. $\{3\}$.

D. $\{3; 5\}$.

Lời giải

Chọn C

$$4^{x+1} + 4^{x-1} = 272 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^x + \frac{4^x}{4} = 272 \Leftrightarrow 4^x = 64 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$.

Câu 13: Phương trình $27^{2x-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}$ có tập nghiệm là

A. $\{-1; 7\}$.

B. $\{-1; -7\}$.

C. $\{1; 7\}$.

D. $\{1; -7\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $27^{2x-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2} \Leftrightarrow 3^{6x-9} = 3^{-x^2-2}$

$$\Leftrightarrow 6x-9 = -x^2-2 \Leftrightarrow x^2+6x-7=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-7 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1; -7\}$.

Câu 14: Phương trình $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$ có nghiệm là

- A.** $x = \frac{5}{2}$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = \frac{3}{2}$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

$$3^x \cdot 2^{x+1} = 72 \Leftrightarrow 3^x \cdot 2^x \cdot 2 = 72 \Leftrightarrow 6^x = 36 \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 15: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3} = 5^{x+1}$ là

- A.** $x = -1; x = 2$. **B.** $x = 1; x = -2$. **C.** $x = 1; x = 2$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3} = 5^{x+1} \Leftrightarrow 5^{-(x^2-2x-3)} = 5^{x+1} \Leftrightarrow -x^2+2x+3 = x+1 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1; x = 2$.

Câu 16: Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$ là

- A.** $\{-1\}$. **B.** $\{-1; 2\}$. **C.** $\{-1; 4\}$. **D.** $\{2\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow 7^{-x^2+2x+3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow -x^2+2x+3 = x+1.$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}.$$

Câu 17: Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x} = 8^{2-x}$ bằng

- A.** -6. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 2^{x^2+2x} = 8^{2-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+2x} = 2^{6-3x} \Leftrightarrow x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-6 \end{cases}.$$

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình bằng -5 .

Câu 18: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó $x_1^2 + x_2^2$ bằng:

- A. 17. B. 1. C. 5. D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$7^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} \Leftrightarrow 7^{x+1} = 7^{-(x^2-2x-3)} \Leftrightarrow x+1 = -x^2+2x+3 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

Câu 19: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng

- A. 2. B. 5. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 5^{3x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2} \Leftrightarrow 5^{3x-2} = 5^{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng 5.

Câu 20: Nghiệm của phương trình $2^{7x-1} = 8^{2x-1}$ là

- A. $x = 2$. B. $x = -3$. C. $x = -2$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$2^{7x-1} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{7x-1} = 2^{3(2x-1)} \Leftrightarrow 2^{7x-1} = 2^{6x-3} \Leftrightarrow 7x-1 = 6x-3 \Leftrightarrow x = -2.$$

Câu 21: Phương trình $3^{x^2-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính x_1x_2 .

- A. -6. B. -5. C. 6. D. -2.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3^{x^2-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow x^2-4 = 2-6x \Leftrightarrow x^2+6x-6=0.$$

Áp dụng Vi-ét suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1x_2 = -6$.

Câu 22: Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x} = 8^{2-x}$ bằng

- A. 5. B. -5. C. 6. D. -6.

Lời giải

$$\text{Phương trình đã cho tương đương: } 2^{x^2+2x} = 2^{3(2-x)} \Leftrightarrow x^2+2x = 6-3x \Leftrightarrow x^2+5x-6=0.$$

Do đó tổng các nghiệm của phương trình là: $S = -\frac{b}{a} = -5$.

Câu 23: Tìm nghiệm của phương trình $(7+4\sqrt{3})^{2x+1} = 2-\sqrt{3}$.

A. $x = \frac{1}{4}$.

B. $x = -1 + \log_{7+4\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$.

C. $x = -\frac{3}{4}$.

D. $x = \frac{25-15\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$(7+4\sqrt{3})^{2x+1} = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow (2+2\sqrt{3})^{4x+2} = (2+\sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow 4x+2 = -1 \Leftrightarrow 4x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}.$$

Câu 24: Tích các nghiệm của phương trình $(\sqrt{5}+2)^{x-1} = (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là

A. -2.

B. -4.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn. **A.**

ĐKXĐ : $x \neq -1$

Vì $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 1$ nên $(\sqrt{5}-2) = (\sqrt{5}+2)^{-1}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương $(\sqrt{5}+2)^{x-1} = (\sqrt{5}+2)^{\frac{-x+1}{x+1}}$

$$\Leftrightarrow x-1 = \frac{-x+1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Suy ra tích hai nghiệm là -2.

Câu 25: Giải phương trình $4^{2x+3} = 8^{4-x}$.

A. $x = \frac{6}{7}$.

B. $x = \frac{2}{3}$.

C. $x = 2$.

D. $x = \frac{4}{5}$.

Lời giải

$$4^{2x+3} = 8^{4-x} \Leftrightarrow 2^{4x+6} = 2^{12-3x} \Leftrightarrow 4x+6 = 12-3x \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}.$$

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

+ Nếu $a > 0, a \neq 1: \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

+ Nếu $a > 0, a \neq 1: \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

+ Nếu $a > 0, a \neq 1: \log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ (mũ hóa)

Câu 26: Phương trình $\log_3(3x-2) = 3$ có nghiệm là

A. $x = \frac{25}{3}$.

B. $x = 87$.

C. $x = \frac{29}{3}$.

D. $x = \frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3(3x-2)=3 \Leftrightarrow 3x-2=3^3 \Leftrightarrow 3x=29 \Leftrightarrow x=\frac{29}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\frac{29}{3}$.

Câu 27: Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-x+3)=1$ là

- A.** $\{1\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{-1;0\}$. **D.** $\{0\}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x^2-x+3>0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Ta có: $\log_3(x^2-x+3)=1 \Leftrightarrow x^2-x+3=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;1\}$.

Câu 28: Tập nghiệm của phương trình $\log(x^2-2x+2)=1$ là

- A.** $\emptyset$. **B.** $\{-2;4\}$. **C.** $\{4\}$. **D.** $\{-2\}$.

Lời giải

Ta có $\log(x^2-2x+2)=1 \Leftrightarrow x^2-2x+2=10 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=4 \end{cases}$

Câu 29: Cho phương trình $\log_2(2x-1)^2=2\log_2(x-2)$. Số nghiệm thực của phương trình là:

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Điều kiện: $x>2$.

Phương trình đã cho tương đương với: $2\log_2(2x-1)=2\log_2(x-2)$

$\Leftrightarrow 2x-1=x-2 \Leftrightarrow x=-1$

Nghiệm này không thỏa mãn điều kiện của phương trình nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 30: Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+2x)=1$ là

- A.** $\{1;-3\}$. **B.** $\{1;3\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\{-3\}$.

Lời giải

Phương trình $\log_3(x^2+2x)=1 \Leftrightarrow x^2+2x=3^1 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$.

Tập nghiệm của phương trình là $\{1;-3\}$.

Câu 31: Tập hợp các số thực m để phương trình $\log_2 x=m$ có nghiệm thực là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $\mathbb{R}$. D. $(0; +\infty)$

Lời giải

Tập giá trị của hàm số $y = \log_2 x$ là $\mathbb{R}$ nên để phương trình có nghiệm thực thì $m \in \mathbb{R}$

Câu 32: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) = 0$ bằng

- A. 6 B. 5 C. 13 D. 7

Lời giải

Chọn C

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = 3 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 13$$

Câu 33: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$ là

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 0

Lời giải

$$\text{Điều kiện } x \neq 0. \text{ Có } \log_4 x^2 - \log_2 3 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 x^2 = 1 + \log_2 3 \Leftrightarrow \log_2 x^2 = 2 + \log_2 6 \Leftrightarrow x^2 = 6^2$$

Dó đó, tổng các nghiệm sẽ bằng 0

Câu 34: Tập nghiệm của phương trình $\log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1$ là:

- A. $\{4\}$. B. $\{1; -4\}$. C. $\left\{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}; \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$. D. $\{-1; 4\}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ x^2 - 3x = (0,25)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \\ x = 4 \quad (n) \\ x = -1 \quad (n) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 4\}$.

Câu 35: Số nghiệm dương của phương trình $\ln|x^2 - 5| = 0$ là

- A. 2. B. 4. C. 0. D. 1.

Lời giải

$$\text{Có } \ln|x^2 - 5| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 5| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5 = 1 \\ x^2 - 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm dương là $x = \sqrt{6}$, $x = 2$.

Câu 36: Số nghiệm của phương trình $(x+3)\log_2(5-x^2) = 0$.

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải

Điều kiện: $5 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.

Phương trình $(x+3)\log_2(5-x^2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \log_2(5-x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ 5-x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\pm 2 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện ta có $x = \pm 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 37: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $(2x^2 - 5x + 2)[\log_x(7x - 6) - 2] = 0$ bằng

- A. $\frac{17}{2}$. B. 9. C. 8. D. $\frac{19}{2}$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x > \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{6}{7} < x \neq 1 (*)$.

Phương trình $(2x^2 - 5x + 2)[\log_x(7x - 6) - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ \log_x(7x - 6) - 2 = 0 \end{cases}$.

+ Phương trình $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện $(*) \Rightarrow x = 2$.

+ Phương trình $\log_x(7x - 6) - 2 = 0 \Leftrightarrow 7x - 6 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$. Kết hợp với

điều kiện $(*) \Rightarrow x = 6$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2; x = 6$ suy ra tổng các nghiệm bằng 8.

Câu 38: Số nghiệm của phương trình $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > -1$

$PT \Leftrightarrow \ln[(x+1)(x+3)] = \ln(x+7)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+3) = x+7$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (n) \\ x = -4 & (l) \end{cases}$

Câu 39: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_2(x-1) = 2$

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 1$

Ta có: $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 2$

$$\Leftrightarrow \log_2 [x(x-1)] = 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

Câu 40: Số nghiệm của phương trình $\log_3 (6+x) + \log_3 9x - 5 = 0$.

A. 0

B. 2

C. 1

D. 3

Lời giải

+) Điều kiện $x > 0$

+) Phương trình $\Leftrightarrow \log_3 (6+x) + \log_3 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x(6+x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -9(L) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3. \text{ Vậy phương trình có 1 nghiệm.}$$

Vậy số nghiệm của phương trình là 1.

Câu 41: Tìm tập nghiệm S của phương trình: $\log_3 (2x+1) - \log_3 (x-1) = 1$.

A. $S = \{3\}$.

B. $S = \{1\}$.

C. $S = \{2\}$.

D. $S = \{4\}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Với điều kiện trên, $\log_3 (2x+1) - \log_3 (x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_3 (2x+1) = \log_3 (x-1) + \log_3 3$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x+1) = \log_3 (3x-3) \Leftrightarrow 2x+1 = 3x-3 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy tập nghiệm $S = \{4\}$.

Câu 42: Phương trình $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1$ có tập nghiệm là

A. $S = \{-1; 3\}$.

B. $S = \{1; 3\}$.

C. $S = \{2\}$.

D. $S = \{1\}$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 1$.

Với điều kiện trên, ta có:

$$\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 [x(x-1)] = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được: $x = 2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

Câu 43: Số nghiệm của phương trình $\log_3 x + \log_3 (x-6) = \log_3 7$ là

A. 0

B. 2

C. 1

D. 3

Lời giải

Đk: $x > 6$

$$\text{Ta có: } \log_3 x + \log_3 (x-6) = \log_3 7 \Leftrightarrow \log_3 [x(x-6)] = \log_3 7 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

So với điều kiện vậy phương trình có một nghiệm $x = 7$

Câu 44: Số nghiệm của phương trình $\log_3 (x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}} (2x+3) = 0$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Viết lại phương trình ta được

$$\log_3 (x^2 + 4x) = \log_3 (2x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0 \\ x^2 + 4x = 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x=1 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Câu 45: Nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$ là

A. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

B. $x = \sqrt[3]{3}$.

C. $x = \frac{1}{3}$.

D. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Ta có: } \log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = -\frac{1}{2} \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_2 x + \log_2 x + \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow 3 \log_2 x + \log_2 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x^3 + \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow \log_2 (3x^3) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 46: Số nghiệm thực của phương trình $3 \log_3 (x-1) - \log_{\frac{1}{3}} (x-5)^3 = 3$ là

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 5$

$$3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3 \Leftrightarrow 3\log_3(x-1) + 3\log_3(x-5) = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-1) + \log_3(x-5) = 1 \Leftrightarrow \log_3[(x-1)(x-5)] = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có 1 nghiệm $x = 3 + \sqrt{7}$

Câu 47: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$ là $S = a + b\sqrt{2}$ (với a, b là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $Q = a.b$ bằng

A. 0.

B. 3.

C. 9.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2 < x \neq 4$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$2\log_3(x-2) + 2\log_3|x-4| = 0 \Leftrightarrow \log_3(x-2)|x-4| = 0 \Leftrightarrow (x-2)|x-4| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4) = 1 \\ (x-2)(x-4) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 7 = 0 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

So lại điều kiện, ta nhận hai nghiệm $x_1 = 3 + \sqrt{2}; x_2 = 3$

Ta được: $S = x_1 + x_2 = 6 + \sqrt{2} \Rightarrow a = 6; b = 1$. Vậy $Q = a.b = 6$.

Câu 48: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\frac{1}{2}\log(x^2 - 4x - 1) = \log 8x - \log 4x$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\frac{1}{2}\log(x^2 - 4x - 1) = \log 8x - \log 4x$ điều kiện $x > 2 + \sqrt{5}$

$$\Rightarrow \log(x^2 - 4x - 1) = 2\log\left(\frac{8x}{4x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log(x^2 - 4x - 1) = \log(2^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Nghiệm $x = -1$ loại, $x = 5$ thỏa mãn.

Suy ra tổng các nghiệm là 5.

Câu 49: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. $6 + \sqrt{2}$.

B. $8 + \sqrt{2}$.

C. 8.

D. $4 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

$$2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2 \Leftrightarrow \log_2(2x-2)^2 + \log_2(x-3)^2 = 2.$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(2x-2)(x-3)]^2 = 2 \Leftrightarrow (2x^2 - 8x + 6)^2 = 2^2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 = 2 \\ 2x^2 - 8x + 6 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

$$+) \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \quad (I) \end{cases}.$$

$$+) \quad (2) \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\Rightarrow S = \{2; 2 + \sqrt{2}\}.$$

Vậy tổng các nghiệm của S là: $2 + 2 + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}$.

Câu 50: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{81}} (x+3)^4$ bằng

A. $\sqrt{10}$.

B. $3\sqrt{10}$.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 3$.

$$\log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{81}} (x+3)^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 (x^2 - 5x + 6) - \frac{1}{2} \log_3 (x-2) = -\frac{1}{2} \log_3 (x+3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 - 5x + 6) - \log_3 (x-2) + \log_3 (x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{10} \quad (\text{do điều kiện}).$$

Câu 51: Biết phương trình $\log_2(x^2 - 5x + 1) = \log_4 9$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 . Tích $x_1 \cdot x_2$ bằng:

A. -8.

B. -2.

C. 1.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(x^2 - 5x + 1) = \log_4 9 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 5x + 1) = \log_2 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 3 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0 (*)$$

Phương trình (*) có $a.c = -2 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy $x_1.x_2 = -2$.

Câu 52: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2, \text{ điều kiện } x > \frac{1}{2}, x \neq 1.$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-1)^2 + \log_3(2x-1)^2 = \log_3 9$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x-1)(2x-1)]^2 = \log_3 9$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 3x + 1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = -3 \\ 2x^2 - 3x + 1 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

Thử lại ta có một nghiệm $x = 2$ thỏa mãn.

Câu 53: Biết nghiệm lớn nhất của phương trình $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 1$ là $x = a + b\sqrt{2}$ (a, b là hai số

nguyên). Giá trị của $a + 2b$ bằng

- A. 4. B. 6. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > \frac{1}{2}$.

$$\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 1 \Leftrightarrow 2\log_2 x - \log_2(2x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2}{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Nghiệm lớn nhất của phương trình là $x = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow a + 2b = 4$.

Câu 54: Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$.

- A. $6 + \sqrt{2}$. B. 6. C. $3 + \sqrt{2}$. D. 9.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x > 2 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0 \Rightarrow [(x-2)(x-4)]^2 = 1.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4) = 1 \\ (x-2)(x-4) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 7 = 0 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{2} \text{ (nhận)} \\ x = 3 - \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (nhận)} \end{cases}.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$ bằng $6 + \sqrt{2}$.

Câu 55: Gọi S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2} \log x^2 + \log(x+10) = 2 - \log 4$. Tính S ?

- A.** $S = -10$. **B.** $S = -15$. **C.** $S = -10 + 5\sqrt{2}$. **D.** $S = 8 - 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện phương trình: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -10 \end{cases}.$

Phương trình: $\frac{1}{2} \log x^2 + \log(x+10) = 2 - \log 4 \Leftrightarrow \log|x| + \log(x+10) + \log 4 = 2$

$$\Leftrightarrow \log[4|x|(x+10)] = 2 \Leftrightarrow 4|x|(x+10) = 100 \Leftrightarrow |x|(x+10) = 25 \text{ (*)}.$$

+ Khi $-10 < x < 0$:

$$\text{Phương trình (*)} \Leftrightarrow -x(x+10) = 25 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \text{ (t/m)}.$$

+ Khi $x > 0$:

$$\text{Phương trình (*)} \Leftrightarrow x(x+10) = 25 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 5\sqrt{2} \text{ (t/m)} \\ x = -5 - 5\sqrt{2} \text{ (1)} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = -5 + (-5 + 5\sqrt{2}) = -10 + 5\sqrt{2}.$$

Câu 56: Cho phương trình $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$. Tổng các nghiệm của phương trình trên là

- A.** $4 + 2\sqrt{6}$. **B.** -4 . **C.** $4 - 2\sqrt{6}$. **D.** $2 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} (x+1)^2 > 0 \\ 4-x > 0 \\ 4+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ -4 < x < 4 \end{cases}.$$

$$\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$$

$$\Leftrightarrow \log_2|x+1| + \log_2 4 = \log_2(4-x) + \log_2(4+x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2 (16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+1) = 16-x^2 \\ 4(x+1) = -(16-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-12=0 \\ x^2-4x-20=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-6 \\ x=2+2\sqrt{6} \\ x=2-2\sqrt{6} \end{cases}$$

So với điều kiện phương trình trình có 2 nghiệm $x=2; x=2-2\sqrt{6}$. Vậy tổng các nghiệm là $4-2\sqrt{6}$.

Câu 57: Phương trình $\log_{49} x^2 + \frac{1}{2} \log_7 (x-1)^2 = \log_7 (\log_{\sqrt{3}} 3)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_{49} x^2 + \frac{1}{2} \log_7 (x-1)^2 = \log_7 (\log_{\sqrt{3}} 3) \Leftrightarrow \log_7 |x| + \log_7 |x-1| = \log_7 2$$

$$\Leftrightarrow \log_7 |x(x-1)| = \log_7 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 2 \\ x(x-1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ x^2-x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Câu 58: Phương trình $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. Vô nghiệm.

B. Một nghiệm.

C. Hai nghiệm.

D. Ba nghiệm.

Lời giải

Điều kiện: $-4 < x < 4$ và $x \neq -1$.

$$\text{Ta có } \log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3 \Leftrightarrow \log_2 (4|x+1|) = \log_2 [(4-x)(4+x)]$$

$$\Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+1) = 16-x^2 \\ 4(x+1) = x^2-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-12=0 \\ x^2-4x-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-6 \\ x=2+2\sqrt{6} \\ x=2-2\sqrt{6} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2$ và $x=2-2\sqrt{6}$.

Câu 59: Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 (x+2) + \log_4 (x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ bằng

A. 6.

B. 3.

C. 9.

D. 12.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có } \log_2 (x+2) + \log_2 |x-5| - \log_2 8 = 0 \Leftrightarrow \log_2 [(x+2)|x-5|] = \log_2 8$$

$$\Leftrightarrow (x+2)|x-5|=8 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ (x+2)(x-5)=8 \\ -2 < x < 5 \\ (x+2)(5-x)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ thỏa mãn } (*) \end{cases}.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $6 + \frac{3+\sqrt{17}}{2} + \frac{3-\sqrt{17}}{2} = 9$.

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

① Loại 1. $P(\log_a f(x)) = 0 \xrightarrow{PP}$ đặt $t = \log_a f(x)$.

② Loại 2. Sử dụng công thức $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ để đặt $t = a^{\log_b x} \Rightarrow t = x^{\log_b a}$.

Câu 60: Tập nghiệm của phương trình $5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1$ là

- A.** $\{1; -1; 3\}$. **B.** $\{-1; 1; 3; 6\}$. **C.** $\{-6; -1; 1; 3\}$. **D.** $\{1; 3\}$.

Lời giải

$$5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{(x^2-4x+3)+(x^2+7x+6)} + 1.$$

Đặt $\begin{cases} a = x^2 - 4x + 3 \\ b = x^2 + 7x + 6 \end{cases}$, ta được phương trình:

$$5^a + 5^b = 5^{a+b} + 1 \Leftrightarrow 5^a + 5^b = 5^a \cdot 5^b + 1 \Leftrightarrow (1 - 5^a)(1 - 5^b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^a = 1 \\ 5^b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 + 7x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -1 \\ x = -6 \end{cases}.$$

Tập nghiệm của phương trình là $\{-6; -1; 1; 3\}$.

Câu 61: Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

$$\text{Phương trình } 9^x - 6^x = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 9^x - 6^x = 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 (*).$$

$$\text{Đặt } \left(\frac{3}{2}\right)^x = t \text{ với } t > 0, \text{ phương trình } (*) \text{ trở thành } t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ (L)}.$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2 > 0.$$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm âm.

Câu 62: Tổng các nghiệm của phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 2 = 0$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 6.

D. 2.

Lời giải

$$4^x - 6 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3 + \sqrt{7} \\ 2^x = 3 - \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2(3 + \sqrt{7}) \\ x = \log_2(3 - \sqrt{7}) \end{cases}.$$

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình là

$$\log_2(3 + \sqrt{7}) + \log_2(3 - \sqrt{7}) = \log_2[(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})] = \log_2 2 = 1.$$

Câu 63: Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$ là

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3^{x+1} + 3^{1-x} = 10 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x + \frac{3}{3^x} = 10$$

$$\text{Đặt } t = 3^x \ (t > 0), \text{ phương trình trở thành: } 3t + \frac{3}{t} = 10 \Leftrightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = 3 \text{ ta có } 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{3} \text{ ta có } 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\text{Vậy tổng các nghiệm của phương trình là: } 1 - 1 = 0.$$

Câu 64: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 4$. Khi đó $x_1^2 + 2x_2^2$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (2 - \sqrt{3})^x \cdot (2 + \sqrt{3})^x = 1. \text{ Đặt } t = (2 - \sqrt{3})^x, t > 0 \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}.$$

$$\text{Phương trình trở thành: } t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$\text{Với } t = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Với } t = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})^x = (2 - \sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\text{Vậy } x_1^2 + 2x_2^2 = 3.$$

Câu 65: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$ bằng.

A. 2.

B. -1.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Phương trình: } 2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0 \text{ (1) có TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$) Khi đó pt(1) trở thành:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4(tm) \\ t = \frac{1}{2}(tm) \end{cases}$$

Với $t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

Phương trình có tập nghiệm là: $S = \{2; -1\}$. Vậy tổng tất cả các nghiệm của pt(1) là 1.

Câu 66: Phương trình $6^{2x-1} - 5 \cdot 6^{x-1} + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó tổng hai nghiệm $x_1 + x_2$ là.

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

$$6^{2x-1} - 5 \cdot 6^{x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{6^{2x}}{6} - \frac{5 \cdot 6^x}{6} + 1 = 0 \Leftrightarrow 6^{2x} - 5 \cdot 6^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{x_1} = 2 \\ 6^{x_2} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6^{x_1} \cdot 6^{x_2} = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 6^{x_1+x_2} = 6 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1.$$

Câu 67: Cho phương trình $25^x - 20 \cdot 5^{x-1} + 3 = 0$. Khi đặt $t = 5^x$, ta được phương trình nào sau đây.

- A. $t^2 - 3 = 0$. B. $t^2 - 4t + 3 = 0$. C. $t^2 - 20t + 3 = 0$. D. $t - \frac{20}{t} + 3 = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 25^x - 20 \cdot 5^{x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 20 \cdot \frac{5^x}{5} + 3 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 4 \cdot 5^x + 3 = 0$$

Đặt $t = 5^x$, $t > 0$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 4t + 3 = 0$.

Câu 68: Tập nghiệm của phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ là

- A. $\{0; 1\}$ B. $\{1\}$ C. $\{0\}$ D. $\{1; 3\}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3^0 \\ 3^x = 3^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Câu 69: Số nghiệm thực của phương trình $4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0$ là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Lời giải

$$\text{pt} \Leftrightarrow 4^{x-1} + 16 \cdot 2^{x-1} - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1} = -8 + 2\sqrt{17} \\ 2^{x-1} = -8 - 2\sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \log_2(-8 + 2\sqrt{17})$$

Câu 70: Tập nghiệm của phương trình $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$ là

A. $S = \left\{3; \frac{1}{3}\right\}$

B. $S = \{-1\}$

C. $S = \{1; -1\}$

D. $S = \{3; 1\}$.

Lời giải

Chọn C

$$3^{2+x} + 3^{2-x} = 30 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Câu 71: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 27 = 0$ bằng

A. 9.

B. 18.

C. 3.

D. 27.

Lời giải

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 27 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 18 \cdot 3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 9 + 3\sqrt{6} \\ 3^x = 9 - 3\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \log_3(9 + 3\sqrt{6}) \\ x_2 = \log_3(9 - 3\sqrt{6}) \end{cases}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_1 + x_2 = \log_3(9 + 3\sqrt{6}) + \log_3(9 - 3\sqrt{6}) = \log_3[(9 + 3\sqrt{6})(9 - 3\sqrt{6})] = \log_3 27 = 3.$$

Câu 72: Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 3

B. 0

C. 1

D. 2

Lời giải

$$\text{Ta có: } 9^x - 6^x = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 9^x - 6^x = 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = -1(L) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2.$$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm âm.

Câu 73: Phương trình $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ có tích các nghiệm là?

A. 0.

B. 2.

C. -1.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = (\sqrt{2}-1)^x \text{ (} t > 0 \text{)} \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^x = \frac{1}{t}$$

Phương trình đã cho trở thành

$$t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \sqrt{2} \\ t = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Với $t = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2} - 1)^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = -1$

Với $t = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2} - 1)^x = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy tích 2 nghiệm của phương trình đã cho là -1

Câu 74: Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3$. Tính $|x_1 - x_2|$

A. 3

B. 0

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn D

Đặt $2^{x^2-x} = t (t > 0)$. Phương trình tương đương với

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

Vì $t > 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow |x_1 - x_2| = 1$

Câu 75: (HSG Bắc Ninh 2019) Giải phương trình: $4^{1+x} + 4^{1-x} = 2(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 8$

Lời giải

$$4^{1+x} + 4^{1-x} = 2(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 8 \Leftrightarrow 4^{1+x} + 4^{1-x} = 4(2^{1+x} - 2^{1-x}) + 8$$

Đặt $t = 2^{1+x} - 2^{1-x} \Rightarrow t^2 = 4^{1+x} + 4^{1-x} - 8$

Phương trình trở thành:

$$t^2 = 4t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1+x} - 2^{1-x} = 0 \\ 2^{1+x} - 2^{1-x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1+x} = 2^{1-x} \\ 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x = 1-x \\ 2^x = 1 - \sqrt{2} \\ 2^x = 1 + \sqrt{2} \end{cases} (VN) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

Câu 76: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x+8} - 4 \cdot 3^{x+5} + 27 = 0$?

A. 5.

B. -5.

C. $\frac{4}{27}$.

D. $-\frac{4}{27}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^{2x+8} - 4 \cdot 3^{x+5} + 27 = 0 \Leftrightarrow 3^{2(x+4)} - 12 \cdot 3^{x+4} + 27 = 0$.

Đặt $t = 3^{x+4} (t \geq 0)$ ta được phương trình $t^2 - 12t + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 9 \end{cases}$

từ đó ta có $\begin{cases} 3^{x+4} = 3 \\ 3^{x+4} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy tổng các nghiệm phương trình đã cho là -5.

Câu 77: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 27 = 0$ bằng

A. 0.

B. 18.

C. 3.

D. 27.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 27 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 18 \cdot 3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 9 + 3\sqrt{6} \\ 3^x = 9 - 3\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3(9 + 3\sqrt{6}) \\ x = \log_3(9 - 3\sqrt{6}) \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm là

$$\log_3(9 + 3\sqrt{6}) + \log_3(9 - 3\sqrt{6}) = \log_3(9 + 3\sqrt{6})(9 - 3\sqrt{6}) = \log_3 27 = 3.$$

Câu 78: Gọi a là một nghiệm của phương trình $4 \cdot 2^{2\log x} - 6^{\log x} - 18 \cdot 3^{2\log x} = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về a ?

A. $(a-10)^2 = 1$.

B. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4}$.

C. $a^2 + a + 1 = 2$.

D. $a = 10^2$.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2\log x}$ ta được $4\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} - 18 = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}$, $t > 0$.

Ta có $4t^2 - t - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{4} \\ t = -2(L) \end{cases}$.

Với $t = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 100$.

Vậy $a = 100 = 10^2$.

Câu 79: Nghiệm của phương trình $25^x - 2(3-x)5^x + 2x - 7 = 0$ nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(5;10)$.

B. $(0;2)$.

C. $(1;3)$.

D. $(0;1)$

Lời giải

Đặt $t = 5^x$, $t > 0$.

Phương trình trở thành: $t^2 - 2(3-x)t + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = -2x + 7 \end{cases}$.

Với $t = -2x + 7$ ta có: $5^x = -2x + 7 \Leftrightarrow 5^x + 2x - 7 = 0$.

Phương trình có một nghiệm $x = 1$.

Với $x > 1$: $5^x + 2x - 7 > 5 + 2 - 7 \Leftrightarrow 5^x + 2x - 7 > 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Với $x < 1$: $5^x + 2x - 7 < 5 + 2 - 7 \Leftrightarrow 5^x + 2x - 7 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1 \in (0; 2)$.

- Câu 80:** Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $\sqrt{15 \cdot 2^{x+1} + 1} \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$ bằng bao nhiêu?
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Với $x \geq 0$ thì $\sqrt{15 \cdot 2^{x+1} + 1} \geq |2^x - 1| + 2^{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{30 \cdot 2^x + 1} \geq 3 \cdot 2^x - 1. (1)$

Đặt $t = 2^x \geq 1$ thì $(1) \Leftrightarrow \sqrt{30t + 1} \geq 3t - 1 \Leftrightarrow 30t + 1 \geq (3t - 1)^2$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 36t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2^x \leq 4 \Rightarrow x \in \{0; 1; 2\}.$$

- Câu 81:** Gọi S là tập nghiệm của của phương trình: $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$. Khi đó S là
A. $\{1; 2\}$. **B.** $\{1; 2; -1\}$. **C.** $\{1; 2; -1; -5\}$. **D.** $\emptyset$.

Lời giải

Nhận xét:

Ta có $(x^2 - 3x + 2) + (x^2 + 6x + 5) = 2x^2 + 3x + 7$ do đó $4^{2x^2+3x+7} = 4^{x^2-3x+2} \cdot 4^{x^2+6x+5}$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$\begin{aligned} (4^{x^2-3x+2} - 4^{2x^2+3x+7}) - (1 - 4^{x^2+6x+5}) &= 0 \Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2} (1 - 4^{x^2+6x+5}) - (1 - 4^{x^2+6x+5}) \\ \Leftrightarrow (1 - 4^{x^2+6x+5})(4^{x^2-3x+2} - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2+6x+5} = 1 \\ 4^{x^2-3x+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 5 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $S = \{1; 2; -1; -5\}$.

PHƯƠNG PHÁP LOGARIT HÓA

Dạng 1: Phương trình: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$

Dạng 2: Phương trình:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$$

$$\text{hoặc } \log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x).$$

- Câu 82:** Tính tích các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-1} = 3^{2x+3}$
A. $-3 \log_2 3$. **B.** $-\log_2 54$. **C.** -1 . **D.** $1 - \log_2 3$.

Lời giải

Chọn B

$$PT \Leftrightarrow \log_2 2^{x^2-1} = \log_2 3^{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = (2x + 3) \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x \cdot \log_2 3 - 1 - 3 \log_2 3 = 0$$

Do $1 \cdot (-1 - 3 \log_2 3) < 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 .

Theo Vi-ét ta có $x_1 x_2 = -1 - 3 \log_2 3 = -\log_2 2 - \log_2 27 = -\log_2 54$.

Câu 83: Phương trình $3^{x^2} \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{3^x} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $T = x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2$.

A. $T = -\log_3 4$.

B. $T = \log_3 4$.

C. $T = -1$.

D. $T = 1$.

Lời giải

Ta có $3^{x^2} \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{3^x} = 0$

$$\Leftrightarrow 3^{x(x+1)} \cdot 4^{x+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \log(3^{x(x+1)} \cdot 4^{x+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log 3^{x(x+1)} + \log 4^{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) \log 3 + (x+1) \log 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x \log 3 + \log 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\log_3 4 \end{cases}$$

Do đó $T = x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = \log_3 4 - (1 + \log_3 4) = -1$

Câu 84: Phương trình $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó tổng $x_1^2 + x_2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. 3.

C. 6.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện phương trình: $x > 0, x \neq 1$.

$$\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - \frac{5}{2} \log_2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 4$.

Suy ra $x_1^2 + x_2 = 6$.

Câu 85: Số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x^2 + 8 \log_2 x + 4 = 0$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$

$$\log_2^2 x^2 + 8 \log_2 x + 4 = 0 \Leftrightarrow 4 \log_2^2 x + 8 \log_2 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (TM)}$$

Câu 86: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0$ là

- A.** 9. **B.** -7 . **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình trở thành: $t^2 - 2t - 7 = 0$ (1)

Do $ac = -7 < 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm t_1, t_2 phân biệt thỏa mãn $t_1 + t_2 = 2$.

Khi đó, các nghiệm của phương trình ban đầu là: $x_1 = 3^{t_1}$; $x_2 = 3^{t_2}$.

$$\Rightarrow x_1.x_2 = 3^{t_1}.3^{t_2} = 3^{t_1+t_2} = 3^2 = 9.$$

Câu 87: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - \log_2 9 \cdot \log_3 x = 3$ là

- A.** 2. **B.** $\frac{17}{2}$. **C.** 8. **D.** -2 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_2^2 x - \log_2 9 \cdot \log_3 x = 3 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 8 \end{cases}$$

Vậy $S = \frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2}$.

Câu 88: Biết phương trình $\log_2^2(2x) - 5\log_2 x = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Tính $x_1 \cdot x_2$.

- A.** 8. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình đã cho về phương trình sau: $\log^2_2 x - 3\log_2 x + 1 = 0$.

Do $\log_2 x_1$ và $\log_2 x_2$ là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 3t + 1 = 0$ nên

$$\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 3, \text{ mà } \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = \log_2 (x_1 \cdot x_2).$$

Suy ra $\log_2(x_1.x_2) = 3$ nên $x_1.x_2 = 8$.

Câu 89: Biết rằng phương trình $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 9 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Giá trị của $x_1 x_2$ bằng

- A.** 128. **B.** 64. **C.** 9. **D.** 512.

Lời giải

Chọn A

+ Điều kiện $x > 0$.

$$+ \log_2^2 x - 7\log_2 x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \\ \log_2 x = \frac{7-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} \\ x = 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > 0 \text{)}.$$

Vậy $x_1 x_2 = 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} \cdot 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} = 128$.

- Câu 90:** Cho phương trình $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng
- A.** $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;9)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5 \Leftrightarrow (1 + \log_2(2x))^2 - 2\log_2(2x) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(2x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x) = 2 \\ \log_2(2x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Nghiệm nhỏ nhất là $x = \frac{1}{8} \in (0;1)$.

- Câu 91:** Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính T .

- A.** $L = 4$. **B.** $T = -5$. **C.** $T = 84$. **D.** $T = 5$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3^4 = 81 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy $T = 3 + 81 = 84$.

- Câu 92:** Biết rằng phương trình $\log_2^2 x - \log_2(2018x) - 2019 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 . Tích $x_1 \cdot x_2$ bằng

- A.** $\log_2 2018$. **B.** $0,5$. **C.** 1 . **D.** 2 .

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $x > 0$.

$$\log_2^2 x - \log_2(2018x) - 2019 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - \log_2 2018 - 2019 = 0.$$

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$, ta có $t^2 - t - \log_2 2018 - 2019 = 0$ (*)

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm của (*), ta có $x_1 \cdot x_2 = 2^{t_1+t_2} = 2^1 = 2$.

- Câu 93:** Cho phương trình $\log_3^2(3x) - \log_3^2 x^2 - 1 = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm, tính tích P của hai nghiệm đó.

- A. $P = 9$. B. $P = \frac{2}{3}$. C. $P = \sqrt[3]{9}$. D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3^2(3x) - \log_3^2 x^2 - 1 = 0$ (điều kiện $x > 0$).

$$\Leftrightarrow (1 + \log_3 x)^2 - (2 \log_3 x)^2 - 1 = 0.$$

$$\text{Đặt } \log_3 x = t \text{ ta có phương trình } (1+t)^2 - (2t)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -3t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ t = 0 \end{cases}$$

Với $t = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Với } t = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_3 x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}.$$

$$\text{Vậy } P = 1 \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9}.$$

Câu 94: Biết rằng phương trình $\log_3^2 x = \log_3 \frac{x^4}{3}$ có hai nghiệm a và b . Khi đó ab bằng

- A. 8. B. 81. C. 9. D. 64.

Lời giải

Đ/K: $x > 0$.

$$\text{Phương trình } \log_3^2 x = \log_3 \frac{x^4}{3} \Leftrightarrow \log_3^2 x - 4 \cdot \log_3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 - \sqrt{3} \\ \log_3 x = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{2-\sqrt{3}} \\ x = 3^{2+\sqrt{3}} \end{cases}. \text{ Khi đó } a.b = 3^{2-\sqrt{3}} \cdot 3^{2+\sqrt{3}} = 81.$$

Câu 95: Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5 \log_3 x + 4 = 0$. Tính T .

- A. $T = 4$ B. $T = -4$ C. $T = 84$ D. $T = 5$

Lời giải

ĐKXĐ: $x > 0$

$$\text{Ta có: } \log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5 \log_3 x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - 5 \log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3^4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = 3 + 3^4 = 84$$

Câu 96: Cho phương trình $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(1; 3)$. **B.** $(5; 9)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(3; 5)$.

Lời giải

$$\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5 \Leftrightarrow [1 + \log_2(2x)]^2 - 2\log_2(2x) = 5 \Leftrightarrow \log_2^2(2x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x) = 2 \\ \log_2(2x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ 2x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Vậy nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng $(0; 1)$.

Câu 97: Cho hai số thực dương m, n thỏa mãn $\log_4\left(\frac{m}{2}\right) = \log_6 n = \log_9(m+n)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{m}{n}$.

- A.** $P = 2$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 4$. **D.** $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = \log_4\left(\frac{m}{2}\right) = \log_6 n = \log_9(m+n) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} = 4^t \\ n = 6^t \\ m+n = 9^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \cdot 4^t \\ n = 6^t \\ m+n = 9^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = -1 (VN) \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \cdot 4^t \\ n = 6^t \end{cases} \Rightarrow P = \frac{m}{n} = 2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^t = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Câu 98: Giả sử p, q là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} p = \log_{20} q = \log_{25}(p+q)$. Tính giá trị của $\frac{p}{q}$.

- A.** $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$. **B.** $\frac{8}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_{16} p = \log_{20} q = \log_{25} (p+q) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{16} p = t \\ \log_{20} q = t \\ \log_{25} (p+q) = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 16^t \\ q = 20^t \\ p+q = 25^t \end{cases} \Rightarrow 16^t + 20^t = 25^t$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{16}{25}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (vn)} \\ \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \frac{p}{q} = \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 99: Tích các nghiệm của phương trình $\log_x (125x) \log_{25}^2 x = 1$ bằng

- A.** $\frac{7}{25}$. **B.** $\frac{630}{625}$. **C.** $\frac{1}{125}$. **D.** 630.

Lời giải

Điều kiện: $0 < x \neq 1$, ta có:

$$\log_x (125x) \log_{25}^2 x = 1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x + \log_{25}^2 x \cdot \log_x 125 = 1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x + \frac{3}{2} \log_{25} x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{25} x = \frac{1}{2} \\ \log_{25} x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{1}{25^2} \end{cases}.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là: $\frac{1}{125}$.

Câu 100: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$

- A.** $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$. **B.** 1. **C.** $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Đặt $\sqrt{\log_2 x + 1} = t, (t \geq 0) \Rightarrow \log_2 x = t^2 - 1$ ta có phương trình

$$(t^2 - 1)^2 + t = 1 \Leftrightarrow t^4 - 2t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t(t^3 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t^2 - 2t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (t/m)} \\ t = 1 \text{ (t/m)} \\ t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ (t/m)} \\ t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = 0$ thì $\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1}$.

Với $t = 1$ thì $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 2^0$.

Với $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $\log_2 x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

Câu 101: Gọi x, y các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T = a^2 + b^2$.

A. $T = 26$.

B. $T = 29$.

C. $T = 20$.

D. $T = 25$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y)$, ta có $\begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ x+y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 6^t = 4^t$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{y} = \left(\frac{9}{6}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Mà } \frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a=1; b=5.$$

$$\text{Vậy } T = a^2 + b^2 = 1^2 + 5^2 = 26.$$

Câu 102: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (4a-5b) - 1$. Đặt $T = \frac{b}{a}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $1 < T < 2$.

B. $\frac{1}{2} < T < \frac{2}{3}$.

C. $-2 < T < 0$.

D. $0 < T < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Giả sử: } \log_4 a = \log_6 b = \log_9 (4a-5b) - 1 = t \Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ 4a-5b = 9^{t+1} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } 4.4^t - 5.6^t = 9.9^t \Leftrightarrow 4.\left(\frac{4}{9}\right)^t - 5.\left(\frac{6}{9}\right)^t = 9 \Leftrightarrow 4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 5.\left(\frac{2}{3}\right)^t - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = -1 \quad (VN) \end{cases} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow t = -2$$

$$\text{Vậy } T = \frac{b}{a} = \left(\frac{6}{4}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9} \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP MŨ HÓA

+ Nếu $a > 0, a \neq 1$: $\boxed{\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}} \text{ (mũ hóa)}$

Câu 103: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(12 - 2^x) = 5 - x$ bằng

- A.** 2. **B.** 32. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $12 - 2^x > 0$ (*)

$$\text{Khi đó } \log_2(12 - 2^x) = 5 - x \Leftrightarrow 12 - 2^x = 2^{5-x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta thấy cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện (*), và tích bằng $2 \cdot 3 = 6$.

Câu 104: Phương trình $\log_4(3 \cdot 2^x) = x - 1$ có nghiệm là x_0 thì nghiệm x_0 thuộc khoảng nào sau đây

- A.** $(1; 2)$. **B.** $(2; 4)$. **C.** $(-2; 1)$. **D.** $(4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_4(3 \cdot 2^x) = x - 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x = 4^{x-1} \Leftrightarrow 4^x - 12 \cdot 2^x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 0, (vn) \\ 2^x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow x = \log_2 12 \in (2; 4).$$

Câu 105: Phương trình $\log_4(3 \cdot 2^x - 1) = x - 1$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Tính giá trị của $P = x_1 + x_2$.

- A.** $6 + 4\sqrt{2}$. **B.** 12. **C.** $\log_2(6 - 4\sqrt{2})$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } 3 \cdot 2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > \frac{1}{3} \text{ (*)}.$$

$$\log_4(3 \cdot 2^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x - 1 = 4^{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 6 + 4\sqrt{2} \quad (t/m(*)) \\ 2^x = 6 - 4\sqrt{2} \quad (t/m(*)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2(6 + 4\sqrt{2}) \\ x = \log_2(6 - 4\sqrt{2}) \end{cases}$$

Khi đó $P = \log_2(6 + 4\sqrt{2}) + \log_2(6 - 4\sqrt{2}) = \log_2(6 + 4\sqrt{2})(6 - 4\sqrt{2}) = \log_2 4 = 2$.

Câu 106: Gọi x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) là nghiệm của phương trình $\log_3(3^{2x-1} - 3^{x-1} + 1) = x$ khi đó giá trị của biểu thức $\sqrt{3^{x_1}} - \sqrt{3^{x_2}}$ là:

A. $1 - \sqrt{3}$.

B. $1 + \sqrt{3}$.

C. $2 - \sqrt{3}$.

D. $2 + \sqrt{3}$.

Lời giải

$$\log_3(3^{2x-1} - 3^{x-1} + 1) = x$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x-1} - 3^{x-1} + 1 = 3^x$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0.$$

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 0, x_2 = 1$. Ta được đáp án A là đúng.

Câu 107: Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)} = x$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Đk: $x > -3$

Đặt $t = \log_5(x+3) \Rightarrow x = 5^t - 3$, phương trình đã cho trở thành

$$2^t = 5^t - 3 \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t = 1 \quad (1)$$

Dễ thấy hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 1$.

Với $t = 1$, ta có $\log_5(x+3) = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 108: Phương trình $\log_2(5 - 2^x) = 2 - x$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $P = x_1 + x_2 + x_1x_2$.

A. 11.

B. 9.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Điều kiện: $2^x < 5$

$$\log_2(5 - 2^x) = 2 - x \Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = x_1 + x_2 + x_1x_2 = 2.$$

Câu 109: Cho phương trình $\log_4(3 \cdot 2^x - 1) = x - 1$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tổng $x_1 + x_2$ là:

A. $\log_2(6 - 4\sqrt{2})$.

B. 2.

C. 4.

D. $6 + 4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\log_4 (3 \cdot 2^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x - 1 = 4^{x-1} \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = 2^x \quad (t > 0). \text{ PT (2)} \Rightarrow \frac{1}{4}t^2 - 3t + 1 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Giả sử 2 nghiệm của PT (2) là } t_1, t_2 \Rightarrow t_1 t_2 = 4 \Rightarrow 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 4 \Rightarrow 2^{x_1 + x_2} = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2.$$

DẠNG 5: PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ, ĐÁNH GIÁ

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu một chiều trên D thì phương trình $f(x) = 0$ không quá một nghiệm trên D.

—→ Để vận dụng định lý này, ta cần nắm được 1 nghiệm $x = x_0$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.

② Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a; b)$ và tồn tại $u; v \in (a; b)$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

—→ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

Câu 110: Số nghiệm của phương trình $\ln(x-1) = \frac{1}{x-2}$ là:

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Hàm số $f(x) = \ln(x-1)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Hàm số $g(x) = \frac{1}{x-2}$ có $g'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0, \forall x \neq 2$ nên $g(x)$ luôn nghịch biến trên

khoảng $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm.

Câu 111: Giải phương trình $\log_2 x \cdot \log_3 x + x \cdot \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3 \log_3 x + x$. Ta có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 35.

B. 5.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Điều kiện $x > 0$.

$$\log_2 x \cdot \log_3 x + x \cdot \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3 \log_3 x + x \Leftrightarrow (\log_2 x + x - 3)(\log_3 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \log_2 x + x - 3 = 0 \end{cases}$$

Ta có hàm số $f(x) = \log_2 x + x$ liên tục và đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $f(2) = 3$ nên phương trình $\log_2 x + x - 3 = 0$ có một nghiệm $x = 2$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng 5.

Câu 112: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log_2(x+3) = \log_2(x+1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x+3}$.

A. $S = 2$.

B. $S = 1$.

C. $S = -1$.

D. $S = 1 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > -1$.

Ta có:

$$\frac{1}{2}\log_2(x+3) = \log_2(x+1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+3} + (\sqrt{x+3} - 1)^2 = \log_2(x+1) + x^2 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + (t-1)^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2(t-1) = \frac{1 + 2 \ln 2(t^2 - t)}{t \ln 2} = \frac{2 \ln 2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + (1 - \ln \sqrt{2})}{t \ln 2} > 0 \quad \forall t > 0.$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Suy ra

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+3}) = f(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 1.

Câu 113: Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$ trong

đó a, b là các số nguyên. Tính $2a + b$.

A. 3.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Ta có:

$$\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) - \log_5 x = 2\log_3 (x-1) - 2\log_3 (2\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \log_5(2\sqrt{x}+1) + 2\log_3(2\sqrt{x}) = \log_5 x + 2\log_3(x-1) \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_5(t+1) + 2\log_3(t)$ trên $(2; +\infty)$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 5} + \frac{2}{t \cdot \ln 3} > 0$ với mọi $t \in (2; +\infty)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

Từ đó ta có $(*) \Leftrightarrow f(2\sqrt{x}) = f(x-1) \Rightarrow 2\sqrt{x} = x-1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy $\sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3, b = 2$

Câu 114: Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và

$$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b}) \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương. Tính } a + b.$$

A. $a + b = 16$.

B. $a + b = 11$.

C. $a + b = 14$.

D. $a + b = 13$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $\log_7\left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7\left(\frac{(2x-1)^2}{2x}\right) + 4x^2 - 4x + 1 = 2x$

$$\Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2 + (2x-1)^2 = \log_7 2x + 2x(1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0$ với $t > 0$

Vậy hàm số đồng biến

Phương trình (1) trở thành $f((2x-1)^2) = f(2x) \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$

Vậy $x_1 + 2x_2 = \begin{cases} \frac{9-\sqrt{5}}{4} & (l) \\ \frac{9+\sqrt{5}}{4} & (tm) \end{cases} \Rightarrow a = 9; b = 5 \Rightarrow a + b = 9 + 5 = 14$.

Câu 115: Số nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{2} + x - \ln(x^2 - 2) = 2018$ là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \ln(x^2 - 2)$ với $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = x + 1 - \frac{2x}{x^2 - 2}$; $f''(x) = 1 + \frac{2x^2 + 4}{(x^2 - 2)^2} > 0, \forall x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Nên suy ra hàm số $f'(x) = x + 1 - \frac{2x}{x^2 - 2}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Mặt khác $f'(2).f'(\sqrt{3}) = 1.(1 - \sqrt{3}) < 0$ và $f'(-3).f'(-2) = -\frac{8}{7}.1 < 0$ nên $f'(x)$ có đúng một nghiệm $a \in (-\infty; -\sqrt{2})$ và đúng một nghiệm $b \in (\sqrt{2}; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	b	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +			- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(a)$			$f(b)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 2018$ có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 116: Phương trình $\log_3(x^2 + 2x - 3) + x^2 - x - 7 = \log_3(x + 1)$ có số nghiệm là T và tổng các nghiệm là S . Khi đó $T + S$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Lời giải

* Điều kiện $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

* Ta có $x = 3$ là một nghiệm của phương trình.

* Khi $x > 1$, phương trình đã cho được viết lại $\log_3\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}\right) = -x^2 + x + 7$ (*).

* Phương trình (*) có vế trái là hàm đồng biến và vế phải là hàm nghịch biến khi $x > 1$ suy ra $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

* Vậy $T + S = 4$.

Câu 117: Biết x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và

$x_1 + 3x_2 = \frac{1}{4}(a + 2\sqrt{b})$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $a + b$

- A. $a + b = 14$. B. $a + b = 16$. C. $a + b = 17$. D. $a + b = 15$.

Lời giải

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)^2}{2x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 (2x-1)^2 + (2x-1)^2 = \log_7 2x + 2x$$

Xét hàm $f(t) = \log_7 t + t (t > 0)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \forall t > 0$, vậy $f(t) = \log_7 t + t (t > 0)$ là hàm đồng biến suy ra

$$\log_7 (2x-1)^2 + (2x-1)^2 = \log_7 2x + 2x \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$x_1 + 3x_2 = \frac{1}{4}(12 + 2\sqrt{5}).$$

Câu 118: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$ bằng.

A. -1.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23 \Leftrightarrow 5^{x+1}(3x-1) = 27x + 23 \quad (1)$$

Dễ thấy $x = \frac{1}{3}$ không thỏa mãn phương trình trên nên ta có

$$5^{x+1}(3x-1) = 27x + 23 \Leftrightarrow 5^{x+1} = \frac{27x+23}{3x-1}. \quad (2)$$

Hàm số $y = f(x) = 5^{x+1} = 5 \cdot 5^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = g(x) = \frac{27x+23}{3x-1}$, có đạo hàm $g'(x) = -\frac{96}{(3x-1)^2} < 0$, nên nghịch biến trên mỗi

khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Do đó trên mỗi khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, phương trình (2) có nhiều nhất một nghiệm.

Ta thấy $x = -1$ và $x = 1$ là các nghiệm lần lượt thuộc các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Do đó (2) và (1) có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 1$.

Tổng hai nghiệm này bằng 0.

Câu 119: Cho số thực α sao cho phương trình $2^x - 2^{-x} = 2 \cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2 \cos(\alpha x)$ là

A. 2019.

B. 2018.

C. 4037.

D. 4038.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = 2.2\cos^2\left(\alpha \frac{x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 2\cos\left(\alpha \cdot \frac{x}{2}\right) & (1) \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = -2\cos\left(\alpha \cdot \frac{x}{2}\right) & (2) \end{cases}.$$

Ta thấy, nếu phương trình $2^x - 2^{-x} = 2\cos(\alpha x)$ có 2019 nghiệm thực thì phương trình (1) cũng có 2019 nghiệm thực.

Nhận xét:

+ x_0 là nghiệm của phương trình (1) $\Leftrightarrow -x_0$ là nghiệm của phương trình (2).

+ $x_0 = 0$ không là nghiệm của hai phương trình (1), (2).

Do đó, tổng số nghiệm của cả hai phương trình (1), (2) là 4038.

Vậy phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ có 4038 nghiệm thực.

Câu 120: Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và

$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

A. $a + b = 13$.

B. $a + b = 11$.

C. $a + b = 16$.

D. $a + b = 14$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$.

Ta có: $\log_7\left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7(4x^2 - 4x + 1) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7(2x) + 2x$.

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \forall t > 0$ nên là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó ta có $4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Khi đó

$x_1 + 2x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} + 2 \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 + \sqrt{5})$ hoặc $x_1 + 2x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} + 2 \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 - \sqrt{5})$.

Vậy $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$. Do đó $a = 9; b = 5$ và $a + b = 9 + 5 = 14$.

Câu 121: Phương trình $x(2^{x-1} + 4) = 2^{x+1} + x^2$ có tổng các nghiệm bằng

A. 7

B. 3

C. 5

D. 6

Lời giải:

Chọn A

$$x(2^{x-1} + 4) = 2^{x+1} + x^2 \Leftrightarrow x \cdot 2^{x-1} - 4 \cdot 2^{x-1} + 4x - x^2 = 0$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow 2^{x-1}(x-4) - x(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(2^{x-1} - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2^x = 2x \quad (*) \end{cases}$$

Giải phương trình (*):

Xét hàm số $f(x) = 2^x - 2x$ có $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2$; $f''(x) = 2^x \ln^2 2 > 0$. Suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

Mà ta thấy $f(1) = f(2) = 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm $x = 1; x = 2$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 7.

Câu 122: Hỏi phương trình $3.2^x + 4.3^x + 5.4^x = 6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực ?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $3.2^x + 4.3^x + 5.4^x = 6.5^x \Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x - 6 = 0.$

Xét hàm số $f(x) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^x + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x - 6, \forall x \in \mathbb{R}.$

Có $f'(x) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^x \ln \frac{2}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + 5\left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm (1).

Mặt khác $f(1) \cdot f(2) = \frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{22}{25}\right) = -\frac{176}{125} < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2) \cdot (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 123: Số nghiệm của phương trình $3^{\log_7(x+4)} = x$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện của phương trình: $x > -4$.

Với $x > 0$ phương trình đã cho tương đương với phương trình $\log_7(x+4) = \log_3 x$.

Đặt $\log_7(x+4) = \log_3 x = t$.

Ta có $\begin{cases} x+4=7^t \\ x=3^t \end{cases}$ suy ra $7^t-3^t=4 \Leftrightarrow 7^t=3^t+4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^t+4\left(\frac{1}{7}\right)^t-1=0$ (1).

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{3}{7}\right)^t + 4\left(\frac{1}{7}\right)^t - 1, t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \left(\frac{3}{7}\right)^t \ln\left(\frac{3}{7}\right) + 4\left(\frac{1}{7}\right)^t \ln\left(\frac{1}{7}\right) < 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Nên $f(t)$ nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$.

Mà $f(1) = 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 124: Tích các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) = -2$ bằng

- A.** 0. **B.** $\log_6 5$. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) = -2 \Leftrightarrow -2\log_5(6^{x+1} - 36^x) = -2 \Leftrightarrow \log_5(6^{x+1} - 36^x) = 1$.

$$\Leftrightarrow 6^{x+1} - 36^x = 5 \Leftrightarrow 6^{2x} - 6 \cdot 6^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 1 \\ 6^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_6 5 \end{cases}.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng: $0 \cdot \log_6 5 = 0$.

Câu 125: Số nghiệm của phương trình $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)$

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $2^{x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow 2^x > \frac{3}{2}$.

Ta có: $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)$

$$\Leftrightarrow \log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x(2^{x+1} - 3)$$

$$\Leftrightarrow 4^x + 4 = 2^x(2^{x+1} - 3)$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -1(k \text{ t/m}) \\ 2^x = 4(t/m) \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy $x = 2$ thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm.

Câu 126: Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình: $\ln\left(\frac{5^x + 3^x}{6x + 2}\right) + 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 30x - 10 = 0$.

- A.** $S = 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = -1$. **D.** $S = 3$

Lời giải

Điều kiện $x > -\frac{1}{3}$.

Phương trình tương đương

$$\ln(5^x + 3^x) - \ln(6x + 2) + 5(5^x + 3^x) - 5(6x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(5^x + 3^x) + 5(5^x + 3^x) = \ln(6x + 2) + 5(6x + 2) \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + 5t, t > 0$. Có $f'(t) = \frac{1}{t} + 5 > 0, \forall t > 0$ nên $f(t)$ đồng biến. Từ (1)

$$\text{suy ra } f(5^x + 3^x) = f(6x + 2) \Leftrightarrow 5^x + 3^x = 6x + 2 \Leftrightarrow 5^x + 3^x - 6x - 2 = 0$$

$$\text{Xét } g(x) = 5^x + 3^x - 6x - 2, g'(x) = 5^x \ln 5 + 3^x \ln 3 - 6$$

$$g''(x) = 5^x (\ln 5)^2 + 3^x (\ln 3)^2 > 0 \quad \forall x > -\frac{1}{3}.$$

Nên $g'(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm suy ra $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm trên $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Mà $g(0) = g(1) = 0$. Vậy phương trình có nghiệm 0, 1. Do đó $S = 1$.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Tìm m để $f(x, m) = 0$ có nghiệm trên D ?

- Bước 1. Tách m ra khỏi biến số và đưa về dạng $f(x) = A(m)$.
- Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D .
- Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị của tham số $A(m)$ để đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- Bước 4. Kết luận các giá trị cần tìm của $A(m)$ để phương trình $f(x) = A(m)$ có nghiệm trên D .

⚡ Lưu ý

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì giá trị $A(m)$ cần tìm là những m thỏa mãn: $\min_{x \in D} f(x) \leq A(m) \leq \max_{x \in D} f(x)$.
- Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt.

Câu 1: Cho hàm số $3 \log_{27} [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] + \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1 - 3m) = 0$. Số các giá trị nguyên của

m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| < 15$ là:

- A. 14 B. 11 C. 12 D. 13

Câu 2: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m với $m < 64$ để phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x+m) + \log_5(2-x) = 0$ có nghiệm. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 2018. B. 2016. C. 2015. D. 2013.

- Câu 3:** Cho phương trình $\log_{mx-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S .
- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.
- Câu 4:** Cho phương trình $\log_{2+\sqrt{5}}(2x^2 - x - 4m^2 + 2m) + \log_{\sqrt{5}-2}\sqrt{x^2 + mx - 2m^2} = 0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1^2 + x_2^2 = 3$?
- A. 1 B. 0 C. 3 D. 4
- Câu 5:** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.
- A. $0 < m < \frac{1}{4}$ B. $0 \leq m < \frac{1}{4}$ C. $m \leq \frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4} < m < 0$
- Câu 6:** Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1;8]$.
- A. $6 \leq m \leq 9$ B. $2 \leq m \leq 3$ C. $2 \leq m \leq 6$ D. $3 \leq m \leq 6$
- Câu 7:** Cho phương trình $\log_2^2 x - 2 \log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m(*)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình có nghiệm?
- A. 2021. B. 2019. C. 4038. D. 2020.
- Câu 8:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx - \ln x = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2;3)$
- A. $\left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{\ln 3}{3}\right)$ B. $\left(-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right) \cup \left(\frac{\ln 3}{3}; +\infty\right)$
C. $\left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{1}{e}\right)$ D. $\left(\frac{\ln 3}{3}; \frac{1}{e}\right)$
- Câu 9:** Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình:
 $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:
- A. 2. B. $\frac{3}{2}$. C. 0. D. 3.
- Câu 10:** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\ln(m + \ln(m + \sin x)) = \sin x$ có nghiệm.
- A. $\frac{1}{e} + 1 \leq m \leq e - 1$. B. $1 \leq m \leq e - 1$. C. $1 \leq m \leq \frac{1}{e} + 1$. D. $1 \leq m < e - 1$.
- Câu 11:** Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là
- A. 5. B. Vô số. C. 4. D. 3.

- Câu 12:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $m^2 \ln\left(\frac{x}{e}\right) = (2-m)\ln x - 4$ có nghiệm thuộc vào đoạn $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 13:** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $4\log_{36}^2 x - m\log_6 \frac{x}{6} + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 - 72\sqrt{x_1 \cdot x_2} + 1296 \leq 0$
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 14:** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{2019}(4-x^2) + \log_{\frac{1}{2019}}(2x+m-1) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt là $T = (a; b)$. Tính $S = 2a + b$.
- A. 18. B. 8. C. 20. D. 16.
- Câu 15:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$.
- A. 17. B. 16. C. 14. D. 15.
- Câu 16:** Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a; b)$. Tổng $a + b$ bằng
- A. $\frac{10}{3}$. B. 4. C. $\frac{22}{3}$. D. 7.
- Câu 17:** Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 4\sqrt{1 - \log_2 x} = m$, với m là tham số thực. Số các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của m để phương trình đã cho có nghiệm là
- A. 2021. B. 2024. C. 2023. D. 2020.
- Câu 18:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ có hai nghiệm phân biệt.
- A. $m \in (-1; 0)$. B. $m \in (-2; 0)$. C. $m \in (-1; +\infty)$. D. $m \in [-1; 0)$.
- Câu 19:** Cho a, b là các số thực dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a + b = 2019$ để phương trình $5\log_a x \cdot \log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 \cdot x_2)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\left(\frac{m}{7}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{n}{7}\right)$; với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + 2n$
- A. 22209. B. 20190. C. 2019. D. 14133.
- Câu 20:** Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a + 3b$
- A. $S_{\min} = 33$. B. $S_{\min} = 30$. C. $S_{\min} = 17$. D. $S_{\min} = 25$.

- Câu 21:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$ có hai nghiệm phân biệt?
- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.
- Câu 22:** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là
- A. 2018. B. 2017. C. 2020. D. 2019.
- Câu 23:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2)$ có nghiệm?
- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.
- Câu 24:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$.
- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in [0; 2]$. C. $m \in [2; 4]$. D. $m \in (0; 4)$.
- Câu 25:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_9 x^2 + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1; 9]$.
- A. 1. B. 5. C. 3. D. 2.
- Câu 26:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_2(mx) = \log_{\sqrt{2}}(x + 1)$ vô nghiệm?
- A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.
- Câu 27:** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x + m) = \log_4(1010x)$ có nghiệm là
- A. 2020. B. 2021. C. 2019. D. 2022.
- Câu 28:** Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a + 3b$.
- A. 30. B. 25. C. 33. D. 17.
- Câu 29:** Cho phương trình $\log_2^2 x - (5m + 1) \log_2 x + 4m^2 + m = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 165$. Giá trị của $|x_1 - x_2|$ bằng
- A. 16. B. 119. C. 120. D. 159.
- Câu 30:** Gọi m_0 là giá trị thực nhỏ nhất của tham số m sao cho phương trình $(m - 1) \log_{\frac{1}{3}}^2(x - 3) - (m - 5) \log_{\frac{1}{3}}(x - 3) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(3; 6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. Không tồn tại m_0 . B. $m_0 \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$. C. $m_0 \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$. D. $m_0 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.

- Câu 31:** Cho phương trình $m \ln(x+1) - x - 2 = 0$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng nào dưới đây?
- A. $(3, 7; 3, 8)$. B. $(3, 6; 3, 7)$. C. $(3, 8; 3, 9)$. D. $(3, 5; 3, 6)$.
- Câu 32:** Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.
- A. Không tồn tại a . B. $a < -1$ hoặc $a = 4 - 2\sqrt{10}$.
C. $a < 1$. D. $a = 1$.
- Câu 33:** Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(2; 4)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $m_0 \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$. B. $m_0 \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$. C. $m_0 \in \left(4; \frac{16}{3}\right)$. D. $m_0 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.
- Câu 34:** Giả sử phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị biểu thức $|x_1 - x_2|$ là
- A. 4. B. 3. C. 8. D. 2.
- Câu 35:** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.
- A. $2 \leq m \leq 6$ B. $3 \leq m \leq 6$ C. $6 \leq m \leq 9$ D. $2 \leq m \leq 3$.
- Câu 36:** Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$.
- A. $m = \frac{9}{2}$. B. $m = 3$. C. Không tồn tại. D. $m = \frac{61}{2}$.
- Câu 37:** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x + m) = \log_4(1010x)$ có nghiệm là
- A. 2022. B. 2020. C. 2019. D. 2021.
- Câu 38:** Cho phương trình $(me^x - 10x - m)[\log(mx) - 2\log(x+1)] = 0$. (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt?
- A. Vô số. B. 10. C. 11. D. 5.
- Câu 39:** Cho phương trình $4^{-|x-m|} \cdot \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{2x-x^2} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m| + 2) = 0$ với m là tham số. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là
- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 40:** Cho phương trình $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81]$ là
- A. 3 B. 5 C. 4. D. 2.

Câu 41: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $5x + y = 4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3 \frac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. 10. B. 5. C. 9. D. 2.

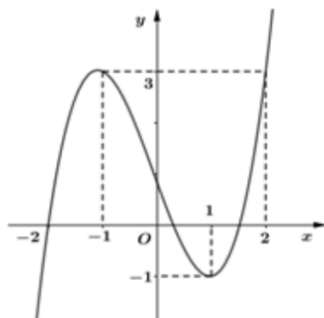
Câu 42: Biết rằng điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_2(m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x$ có nghiệm là $m \geq -\frac{a}{b}$ với a, b là hai số nguyên dương và $b < 7$. Hỏi $a + b + b^2$ bằng bao nhiêu?

- A. 31. B. 32. C. 21. D. 23.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2^2(4x) - m \log_{\sqrt{2}} x - 2m - 4 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 8]$?

- A. 1. B. 2. C. 5. D. 3.

Câu 44: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ sao cho phương trình $\log_2^3(f(x) + 1) - \log_{\sqrt{2}}^2(f(x) + 1) + (2m - 8) \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{f(x) + 1} + 2m = 0$ có nghiệm $x \in (-1; 1)$?



- A. 7. B. 5. C. 6. D. vô số.

Câu 45: Cho phương trình $9^x - (2m + 3) \cdot 3^x + 81 = 0$ (m là tham số thực). Giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$ thuộc khoảng nào sau đây

- A. $(5; 10)$. B. $(0; 5)$. C. $(10; 15)$. D. $(15; +\infty)$.

Câu 46: Cho phương trình $m \cdot 16^x - 2(m - 2) \cdot 4^x + m - 3 = 0$ (1). Tập hợp tất cả các giá trị dương của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tổng $T = a + 2b$ bằng:

- A. 14 B. 10 C. 11 D. 7

Câu 47: Phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-5; 0)$. B. $(-7; -5)$. C. $(0; 1)$. D. $(5; 7)$.

Câu 48: Với giá trị nào của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$

- A. $m = \frac{5}{2}$. B. $m = 2$. C. $m = 8$. D. $m = \frac{13}{2}$.

- Câu 49:** Phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi
- A. $m = 4$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.
- Câu 50:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4 \cdot 4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.
- A. $4 - 3\sqrt{2} < m < 4 + 3\sqrt{2}$ B. $m > 4 + 3\sqrt{2}$ hoặc $m < 4 - 3\sqrt{2}$
- C. $m > -1$ hoặc $m < \frac{-1}{2}$ D. $-1 < m < \frac{-1}{2}$
- Câu 51:** Biết rằng tập các giá trị của tham số m để phương trình $(m-3)9^x + 2(m+1)3^x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a; b)$. Tính tích $a \cdot b$.
- A. 4 B. -3 C. 2 D. 3
- Câu 52:** Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m - 2019 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?
- A. 1008. B. 1007. C. 2018. D. 2017.
- Câu 53:** Cho phương trình $(4 + \sqrt{15})^x + (2m+1)(4 - \sqrt{15})^x - 6 = 0$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$. Ta có m thuộc khoảng nào?
- A. $(3; 5)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; 3)$. D. $(-\infty; -1)$.
- Câu 54:** Phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (1 - 2a)(2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng
- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. B. $(0; +\infty)$. C. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
- Câu 55:** Biết rằng tập các giá trị của tham số m để phương trình $(m-3)9^x + 2(m+1)3^x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a; b)$. Tính tích $a \cdot b$.
- A. 4 B. -3 C. 2 D. 3
- Câu 56:** Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $9^x - 2m \cdot 3^x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt
- A. $-2 < m < 2$ B. $m > 2$ C. $m > -2$ D. $m < 2$
- Câu 57:** Xác định các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2(m+2)6^x + (m^2 + 4m + 3)4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt?
- A. $m < -2$. B. $m > -3$. C. $m > -1$. D. $m > -2$.
- Câu 58:** Biết rằng $m = m_0$ là giá trị của tham số m sao cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12$. Khi đó m_0 thuộc khoảng nào sau đây
- A. $(3; 9)$. B. $(9; +\infty)$. C. $(1; 3)$. D. $(-2; 0)$.

- Câu 59:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $16^x - 2(m+1)4^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?
- A. 6 B. 7 C. 0 D. 3
- Câu 60:** Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m + 1 = 0$ có nghiệm. Tập $\mathbb{R} \setminus S$ có bao nhiêu giá trị nguyên?
- A. 1 B. 4 C. 9 D. 7
- Câu 61:** Cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12$. Giá trị của m thuộc khoảng
- A. $(9; +\infty)$. B. $(3; 9)$. C. $(-2; 0)$. D. $(1; 3)$.
- Câu 62:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x-x^2}} + 2m - 1 = 0$ có nghiệm?
- A. 27. B. 25. C. 23. D. 24.
- Câu 63:** Gọi $(a; b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 5)$. Tổng $a + b$ là
- A. 2. B. 4. C. -6. D. -14.
- Câu 64:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(\sqrt{2} + 1)^x - m(\sqrt{2} - 1)^x = 8$ có hai nghiệm dương phân biệt. Số phần tử của S bằng
- A. 8. B. 7. C. 10. D. 9.
- Câu 65:** Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $(\sqrt{10} + 1)^{x^2} + m(\sqrt{10} - 1)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?
- A. 14. B. 15. C. 13. D. 16.
- Câu 66:** Phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x - m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2m + 1 = 0$ có nghiệm khi m nhận giá trị:
- A. $m < -\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2} < m < 4 - 2\sqrt{5}$.
C. $m \geq 4 + 2\sqrt{5}$. D. $m < -\frac{1}{2} \vee m \geq 4 + 2\sqrt{5}$.
- Câu 67:** Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $(m+1) \cdot 16^x - 2(2m-3) \cdot 4^x + 6m + 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là
- A. 4. B. 8. C. 1. D. 2.
- Câu 68:** Phương trình $4^x + 1 = 2^x \cdot m \cdot \cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất. Số giá trị của tham số m thỏa mãn là
- A. Vô số B. 1 C. 2 D. 0

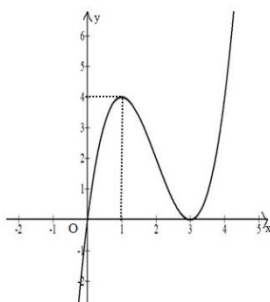
- Câu 69:** Cho phương trình $2^x = \sqrt{m \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x)} - 4$, với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng một nghiệm thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $m_0 \in [-5; -1)$. B. $m_0 < -5$. C. $m_0 \in [-1; 0)$. D. $m_0 > 0$.
- Câu 70:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8^x + 3x \cdot 4^x + (3x^2 + 1) \cdot 2^x = (m^3 - 1)x^3 + (m - 1)x$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $(0; 10)$.
- A. 101 B. 100 C. 102 D. 103
- Câu 71:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1 - x^2}\right)$ có nghiệm.
- A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$ B. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$ C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$
- Câu 72:** Gọi A là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho tập nghiệm của phương trình $x \cdot 2^x = x(x - m + 1) + m \cdot (2^x - 1)$ có hai phần tử. Số phần tử của A bằng
- A. 2. B. 3. C. 1. D. Vô số.
- Câu 73:** Giá trị của m để phương trình $4^{|x|} - 2^{|x|+1} - m = 0$ có nghiệm duy nhất là:
- A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.
- Câu 74:** Gọi $(a; b)$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 5)$. Giá trị của tổng $a + b$ là
- A. 2. B. 4. C. -6. D. -14.
- Câu 75:** Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.
- A. $m \in \left(\frac{9}{2}; 5\right)$. B. $m \in (-2; -1)$. C. $m \in (1; 3)$. D. $m \in (3; 5)$.
- Câu 76:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.
- Câu 77:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - 2m \cdot 2^x - m + 6 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 3$. Tập hợp S có bao nhiêu phần tử?
- A. Vô số. B. 3. C. 2. D. 1.
- Câu 78:** Giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (2m + 3) \cdot 2^x + 64 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 24$ thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. C. $\left(\frac{21}{2}; \frac{29}{2}\right)$. D. $\left(\frac{11}{2}; \frac{19}{2}\right)$.
- Câu 79:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1 - x^2}\right)$ có nghiệm.

- A. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$. D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$.

Câu 80: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (m-1).2^x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 1 + 2\sqrt{2}; m < 1 - 2\sqrt{2}$.
C. $m \geq 1 + 2\sqrt{2}$. D. $m > 1 + 2\sqrt{2}$.

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(e^{x^2}) = m$ có đúng 2 nghiệm thực là

- A. $[0; 4]$. B. $\{0; 4\}$. C. $\{0\} \cup (4; +\infty)$. D. $[4; +\infty)$.

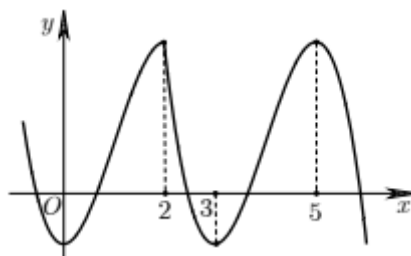
Câu 82: Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $(\sqrt{10} + 1)^{x^2} + m(\sqrt{10} - 1)^{x^2} = 2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

- A. 14. B. 15. C. 13. D. 16.

Câu 83: Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m).3^{x-3} = 3^x + 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

- A. 34. B. 27. C. 38. D. 45.

Câu 84: Cho số thực m và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 85: Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1; 3)$. Chọn đáp án đúng.

- A. $S = -35$. B. $S = 20$. C. $S = 25$. D. $S = -21$.

Câu 86: Tập các giá trị của m để phương trình $4^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)2^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1=0$ có nghiệm là

- A. $\left(-\infty; \frac{9}{2}\right)$. B. $\left[4; \frac{9}{2}\right]$. C. $(-\infty; 4)$. D. $[4; +\infty)$.

Câu 87: Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1).2^{7-x} - 6x + 3$, khi phương trình $f\left(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) + 3m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số m có dạng $\frac{a}{b}$. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 7$. B. $T = 11$. C. $T = 8$. D. $T = 13$.

Câu 88: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+3).3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1=0$ có nghiệm thực?

- A. 5. B. 7. C. Vô số. D. 3.

Câu 89: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x-y} - 2^y + x = 2y \\ 2^x + 1 = (m^2 + 2).2^y.\sqrt{1-y^2} \end{cases} (1)$, m là tham số. Gọi S là tập các giá trị m nguyên để hệ (1) có một nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 90: Cho phương trình $(4 + \sqrt{15})^x + (2m+1)(4 - \sqrt{15})^x - 6 = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$. Khi đó m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(3; 5)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; 3)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 91: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5^x + 10 = m\sqrt{25^x + 4}$ có nghiệm duy nhất. Số tập con của S là

- A. 3. B. 4. C. 16. D. 15.

Câu 92: Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số m để phương trình $4^{x^2-2x+1} - m.2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. C. $(2; +\infty)$. D. $[2; +\infty)$.

Câu 93: Cho phương trình: $2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0$. Tập các giá trị để bất phương trình có ba nghiệm phân biệt có dạng $(a; b)$. Tổng $a + 2b$ bằng:

- A. 1. B. 2. C. -4. D. 0.

- Câu 94:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9 \cdot 3^{2x} - m \left(4\sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3 \right) 3^x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?
- A. Vô số. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 95:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình $2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?
- A. 4038. B. 2019. C. 2017. D. 4039.
- Câu 96:** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho hai phương trình $2x^2 + 1 = 3^m$ và $m = 3^x - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S .
- A. 6 B. 3. C. 1. D. $\frac{5}{2}$.
- Câu 97:** Giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ là
- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 4$. D. $m = 1$.
- Câu 98:** Tìm m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.
- A. $m < 0$. B. $m > 1$. C. $-1 < m < 1$. D. $0 < m < 1$.
- Câu 99:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 6^{x+1} + (m-3) \cdot 4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt?
- A. 35. B. 38. C. 34. D. 33.
- Câu 100:** Gọi S là tập hợp các số nguyên m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m^2 - 500 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử
- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.
- Câu 101:** Tìm điều kiện của tham số a để phương trình sau có nghiệm: $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (a+2) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2a+1 = 0$. Hãy chọn đáp án đúng nhất?
- A. $4 \leq a \leq \frac{64}{7}$. B. $2 \leq a \leq \frac{64}{9}$. C. $3 \leq a \leq \frac{50}{3}$. D. $1 \leq a \leq \frac{50}{3}$.
- Câu 102:** Điều kiện của m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x \leq 2020 \\ x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là :
- A. $m \geq -3$. B. $-2 \leq m \leq 1$. C. $-1 \leq m \leq 2$. D. $m \geq -2$.
- Câu 103:** Cho phương trình $16^{x^2} - 2 \cdot 4^{x^2+1} + 10 = m$. Số giá trị nguyên của tham $m \in [-10; 10]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt là
- A. 7. B. 9. C. 8. D. 1.

- Câu 104:** Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(2^x - 2x)\sqrt{(3)^{2^x} - m} = 0$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để tập hợp S có hai phần tử?
- A. 2094. B. 2092. C. 2093. D. 2095.
- Câu 105:** Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình $16^x - 6.8^x + 8.4^x - m.2^{x+1} - m^2 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Khi đó S có
- A. 4 tập con. B. Vô số tập con. C. 8 tập con. D. 16 tập con.
- Câu 106:** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.
- A. $[3;4]$. B. $[2;4]$. C. $(2;4)$. D. $(3;4)$.
- Câu 107:** Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình: $3^{\log_2 x^2} - 2(m+3).3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1 x_2 > 2$.
- A. $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$. B. $(0; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus [-1;1]$. D. $(-1; +\infty)$.
- Câu 108:** Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong khoảng $(-20; 20)$ để phương trình trên có nghiệm?
- A. 15. B. 19. C. 14. D. 17.
- Câu 109:** Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là
- A. -2. B. 1. C. 4. D. 0.
- Câu 110:** Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.
- Câu 111:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a trên đoạn $[-10;10]$ để phương trình $e^{x+a} - e^x = \ln(1+x+a) - \ln(1+x)$ có nghiệm duy nhất.
- A. 2. B. 10. C. 1. D. 20
- Câu 112:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020;2020)$ để phương trình $e^x = \ln(x+2m) + 2m$ có nghiệm?
- A. 2019. B. 2020. C. 2021. D. 4039.
- Câu 113:** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-1;1]$ sao cho phương trình $\log_{m^2+1}(x^2+y^2) = \log_2(2x+2y-2)$ có nghiệm nguyên $(x;y)$ duy nhất?
- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

- Câu 114:** Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_{11}(3x+4y) = \log_4(x^2+y^2)$?
- A. 3 B. 2 C. 1 D. vô số.
- Câu 115:** Có bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)}$ và $4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8$?
- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.
- Câu 116:** Giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình $4^{x-1} + 2^x \sin(2^{x-1} + y - 1) + 2 = 2^x + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?
- A. $x_0 > 7$. B. $-2 < x_0 < 4$. C. $4 < x_0 < 7$. D. $-5 < x_0 < -2$.
- Câu 117:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 4000$ và $5(25^y + 2y) = x + \log_5(x+1)^5 - 4$?
- A. 3. B. 2. C. 4. D. 5.
- Câu 118:** Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn $(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)$?
- A. 2017. B. 4034. C. 2. D. 2017.2020.
- Câu 119:** Cho x là số thực dương và y là số thực thỏa mãn $2^{\frac{x+1}{x}} = \log_2 \left[14 - (y-2)\sqrt{y+1} \right]$. Giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 2020$ bằng
- A. 2022. B. 2020. C. 2021. D. 2019.
- Câu 120:** Cho phương trình $\log_3(3x^2 - 6x + 6) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ và $0 < x < 2020$; $y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình đã cho?
- A. 5. B. 6. C. 7. D. 4.
- Câu 121:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?
- A. 2020. B. 9. C. 2019. D. 10.
- Câu 122:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^{x+y} - x^2(3^x - 1) = (x+1)3^y - x^3$, với $x < 2020$?
- A. 13. B. 15. C. 6. D. 7.
- Câu 123:** Biết a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$, đồng thời x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ thuộc khoảng
- A. (1;2). B. (2;3). C. (3;4). D. (4;5).
- Câu 124:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y < 2020$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$.
- A. 2020 B. 9. C. 7. D. 8.

Câu 125: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x + y > 0; -20 \leq x \leq 20$ và

$$\log_2(x + 2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0?$$

A. 19.

B. 6

C. 10.

D. 41.

Câu 126: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $x \leq 2020$ thỏa mãn

$$2(3x - y) = 3(1 + 9^y) - \log_3(2x - 1)$$

A. 1010.

B. 2020.

C. 3.

D. 4.

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

5. PHƯƠNG TRÌNH – MŨ – LOGARIT

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Tìm m để $f(x, m) = 0$ có nghiệm trên D ?

- Bước 1. Tách m ra khỏi biến số và đưa về dạng $f(x) = A(m)$.
- Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D .
- Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị của tham số $A(m)$ để đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- Bước 4. Kết luận các giá trị cần tìm của $A(m)$ để phương trình $f(x) = A(m)$ có nghiệm trên D .

⚡ Lưu ý

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì giá trị $A(m)$ cần tìm là những m thỏa mãn: $\min_{x \in D} f(x) \leq A(m) \leq \max_{x \in D} f(x)$.
- Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt.

Câu 1: Cho hàm số $3\log_{27} [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] + \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1 - 3m) = 0$. Số các giá trị nguyên của

m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| < 15$ là:

A. 14

B. 11

C. 12

D. 13

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3\log_{27} [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] + \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1 - 3m) = 0$

$$\Leftrightarrow \log_3 [2x^2 - (m+3)x + 1 - m] = \log_3 (x^2 - x + 1 - 3m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0 \\ 2x^2 - (m+3)x + 1 - m = x^2 - x + 1 - 3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0(*) \\ x^2 - (m+2)x + 2m = 0(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 - 3m > 0(*) \\ \begin{cases} x = m \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân

biệt thỏa mãn $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 1 - 3m > 0 \\ 2^2 - 1 + 1 - 3m > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 1 > 0 \\ 4 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2 - \sqrt{3}.$

Theo giả thiết $|x_1 - x_2| < 15 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 225 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 221 < 0 \Leftrightarrow -13 < m < 17$

Do đó $-13 < m < 2 - \sqrt{3}$. Vậy số các giá trị nguyên của m thỏa mãn là 13.

Câu 2: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m với $m < 64$ để phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x+m) + \log_5(2-x) = 0$ có nghiệm. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 2018.

B. 2016.

C. 2015.

D. 2013.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{\frac{1}{5}}(x+m) + \log_5(2-x) = 0 \Leftrightarrow \log_5(x+m) = \log_5(2-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x = \frac{2-m}{2} \end{cases}$

Vì $x < 2$ nên $\frac{2-m}{2} < 2 \Leftrightarrow m > -2$.

Kết hợp với $m < 64$. Khi đó $-2 < m < 64$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = \{-1; 0; 1 \dots 63\}$ có 65 giá trị.

Vậy tổng S các giá trị của m để phương trình có nghiệm là: $S = \frac{(-1+63).65}{2} = 2015$.

Câu 3: Cho phương trình $\log_{mx-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S .

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

+ Điều kiện $\begin{cases} x+2 > 0 \\ 0 < mx-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ 5 < mx \neq 6 \end{cases}$

Với điều kiện trên, phương trình $\log_{mx-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$ (*)

$\Leftrightarrow \log_{mx-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{mx-5}(x+2)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 12 = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}.$$

$$x = 2 \text{ là nghiệm phương trình (*) khi } 5 < 2m \neq 6 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m \neq 3, \text{ vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$x = 5 \text{ là nghiệm phương trình (*) khi } 5 < 5m \neq 6 \Leftrightarrow 1 < m \neq \frac{6}{5}, \text{ vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

+ Phương trình $\log_{mx-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$ có nghiệm duy nhất khi $m = 2$ hoặc $m = 3$

Thử lại

$$m = 2: \log_{2x-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{\sqrt{2x-5}}\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \log_{2x-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{2x-5}(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 12 = x + 2 \\ x + 2 > 0 \\ 0 < 2x - 5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

$$m = 3: \log_{3x-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{\sqrt{3x-5}}\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \log_{3x-5}(x^2 - 6x + 12) = \log_{3x-5}(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 12 = x + 2 \\ x + 2 > 0 \\ 0 < 4x - 5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy có hai giá trị $m \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn ycbt.

Câu 4: Cho phương trình $\log_{2+\sqrt{5}}(2x^2 - x - 4m^2 + 2m) + \log_{\sqrt{5}-2}\sqrt{x^2 + mx - 2m^2} = 0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1^2 + x_2^2 = 3$?

A. 1

B. 0

C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\log_{2+\sqrt{5}}(2x^2 - x - 4m^2 + 2m) + \log_{\sqrt{5}-2}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{5}+2}(2x^2 - x - 4m^2 + 2m) - \log_{\sqrt{5}+2}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2mx - 2m^2 > 0 \\ 2x^2 - x + 2m - 4m^2 = x^2 + mx - 2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2mx - 2m^2 > 0 \\ x^2 - (m+1)x + 2m - 2m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ \begin{cases} x_1 = 2m \\ x_2 = 1 - m \end{cases} \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m)^2 + m(2m) - 2m^2 > 0 \\ (1-m)^2 + m(1-m) - 2m^2 > 0 \\ (2m)^2 + (1-m)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 > 0 \\ 2m^2 + m - 1 > 0 \\ 5m^2 - 2m - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -1 < m < \frac{1}{2} \\ m = \frac{1-\sqrt{11}}{5}; m = \frac{1+\sqrt{11}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1-\sqrt{11}}{5}$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa yêu cầu đề bài

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $0 < m < \frac{1}{4}$

B. $0 \leq m < \frac{1}{4}$

C. $m \leq \frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{4} < m < 0$

Lời giải

Ta có:

$$4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 \Leftrightarrow (2\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_2 x + m = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x = -m \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2 x$ với $t \in (-\infty; 0)$.

$$(1) \Leftrightarrow t^2 + t = -m.$$

Xét $f(t) = t^2 + t$.

$$f'(t) = 2t + 1$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0

Dựa vào bảng biến thiên $-\frac{1}{4} < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}$

Câu 6: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1;8]$.

A. $6 \leq m \leq 9$

B. $2 \leq m \leq 3$

C. $2 \leq m \leq 6$

D. $3 \leq m \leq 6$

Lời giải

Chọn C

$$\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$$

• Điều kiện: $x > 0$

$$\text{pt} \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 3 = m$$

Cách 1:

• Đặt $t = \log_2 x$, với $x \in [1; 8]$ thì $t \in [0; 3]$.

$$\text{Phương trình trở thành: } t^2 - 2t + 3 = m$$

• Để phương trình có nghiệm $x \in [1; 8]$

$\Leftrightarrow$ phương trình có nghiệm $t \in [0; 3]$

$$\Leftrightarrow \min_{[0;3]} f(t) \leq m \leq \max_{[0;3]} f(t), \text{ trong đó } f(t) = t^2 - 2t + 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq m \leq 6.$$

Câu 7: Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m(*)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình có nghiệm?

A. 2021.

B. 2019.

C. 4038.

D. 2020.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ m + \log_2 x \geq 0 \end{cases}$$

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m \Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 8\log_2 x - 4\sqrt{m + \log_2 x} = 4m$$

$$\Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 4\log_2 x + 1 = 4\sqrt{m + \log_2 x} + 4(m + \log_2 x) + 1$$

$$\Leftrightarrow (2\log_2 x - 1)^2 = (2\sqrt{m + \log_2 x} + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = 2\log_2 x - 1 \\ 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = -2\log_2 x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \\ \sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \end{cases}$$

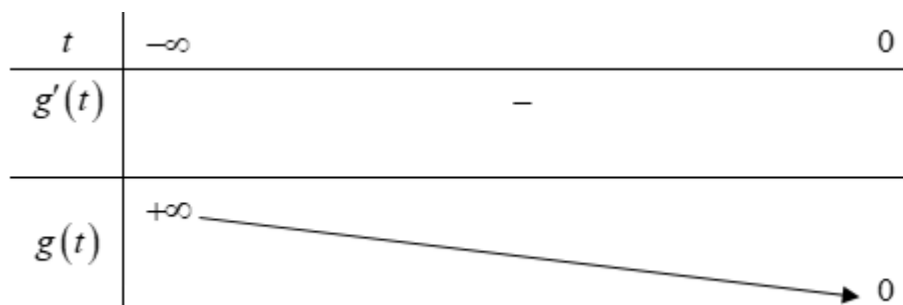
$$* \text{ TH1: } \sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq 0 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \log_2^2 x - \log_2 x - m = 0 (1) \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } t = \log_2 x (t \leq 0), \text{ phương trình (1) trở thành: } t^2 - t - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = m (2)$$

Đặt: $g(t) = t^2 - t (t \in (-\infty; 0])$. Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t \leq 0$

$$\text{Ta có: } g(t) = t^2 - t \Rightarrow g'(t) = 2t - 1 < 0 \forall t \leq 0$$

Ta có BBT:



Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t \leq 0$ thì $m \geq 0$

* TH2: $\sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ \log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 - m = 0 \end{cases} \quad (3)$

Đặt: $t = \log_2 x (t \geq 1)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 3t + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 3t + 1 \quad (4)$

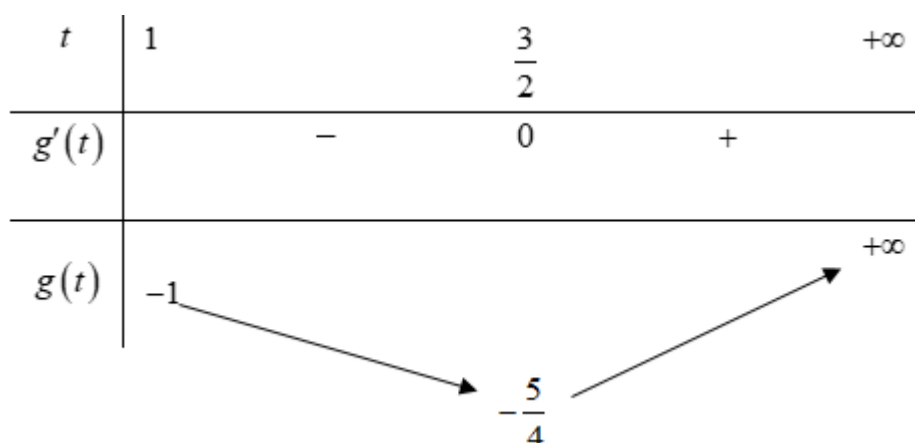
Đặt: $g(t) = t^2 - 3t + 1, t \in [1; +\infty)$

Ta có: $g(t) = t^2 - 3t + 1 \Rightarrow g'(t) = 2t - 3$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \in [1; +\infty)$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 1$

Ta có BBT:



Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 1$ thì $m \geq -\frac{5}{4}$

Kết hợp và , $m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; \dots; 2019\}$

Vậy có tất cả 2021 giá trị của m thỏa mãn ycbt

Câu 8: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx - \ln x = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2; 3)$

- A. $\left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{\ln 3}{3}\right)$ B. $\left(-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right) \cup \left(\frac{\ln 3}{3}; +\infty\right)$
 C. $\left(\frac{\ln 2}{2}; \frac{1}{e}\right)$ D. $\left(\frac{\ln 3}{3}; \frac{1}{e}\right)$

Lời giải

Chọn D

$$mx - \ln x = 0 \Leftrightarrow m = \frac{\ln x}{x}, \forall x \in (2; 3)$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \forall x \in (2; 3)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$$

BBT

x	2	e	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{\ln 2}{2}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{\ln 3}{3}$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m \in \left(\frac{\ln 3}{3}; \frac{1}{e}\right)$.

Câu 9: Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình:

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) \text{ có đúng ba nghiệm phân biệt là:}$$

- A. 2. B. $\frac{3}{2}$. C. 0. D. 3.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2((x-1)^2 + 2) = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) (*)$$

$$\text{Đặt } f(t) = 2^t \log_2(t+2), t \geq 0; f'(t) = 2^t \ln 2 \cdot \log_2(t+2) + 2^t \frac{1}{(t+2) \ln 2} > 0, \forall t \geq 0.$$

Vậy hàm số $f(t) = 2^t \log_2(t+2)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Từ ta có } f[(x-1)^2] = f[2|x-m|] \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-m) = (x-1)^2 \\ 2(x-m) = -(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 \quad (a) \\ x^2 = 2m - 1 \quad (b) \end{cases}$$

Do các phương trình (a) và (b) là phương trình bậc hai nên để phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt ta có các trường hợp sau:

TH1: $m = \frac{1}{2}$, chỉ có nghiệm kép bằng 0 và có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

TH2: $m > \frac{1}{2}$, có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2m-1}$ và có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng $\pm\sqrt{2m-1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(\pm\sqrt{2m-1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(\pm\sqrt{2m-1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

+ TH3: $m > \frac{1}{2}$, có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2m-1}$ và có nghiệm kép khác $\pm\sqrt{2m-1}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ g(\pm\sqrt{2m-1}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

Vậy tổng các giá trị của m là $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\ln(m + \ln(m + \sin x)) = \sin x$ có nghiệm.

A. $\frac{1}{e} + 1 \leq m \leq e - 1$. **B.** $1 \leq m \leq e - 1$. **C.** $1 \leq m \leq \frac{1}{e} + 1$. **D.** $1 \leq m < e - 1$.

Lời giải

$$\text{Đặt } u = \ln(m + \sin x) \text{ ta được hệ phương trình: } \begin{cases} u = \ln(m + \sin x) \\ \ln(m + u) = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = m + \sin x \\ e^{\sin x} = m + u \end{cases}$$

Từ hệ phương trình ta suy ra: $e^u + u = e^{\sin x} + \sin x$ (*)

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(u) = f(\sin x) \Leftrightarrow u = \sin x$$

$$\text{Khi đó ta được: } \ln(m + \sin x) = \sin x \Leftrightarrow e^{\sin x} - \sin x = m (**)$$

Đặt $z = \sin x, z \in [-1; 1]$. Phương trình (**) trở thành: $e^z - z = m (***)$

Xét hàm số: $g(z) = e^z - z$ trên $[-1; 1]$.

Hàm số $g(z) = e^z - z$ liên tục trên $[-1;1]$ và có $\max_{[-1;1]} g(z) = g(1) = e - 1$, $\min_{[-1;1]} g(z) = g(0) = 1$

Hệ phương trình ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq e - 1$.

Câu 11: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

- A.** 5. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 1$

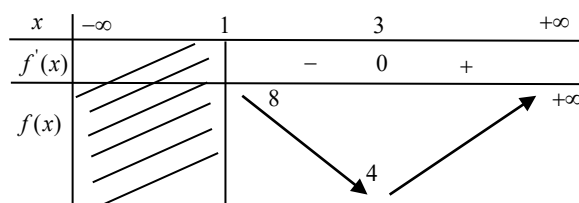
Ta có: $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow (x-1)^2 = mx-8$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 9 = mx. \text{ Do } x > 1 \text{ nên suy ra } \frac{x^2 - 2x + 9}{x} = m.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 9}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Bảng biến thiên



Nhìn vào BBT ta thấy yêu cầu của bài toán là $4 < m < 8$. Do m nguyên nên $m \in \{5; 6; 7\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $m^2 \ln\left(\frac{x}{e}\right) = (2-m)\ln x - 4$

có nghiệm thuộc vào đoạn $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Có } m^2 \ln\left(\frac{x}{e}\right) = (2-m)\ln x - 4 \Leftrightarrow m^2 (\ln x - 1) = (2-m)\ln x - 4 \Leftrightarrow (m^2 + m - 2)\ln x = m^2 - 4 \quad (1).$$

• Với $m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1 (m > 0)$, $(1) \Leftrightarrow 0 \ln x = -3 \Rightarrow$ Loại $m = 1$.

• Với $m \neq 1$, $(1) \Leftrightarrow \ln x = \frac{m-2}{m-1} \quad (2).$

+ Hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{e}; 1\right] \Rightarrow \ln x \in [-1; 0]$.

+ Phương trình (2) có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ khi

$$-1 \leq \frac{m-2}{m-1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m-1} \geq -1 \\ \frac{m-2}{m-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq m \leq 2 \Rightarrow m = 2.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $4\log_{36}^2 x - m\log_6 \frac{x}{6} + 2 = 0$ có hai nghiệm

phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 - 72\sqrt{x_1.x_2} + 1296 \leq 0$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$$4\log_{36}^2 x - m\log_6 \frac{x}{6} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_6^2 x - m\log_6 x + m + 2 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta = m^2 - 4(m+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 - 2\sqrt{3} \\ m > 2 + 2\sqrt{3} \end{cases}$

$$x_1.x_2 - 72\sqrt{x_1.x_2} + 1296 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_1.x_2} = 36 \Leftrightarrow x_1.x_2 = 1296$$

$$\Rightarrow \log_6 (x_1.x_2) = 4 \Leftrightarrow \log_6 x_1 + \log_6 x_2 = 4 \Rightarrow m = 4$$

Câu 14: Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{2019} (4 - x^2) + \log_{\frac{1}{2019}} (2x + m - 1) = 0$

có hai nghiệm thực phân biệt là $T = (a; b)$. Tính $S = 2a + b$.

A. 18. **B.** 8. **C.** 20. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Tập xác định } D = (-2; 2) \cap \left(\frac{1-m}{2}; +\infty\right).$$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$\log_{2019} \frac{4-x^2}{2x+m-1} = 0 \Leftrightarrow 4-x^2 = 2x+m-1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + m - 5 = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta = 1^2 - 1.(m-5) = 6-m > 0 \Leftrightarrow m < 6 \quad (1)$$

Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm lần lượt là $x_1 = -1 + \sqrt{6-m}; x_2 = -1 - \sqrt{6-m}$.

$$\text{TH1: } \frac{1-m}{2} \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 5 \Rightarrow D = (-2; 2).$$

$$\text{Phương trình có 2 nghiệm } x_1, x_2 \in D \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \sqrt{6-m} < 2 \\ -1 - \sqrt{6-m} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6-m} < 3 \\ \sqrt{6-m} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 5.$$

Từ , và suy ra $5 < m < 6$.

$$\text{TH2: } -2 < \frac{1-m}{2} < 2 \Leftrightarrow -3 < m < 5.$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{1-m}{2}; 2 \right).$$

Phương trình có 2 nghiệm

$$x_1, x_2 \in D \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \sqrt{6-m} < 2 \\ -1 - \sqrt{6-m} > \frac{1-m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6-m} < 3 \\ \sqrt{6-m} < \frac{m-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m < -3 \Leftrightarrow m > 5 \\ m > 5 \end{cases}$$

Từ và suy ra $m \in \emptyset$. Vậy $5 < m < 6$. Suy ra $a = 5, b = 6 \Rightarrow 2a + b = 16$.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3(x+3) + m \log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$.

A. 17.

B. 16.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x > -3$ và $x \neq -2$.

Biến đổi phương trình đã cho về phương trình sau: $\log_3(x+3) + 4m \log_{(x+3)} 3 - 16 = 0$.

$$\Leftrightarrow \log_3^2(x+3) - 16 \log_3(x+3) + 4m = 0 \quad (1).$$

Đặt $\log_3(x+3) = t$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 16t + 4m = 0 \quad (2)$.

Ta có: $\log_3(x+3) = t \Leftrightarrow x = 3^t - 3$.

Theo điều kiện đề bài thì $x > -2$ nên $3^t - 3 > -2 \Leftrightarrow t > 0$.

Vậy để phương trình $\log_3(x+3) + m \log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$

thì phương trình (2) phải có hai nghiệm t dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 = 16 > 0 \\ t_1 t_2 = 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64 - 4m > 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 16. \text{ Vậy có 15 giá trị nguyên } m \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 16: Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a; b)$. Tổng $a + b$ bằng

A. $\frac{10}{3}$.

B. 4.

C. $\frac{22}{3}$.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 > 0 \\ 3x - mx + 1 = -x^2 + 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x^2 - x + 4 = mx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ \frac{x^2 - x + 4}{x} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ \frac{x^2 - x + 4}{x} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x + \frac{4}{x} - 1 = m \end{cases} \quad (2)$$

Xét hàm số: $f(x) = x + \frac{4}{x} - 1$; $x \in (1; 3)$ có $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in (1; 3) \Rightarrow f(2) = 3 \\ x = -2 \notin (1; 3) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	1	2	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	4	3	$\frac{10}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình có nghiệm.

$\Leftrightarrow$ Phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(1; 3)$.

$\Leftrightarrow 3 \leq m < 4 \Leftrightarrow m \in [3; 4)$.

Suy ra $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3 + 4 = 7$.

Câu 17: Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 4\sqrt{1 - \log_2 x} = m$, với m là tham số thực. Số các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của m để phương trình đã cho có nghiệm là

A. 2021.

B. 2024.

C. 2023.

D. 2020.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $1 - \log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$.

Với điều kiện trên thì phương trình tương đương với $(1 - \log_2 x)^2 - 4\sqrt{1 - \log_2 x} - 1 = m \quad (1)$.

Đặt $t = \sqrt{1 - \log_2 x}$, vì $x \in (0; 2]$ nên $t \geq 0$. Khi đó, (1) trở thành $t^4 - 4t - 1 = m \quad (2)$.

Đề (1) có nghiệm $x \in (0; 2]$ thì (2) có nghiệm $t \geq 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 4t - 1$, $t \in [0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 4t^3 - 4$. Cho $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [0; +\infty)$.

Ta được bảng biến thiên của $f(t)$ như sau:

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-1	-4	$+\infty$

Theo BBT, đề (2) có nghiệm $t \geq 0$ thì $m \geq -4$, mà $m \in [-2019; 2019] \cap \mathbb{Z}$ nên tập hợp các giá trị của m cần tìm là $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; \dots; 2019\}$.

Vậy có tất cả 2024 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}]$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in (-1; 0)$. **B.** $m \in (-2; 0)$. **C.** $m \in (-1; +\infty)$. **D.** $m \in [-1; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Điều kiện: $x > -1$.

Ta có pt: $x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}] \Leftrightarrow x \log_3(x+1) = 1 + m \log_3(x+1)$

$$\Leftrightarrow (x-m) \log_3(x+1) = 1.$$

Đặt: $\log_3(x+1) = t \Rightarrow x = 3^t - 1$

Ta có, Pt $\Rightarrow (3^t - m - 1)t = 1 \Rightarrow f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1 = m$, với $t \neq 0$.

Đặt: $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$, với $t \neq 0$.

$$\Rightarrow f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 + \frac{1}{t^2} > 0, t \in (-\infty; 0), (0; +\infty).$$

Suy ra, $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

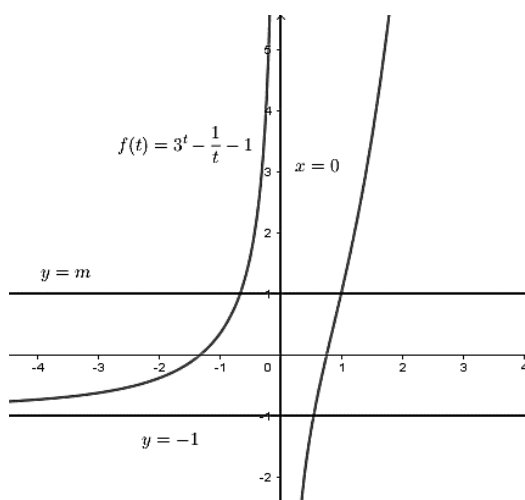
Ta xét các giới sau:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(3^t - \frac{1}{t} - 1 \right) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(3^t - \frac{1}{t} - 1 \right) = +\infty.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(3^t - \frac{1}{t} - 1 \right) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(3^t - \frac{1}{t} - 1 \right) = +\infty.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$, với $t \in (-\infty; 0), (0; +\infty)$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$		$+$
$f(t)$	-1 		$+\infty$ 



Ta có, số nghiệm của Pt cũng chính là số nghiệm của đồ thị hàm số $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$ và đồ thị hàm số $y = m$.

Dựa, vào đồ thị ở hình vẽ trên, để phương trình $x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}]$ có ba nghiệm khi $m \in (-1; +\infty)$.

Cách 2.

Điều kiện: $x > -1$.

$$\text{Ta có: } x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}]$$

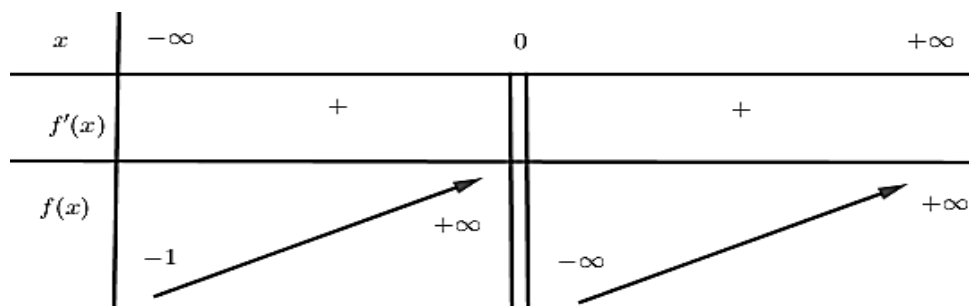
Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm phương trình trên.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow (x-m) \log_3(x+1) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{\log_3(x+1)} = m.$$

$$\text{Đặt: } f(x) = x - \frac{1}{\log_3(x+1)} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1) \ln 3 \cdot (\log_3(x+1))^2} > 0, \forall x \in (-1; +\infty).$$

$$\text{Suy ra } f(x) = x - \frac{1}{\log_3(x+1)} \text{ là hàm số đồng biến } \forall x \in (-1; +\infty).$$

Ta có BBT của hàm số $f(x) = x - \frac{1}{\log_3(x+1)}$.



Dựa vào BBT ở hình vẽ trên, để phương trình $x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}]$ có ba nghiệm khi $m \in (-1; +\infty)$.

- Câu 19:** Cho a, b là các số thực dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a + b = 2019$ để phương trình $5 \log_a x \cdot \log_b x - 4 \log_a x - 3 \log_b x - 2019 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 \cdot x_2)$ bằng $\frac{3}{5} \ln\left(\frac{m}{7}\right) + \frac{4}{5} \ln\left(\frac{n}{7}\right)$; với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + 2n$
- A.** 22209. **B.** 20190. **C.** 2019. **D.** 14133.

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra ta có

$$5 \log_a x \cdot \log_b x - 4 \log_a x - 3 \log_b x - 2019 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \log_a x \cdot (\log_b a \cdot \log_a x) - 4 \log_a x - 3 (\log_b a \cdot \log_a x) - 2019 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \log_b a \cdot (\log_a x)^2 - (4 + 3 \log_b a) \log_a x - 2019 = 0 (*)$$

Vì $a, b > 1 \Rightarrow \log_b a \cdot (-2019) < 0 \Rightarrow (*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo Viet ta có:

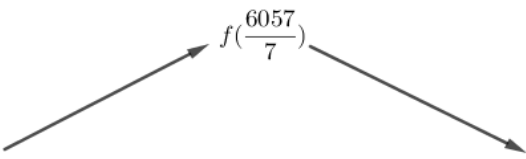
$$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \frac{4 + 3 \log_b a}{5 \log_b a} \Leftrightarrow \log_a (x_1 \cdot x_2) = \frac{4 + 3 \cdot \frac{\ln a}{\ln b}}{5 \frac{\ln a}{\ln b}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x_1 \cdot x_2)}{\ln a} = \frac{4 \ln b + 3 \ln a}{5 \ln a} \Leftrightarrow \ln(x_1 \cdot x_2) = \frac{1}{5} (4 \ln(2019 - a) + 3 \ln a)$$

Xét $f(a) = \frac{1}{5} (4 \ln(2019 - a) + 3 \ln a)$ với $a \in (1; 2019)$

$$\text{Ta có } f'(a) = \frac{1}{5} \left(\frac{-4}{2019 - a} + \frac{3}{a} \right); f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{6057}{7}$$

Bảng biến thiên

a	1	$\frac{6057}{7}$	2019
$f'(a)$	+	0	-
$f(a)$			

Từ bảng biến thiên ta được giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 x_2) = \frac{4}{5} \ln \frac{8076}{7} + \frac{3}{5} \ln \frac{6057}{7}$ khi $a = \frac{6057}{7}$.

Từ đó suy ra $m = 6057$; $n = 8076 \Rightarrow S = m + 2n = 6057 + 2 \cdot 8076 = 22209$

Câu 20: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a + 3b$

- A.** $S_{\min} = 33$. **B.** $S_{\min} = 30$. **C.** $S_{\min} = 17$. **D.** $S_{\min} = 25$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện để hai phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ và $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt là: $b^2 - 20a > 0$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} \ln x_1 + \ln x_2 = -\frac{b}{a} \\ \log x_3 + \log x_4 = -\frac{b}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x_1 x_2) = -\frac{b}{a} \\ \log(x_3 x_4) = -\frac{b}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 x_2 = e^{-\frac{b}{a}} \\ x_3 x_4 = 10^{-\frac{b}{5}} \end{cases}$$

$$\text{Mà } x_1 x_2 > x_3 x_4 \Rightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{5} \ln 10$$

$$\Rightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \Rightarrow a \geq 3.$$

Theo điều kiện có $b^2 - 20a > 0 \Rightarrow b^2 > 20a \geq 60 \Rightarrow b \geq 8$.

$$\text{Từ và suy ra } S = 2a + 3b \geq 30 \Rightarrow S_{\min} = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}.$$

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$ có hai nghiệm phân biệt?

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2 + mx + 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$

$$\log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2 + \log_2 (x + 2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$,

có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Mà $f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) = f(x + 2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2 + (m - 4)x - 3 = 0 \end{cases}$

Do $f(x) = x^2 + (m - 4)x - 3$ là tam thức bậc hai nên có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{4-m}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\frac{4-m}{2})$	$+\infty$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x) = x^2 + (m - 4)x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -2 .

suy ra: $\begin{cases} -2 < \frac{4-m}{2} \\ f\left(\frac{4-m}{2}\right) < 0 < 9 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m < \frac{9}{2} \\ \left(\frac{4-m}{2}\right)^2 - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}.$

Do $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy có 4 giá trị của m .

Câu 22: Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là

A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2020. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_4(1009x) = t \Rightarrow 1009x = 4^t$

Phương trình đã cho có dạng $\log_6(2.4^t + m) = t \Leftrightarrow 2.4^t + m = 6^t \Leftrightarrow m = 6^t - 2.4^t$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f(t) = 6^t - 2.4^t$ với đường thẳng $y = m$.

Xét hàm số: $f(t) = 6^t - 2.4^t$ $f'(t) = 6^t \ln 6 - 2.4^t \ln 4 = 2^t(3^t \ln 6 - 2.2^t \ln 4)$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 6^t \ln 6 = 2.4^t \ln 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 4 \log_6 2 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}(4 \log_6 2)$$

$$+) \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (6^t - 2.4^t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 6^t \left(1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t\right) = +\infty$$

$$+) \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (6^t - 2.4^t) = 0$$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\log_{\frac{3}{2}}(4 \log_6 2)$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	0	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}(4 \log_6 2)\right)$	$+\infty$

Với $f\left(\log_{\frac{3}{2}}(4 \log_6 2)\right) \approx -2,0136$

Từ bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm thì $m \geq f\left(\log_{\frac{3}{2}}(4 \log_6 2)\right) \approx -2,0136$.

Vậy $-2 \leq m < 2018$. Có 2020 số nguyên m .

Câu 23: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2)$ có nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \log_3(3^x + 2m) = \log_5(3^x - m^2) = t \Rightarrow \begin{cases} 3^x + 2m = 3^t \\ 3^x - m^2 = 5^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2m + m^2 = 3^t - 5^t \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 3^t - 5^t + 1.$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t - 5^t + 1$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 - 5^t \ln 5$.

Khi đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3^t \cdot \ln 3 - 5^t \cdot \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t = \frac{\ln 5}{\ln 3} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5) = t_0$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5)$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	$f(\log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5))$	$-\infty$

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 \leq f(t_0) \Leftrightarrow -\sqrt{f(t_0)} - 1 \leq m \leq \sqrt{f(t_0)} - 1 \Rightarrow -2,068 \leq m \leq 0,068.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$.

A. $m \in (0; 2)$.

B. $m \in [0; 2]$.

C. $m \in [2; 4]$.

D. $m \in (0; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{\log_3 x + 1}$. Với $x \in [1; 27]$ thì $t \in [1; 2]$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2m + 2 = t^2 + t$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên đoạn $[1; 2]$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [1; 2]$ nên hàm số $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên $[1; 2]$.

Bảng biến thiên:

t	1	2
$f'(t)$	+	
$f(t)$	2	6

Để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$ thì phương trình (*) phải có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 2]$.

Từ bảng biến thiên, suy ra $2 \leq 2m + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_9 x^2 + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1; 9]$.

A. 1.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - m \log_3 x + 2 - m = 0$.

Đặt $t = \log_3 x$, với $x \in [1; 9] \Rightarrow t \in [0; 2]$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - mt + 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 2}{t + 1}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 2}{t + 1}$ với $t \in [0; 2]$ ta có:

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 2}{(t + 1)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + \sqrt{3} \in [0; 2] \\ t = -1 - \sqrt{3} \notin [0; 2] \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$-1 + \sqrt{3}$	2
$f'(t)$	—	0	+
$f(t)$	2	$-2 + 2\sqrt{3}$	2

Khi đó: phương trình đã cho có nghiệm $x \in [1; 9] \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm $t \in [0; 2]$.

$$\Leftrightarrow -2 + 2\sqrt{3} \leq m \leq 2.$$

Mặt khác, do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 2$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\log_2(mx) = \log_{\sqrt{2}}(x+1)$ vô nghiệm?

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} mx > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx > 0 \\ x > -1 \end{cases}.$$

Ta có $\log_2(mx) = \log_{\sqrt{2}}(x+1) \Leftrightarrow \log_2(mx) = 2\log_2(x+1)$

$$\Leftrightarrow \log_2(mx) = \log_2(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \quad (1).$$

Nhận xét với $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

$$\text{Với } x \neq 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow m = \frac{(x+1)^2}{x}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ với $x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$

$$\text{có } f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		0	-	-	0	+
$f(x)$						

The graph illustrates the function $f(x)$ and its derivative $f'(x)$ across various intervals of x . The horizontal axis represents x , with key points at $-\infty$, -1 , 0 , 1 , and $+\infty$. The vertical axis represents $f(x)$, with a horizontal dashed line at $y = m$.

The derivative $f'(x)$ is shown in the second row, indicating the sign of the slope. It is negative for $x < -1$ and $x > 1$, and positive for $-1 < x < 1$. The function $f(x)$ is shown in the third row, with a vertical asymptote at $x = -1$ and a horizontal asymptote at $y = m$. The function has a local minimum at $x = 0$ with a value of 4. The graph shows the function increasing from $-\infty$ to $+\infty$ as x goes from $-\infty$ to $+\infty$, with a local minimum at $x = 0$.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $0 \leq m < 4$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2(mx) = \log_{\sqrt{2}}(x+1)$ vô nghiệm.

Câu 27: Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x+m) = \log_4(1010x)$ có nghiệm là

A. 2020.

B. 2021.

C. 2019.

D. 2022.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 2020x + m > 0 \\ 1010x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \log_6(2020x + m) = \log_4(1010x) = t.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 2020x + m = 6^t \\ 1010x = 4^t \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Từ đó } m = 6^t - 2 \cdot 4^t \quad (2).$$

Với mỗi nghiệm t_0 của phương trình (2) thì $x_0 = \frac{4^{t_0}}{2010}$ là nghiệm của hệ phương trình (1) đồng thời x_0 thỏa mãn điều kiện (*). Do đó x_0 là nghiệm của phương trình đã cho. Từ đó, điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho có nghiệm là phương trình (2) có nghiệm.

Xét hàm số $f(t) = 6^t - 2 \cdot 4^t$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 6^t \cdot \ln 6 - 2 \cdot 4^t \cdot \ln 4 \text{ và } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16) := \alpha.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau:

t	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(t)$		0	
	$-$		$+$
$f(t)$			
	0	$-2,014$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -2$ (do $m \in \mathbb{Z}$).

Vậy tất cả các giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán là các số nguyên thuộc tập hợp $\{-2, -1, 0, 1, 2, \dots, 2019\}$, có tất cả 2022 giá trị.

Câu 28: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a + 3b$.

A. 30.

B. 25.

C. 33.

D. 17.

Lời giải

Chọn A

$$a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0 \quad (1)$$

$$5 \log^2 x + b \log x + a = 0 \quad (2)$$

Điều kiện để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 là:

$$b^2 - 20a > 0 \Leftrightarrow b^2 > 20a.$$

Nhận xét: $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$

$$\text{Do đó: } x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow \ln(x_1 x_2) > \ln(x_3 x_4) \Leftrightarrow \ln(x_1 x_2) > \frac{\log(x_3 x_4)}{\log e}$$

$$\Leftrightarrow (\ln x_1 + \ln x_2) \log e > \log x_3 + \log x_4$$

$$\text{Mà } \ln x_1 + \ln x_2 = -\frac{b}{a}; \log x_3 + \log x_4 = -\frac{b}{5} \text{ và } a, b \text{ nguyên dương}$$

$$\text{Nên } -\frac{b}{a} \log e > -\frac{b}{5} \Leftrightarrow a > 5 \log e$$

Vì a là số nguyên dương và $5 \log e \approx 2,17$ nên $a \geq 3$

$$\Rightarrow 20a \geq 60 \Rightarrow b^2 > 60 \Rightarrow b > \sqrt{60} \quad (b > 0)$$

Vì b là số nguyên dương và $\sqrt{60} \approx 7,75$ nên $b \geq 8$

Do đó: $S = 2a + 3b \geq 30 \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của S là 30 khi $a = 3; b = 8$.

Câu 29: Cho phương trình $\log_2^2 x - (5m+1)\log_2 x + 4m^2 + m = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 165$. Giá trị của $|x_1 - x_2|$ bằng

- A. 16. B. 119. C. 120. **D. 159.**

Lời giải

Chọn D

$$\log_2^2 x - (5m+1)\log_2 x + 4m^2 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = m \\ \log_2 x = 4m+1 \end{cases}$$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $m \neq 4m+1 \Leftrightarrow m \neq \frac{-1}{3}$

Khi đó phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 2^m > 0, x_2 = 2^{4m+1} = 2 \cdot (2^m)^4 > 0$

$$\text{Vì } x_1 + x_2 = 165 \Leftrightarrow 2^m + 2 \cdot (2^m)^4 = 165 (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2 \cdot t^4 + t \Rightarrow f'(t) = 8t^3 + 1 > 0 \forall t > 0$$

Mà $2^m = 3$ là nghiệm của (*) nên là nghiệm duy nhất. Suy ra $x_1 = 3, x_2 = 2 \cdot 3^4 = 162$

$$\text{Suy ra } |x_1 - x_2| = 159.$$

Câu 30: Gọi m_0 là giá trị thực nhỏ nhất của tham số m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{2}{3}}(x-3) - (m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(3; 6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Không tồn tại m_0 . B. $m_0 \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$. C. $m_0 \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$. **D. $m_0 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \log_{\frac{1}{3}}(x-3).$$

$$\text{Vì } x \in (3; 6) \Rightarrow t > -1.$$

$$\text{Phương trình trở thành: } (m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow mt^2 - mt + m = t^2 - 5t + 1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$$

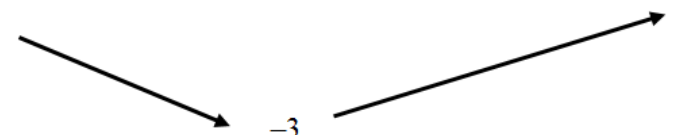
$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$$

$$f'(t) = \frac{(2t-5)(t^2-t+1) - (2t-1)(t^2-5t+1)}{(t^2-t+1)^2} = \frac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Bảng biến thiên:

t	-1		1		$+\infty$
$f'(t)$	0	-	0	+	
$f(t)$	$\frac{7}{3}$				$+\infty$



Để phương trình đã cho có nghiệm $x \in (3; 6)$ thì phương trình (*) có nghiệm $t > -1$.

$$\Leftrightarrow m \geq -3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m_0 = -3 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.

Câu 31: Cho phương trình $m \ln(x+1) - x - 2 = 0$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.** $(3, 7; 3, 8)$. **B.** $(3, 6; 3, 7)$. **C.** $(3, 8; 3, 9)$. **D.** $(3, 5; 3, 6)$.

Lời giải

Chọn A

Xét trên khoảng $(0; +\infty)$ phương trình: $m \ln(x+1) - x - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{x+2}{\ln(x+1)}$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x+2}{\ln(x+1)}, x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}$$

Với yêu cầu của đề bài ta xét $f(x)$ trên 2 khoảng $(0; 2)$ và $(4; +\infty)$

$$f'(x) = \frac{\ln(x+1) - (x+2) \frac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$$

$$\text{Đặt } g(x) = \ln(x+1) - (x+2) \frac{1}{x+1}, x \in (0; 2) \cup (4; +\infty)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in (0; 2) \cup (4; +\infty)$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} g(x) < g(2) = \ln 3 - \frac{4}{3} < 0, \forall x \in (0; 2) \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (0; 2) \\ g(x) > g(5) = \ln 5 - \frac{6}{5} > 0, \forall x \in (4; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in (4; +\infty) \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{4}{\ln 3}$	$\frac{6}{\ln 5}$	-3

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình đề bài có 2 nghiệm phân biệt thỏa

$$0 < x_1 < 2 < 4 < x_2 \Leftrightarrow m > \frac{6}{\ln 5} (\approx 3,728)$$

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

- A. Không tồn tại a . B. $a < -1$ hoặc $a = 4 - 2\sqrt{10}$.
C. $a < 1$. D. $a = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{Khi đó phương trình } \log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\log_3 x + a\sqrt{3\log_3 x} + a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(3\log_3 x) + 3a\sqrt{3\log_3 x} + 3a + 3 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } \sqrt{3\log_3 x} = t, t \geq 0 \text{ thì (1) trở thành: } 2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0.$$

Do đó, yêu cầu bài toán trở thành: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình

$$2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0 \text{ có nghiệm duy nhất thuộc nửa khoảng } [0; +\infty).$$

$$\text{Ta có: } 2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0 \Leftrightarrow 3a = \frac{-2t^2 - 3}{t + 1}, t \geq 0.$$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{-2t^2 - 3}{t + 1}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Ta có:

$$+) f'(t) = \frac{-2t^2 - 4t + 3}{(t + 1)^2}. f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \\ t = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}.$$

+) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$.

+) Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{-2+\sqrt{10}}{2}$	$+\infty$	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	-3	$4-2\sqrt{10}$	$-\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất khi

$$\begin{cases} 3a < -3 \\ a = -4 + 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a = -4 + 2\sqrt{10} \end{cases}.$$

Đáp số: $a < -1$ hoặc $a = -4 + 2\sqrt{10}$.

Câu 33: Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m-1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(2; 4)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m_0 \in \left(-1; \frac{4}{3}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$. **C.** $m_0 \in \left(4; \frac{16}{3}\right)$. **D.** $m_0 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 2$.

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, với $x \in (2; 4) \Rightarrow t \in (-1; +\infty)$.

Phương trình đã cho trở thành: $(m-1)t^2 - (m-5)t + m-1 = 0$

$$t^2 - 5t + 1 = mt^2 - mt + m \Leftrightarrow t^2 - 5t + 1 = m(t^2 - t + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1} = m \quad (1), \quad (t^2 - t + 1 \neq 0, \forall t)$$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $t > -1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}, \quad (t > -1)$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = -3 \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $f(t)$:

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(t)$		0	$-$	0	$+$
$f(t)$			$\frac{7}{3}$	-3	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t > -1$ khi và chỉ khi $-3 \leq m < \frac{7}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tham số thực m để phương trình đã cho có nghiệm là $m_0 = -3 \in \left(-5; \frac{-5}{2}\right)$.

Câu 34: Giả sử phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị biểu thức $|x_1 - x_2|$ là

A. 4.

B. 3.

C. 8.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương

$$\log_2^2 x - m \log_2 x - 2 \log_2 x + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - m)(\log_2 x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = m \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^m \\ x = 4 \end{cases}$$

Theo giả thiết $x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow 2^m + 4 = 6 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow |x_1 - x_2| = 2$.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.

A. $2 \leq m \leq 6$

B. $3 \leq m \leq 6$

C. $6 \leq m \leq 9$

D. $2 \leq m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_2 x$. Khi $x \in [1; 8]$ thì $t \in [0; 3]$. Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $t^2 - 2t + 3 = m$ có nghiệm $t \in [0; 3]$. Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 3$ với $t \in [0; 3]$, ta có:

$$f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1; \min_{t \in [0; 3]} f(t) = f(1) = 2; \max_{t \in [0; 3]} f(t) = f(3) = 6.$$

Đồ thị hàm số $y = f(t) = t^2 - 2t + 3$ và đường thẳng $y = m$ sẽ cắt nhau tại điểm có hoành độ $t \in [0; 3]$ nếu như $\min_{t \in [0; 3]} f(t) \leq m \leq \max_{t \in [0; 3]} f(t) \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 6$.

Câu 36: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$.

- A.** $m = \frac{9}{2}$. **B.** $m = 3$. **C.** Không tồn tại. **D.** $m = \frac{61}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_3 x$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 3t + 2m - 7 = 0$ (*).

Ứng với mỗi nghiệm t của phương trình (*) có một nghiệm x .

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (-3)^2 - 4(2m - 7) > 0 \Leftrightarrow 9 - 8m + 28 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{37}{8}.$$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm phương trình (*).

Theo định lý Viét ta có: $t_1 + t_2 = 3 \Rightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_3 (x_1 \cdot x_2) = 3 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 27$.

Theo đề bài $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = 72 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 12$.

$$\text{Vậy ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \cdot x_2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = 2.$$

Theo định lý Viét ta có $t_1 \cdot t_2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2m - 7 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$.

Kết luận: $m = \frac{9}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6 (2020x + m) = \log_4 (1010x)$ có nghiệm là

- A.** 2022. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn A

Ta đặt $\log_6 (2020x + m) = \log_4 (1010x) = t$. Khi đó

$2020x + m = 6^t$ và $1010x = 4^t$. Ta suy ra $2 \cdot 4^t + m = 6^t \Leftrightarrow m = 6^t - 2 \cdot 4^t$

Đặt $f(t) = -2 \cdot 4^t + 6^t$

$$f'(t) = 6^t \ln 6 - 2 \cdot 4^t \cdot \ln 4$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{2 \ln 4}{\ln 6} = \log_6 16 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}} (\log_6 16).$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right)$	$+\infty$

Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right) \approx -2,01$.

Hơn nữa, $\begin{cases} m < 2020 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} -2 \leq m \leq 2019 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Vậy ta có 2022 giá trị m thỏa mãn.

Câu 38: Cho phương trình $(me^x - 10x - m)[\log(mx) - 2\log(x+1)] = 0$. (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt?

A. Vô số.

B. 10.

C. 11.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$(me^x - 10x - m)[\log(mx) - 2\log(x+1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx > 0 & (1) \\ x+1 > 0 & (2) \\ me^x - 10x - m = 0 & (3) \\ mx = (x+1)^2 & (4) \end{cases} (*)$$

*) $m = 0$ thì pt vô nghiệm.

$$*) m > 0 \text{ thì hệ } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ m = \frac{10x}{e^x - 1} \\ m = \frac{(x+1)^2}{x} \end{cases}.$$

$$+ \text{Xét } f(x) = \frac{10x}{e^x - 1} \text{ và } g(x) = \frac{(x+1)^2}{x} = x + \frac{1}{x} + 2.$$

$$+ f'(x) = \frac{10(e^x - 1) - e^x \cdot 10x}{(e^x - 1)^2} = \frac{10e^x(1-x) - 10}{(e^x - 1)^2}.$$

$$\text{Xét } u(x) = 10e^x(1-x) - 10 \Rightarrow u'(x) = -10e^x + 10e^x(1-x) = -10xe^x < 0 \forall x \in (0; +\infty)$$

Suy ra: Hàm số $u(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow u(x) < u(0) = 0$.

$\Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 10, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	10	0

$$+ g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

Suy ra phương trình có ba nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 4 < m < 10$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{5; 6; 7; 8; 9\}$

$$*) m < 0 \text{ thì hệ } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ m = f(x) \\ m = g(x) \end{cases}.$$

Tương tự ta có $f'(x) > 0 \forall x \in (-1; 0)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-10}{e^{-1} - 1} = \frac{-10e}{1 - e} = \frac{10e}{e - 1}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 10$

x	-1	0
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\frac{10e}{e - 1}$	10

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm thực phân biệt, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cho phương trình $4^{-|x-m|} \cdot \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{2x-x^2} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m| + 2) = 0$ với m là tham số.

Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là

- A.** 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$$\Leftrightarrow 2^{1-2|x-m|} \cdot \log_2 \left[(x-1)^2 + 2 \right] - 2^{1-(x-1)^2} \cdot \log_2 (2|x-m| + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{1-2|x-m|}}{\log_2(2|x-m|+2)} = \frac{2^{1-(x-1)^2}}{\log_2[(x-1)^2+2]}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2^{1-t}}{\log_2(t+2)}$ có $f'(t) = \frac{-2^{1-t} \cdot \ln(t+2) - \frac{2^{1-t}}{(t+2) \ln 2}}{[\log_2(t+2)]^2} < 0, \forall t > -2$.

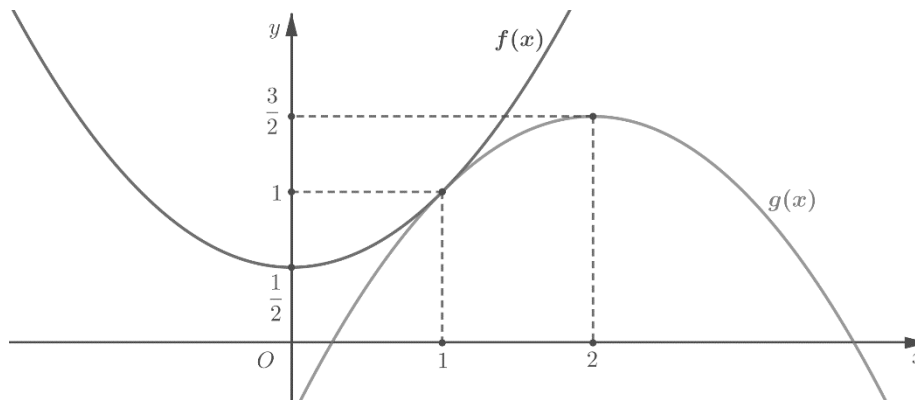
Phương trình đã cho $\Leftrightarrow f\left[(x-1)^2\right]=f\left(2|x-m|\right) \Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m|$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1 + 2m)(x^2 + 1 - 2m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2m + 1 = 0 \\ x^2 + 1 - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 = m & (1) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = m & (2) \end{cases}.$$

Khi đó $y_{cbt} \Leftrightarrow$ phương trình (1) và (2) có tổng cộng 3 nghiệm thực phân biệt.

Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ và $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x = 1$.

Dựa vào đồ thị ta có $m = \frac{1}{2}, m = 1, m = \frac{3}{2}$ thì phương trình đã cho có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy tổng các giá trị thực của m thỏa ycbt là $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$.

Câu 40: Cho phương trình $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81]$ là

- A. 3 B. 5 C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3^2(9x) - (m+5)\log_3 x + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2(x) - (m+1)\log_3 x + 3m - 6 = 0, (1)$

Đặt $t = \log_3 x$, khi $x \in [1; 81]$ thì $t \in [0; 4]$.

Khi đó ta có phương trình $t^2 - (m+1)t + 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = m - 2 \end{cases}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81] \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t \in [0; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 3 \\ 0 \leq m - 2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{cases}$.

Suy ra có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 81]$.

Chọn đáp án **C**.

Câu 41: Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $5x + y = 4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3 \frac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. 10. B. 5. C. 9. D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3 \frac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 + 2y + m) + x^2 + 2y + m = \log_3 3(x + y) + 3(x + y) \quad (1)$$

Vì $x, y > 0$ nên $x + y > 0$. Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow x^2 + 2y + m = 3x + 3y \Leftrightarrow x^2 - 3x - y + m = 0 \quad (*)$$

Kết hợp với điều kiện $5x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 5x$. Vì $x, y > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{4}{5}$.

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow x^2 + 2x + m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 - 2x + 4, \forall x \in \left(0; \frac{4}{5}\right).$$

Hàm số $y = -x^2 - 2x + 4$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{4}{5}\right)$ nên $\frac{44}{25} < -x^2 - 2x + 4 < 4$.

Do vậy $m \in \{2; 3\}$ là các giá trị cần tìm.

Vậy tổng tất cả các giá trị m thỏa ycbt là 5.

Câu 42: Biết rằng điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_2 (m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x$ có nghiệm là $m \geq -\frac{a}{b}$ với a, b là hai số nguyên dương và $b < 7$. Hỏi $a + b + b^2$ bằng bao nhiêu?

A. 31.

B. 32.

C. 21.

D. 23.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2 (m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2^x \geq 0 \\ m + \sqrt{m + 2^x} = 2^{2x} \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow (m + 2^x) + \sqrt{m + 2^x} = (2^x)^2 + 2^x.$$

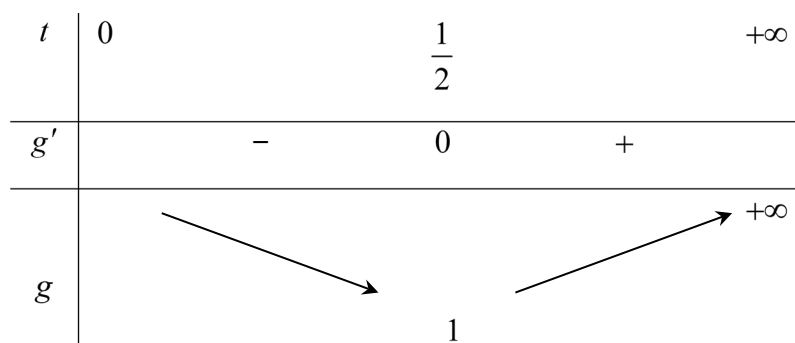
Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ ($t \geq 0$). Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0$ với mọi $t \geq 0$, suy ra hàm số luôn đồng biến với mọi $t \geq 0$.

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{m + 2^x}) = f(2^x) \Leftrightarrow \sqrt{m + 2^x} = 2^x \Leftrightarrow (2^x)^2 = 2^x + m \quad (**).$$

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$), khi đó phương trình (**) trở thành $t^2 - t = m$ (***)

Xét hàm $g(t) = t^2 - t$ ($t > 0$), ta có $g'(t) = 2t - 1 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên



Vậy để (***) có nghiệm $t > 0$ thì $m \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+b+b^2=21$.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_2^2(4x) - m \log_{\sqrt{2}} x - 2m - 4 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 8]$?

A. 1.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $x > 0$

$$\log_2^2(4x) - m \log_{\sqrt{2}} x - 2m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + \log_2 x)^2 - 2m \log_2 x - 2m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + 4 \log_2 x = 2m(\log_2 x + 1) \quad (1)$$

$$\log_2 x = t; x \in [1; 8] \Rightarrow t \in [0; 3]$$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{t^2 + 4t}{t+1} = 2m$$

$$f(t) = \frac{t^2 + 4t}{t+1}; t \in [0; 3]$$

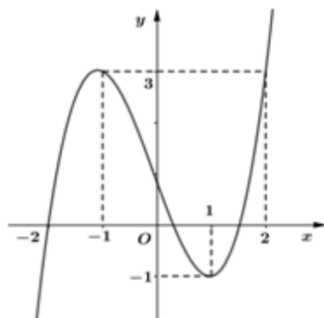
$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 4}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [0; 3]$$

$$\Rightarrow f(0) \leq 2m \leq f(3)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{21}{8}, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0, 1, 2\}$$

Câu 44: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ sao cho phương trình

$$\log_2^3(f(x)+1) - \log_{\sqrt{2}}^2(f(x)+1) + (2m-8) \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{f(x)+1} + 2m = 0 \text{ có nghiệm } x \in (-1; 1)?$$



A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. vô số.

Lời giải

Chọn A

Với $x \in (-1; 1) \Rightarrow -1 < f(x) < 3 \Leftrightarrow 0 < f(x) + 1 < 4$.

Đặt $t = \log_2(f(x) + 1) \Rightarrow t \in (-\infty; 2), \forall x \in (-1; 1)$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^3 - 4t^2 - (m - 4)t + 2m = 0$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(t^2 - 2t - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \notin (-\infty; 2) \\ t^2 - 2t - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t^2 - 2t - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t = m \quad (*)$$

Để phương trình đã cho có $x \in (-1; 1) \Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm $t \in (-\infty; 2)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ trên $(-\infty; 2)$ có $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in (-\infty; 2)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^2 - 2t$

t	$-\infty$		1		2
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$+\infty$	↘		↗	
			-1		0

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $(*)$ có nghiệm $t \in (-\infty; 2)$ khi và chỉ khi $m \geq -1$.

Mà $\begin{cases} m \in [-5; 5] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Cho phương trình $9^x - (2m + 3) \cdot 3^x + 81 = 0$ (m là tham số thực). Giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$ thuộc khoảng nào sau đây

A. (5;10).

B. (0;5).

C. (10;15).

D. (15; $+\infty$).

Lời giải

Chọn C

$$9^x - (2m + 3) \cdot 3^x + 81 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - (2m + 3) \cdot 3^x + 81 = 0. \text{ Đặt } t = 3^x (t > 0)$$

$$\text{Phương trình trở thành: } t^2 - (2m + 3)t + 81 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta = (2m+3)^2 - 4.81 = (2m+3)^2 - 324$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương:

Điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 - 324 > 0 \\ 2m+3 > 0 \\ 81 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 > 18 \\ 2m+3 < -18 \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 > 18 \\ 2m+3 < -18 \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{15}{2} \\ m > -\frac{3}{2} \\ m < -\frac{21}{2} \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{15}{2}$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m+3 \\ t_1 \cdot t_2 = 81 \end{cases}$

$$\text{Vì } t_1 \cdot t_2 = 81 \Leftrightarrow 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 3^4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$$

$$\text{Do đó: } x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 10 \Leftrightarrow 4^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 10 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 3$$

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 27 \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 30$$

$$\text{Nên } 2m+3 = 30 \Leftrightarrow m = \frac{27}{2} (TM)$$

Vậy **Chọn C**

Câu 46: Cho phương trình $m \cdot 16^x - 2(m-2) \cdot 4^x + m-3 = 0(1)$. Tập hợp tất cả các giá trị dương của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tổng $T = a + 2b$ bằng:

A. 14

B. 10

C. 11

D. 7

Lời giải

Chọn C

$$+) \text{ Đặt: } 4^x = t(t > 0) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow m \cdot t^2 - 2(m-2)t + m-3 = 0(2)$$

+) Để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Rightarrow \text{Điều kiện: } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-2)^2 - m(m-3) > 0 \\ \frac{m-2}{m} > 0 \\ (m-3)m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m+4 > 0 \\ m > 2 \\ m < 0 \\ m > 3 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m < 4 \\ m < 0(l) \end{cases}$$

$$+) \text{ Vậy } 3 < m < 4 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+2b=11$$

Câu 47: Phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(-5; 0)$. **B.** $(-7; -5)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(5; 7)$.

Lời giải

Đặt $t = 2^x$. Ta có phương trình $t^2 - 6t + m = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1 \Leftrightarrow$ pt có hai nghiệm dương

$$t_1, t_2 \text{ thỏa mãn } t_1 \cdot t_2 = 2^{x_1+x_2} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ s > 0 \\ p = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m \geq 0 \\ 6 > 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Câu 48: Với giá trị nào của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$

- A.** $m = \frac{5}{2}$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 8$. **D.** $m = \frac{13}{2}$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương $2^{2x} - 2m \cdot 2^x + 2m + 3 = 0$ (1).

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$), khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2m \cdot t + 2m + 3 = 0$ (2). Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t_1; t_2$ dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ 2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3. \text{ Theo định lý Viet ta có } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 \cdot t_2 = 2m + 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2^x \text{ ta có: } \begin{cases} t_1 = 2^{x_1} \\ t_2 = 2^{x_2} \end{cases} \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow 2m + 3 = 2^{x_1+x_2} \Leftrightarrow 16 = 2m + 3 \Leftrightarrow m = \frac{13}{2}.$$

Câu 49: Phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi

A. $m = 4$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Phương trình viết thành $t^2 - 2mt + 2m = 0$ (1).

Ta có $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 2^3 \Leftrightarrow 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 8$.

Ycbt tương đương phương trình (1) có hai nghiệm dương t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 8$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m > 0 \\ t_1 + t_2 = 2m > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4 \cdot 4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $4 - 3\sqrt{2} < m < 4 + 3\sqrt{2}$

B. $m > 4 + 3\sqrt{2}$ hoặc $m < 4 - 3\sqrt{2}$

C. $m > -1$ hoặc $m < \frac{-1}{2}$ **D.** $-1 < m < \frac{-1}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$4 \cdot 4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2+2x+1} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)9^{x^2+2x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{x^2+2x+1} + (2m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1} - (6m+3) = 0 \quad (2)$$

• Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{(x+1)^2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$. Suy ra $0 < t \leq 1$

Pt trở thành: $t^2 + (2m-2)t - 6m-3 = 0 \quad (3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 & (\text{loại}) \\ t = -2m-1 \end{cases}$$

• Để phương trình có 2 nghiệm x phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình } t^2 + (2m-2)t - 6m-3 = 0 \text{ có đúng một nghiệm } t \text{ thuộc khoảng } (0;1)$$

$$\Leftrightarrow 0 < -2m-1 < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < \frac{-1}{2}.$$

Chú ý: Nếu $t = 1$ thì phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{(x+1)^2} = 1$ chỉ có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Câu 51: Biết rằng tập các giá trị của tham số m để phương trình $(m-3)9^x + 2(m+1)3^x - m-1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a;b)$. Tính tích $a.b$.

A. 4

B. -3

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn D

Đặt: $3^x = t, (t > 0)$. Khi đó phương trình trở thành $(m-3)t^2 + 2(m+1)t - m-1 = 0(*)$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(2m-2) > 0 \\ -\frac{m+1}{m-3} > 0 \\ \frac{-m-1}{m-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > 1 \\ -1 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3 \Rightarrow a.b = 3$$

Câu 52: Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m - 2019 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 1008.

B. 1007.

C. 2018.

D. 2017.

Lời giải

$$4^x - m \cdot 2^x + 2m - 2019 = 0$$

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$). Phương trình trở thành $t^2 - mt + 2m - 2019 = 0$

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 0 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm

$$t_1, t_2 \text{ thỏa } 0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = t_1 + t_2 > 0 \\ P = t_1 t_2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ m > 0 \\ 2m - 2019 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(2m - 2019) < 0 \\ m > 0 \\ m > \frac{2019}{2} \\ 2m - 2019 - m + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8076 > 0 (\forall m) \\ m > 0 \\ m > \frac{2019}{2} \\ m < 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2019}{2} < m < 2018. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } 1010 \leq m \leq 2017$$

Số giá trị nguyên m thỏa đề là 1008.

Câu 53: Cho phương trình $(4 + \sqrt{15})^x + (2m + 1)(4 - \sqrt{15})^x - 6 = 0$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$. Ta có m thuộc khoảng nào?

A. $(3; 5)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Đặt $t = (4 + \sqrt{15})^x$, $t > 0$. Khi đó phương trình ban đầu trở thành:

$$t + \frac{(2m+1)}{t} - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 2m + 1 = 0, t > 0$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$ khi và chỉ khi phương

$$\text{trình có hai nghiệm dương phân biệt } t_1, t_2 \text{ thỏa mãn } t_1 = (t_2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(*)} > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 4$$

$$\text{Theo Viet, ta có: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_1 t_2 = 2m + 1 \\ t_1 = (t_2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_2 = \sqrt[3]{2m+1} \\ t_1 = (\sqrt[3]{2m+1})^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sqrt[3]{2m+1})^2 + \sqrt[3]{2m+1} = 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2m+1} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{7}{2} \in (3; 5).$$

Câu 54: Phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (1 - 2a)(2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. B. $(0; +\infty)$. C. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x, t > 0$

Phương trình trở thành $t + \frac{1-2a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2a = 0$

GT: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{x_1 - x_2} = 3$

Khi đó $t_1 = 3t_2$

YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $t_1 = 3t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 > 0; t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \\ t_1 = 3t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2a > 0 \\ t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -\frac{3}{2} \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1$$

Câu 55: Biết rằng tập các giá trị của tham số m để phương trình $(m-3)9^x + 2(m+1)3^x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a; b)$. Tính tích $a.b$.

- A. 4 B. -3 C. 2 D. 3

Lời giải

Đặt $3^x = t, (t > 0)$, phương trình đã cho trở thành $(m-3)t^2 + 2(m+1)t - m - 1 = 0 (*)$

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(2m-2) > 0 \\ -\frac{m+1}{m-3} > 0 \\ \frac{-m-1}{m-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3$$

Khi đó $(a; b) = (1; 3)$

Tích $a.b = 3$

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $9^x - 2m.3^x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

- A. $-2 < m < 2$ B. $m > 2$ C. $m > -2$ D. $m < 2$

Lời giải

Đặt $t = 3^x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in (0; +\infty)$ và mỗi x cho ta một giá trị t tương ứng.

Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 2mt + m + 2 = 0$ (*)

Để pt đã cho có 2 nghiệm phân biệt, tương đương phương trình (*) có hai nghiệm dương phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Câu 57: Xác định các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2(m+2)6^x + (m^2 + 4m + 3)4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m < -2$.

B. $m > -3$.

C. $m > -1$.

D. $m > -2$.

Lời giải

Xét phương trình: $9^x - 2(m+2)6^x + (m^2 + 4m + 3)4^x = 0$

Chia cả hai vế của phương trình cho 4^x ta được $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2(m+2)\left(\frac{3}{2}\right)^x + m^2 + 4m + 3 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, ($t > 0$) khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 2(m+2)t + m^2 + 4m + 3 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 - m^2 - 4m - 3 > 0 \\ 2(m+2) > 0 \\ m^2 + 4m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m > -2 \\ m \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Câu 58: Biết rằng $m = m_0$ là giá trị của tham số m sao cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12$. Khi đó m_0 thuộc khoảng nào sau đây

A. $(3; 9)$.

B. $(9; +\infty)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn C

$$9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 3^x, t > 0. \text{ Pt trở thành: } t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 4m-1 \end{cases}$$

Để pt có 2 nghiệm thì điều kiện cần và đủ là $4m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

Khi đó pt có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \log_3(4m-1)$.

$$\text{Từ giả thiết } (x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12 \Leftrightarrow 3(\log_3(4m-1) + 2) = 12 \Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \cdot (3^2 + 1) = \frac{5}{2}. \text{ Vậy } m \in (1; 3).$$

Câu 59: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $16^x - 2(m+1)4^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 6

B. 7

C. 0

D. 3

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 4^x, t > 0$

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0 (*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ pt $(*)$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 9 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ 3m - 8 > 0 \\ m - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{8}{3} < m < 9$$

Vậy m có 6 giá trị nguyên.

Câu 60: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m + 1 = 0$ có nghiệm. Tập $\mathbb{R} \setminus S$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1

B. 4

C. 9

D. 7

Lời giải

Đặt $t = 2^x (t > 0)$, khi đó phương trình có dạng

$$t^2 - mt + 2m + 1 = 0 (2)$$

Để phương trình ban đầu có nghiệm thì phương trình có nghiệm dương

TH 1: Pt có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$

$$\text{TH 2: pt có 2 nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 8m - 4 \geq 0 \\ m > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4 + \sqrt{20}$$

Nên $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[4 + \sqrt{20}; +\infty\right) \Rightarrow \mathbb{R} \setminus S = \left[-\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{20}\right)$. Vậy các số nguyên thỏa mãn là

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 hay đáp án C

Câu 61: Cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12$. Giá trị của m thuộc khoảng

A. $(9; +\infty)$.

B. $(3; 9)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(1; 3)$.

Lời giải

Đặt $t = 3^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2(2m+1) > 0 \\ 3(4m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $t = 4m - 1$ và $t = 3$.

Với $t = 4m - 1$ thì $3^{x_1} = 4m - 1 \Leftrightarrow x_1 = \log_3(4m - 1)$.

Với $t = 3$ thì $3^{x_2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Ta có $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12 \Leftrightarrow x_1 = 2 \Leftrightarrow \log_3(4m - 1) = 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{5}{2}$ nên m thuộc khoảng $(1; 3)$.

Câu 62: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x-x^2}} + 2m - 1 = 0$ có nghiệm?

A. 27.

B. 25.

C. 23.

D. 24.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \in [0; 4]$.

Đặt $t = \sqrt{4x - x^2}$ với $x \in [0; 4]$ thì $t \in [0; 2]$

Đặt $u = 3^t$ với $t \in [0; 2]$ thì $u \in [1; 9]$

Khi đó, tìm m để phương trình $u^2 - 4u + 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 9]$.

$\Leftrightarrow 2m = -u^2 + 4u + 1$, với $u \in [1; 9]$

Xét hàm số $f(u) = -u^2 + 4u + 1$.

$f'(u) = -2u + 4 = 0 \Leftrightarrow u = 2$.

Ta có, $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(9) = -44$.

Do đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-44 \leq 2m \leq 5 \Leftrightarrow -22 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Vậy có 25 số nguyên của tham số m .

Câu 63: Gọi $(a; b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 5)$. Tổng $a + b$ là

A. 2.

B. 4.

C. -6.

D. -14.

Lời giải

Đặt $t = e^x$; $x \in (0; \ln 5)$ tương ứng $t \in (1; 5)$.

Phương trình thành $2t^2 - 8t = m$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 8t$ với $t \in (1; 5)$ có $f'(t) = 4t - 8$

t	1	2	5
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-6	-8	10

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; \ln 5)$ khi phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm $t \in (1; 5) \Leftrightarrow -8 < m < -6$.

Câu 64: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(\sqrt{2} + 1)^x - m(\sqrt{2} - 1)^x = 8$ có hai nghiệm dương phân biệt. Số phần tử của S bằng

A. 8.

B. 7.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Đặt $(\sqrt{2} + 1)^x = t, t > 0$. Vì $(\sqrt{2} + 1)^x \cdot (\sqrt{2} - 1)^x = 1$ nên $(\sqrt{2} - 1)^x = \frac{1}{t}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t - \frac{m}{t} = 8 \Leftrightarrow t^2 - 8t = m.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Xét $f(t) = t^2 - 8t$, trên $(1; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2t - 8$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

Bảng biến thiên của hàm $f(t)$

t	1	4	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-7	-16	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $-16 < m < -7$.

Vậy số phần tử của S là 8.

- Câu 65:** Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $(\sqrt{10} + 1)^{x^2} + m(\sqrt{10} - 1)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?
- A. 14. B. 15. C. 13. D. 16.

Lời giải

$$(\sqrt{10} + 1)^{x^2} + m(\sqrt{10} - 1)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2} + m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = 6 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}, \quad t > 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = \frac{1}{t}$$

$$(1) \Leftrightarrow t + m \cdot \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + m = 0 \quad (2)$$

Để (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có một nghiệm lớn hơn 1.

(2) $\Leftrightarrow m = -t^2 + 6t$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 6t$ trên khoảng $(1; +\infty)$, ta có:

$$f'(t) = -2t + 6; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Bảng biến thiên:

t	1	3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	5	9	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m < 5$ hoặc $m = 9$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m \in (-10; 10)$ nên $m = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 9\}$.

Suy ra có 15 giá trị m cần tìm.

- Câu 66:** Phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x - m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2m + 1 = 0$ có nghiệm khi m nhận giá trị:

- A. $m < -\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2} < m < 4 - 2\sqrt{5}$. C. $m \geq 4 + 2\sqrt{5}$. D.

$$m < -\frac{1}{2} \vee m \geq 4 + 2\sqrt{5}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có phương trình: } \left(\frac{1}{9}\right)^x - m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2m + 1 = 0$$

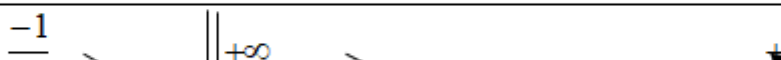
Đặt $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, ($t > 0$) phương trình trở thành: $t^2 - m.t + 2m + 1 = 0$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình có nghiệm dương.

$t = 2$ không là nghiệm của phương trình nên $\Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 1}{t - 2} = f(t)$

$$f'(t) = \frac{t^2 - 4t - 1}{(t - 2)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 4t - 1}{(t - 2)^2} = 0 \Rightarrow t^2 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - \sqrt{5} \text{ (L)} \\ t = 2 + \sqrt{5} \text{ (N)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên.

t	0	2	$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(t)$	-		- 0	+
$f(t)$	$\frac{-1}{2}$ 	$+\infty$	$4+2\sqrt{5}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình có nghiệm khi $m < -\frac{1}{2} \vee m \geq 4 + 2\sqrt{5}$

Câu 67: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $(m+1).16^x - 2(2m-3).4^x + 6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. 4.

B. 8.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Cách 1.

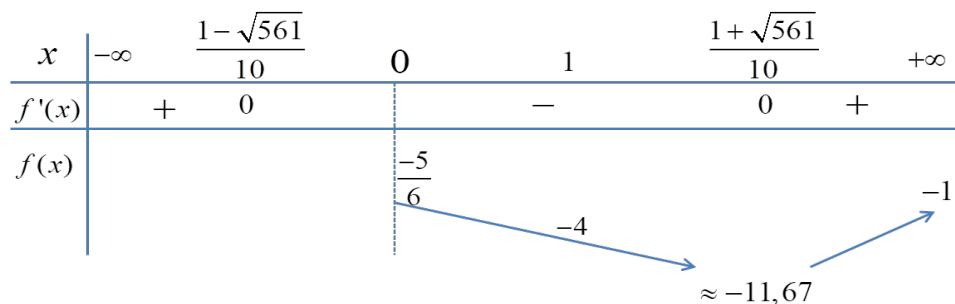
Đặt $t = 4^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành:

$$(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5=0 \Leftrightarrow m = -\frac{t^2 + 6t + 5}{t^2 - 4t + 6}.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Đặt } f(t) = -\frac{t^2 + 6t + 5}{t^2 - 4t + 6} \Rightarrow f'(t) = \frac{10t^2 - 2t - 56}{(t^2 - 4t + 6)^2}. \text{ Suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{561}}{10}$$

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi $-4 < m < -1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -3$ và $m = -2$.

Cách 2:

Đặt $t = 4^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành: $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0$.

Đặt $f(x) = (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Điều đó xảy ra khi: } \begin{cases} (m+1)f(1) < 0 \\ (m+1)f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(3m+12) < 0 \\ (m+1)(6m+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < -1 \\ m < -1 \\ m > -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -1.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -3$ và $m = -2$.

Câu 68: Phương trình $4^x + 1 = 2^x \cdot m \cdot \cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất. Số giá trị của tham số m thỏa mãn là
A. Vô số **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 4^x + 1 = 2^x m \cos(\pi x) \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = m \cos(\pi x)$$

Ta thấy nếu $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình thì $x = -x_0$ cũng là nghiệm của phương trình nên để phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0 = 0$.

Với $x_0 = 0$ là nghiệm của phương trình thì $m = 2$.

Thử lại: Với $m = 2$ ta được phương trình $2^x + 2^{-x} = 2 \cos(\pi x)$ (*)

$$VT \geq 2; VP \leq 2 \text{ nên } (*) \begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 2 \\ 2 \cos(\pi x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ thỏa mãn. Vậy } m = 2.$$

Câu 69: Cho phương trình $2^x = \sqrt{m \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x) - 4}$, với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng một nghiệm thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $m_0 \in [-5; -1)$. B. $m_0 < -5$. C. $m_0 \in [-1; 0)$. D. $m_0 > 0$.

Lời giải

$$\text{Phương trình } 4^x = m \cdot 2^x \cdot \cos(\pi x) - 4 \Leftrightarrow 2^x + 2^{2-x} = m \cdot \cos(\pi x)$$

Điều kiện cần: nếu x_0 là một nghiệm của phương trình thì $2 - x_0$ cũng là nghiệm. Vì phương trình có nghiệm duy nhất nên $x_0 = 1$

Thay vào phương trình ta có: $m = -4$.

Điều kiện đủ:

$$\text{Với } m = -4 \text{ ta có } 4^x + 4 \cdot 2^x \cos(\pi x) + 4 = 0 \Leftrightarrow [2^x + 2 \cos(\pi x)]^2 + 4 \sin^2(\pi x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -2 \cos(\pi x) \\ \sin(\pi x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -2 \cos(\pi x) \\ \cos(\pi x) = 1 \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $m = -4$ thỏa mãn

Câu 70: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8^x + 3x \cdot 4^x + (3x^2 + 1) \cdot 2^x = (m^3 - 1)x^3 + (m - 1)x$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $(0; 10)$.

- A. 101 B. 100 C. 102 D. 103

Lời giải

$$8^x + 3x \cdot 4^x + (3x^2 + 1) \cdot 2^x = (m^3 - 1)x^3 + (m - 1)x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (2^x + x)^3 + (2^x + x) = (mx)^3 + mx$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$

$$\text{Ta có } t = 2^x + x \text{ mà } 0 < x < 10 \Rightarrow \begin{cases} 1 < 2^x < 1024 \\ 0 < x < 10 \end{cases} \Rightarrow 1 < 2^x + x < 1034 \Rightarrow 1 < t < 1034$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in (1; 1034)$.

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in (1; 1034) \text{ hay } f(t) = t^3 + t \text{ đồng biến trên } (1; 1034)$$

$$\text{Suy ra } (2) \Leftrightarrow 2^x + x = mx \Leftrightarrow \frac{2^x + x}{x} = m$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{2^x}{x} + 1, x \in (0; 10).$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{x \cdot 2^x \ln 2 - 2^x}{x^2} = \frac{2^x (x \ln 2 - 1)}{x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e$$

BBT

x	0	$\log_2 e$	10
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	$e \cdot \ln 2 + 1$	104,4

$$ycbt \Leftrightarrow e \cdot \ln 2 + 1 < m < 104,4$$

mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = \overline{3,104}$.

Có tất cả 102 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 71: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$ có nghiệm.

- A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$ B. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$ C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Ta có } t' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}, t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

x	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
t'		+	0 -
t	1	$\sqrt{2}$	1

$$\text{Vậy } t \in [-1; \sqrt{2}].$$

$$\text{Phương trình trở thành } e^{3m} + e^m = 2t \left(1 + \frac{t^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow e^{3m} + e^m = t^3 + t \Leftrightarrow e^m = t \dots$$

$$\text{Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi } -1 \leq e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \ln \sqrt{2} \Leftrightarrow m \in (-\infty; \frac{1}{2} \ln 2].$$

Câu 72: Gọi A là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho tập nghiệm của phương trình $x \cdot 2^x = x(x - m + 1) + m(2^x - 1)$ có hai phần tử. Số phần tử của A bằng

- A. 2. B. 3. C. 1. D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình: } x \cdot 2^x = x(x - m + 1) + m(2^x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot (x - m) = (x - m)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x-m)(2^x - x - 1) = 0$$

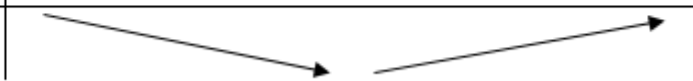
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ 2^x - x - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (2): $2^x - x - 1 = 0$

$$\text{Đặt } f(x) = 2^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2 - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right)$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$	$\log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right)$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0$ (2) có nhiều nhất 2 nghiệm.

$$\text{Mà } f(0) = f(1) = 0$$

$\Rightarrow$ phương trình (2) có đúng 2 nghiệm $x = 0; x = 1$.

$\Rightarrow$ phương trình (1) có các nghiệm là $x = 0; x = 1; x = m$.

Để tập nghiệm của phương trình (1) có hai phần tử $\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Số phần tử của A bằng 2.

Câu 73: Giá trị của m để phương trình $4^{|x|} - 2^{|x|+1} - m = 0$ có nghiệm duy nhất là:

A. $m = 2$.

B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn D

$$4^{|x|} - 2^{|x|+1} - m = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = 2^{|x|}, t \geq 1.$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 - 2t - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 2t \quad (2).$$

Nhận xét: với $t = 1$ ta có duy nhất 1 nghiệm x tương ứng; với mỗi $t > 1$ ta có 2 nghiệm x tương ứng.

Phương trình (1) có duy nhất nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có một nghiệm $t_1 = 1$ và nghiệm còn lại $t_2 \leq 1$.

$$t_1 = 1 \text{ là nghiệm của phương trình (2)} \Leftrightarrow -1 - m = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{Khi đó phương trình (2) trở thành: } t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = -1$.

Câu 74: Gọi $(a; b)$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 5)$. Giá trị của tổng $a + b$ là

A. 2.

B. 4.

C. -6.

D. -14.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = e^x$. Khi đó $x \in (0; \ln 5) \Leftrightarrow t \in (e^0; e^{\ln 5})$ hay là $t \in (1; 5)$.

Phương trình đã cho trở thành $2t^2 - 8t = m$, với $t \in (1; 5)$.

Vì với mỗi giá trị của $t \in (1; 5)$ ta có một và chỉ một giá trị tương ứng của $x \in (0; \ln 5)$. Do đó, yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi phương trình $2t^2 - 8t = m$ có hai nghiệm t phân biệt thuộc khoảng $(1; 5)$.

Xét bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 2t^2 - 8t$ có $f'(t) = 4t - 8$ trên đoạn $[1; 5]$:

t	1	2	5
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-6	-8	10

Dựa vào bảng trên ta thấy, phương trình $2t^2 - 8t = m$ có hai nghiệm t phân biệt thuộc khoảng $(1; 5)$ khi và chỉ khi $-8 < m < -6$.

Vậy phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 5)$ khi và chỉ khi $m \in (-8; -6)$.

Suy ra $a = -8$ và $b = -6$, do đó $a + b = -14$.

Câu 75: Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

- A. $m \in \left(\frac{9}{2}; 5\right)$. B. $m \in (-2; -1)$. C. $m \in (1; 3)$. D. $m \in (3; 5)$.

Lời giải

Chọn D

$$4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0 (*)$$

Đặt $t = 2^x > 0$

$$(*) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m = 0 (**)$$

Giả sử phương trình $(*)$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện đề bài thì phương trình $(**)$ có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa:

$$t_1 \cdot t_2 = 8 \Leftrightarrow 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 8 \Leftrightarrow 2^{x_1 + x_2} = 8 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$$

Thử lại phương trình $(*)$ ta có $m = 4$ thỏa mãn điều kiện.

Câu 76: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 16^x - m \cdot 4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - \frac{m}{4} \cdot 4^x + 5m^2 - 44 = 0 (1).$$

Đặt $t = 4^x$ ($t > 0$), phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 đối nhau $\Rightarrow t_1 t_2 = 4^{x_1} \cdot 4^{x_2} = 4^{x_1+x_2} = 4^0 = 1$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow t^2 - \frac{m}{4}t + 5m^2 - 44 = 0$ phải có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa $t_1 t_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{16} - 4(5m^2 - 44) > 0 \\ \frac{m}{4} > 0 \\ 5m^2 - 44 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{16\sqrt{29}}{29} < m < \frac{16\sqrt{29}}{29} \\ m > 0 \\ m = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy tập S không có phần tử.

Câu 77: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - 2m \cdot 2^x - m + 6 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 3$. Tập hợp S có bao nhiêu phần tử?

A. Vô số.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ ta được phương trình $t^2 - 2mt - m + 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 6}{2t + 1} = m$ (1).

Ta có $x_1 < x_2 < 3 \Leftrightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} < 2^3 = 8$.

Phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 < 8$.

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{t^2 + 6}{2t + 1} \Rightarrow f'(t) = \frac{2(t^2 + t - 6)}{(2t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của $f(t)$ trên $(0; 8)$:

t	0	2	8
y'	-	0	+
y	6	2	$\frac{70}{17}$

Từ bảng biến thiên ta thấy (1) có hai nghiệm $0 < t_1 < t_2 < 8$ khi $2 < m < \frac{70}{17}$.

Suy ra có hai giá trị nguyên của m là $m = 3$ và $m = 4$.

Câu 78: Giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (2m + 3) \cdot 2^x + 64 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 24$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

C. $\left(\frac{21}{2}; \frac{29}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{11}{2}; \frac{19}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$. Phương trình ban đầu trở thành $t^2 - (2m+3)t + 64 = 0$ (*).

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm thực x_1 và x_2 thì phương trình (*) phải có hai nghiệm

$$t_1, t_2 \text{ dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 12m - 247 > 0 \\ 2m + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -\frac{19}{2} \\ m > \frac{13}{2} \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow m > \frac{13}{2}.$$

Theo định lý Vi-ét, ta có $t_1.t_2 = 64 \Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2} = 64 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 64 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6$.

Ta có $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 24 \Leftrightarrow x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 24 \Leftrightarrow x_1.x_2 = 8$.

$$\text{Từ } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1.x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Khi đó, ta có $t_1 + t_2 = 2^{x_1} + 2^{x_2} = 20 = 2m + 3 \Rightarrow m = \frac{17}{2}$.

Câu 79: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$ có nghiệm.

A. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$. **B.** $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$. **C.** $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$. **D.** $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \in [-1; 1]$

Đặt $x + \sqrt{1-x^2} = t$. Vì $x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-1; \sqrt{2}]$

Ta có: $t^2 = (x + \sqrt{1-x^2})^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành: $e^{3m} + e^m = t^3 + t$.

Xét hàm số $f(u) = u^3 + u$, $f'(u) = 3u^2 + 1 > 0 \forall u$ do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình $e^{3m} + e^m = t^3 + t \Leftrightarrow f(e^m) = f(t) \Leftrightarrow e^m = t$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq e^m \leq \sqrt{2} \Rightarrow 0 < e^m \leq \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow m \leq \ln \sqrt{2} \Rightarrow m \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right].$$

Câu 80: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (m-1).2^x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 1 + 2\sqrt{2}; m < 1 - 2\sqrt{2}$.
C. $m \geq 1 + 2\sqrt{2}$. D. $m > 1 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Ta có phương trình $t^2 - (m-1)t + 2 = 0$.

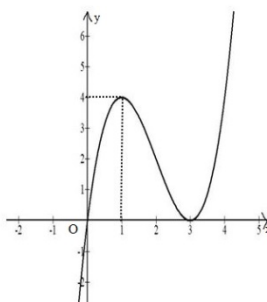
Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi phương trình có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$.

Khi đó $x_1 + x_2 = \log_2 t_1 + \log_2 t_2 = \log_2 (t_1 t_2)$.

Bài toán trở thành tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn

$$\log_2 (t_1 t_2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-1)^2 - 8 > 0 \\ m-1 > 0 \\ \log_2 (t_1 t_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 + 2\sqrt{2}.$$

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(e^{x^2}) = m$ có đúng 2 nghiệm thực là

- A. $[0; 4]$. B. $\{0; 4\}$. C. $\{0\} \cup (4; +\infty)$. D. $[4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = e^{x^2}$. Ta có $x^2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$, nếu $t = 1$ thì $x = 0$ và nếu $t > 1$ thì $x = \pm \sqrt{\ln t}$.

Phương trình $f(e^{x^2}) = m$ (1) trở thành phương trình $f(t) = m$ (2).

Sử dụng các nhận xét ở trên và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có

(1) có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có đúng 1 nghiệm thuộc $[1; +\infty)$ và nghiệm này lớn hơn 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > 4 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{0\} \cup (4; +\infty)$.

Câu 82: Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $(\sqrt{10}+1)^{x^2} + m(\sqrt{10}-1)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. 14.

B. 15.

C. 13.

D. 16.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(\sqrt{10}+1)^{x^2} + m(\sqrt{10}-1)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2} + m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = 6$.

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$, $t > 0$. Phương trình trở thành: $t + \frac{m}{t} = 6 \Leftrightarrow -t^2 + 6t = m$.

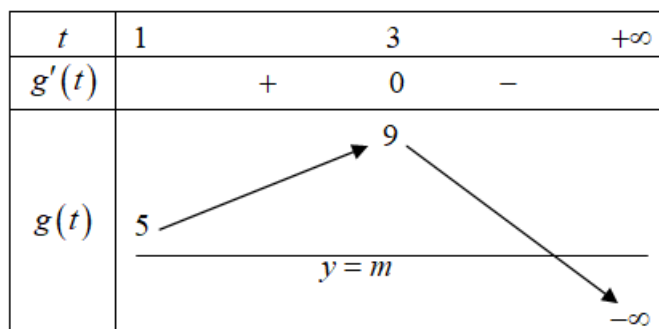
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình có đúng 1 nghiệm lớn hơn 1.

Xét hàm số: $g(t) = -t^2 + 6t$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ta có: $g'(t) = -2t + 6 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Bảng biến thiên:

t	1	3	$+\infty$
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	5	9	$-\infty$



Nhìn vào bảng biến thiên ta có: phương trình có đúng 1 nghiệm lớn hơn 1 $\Leftrightarrow m \leq 5$.

Kết hợp điều kiện m nguyên và $m \in (-10; 10) \Rightarrow m \in (-10; 5] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow$ Có 15 giá trị m thỏa yêu cầu đề.

Câu 83: Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. 34.

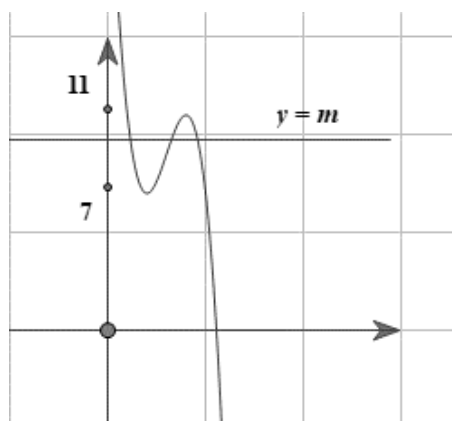
B. 27.

C. 38.

D. 45.

Lời giải

Chọn B



$$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + [(x-3)^3 + 27 + m - 3x] \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-3)^3 + m - 3x + 27 = 3^3 + 3^{3-x} \quad (1)$$

$$a = 3 - x; b = \sqrt[3]{m-3x}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3^b + 27 + b^3 - a^3 = 27 + 3^a \Leftrightarrow 3^b + b^3 = 3^a + a^3$$

$$\text{Xét } f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 + 3t^2 \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow 3 - x = \sqrt[3]{m-3x}$$

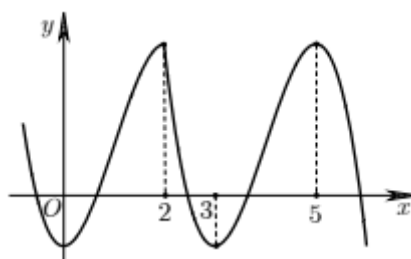
$$\Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27$$

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 18x - 24$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

$$\text{Dựa vào đồ thị: } 7 < m < 11 \Rightarrow m = 8, 9, 10.$$

Câu 84: Cho số thực m và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = t(x) = 2^x + 2^{-x}$, với $x \in [-1; 2]$.

Hàm số $t = t(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và $t'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 2^{-x} \cdot \ln 2$, $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	-1	0	2
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	$\frac{5}{2}$		$\frac{17}{4}$

Vậy với $x \in [-1; 2] \Rightarrow t \in \left[2; \frac{17}{4}\right]$.

Với mỗi $t \in \left(2; \frac{5}{2}\right]$ có 2 giá trị x thỏa mãn $t = 2^x + 2^{-x}$.

Với mỗi $t \in \{2\} \cup \left(\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn $t = 2^x + 2^{-x}$.

Xét phương trình $f(t) = m$ với $t \in \left[2; \frac{17}{4}\right]$.

Từ đồ thị trên ta thấy phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi

phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 , trong đó có $t_1 \in \left(2; \frac{5}{2}\right]$, $t_2 \in \left(\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$. Do đó phương

trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Câu 85: Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1; 3)$. Chọn đáp án đúng.

A. $S = -35$.

B. $S = 20$.

C. $S = 25$.

D. $S = -21$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2^x$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 8t + 7 = m^2 + 6m$ với $2 < t < 8$.

Khi đó phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1; 3)$

$\Leftrightarrow f(t) = m^2 + 6m$ có nghiệm $t \in (2; 8)$, với $f(t) = t^2 - 8t + 7$.

Ta có $f'(t) = 2t - 8$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in (2; 8)$.

Bảng biến thiên:

x	2	4	8
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-5	-9	7

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-9 \leq m^2 + 6m < 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 9 \geq 0 \\ m^2 + 6m - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ -7 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < m < 1.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$.

Suy ra $S = -(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0) = -21$.

Câu 86: Tập các giá trị của m để phương trình $4^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)2^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm là

A. $\left(-\infty; \frac{9}{2}\right)$.

B. $\left[4; \frac{9}{2}\right]$.

C. $(-\infty; 4)$.

D. $[4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $t = 2^{1+\sqrt{1-x^2}}$; $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 2 \leq t \leq 4$.

Phương trình trở thành: $t^2 - (m+2)t + 2m+1 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2} = m$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2} \Rightarrow f'(t) = \frac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2}$$

t	2	3	4
$f'(t)$	- 0 +		
$f(t)$	$+\infty$	4	$\frac{9}{2}$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ có nghiệm $t \in [2; 4] \Leftrightarrow m \geq 4$.

Câu 87: Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$, khi phương trình $f\left(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) + 3m - 1 = 0$

có số nghiệm nhiều nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số m có dạng $\frac{a}{b}$. Tính $T = a + b$.

A. $T = 7$.

B. $T = 11$.

C. $T = 8$.

D. $T = 13$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 7 - 4\sqrt{6x - 9x^2} = 7 - 4\sqrt{1 - (3x-1)^2} \in [3; 7]$. Khi đó $f(t) = 1 - 3m$.

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1)2^{7-t} - 6t + 3$ trên đoạn $[3; 7]$.

Ta có $f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2 - 6$;

$$f''(t) = 3^{t-4} (\ln 3)^2 - 2^{7-t} \ln 2 - 2^{7-t} \ln 2 + (t+1)2^{7-t} (\ln 2)^2$$

$$= 3^{t-4} (\ln 3)^2 + \underbrace{[-2 + (t+1) \ln 2]}_{>0, \forall t \in [3; 7]} 2^{7-t} \ln 2 > 0.$$

Suy ra hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $(3; 7)$.

Lại có $\begin{cases} f'(3) < 0 \\ f'(7) > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất t_0 thuộc $(3; 7)$.

t	3		t_0		7
f'		-	0	+	
f	$\frac{148}{3}$		$f(t_0)$		-4

Dựa vào BBT, ta thấy phương trình $f(t) = 1 - 3m$ có số nghiệm nhiều nhất

$$\Leftrightarrow f(t_0) < 1 - 3m \leq -4 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq m < \frac{1 - f(t_0)}{3}.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của m là $\frac{5}{3} \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$ nên $a + b = 8$.

Câu 88: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+3) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm thực?

A. 5. B. 7. C. Vô số. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + \sqrt{1 - x^2} \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 3^{1+\sqrt{1-x^2}} \leq 9$

Đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$ phương trình trở thành $t^2 - (m+3)t + 2m+1 = 0$ (1)

Phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+3) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm

$$t \in [3; 9]$$

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 3t + 1}{t - 2} \Leftrightarrow m = t - 1 - \frac{1}{t - 2} \text{ vì } t - 2 > 0$$

Xét $f(t) = t - 1 - \frac{1}{t - 2}$ liên tục trên đoạn $[3; 9]$ có $f'(t) = 1 + \frac{1}{(t - 2)^2} > 0 \quad \forall t \in [3; 9] \Rightarrow f(t)$

đồng biến trên đoạn $[3; 9]$. Có $f(3) = 1; f(9) = \frac{55}{7}$

Vậy phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+3) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow m \in \left[1; \frac{55}{7}\right]$

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Có 7 giá trị nguyên.

Câu 89: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x-y} - 2^y + x = 2y \\ 2^x + 1 = (m^2 + 2) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1 - y^2} \end{cases} (1), m$ là tham số. Gọi S là tập các giá trị

m nguyên để hệ (1) có một nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $|y| \leq 1 \Leftrightarrow y \in [-1; 1]$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ (1) ta có $2^{x-y} + (x-y) = 2^y + y$ (2).

Xét hàm số $y = f(t) = 2^t + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Dễ thấy $y' = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (2) tương đương với $x - y = y \Leftrightarrow x = 2y$.

Thay $x = 2y$ vào phương trình thứ hai của hệ (1) ta được $4^y + 1 = (m^2 + 2) \cdot 2^y \cdot \sqrt{1 - y^2}$ (3).

Để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) phải có nghiệm duy nhất $y \in [-1; 1]$.

Giả sử $y_0 \in [-1; 1]$ là một nghiệm của (3) thì $4^{y_0} + 1 = (m^2 + 2) \cdot 2^{y_0} \cdot \sqrt{1 - y_0^2}$.

Khi đó $4^{-y_0} + 1 = (m^2 + 2) \cdot 2^{-y_0} \cdot \sqrt{1 - (-y_0)^2} \Leftrightarrow 4^{y_0} + 1 = (m^2 + 2) \cdot 2^{y_0} \cdot \sqrt{1 - y_0^2}$ nên $-y_0$ cũng là nghiệm của (3). Suy ra $y_0 = -y_0 \Leftrightarrow y_0 = 0$. Thay $y = 0$ vào (3) ta được $m = 0$.

Thử lại: với $m = 0$ thì (3) viết thành $4^y + 1 = 2 \cdot 2^y \cdot \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow 2^y + \frac{1}{2^y} = 2\sqrt{1 - y^2}$ (4).

Ta có $VT(4) \geq 2$, dấu bằng khi $2^y = \frac{1}{2^y} \Leftrightarrow y = 0$; $VP(4) \leq 2$, dấu bằng khi $y = 0$.

Suy ra phương trình (4) có nghiệm duy nhất là $y = 0$. Vậy $m = 0$ thỏa mãn.

Câu 90: Cho phương trình $(4 + \sqrt{15})^x + (2m + 1)(4 - \sqrt{15})^x - 6 = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$. Khi đó m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3; 5)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $(4 + \sqrt{15})^x = t$ ($t > 0$) $\Rightarrow (4 - \sqrt{15})^x = \frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $t + \frac{2m+1}{t} - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 2m + 1 = 0$ (*)

$x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (4 + \sqrt{15})^{x_1 - 2x_2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(4 + \sqrt{15})^{x_1}}{(4 + \sqrt{15})^{2x_2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2^2} = 1$.

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$ khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 = t_2^2$

$$\text{Tức là: } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ t_1 = t_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$+) \Delta' > 0 \Leftrightarrow 8 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

$$+) S = 6 > 0 \text{ luôn đúng.}$$

$$+) P = 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

$$+) \text{ Theo Vi-ét: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_1 \cdot t_2 = 2m + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\text{Từ (1) và (3) suy ra: } t_2^3 = 2m + 1 \Leftrightarrow t_2 = \sqrt[3]{2m+1} \Rightarrow t_1 = \left(\sqrt[3]{2m+1}\right)^2.$$

$$\text{Thay vào (2) ta được } \left(\sqrt[3]{2m+1}\right)^2 + \sqrt[3]{2m+1} - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2m+1} = 2 \\ \sqrt[3]{2m+1} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{7}{2} \text{ (tm)} \\ m = -14 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{7}{2} \in (3; 5).$$

Câu 91: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5^x + 10 = m\sqrt{25^x + 4}$ có nghiệm duy nhất. Số tập con của S là

A. 3.

B. 4.

C. 16.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

$$5^x + 10 = m\sqrt{25^x + 4} \Leftrightarrow \frac{5^x + 10}{\sqrt{25^x + 4}} = m \quad (1).$$

TH 1: $m \leq 0$. Phương trình (1) vô nghiệm.

$$\text{TH 2: } m > 0. (1) \Leftrightarrow \frac{(5^x + 10)^2}{25^x + 4} = m^2$$

$$\text{Đặt } t = 5^x, t > 0. \text{ Ta có: } \frac{(t + 10)^2}{t^2 + 4} = m^2 \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{(t + 10)^2}{t^2 + 4} \text{ trên khoảng } (0; +\infty)$$

$$f'(t) = \frac{-20t^2 - 192t + 80}{(t^2 + 4)^2}. f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -10(l) \\ t = \frac{2}{5}(tm) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f(t)$	+	0	-
$f(t)$	25	26	1

Đề phương trình (1) có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có đúng một nghiệm $t > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 26 \\ 1 < m^2 \leq 25 \end{cases}. \text{ Do điều kiện } \begin{cases} m > 0 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{2, 3, 4, 5\}.$$

Vậy $S = \{2, 3, 4, 5\}$, do đó số tập con của S là $2^4 = 16$.

Câu 92: Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số m để phương trình $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét phương trình: } 4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = 2^{x^2-2x+1} = 2^{(x-1)^2}$. Do đó, ta có $(x-1)^2 = \log_2 t$. Điều kiện $(t \geq 1)$

$$\text{Ta có phương trình: trở thành: } t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0 \quad (2)$$

Ta nhận thấy mỗi giá trị $t > 1$ cho hai giá trị x tương ứng. Như vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có 2 nghiệm thỏa: $1 < t_1 < t_2$.

$$(2) \Leftrightarrow (2t-3)m = t^2 - 2.$$

Nhận xét: $t = \frac{3}{2}$, không là nghiệm phương trình.

$$\text{Xét } t \neq \frac{3}{2}, (2) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2}{2t - 3}. \text{ Xét hàm } g(t) = \frac{t^2 - 2}{2t - 3} \text{ trên } (1; +\infty) \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$g'(t) = \frac{2t^2 - 6t + 4}{(2t - 3)^2}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

t	1			$\frac{3}{2}$	2		
	$+\infty$						
$g'(t)$	0	-		-	0	+	
$g(t)$	1	$-\infty$		$+\infty$	2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta cần $m > 2$.

Câu 93: Cho phương trình: $2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0$. Tập các giá trị để bất phương trình có ba nghiệm phân biệt có dạng $(a; b)$. Tổng $a + 2b$ bằng:

A. 1.

B. 2.

C. -4.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0 \Leftrightarrow 2^{x^3+x^2-2x+m} + x^3 + x^2 - 2x + m = 2^{x^2+x} + x^2 + x (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $(*) \Leftrightarrow f(x^3 + x^2 - 2x + m) = f(x^2 + x) \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x + m = x^2 + x$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x + m = 0 \Leftrightarrow m = -x^3 + 3x (**)$.

Xét hàm số $g(x) = -x^3 + 3x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = -3x^2 + 3$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$			2	
		-2			$-\infty$

Phương trình $2^{x^3+x^2-2x+m} - 2^{x^2+x} + x^3 - 3x + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 2$.

Câu 94: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $9 \cdot 3^{2x} - m(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3)3^x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A. Vô số.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $9 \cdot 3^{2x} - m(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3) \cdot 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{2(x+1)} - m(4\sqrt{|x+1|} + 3m + 3) \cdot 3^x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow 3^{x+1} + \frac{1}{3^{x+1}} = \frac{1}{3}m(4\sqrt{|x+1|} + 3m + 3).$

Đặt $x+1=t$ thì PT trở thành $3^t + \frac{1}{3^t} = \frac{1}{3}m(4\sqrt{|t|} + 3m + 3)$ (*)

Vậy bài toán trở thành tìm m để phương trình (*) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Nhận thấy, nếu t_0 là một nghiệm của (*) thì $-t_0$ cũng là nghiệm của (*).

Suy ra, điều kiện cần để phương trình (*) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là (*) có nghiệm $t = 0$.

$$\Rightarrow 1 + 1 = \frac{1}{3}m(3m + 3) \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Thử lại:

• Với $m = -2$ thì (*) trở thành $3^t + \frac{1}{3^t} = \frac{-2}{3}(4\sqrt{|t|} - 3).$

Nhận thấy, $VT = 3^t + \frac{1}{3^t} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2$, $VP \leq \frac{-2}{3} \cdot (-3) = 2 \Rightarrow$ PT có nghiệm duy nhất $t = 0$ nên $m = -2$ không thỏa mãn.

• Với $m = 1$ thì (*) trở thành $3^t + \frac{1}{3^t} = \frac{1}{3}(4\sqrt{|t|} + 6) \Leftrightarrow 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{2}{3}(2\sqrt{|t|} + 3) = 0$ (**)

Xét hàm số $f(t) = 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{2}{3}(2\sqrt{|t|} + 3)$ với $t > 0$.

Ta có, $f'(t) = 3^t \ln 3 - \frac{\ln 3}{3^t} - \frac{2}{3\sqrt{t}}$; $f''(t) = 3^t \ln^2 3 + \frac{\ln^2 3}{3^t} + \frac{1}{3\sqrt{t^3}} > 0$ với mọi $t > 0$.

$\Rightarrow f'(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm $t > 0$.

$\Rightarrow f(t) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm $t > 0$.

Lại có, $f(1) = 0$ và $f(0) = 0 \Rightarrow$ Phương trình (**) có 3 nghiệm là $t = 0, t = \pm 1$.

Vậy $m = 1$ thỏa mãn.

Câu 95: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình

$$2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0 \text{ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?}$$

A. 4038.

B. 2019.

C. 2017.

D. 4039.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình $2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{m(x-2)-1}{x-2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + m - \frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{x-2} - 2019^x - \frac{2x-1}{x+1}.$$

Xét hàm số

$$y = \frac{1}{x-2} - 2019^x - \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(x-2)^2} - 2019^x \ln(2019) - \frac{3}{(x+1)^2} < 0; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	
y	$\nearrow -2$	$\nearrow +\infty$	$\nearrow +\infty$	$\nearrow -\infty$

Vậy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $m \in (-\infty; -2)$ mà $m \in [-2019; 2019]; m \in \mathbb{Z}$.

Vậy ta có 2017 số nguyên m cần tìm.

Câu 96: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho hai phương trình $2x^2 + 1 = 3^m$ và $m = 3^x - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S .

A. 6

B. 3.

C. 1.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì hai phương trình đã cho có nghiệm chung nên hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = 3^m \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \log_3(2x^2 + 1) \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \log_3(2x^2 + 1) = 3^x - 2x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2 + 1) + 2x^2 + 1 = 3^x + x \Leftrightarrow 3^{\log_3(2x^2 + 1)} + \log_3(2x^2 + 1) = 3^x + x.$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$ suy ra hàm $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $\log_3(2x^2 + 1) = x \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = 3^x$.

Xét hàm số $g(x) = 2x^2 + 1 - 3^x$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 4x - 3^x \ln 3 \Rightarrow g''(x) = 4 - 3^x \ln^2 3 \Rightarrow g'''(x) = -3^x \ln^3 3 < 0$. Suy ra hàm số $g''(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $g(x) = 0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm.

Ta lại có $g(0) = g(1) = g(2) = 0$. Suy ra phương trình $2x^2 + 1 = 3^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Vậy $S = 3$.

Câu 97: Giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ là

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 4$. D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 2mt + 2m = 0$.

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm thì phương trình phải có 2 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m \geq 0 \\ 2m > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Ta có $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 2^3 \Leftrightarrow 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 8 \Leftrightarrow t_1 \cdot t_2 = 8 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$.

Kết luận $m = 4$.

Câu 98: Tìm m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- A. $m < 0$. B. $m > 1$. C. $-1 < m < 1$. D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 2^x$, điều kiện: $t > 0$.

Phương trình trở thành: $t^2 - 2t + m = 0$

Phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trái dấu

$\Leftrightarrow t^2 - 2t + m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn: $t_1 < 1 < t_2$.

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Phương trình có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1 khi và chỉ khi

$$(t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow m - 2 + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow m < 1.$$

Kết hợp các điều kiện thì ta được $0 < m < 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 99: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 6^{x+1} + (m-3) \cdot 4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 35. B. 38. C. 34. D. 33.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tương đương $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + (m-3) = 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, t > 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 12t + (m - 3) = 0$, $t > 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 39 - m > 0 \\ m - 3 > 0 \\ 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 39 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 39.$$

Vậy có 35 giá trị nguyên dương của tham số m .

Câu 100: Gọi S là tập hợp các số nguyên m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m^2 - 500 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử

- A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$) khi đó phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m^2 - 500 = 0$ (1) trở thành:

$$t^2 - 2m \cdot t + 3m^2 - 500 = 0 \quad (2). \text{ Để (1) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2)}$$

$$\text{có 2 nghiệm dương phân biệt hay } \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m^2 + 500 > 0 \\ 3m^2 - 500 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5\sqrt{10} < m < 5\sqrt{10} \\ m < \frac{-10\sqrt{15}}{3} \vee m > \frac{10\sqrt{15}}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{15}}{3} < m < 5\sqrt{10}.$$

Vậy tập hợp các số nguyên m là $S = \{13; 14; 15\}$.

Câu 101: Tìm điều kiện của tham số a để phương trình sau có nghiệm:

$$9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (a+2) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2a+1 = 0. \text{ Hãy chọn đáp án đúng nhất?}$$

- A.** $4 \leq a \leq \frac{64}{7}$. **B.** $2 \leq a \leq \frac{64}{9}$. **C.** $3 \leq a \leq \frac{50}{3}$. **D.** $1 \leq a \leq \frac{50}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$ vì $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow 3 \leq t \leq 9$. Khi đó bài toán trở thành tìm điều kiện của tham số a để phương trình $t^2 - (a+2)t + 2a+1 = 0$ (*) có nghiệm trên đoạn $[3; 9]$.

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = a(t-2).$$

$$\text{Vì } t = 2 \text{ không phải nghiệm của phương trình nên } (*) \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} = a$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} \Rightarrow f'(t) = \frac{t^2 - 4t + 3}{t - 2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \notin [3; 9] \\ t = 3 \in [3; 9] \end{cases}$$

Ta có $f(3) = 4; f(9) = \frac{64}{7} \Rightarrow 4 \leq a \leq \frac{64}{7}$ thì phương trình bài ra có nghiệm.

Câu 102: Điều kiện của m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x \leq 2020 \\ x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là :

- A.** $m \geq -3$. **B.** $-2 \leq m \leq 1$. **C.** $-1 \leq m \leq 2$. **D.** $m \geq -2$.

Lời giải

Chọn D

$$7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x \leq 2020 \Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} + 1010 \cdot (2x + \sqrt{x+1}) \leq 7^{2+\sqrt{x+1}} + 1010 \cdot (2 + \sqrt{x+1}) \quad (*)$$

Hàm số $f(t) = 7^t + 1010 \cdot t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(2x + \sqrt{x+1}) \leq f(2 + \sqrt{x+1})$$

Suy ra : $2x + \sqrt{x+1} \leq 2 + \sqrt{x+1} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$.

$$x \in [-1; 1]: x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2}.$$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \exists x \in [-1; 1]: m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} \quad (**)$$

x	-1	$2 - \sqrt{3}$	1
$\frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$	+	0	-
$\frac{x^2 - 2x + 3}{x-2}$	-2	$2 - 2\sqrt{3}$	-2

Từ bảng biến thiên ta có, $(**) \Leftrightarrow m \geq -2$.

Câu 103: Cho phương trình $16^{x^2} - 2 \cdot 4^{x^2+1} + 10 = m$. Số giá trị nguyên của tham $m \in [-10; 10]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt là

- A.** 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 4^{x^2}, t \geq 1$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 - 8t + 10 = m$

Nghiệm $t = 1$ cho một nghiệm $x = 0$.

Mỗi nghiệm $t > 1$ cho hai nghiệm x đối nhau.

Do vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình có đúng một nghiệm $t > 1$, nghiệm còn lại phải nhỏ hơn 1.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 8t + 10$.

Bảng biến thiên

t	1	4	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	3	-6	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình có một nghiệm lớn hơn 1 khi $\begin{cases} m > 3 \\ m = -6 \end{cases}$.

Suy ra số giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ là 8.

Câu 104: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $(2^x - 2x)\sqrt{(3)^{2^x} - m} = 0$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ để tập hợp S có hai phần tử?

A. 2094.

B. 2092.

C. 2093.

D. 2095.

Lời giải.

Chọn A

Gọi D là tập xác định của phương trình đã cho.

Nếu $m \leq 1$ thì $3^{2^x} - m > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $D = \mathbb{R}$.

Nếu $m > 1$ thì $D = [\log_2(\log_3 m); +\infty)$.

$$(2^x - 2x)\sqrt{(3)^{2^x} - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2x = 0 \text{ (1)} \\ (3)^{2^x} - m = 0 \text{ (2)} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x - 2x$ có $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\ln 2}$ do đó phương trình

$f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm.

Mặt khác $f(1) = 0$; $f(2) = 0$ nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Lại có với $m > 1$, (2) $\Leftrightarrow x = \log_2(\log_3 m)$.

Nếu $m \leq 1$ thì $S = \{1; 2\}$.

Nếu $m > 1$ thì S có hai phần tử khi và chỉ khi $1 \leq \log_2(\log_3 m) < 2 \Leftrightarrow 9 \leq m < 81$.

Vậy S có hai phần tử khi và chỉ khi $\begin{cases} m \leq 1 \\ 9 \leq m < 81 \end{cases} (*)$. Số các giá trị nguyên của $m \in [-2020; 2020]$ thỏa mãn $(*)$ là $1 + 2020 + 1 + 81 - 9 = 2094$.

Câu 105: Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình $16^x - 6 \cdot 8^x + 8 \cdot 4^x - m \cdot 2^{x+1} - m^2 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Khi đó S có

- A.** 4 tập con. **B.** Vô số tập con. **C.** 8 tập con. **D.** 16 tập con.

Lời giải

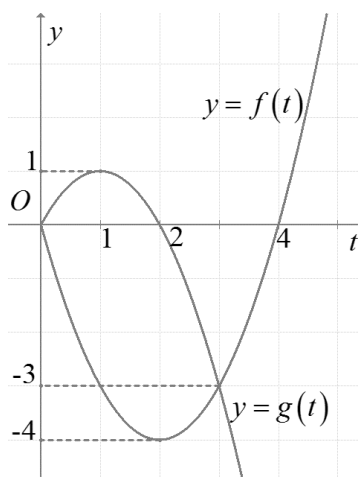
Chọn D

Đặt $t = 2^x, (t > 0)$, phương trình đã cho trở thành $t^4 - 6t^3 + 8t^2 - 2mt - m^2 = 0 (*)$, $t > 0$.

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt.

$$(*) \Leftrightarrow (t^4 - 6t^3 + 9t^2) - (t^2 + 2mt + m^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = t^2 - 4t (1) \\ m = -t^2 + 2t (2) \end{cases}.$$

Xét hai hàm số $f(t) = t^2 - 4t$; $g(t) = -t^2 + 2t$ trên khoảng $(0; +\infty)$ có đồ thị như sau



Dựa vào đồ thị hai hàm số này ta suy ra phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $m \in \{0; 1; -3; -4\}$ hay S có 4 phần tử.

Vậy S có $2^4 = 16$ tập con.

Câu 106: Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3 - m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

- A.** $[3; 4]$. **B.** $[2; 4]$. **C.** $(2; 4)$. **D.** $(3; 4)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } 6^x + (3 - m)2^x - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{1 + 2^x}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{1 + 2^x}$ liên tục trên $(0;1)$.

Ta có $f'(x) = \frac{12^x \ln 3 + 6^x \ln 6 + 3 \cdot 2^x \ln 2}{(1 + 2^x)^2} > 0, \forall x \in (0;1)$. Suy ra hàm số $f(x) = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{1 + 2^x}$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó phương trình $6^x + (3 - m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $f(0) < m < f(1)$, tức là $2 < m < 4$.

Câu 107: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình : $3^{\log_2 x^2} - 2(m+3) \cdot 3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1 x_2 > 2$.

A. $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$. **D.** $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Ta có: $3^{\log_2 x^2} - 2(m+3) \cdot 3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow \left(3^{\log_2 x}\right)^2 - 2(m+3) \cdot 3^{\log_2 x} + m^2 + 3 = 0$$

Đặt: $t = 3^{\log_2 x}$ ($t > 0$)

$$\Rightarrow \log_2 x = \log_3 t$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{\log_3 t}$$

Khi đó: $t^2 - 2(m+3)t + m^2 + 3 = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương $t_1; t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - (m^2 + 3) > 0 \\ 2(m+3) > 0 \\ m^2 + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+3) \\ t_1 t_2 = m^2 + 3 \end{cases}$

Ta có: $x_1 x_2 > 2$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_3 t_1} \cdot 2^{\log_3 t_2} > 2$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_3(t_1 \cdot t_2)} > 2$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_3(m^2+3)} > 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(m^2+3) > 1$$

$$\Leftrightarrow m^2+3 > 3$$

$$\Leftrightarrow m^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq 0$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Câu 108: Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong khoảng $(-20; 20)$ để phương trình trên có nghiệm?

A. 15.

B. 19.

C. 14.

D. 17.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$ với điều kiện $x-m > 0$.

Đặt $\log_5(x-m) = t \Leftrightarrow x-m = 5^t$ thay vào phương trình ta có $5^x + m = t \Leftrightarrow t-m = 5^x(**)$.

Từ và ta có hệ phương trình $\begin{cases} x-m = 5^t \\ t-m = 5^x \end{cases}$. Từ hệ phương trình ta suy ra $x-t = 5^t - 5^x$

$$\Leftrightarrow x + 5^x = t + 5^t.$$

Xét hàm số $f(x) = x + 5^x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(x) = 1 + 5^x \cdot \ln 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số

$f(x) = x + 5^x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó ta có $x + 5^x = t + 5^t \Leftrightarrow f(x) = f(t) \Leftrightarrow x = t$ thay

vào phương trình ta có $x-m = 5^x \Leftrightarrow x-5^x = m$. Đặt $g(x) = x-5^x$ ta có $g'(x) = 1-5^x \cdot \ln 5$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-5^x \cdot \ln 5 = 0 \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right).$$

$$\text{Ta có BBT với } g\left(\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)\right) = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right) - \frac{1}{\ln 5} = \alpha.$$

x	$-\infty$	$\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	α	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $x - 5^x = m$ có nghiệm khi $m \leq \alpha$ hay

$m \leq \log_5 \left(\frac{1}{\ln 5} \right) - \frac{1}{\ln 5}$. Ta suy ra có 19 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 109: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6} (m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

A. -2.

B. 1.

C. 4.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$, khi đó $t \geq 1$.

Thế vào phương trình đã cho ta được phương trình sau

$$2^t \ln(t+1) = 2^{m^2} \ln(m^2+1) \Leftrightarrow t = m^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = m^2$$

Vậy $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6} (m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 - m^2 = 0 \text{ có đúng 1 nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1 \Rightarrow \text{Tổng tất cả các giá trị } m \text{ bằng } 0.$$

Câu 110: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3} (2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình tương đương } 3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3} \cdot \ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-m|+2} \cdot \ln(2|x-m|+2).$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t \cdot \ln t$, $t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình suy ra

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x-m| + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x - 2|x-m| + 1 = 0.$$

$$\text{Có } g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2m + 1 & \text{khi } x \geq m \\ x^2 - 2m + 1 & \text{khi } x \leq m \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{khi } x \geq m \\ 2x & \text{khi } x \leq m \end{cases}$$

$$\text{và } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{khi } x \geq m \\ x = 0 & \text{khi } x \leq m \end{cases}.$$

Xét các trường hợp sau:

TH1: $m \leq 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	m	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$		-	-	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$					$+\infty$

Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có m thỏa mãn.

TH2: $m \geq 2$ tương tự.

TH3: $0 < m < 2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	m	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$		$(m-1)^2$		$+\infty$

Phương trình có 3 nghiệm khi

$$\begin{cases} (m-1)^2 = 0 \\ -2m+1 = 0 > 2m-3 \\ -2m+1 < 0 = 2m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{1}{2} \\ m=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Cả 3 giá trị trên đều thỏa mãn, nên tổng của chúng bằng 3.

Câu 111: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a trên đoạn $[-10;10]$ để phương trình $e^{x+a} - e^x = \ln(1+x+a) - \ln(1+x)$ có nghiệm duy nhất.

A. 2.

B. 10.

C. 1.

D. 20

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+1+a > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$

Phương trình tương đương với $e^{x+a} - e^x - (\ln(1+x+a) - \ln(1+x)) = 0$.

Đặt $f(x) = e^{x+a} - e^x$, $g(x) = \ln(1+x+a) - \ln(1+x)$, $Q(x) = f(x) - g(x)$

Phương trình đã cho viết lại thành $Q(x) = 0$

+) Với $a = 0$ thì $Q(x) = 0$).

+) Với $a > 0$ có tương đương với $x > -1$, $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến với $x > -1$

Khi đó, $Q(x)$ đồng biến với $x > -1$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} Q(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(e^{x+a} - e^x - \ln \frac{1+x+a}{1+x} \right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[e^{x+a} - e^x - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x (e^a - 1) - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = +\infty \end{cases}$$

Kết hợp , thì phương trình $Q(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

+) Với $a < 0$ có tương đương với $x > -1-a$, $g(x)$ đồng biến và $f(x)$ nghịch biến với $x > -1-a$.

Khi đó, $Q(x)$ nghịch biến với $x > -1-a$.

Ta có:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1-a)^+} Q(x) = \lim_{x \rightarrow (-1-a)^+} \left(e^{x+a} - e^x - \ln \frac{1+x+a}{1+x} \right) = \lim_{x \rightarrow (-1-a)^+} \left[e^{x+a} - e^x - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x (e^a - 1) - \ln \left(1 + \frac{a}{1+x} \right) \right] = -\infty \end{cases}$$

Kết hợp , suy ra $Q(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Do a là số nguyên trên đoạn $[-10;10]$ nên kết hợp 3 trường hợp trên thấy có 20 giá trị của a thoả mãn điều kiện của bài.

Câu 112: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020;2020)$ để phương trình $e^x = \ln(x+2m) + 2m$ có nghiệm?

A. 2019.

B. 2020.

C. 2021.

D. 4039.

Lời giải

Chọn A

Ta có $e^x = \ln(x+2m) + 2m \Leftrightarrow e^x + x = \ln(x+2m) + x + 2m \Leftrightarrow e^x + x = e^{\ln(x+2m)} + \ln(x+2m)$.

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$ với $t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(\ln(x+2m)) \Leftrightarrow x = \ln(x+2m) \Leftrightarrow x+2m = e^x \Leftrightarrow 2m = e^x - x$.

Xét hàm số $g(x) = e^x - x \Rightarrow g'(x) = e^x - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biên thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Từ bảng biên thiên suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in (-2020;2020)$ nên $m \in \{1;2;3;\dots;2019\}$.

Vậy có 2019 giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ để phương trình $e^x = \ln(x+2m) + 2m$ có nghiệm.

Câu 113: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-1; 1]$ sao cho phương trình $\log_{m^2+1}(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2)$ có nghiệm nguyên $(x; y)$ duy nhất?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + y^2 > 0 \\ x + y - 1 > 0 \end{cases}.$$

Nhận xét: Vì x, y có vai trò như nhau nên nếu phương trình có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là một nghiệm của phương trình.

*) **Điều kiện cần:** Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_0 = y_0$.

$$\text{Thay vào phương trình ta được } \log_{m^2+1}(2x_0^2) = \log_2(4x_0 - 2)$$

Vì $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4x_0 - 2 > 1$. Lại có

$$2x_0^2 \geq 4x_0 - 2 \Rightarrow \log_2(4x_0 - 2) = \log_{m^2+1}(2x_0^2) \geq \log_{m^2+1}(4x_0 - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_{4x_0-2} 2} \geq \frac{1}{\log_{4x_0-2}(m^2+1)} \Rightarrow \log_{4x_0-2}(m^2+1) \geq \log_{4x_0-2} 2$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 \geq 2 \Rightarrow m^2 \geq 1 \text{ mà } m \in [-1; 1] \Rightarrow m = \pm 1.$$

*) **Điều kiện đủ:** Với $m = \pm 1$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\log_2(x^2 + y^2) = \log_2(2x + 2y - 2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 2y - 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.

Vậy có hai giá trị m cần tìm là $m = \pm 1$.

Câu 114: Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_{11}(3x + 4y) = \log_4(x^2 + y^2)$?

- A. 3 B. 2 C. 1 D. vô số.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \log_{11}(3x + 4y) = \log_4(x^2 + y^2) = t \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 11^t \\ x^2 + y^2 = 4^t \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $\Delta: 3x + 4y = 11^t$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4^t$ có điểm

$$\text{chung} \Leftrightarrow d(O, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{11^t}{5} \leq 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{11}{2}\right)^t \leq 5 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{11}{2}} 5.$$

$$\text{Do } x^2 + y^2 = 4^t \text{ nên } |y| \leq 2^t \leq 2^{\log_{\frac{11}{2}} 5} \approx 1.9239767.$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-1; 0; 1\}$.

Thử lại:

- Với $y = -1$, hệ trở thành $\begin{cases} 3x - 4 = 11^t \\ x^2 + 1 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{11^t + 4}{3}\right)^2 + 1 = 4^t \Leftrightarrow 121^t + 8 \cdot 11^t + 25 = 9 \cdot 4^t$

Nếu $t < 0$ thì $4^t < 1 \Rightarrow 4^t < \left(\frac{11^t + 4}{3}\right)^2 + 1$.

Nếu $t \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 121^t \geq 4^t \\ 8 \cdot 11^t \geq 8 \cdot 4^t \end{cases} \Rightarrow 121^t - 4^t + 8(11^t - 4^t) + 25 > 0$.

Vậy vô nghiệm.

- Với $y = 0$ thì hệ trở thành $\begin{cases} 3x = 11^t \\ x^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \frac{121^t}{9} = 4^t \Leftrightarrow t = \log_{\frac{11}{2}} 3 \Rightarrow x = \frac{11^{\log_{\frac{11}{2}} 3}}{3}$.

- Với $y = 1$ thì hệ trở thành $\begin{cases} 3x + 4 = 11^t \\ x^2 + 1 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{11^t - 4}{3}\right)^2 + 1 = 4^t \Leftrightarrow 121^t - 8 \cdot 11^t + 25 = 9 \cdot 4^t$.

Xét hàm số $f(t) = 121^t - 8 \cdot 11^t + 25 - 9 \cdot 4^t$, liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ có $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$ nên phương

trình $f(t) = 0$ luôn có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Khi đó hiển nhiên sẽ tồn tại x thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị nguyên của y thỏa mãn là $y = 0, y = 1$.

Câu 115: Có bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $3^{|x^2 - 2x - 3| - \log_3 5} = 5^{-(y+4)}$ và

$$4|y| - |y - 1| + (y + 3)^2 \leq 8 \text{ ?}$$

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^{|x^2 - 2x - 3| - \log_3 5} = 5^{-(y+4)} \Leftrightarrow 5^{-(y+3)} = 3^{|x^2 - 2x - 3|}$. (*)

Vì $3^{|x^2 - 2x - 3|} \geq 3^0 \Rightarrow 5^{-(y+3)} \geq 1 \Rightarrow y + 3 \leq 0 \Rightarrow y \leq -3$.

Với $y \leq -3$ ta có: $4|y| - |y - 1| + (y + 3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow -4y + (y - 1) + (y + 3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2 + 3y \leq 0$

$\Leftrightarrow -3 \leq y \leq 0$. Kết hợp với $y \leq -3$ suy ra $y = -3$.

Thế $y = -3$ vào (*) ta được: $3^{|x^2 - 2x - 3|} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Vậy các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn là $(-1; -3); (3; -3)$.

Câu 116: Giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình $4^{x-1} + 2^x \sin(2^{x-1} + y - 1) + 2 = 2^x + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $x_0 > 7$. **B.** $-2 < x_0 < 4$. **C.** $4 < x_0 < 7$. **D.** $-5 < x_0 < -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^{x-1} + 2^x \sin(2^{x-1} + y - 1) + 2 = 2^x + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1)$

$$\Leftrightarrow 4^x - 4 \cdot 2^x + 4 \cdot (2^x - 2) \cdot \sin(2^{x-1} + y - 1) + 4 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 2)^2 + 4(2^x - 2) \sin(2^{x-1} + y - 1) + 4[\sin^2(2^{x-1} + y - 1) + \cos^2(2^{x-1} + y - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 2)^2 + 2 \cdot (2^x - 2) \cdot 2 \sin(2^{x-1} + y - 1) + [2 \sin^2(2^{x-1} + y - 1)]^2 + 4 \cos^2(2^{x-1} + y - 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow [(2^x - 2) + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1)]^2 + 4 \cos^2(2^{x-1} + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2 + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1) = 0 \\ \cos^2(2^{x-1} + y - 1) = 0 \end{cases}$$

Vì $\cos^2(2^{x-1} + y - 1) = 0 \Rightarrow \sin^2(2^{x-1} + y - 1) = \pm 1$.

$$\square \sin^2(2^{x-1} + y - 1) = 1 \Rightarrow 2^x = 0$$

$$\square \sin^2(2^{x-1} + y - 1) = -1 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = x_0 = 2 \in (-2; 4).$$

Câu 117: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 4000$ và $5(25^y + 2y) = x + \log_5(x+1)^5 - 4$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_5(x+1) = t \Rightarrow x = 5^t - 1$.

Phương trình trở thành:

$$5(5^{2y} + 2y) = 5^t - 1 + 5t - 4 \Leftrightarrow 5^{2y} + 2y = 5^{t-1} + (t-1).$$

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u \Rightarrow f'(u) = 5^u \cdot \ln 5 + 1 > 0$ nên hàm số luôn đồng biến.

$$\text{Vậy để } f(2y) = f(t-1) \Leftrightarrow 2y = t-1 \Leftrightarrow 2y+1 = t = \log_5(x+1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2y+1 \leq \log_5 4001 \Rightarrow 0 \leq 2y+1 \leq 5 \Rightarrow y = \{0; 1; 2\}$$

Với mỗi nghiệm y ta tìm được một nghiệm x tương ứng.

Câu 118: Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn

$$(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) ?$$

A. 2017.

B. 4034.

C. 2.

D. 2017.2020.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết kết hợp ĐKXD của bất phương trình ta có: $1 \leq y \leq 2020; 4 \leq x \leq 2020; x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có: } (xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) + (x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) \leq 0.$$

$$\text{Xét } f(x) = \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) = \log_2 \left(2 + \frac{7}{x-3} \right) > 0, \forall x \in [4; 2020].$$

+ Với $y=1$ thay vào ta được:

$$3(x+4) \log_3 \left(\frac{2}{3} \right) - (x-3) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) \leq 0 \text{ và }.$$

Suy ra có 2017 bộ $(x; y)$.

+ Với $y=2$ thay vào ta thấy luôn đúng $\forall x \in [4; 2020]$.

Suy ra có 2017 bộ $(x; y)$.

+ Với $3 \leq y \leq 2020 \Rightarrow y-2 > 0$.

$$\text{Xét } g(y) = \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) = \log_3 \left(\frac{y+y}{y+2} \right) > \log_3 \left(\frac{y+2}{y+2} \right) = 0, \forall y \geq 3.$$

Suy ra vô nghiệm và).

Vậy có 4034 bộ $(x; y)$.

Câu 119: Cho x là số thực dương và y là số thực thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2 \left[14 - (y-2)\sqrt{y+1} \right]$. Giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 2020$ bằng

A. 2022.

B. 2020.

C. 2021.

D. 2019.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2, \forall x > 0 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}} \geq 4.$$

Đặt $\sqrt{y+1} = t, t \geq 0$ thu được

$$14 - (y-2)\sqrt{y+1} = 14 - (t^2-3)t = -t^3 + 3t + 14 = 16 - (t-1)^2(t+2) \leq 16, \forall t \geq 0.$$

$$\text{Dẫn đến } \log_2 \left[14 - (y-2)\sqrt{y+1} \right] \leq \log_2 16 = 4.$$

Như vậy hai vế bằng nhau khi dấu đẳng thức xảy ra tức là

$$\begin{cases} t = 1 \\ x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1; y = 0 \Rightarrow P = x^2 + y^2 - xy + 2020 = 2021. \\ x > 0 \end{cases}$$

Câu 120: Cho phương trình $\log_3(3x^2 - 6x + 6) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ và $0 < x < 2020$; $y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình đã cho?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$$\log_3(3x^2 - 6x + 6) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow \log_3 3(x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_3(x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1.$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 2x + 2) = 3^{y^2} + y^2.$$

Đặt $\log_3(x^2 - 2x + 2) = z \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 3^z$ thì trở thành:

$$\Leftrightarrow 3^z + z = 3^{y^2} + y^2.$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow f(z) = f(y^2) \Leftrightarrow z = y^2.$$

Thay trở lại cách đặt ta có: $\log_3(x^2 - 2x + 2) = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 3^{y^2}$.

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 2x + 2, x \in (0; 2020) \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	2020
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	2	1	4076362

Suy ra:

$$\Leftrightarrow 1 \leq g(x) < 4076362 \Leftrightarrow 1 \leq 3^{y^2} < 4076362 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 < \log_3 4076362.$$

Do $y \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq y < \sqrt{\log_3 4076362} \approx 3,7 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) = 1 \\ g(x) = 3 \\ g(x) = 3^4 \\ g(x) = 3^9 \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ ta thấy mỗi phương trình trên có một nghiệm $0 < x < 2020$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 121: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2 \leq x \leq 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

A. 2020.

B. 9.

C. 2019.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_2(x + 2^{y-1}) = t$. Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^t$, $x = 2^t - 2^{y-1}$.

Phương trình đã cho trở thành: $2^y - t = 2(2^t - 2^{y-1}) - y \Leftrightarrow 2.2^y + y = 2.2^t + t$.

Xét hàm số $g(x) = 2.2^x + x$ có $g'(x) = 2.2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x$ nên hàm số $y = g(x)$ luôn đồng biến.

Khi đó $2.2^y + y = 2.2^t + t \Leftrightarrow y = t$ hay $y = \log_2(x + 2^{y-1})$.

Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y - 2^{y-1} = 2^{y-1}$.

Mà $2 \leq x \leq 2021$ nên $2 \leq 2^{y-1} \leq 2021 \Leftrightarrow 1 \leq y-1 \leq \log_2 2021$ hay $2 \leq y \leq (\log_2 2021) + 1$.

Lại có y là số nguyên nên $y \in \{2, 3, \dots, 11\}$ tức 10 giá trị thỏa mãn.

Xét biểu thức $x = 2^{y-1}$, mỗi giá trị nguyên của y cho tương ứng 1 giá trị nguyên của x nên có 10 cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 122: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^{x+y} - x^2(3^x - 1) = (x+1)3^y - x^3$, với $x < 2020$?

A. 13.

B. 15.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$3^{x+y} - x^2(3^x - 1) = (x+1)3^y - x^3 \Leftrightarrow 3^y(3^x - x - 1) = x^2(3^x - x - 1) \Leftrightarrow (3^x - x - 1)(3^y - x^2) = 0$$

Ta thấy $3^x - x - 1 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow (3^x - x - 1)(3^y - x^2) = 0 \Leftrightarrow 3^y = x^2 \Leftrightarrow y = 2 \log_3 x \Rightarrow x = 3^k$.

Vì $x < 2020 \Rightarrow 3^k < 2020 \Rightarrow 3^k \leq 3^6 \Rightarrow k = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Câu 123: Biết a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a.10^{3z} + b.10^{2z}$, đồng thời x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ thuộc khoảng

A. (1; 2).

B. (2; 3).

C. (3; 4).

D. (4; 5).

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log(x^2+y^2) = z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 10^z \\ x^2+y^2 = 10^{z+1} = 10 \cdot 10^z \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 10(x+y)$$

$$\text{Khi đó } x^3+y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z} \Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) = a \cdot (10^z)^3 + b \cdot (10^z)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) = a \cdot (x+y)^3 + b \cdot (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2-xy+y^2 = a \cdot (x+y)^2 + b \cdot (x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2 = a \cdot (x^2+2xy+y^2) + \frac{b}{10}(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2+y^2-xy = \left(a + \frac{b}{10}\right)(x^2+y^2) + 2a \cdot xy$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta được } \begin{cases} a + \frac{b}{10} = 1 \\ 2a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 15 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 4 + \frac{1}{225} = 4,008 \in (4;5).$$

Câu 124: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y < 2020$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$.

A. 2020

B. 9.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Ta

có:

$$3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3 \Leftrightarrow 3^x + 3(x-2) = 9y + 3 \log_3 y \Leftrightarrow 3^x + 3(x-2) = 3^{2+\log_3 y} + 3 \log_3 y (*)$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = 3^t + 3(t-2).$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra hàm số } y = f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Khi đó: } (*) \Leftrightarrow f(x) = f(2 + \log_3 y) \Leftrightarrow x = 2 + \log_3 y \Leftrightarrow y = 3^{x-2}.$$

Do $0 < y < 2020$ và x, y nguyên nên:

$$1 \leq 3^{x-2} < 2020 \Leftrightarrow 2 \leq x < 2 + \log_3 2020 \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$$

Ứng với mỗi giá trị x có một giá trị của y nên có 7 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 125: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x + y > 0; -20 \leq x \leq 20$ và

$$\log_2(x+2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0?$$

A. 19.

B. 6

C. 10.

D. 41.

Lời giải

Chọn C

+ Điều kiện: $x + 2y > 0$

+ Ta có: $x + y > 0$ nên

$$\begin{aligned} & \log_2(x+2y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0 \\ \Leftrightarrow & \log_2 \frac{(x+y)(x+2y)}{x+y} + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0 \\ \Leftrightarrow & \log_2(x^2 + 2y^2 + 3xy) - \log_2(x+y) + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0 \\ \Leftrightarrow & \log_2(x^2 + 2y^2 + 3xy) + x^2 + 2y^2 + 3xy = \log_2(x+y) + x + y \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$, ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \quad t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } (1) \Leftrightarrow f(x^2 + 2y^2 + 3xy) = f(x+y) \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 3xy = x + y$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1-2y \quad \text{vì } x+y > 0 \text{ nên } x+y = 1-y > 0$$

$$+ \text{ Do } -20 \leq x \leq 20 \text{ suy ra } -\frac{19}{2} \leq y < 1$$

+ Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-9; -8; \dots; -1; 0\}$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị x thỏa mãn YCBT.

Vậy có 10 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn YCBT.

Câu 126: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $x \leq 2020$ thỏa mãn

$$2(3x - y) = 3(1 + 9^y) - \log_3(2x - 1)$$

A. 1010.

B. 2020.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_3(2x - 1) = t \Rightarrow 2x = 3^t + 1$, ta được $3(3^t + 1) - 2y = 3(1 + 3^{2y}) - t \Leftrightarrow 3 \cdot 3^t + t = 3 \cdot 3^{2y} + 2y$.

Xét hàm số $f(u) = 3 \cdot 3^u + u \Rightarrow f'(u) = 3 \cdot 3^u \ln 3 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $\Leftrightarrow t = 2y$, vậy nên $2x = 3^{2y} + 1 \Leftrightarrow 9^y = 2x - 1$.

Vì $x \leq 2020 \Rightarrow 9^y \leq 4039 \Leftrightarrow y \leq \log_9 4039$. Vì y nguyên dương nên $y \in \{1; 2; 3\}$. Ta thấy với mỗi giá trị nguyên của y thì tìm được 1 giá trị nguyên của x . Vậy có 3 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.