

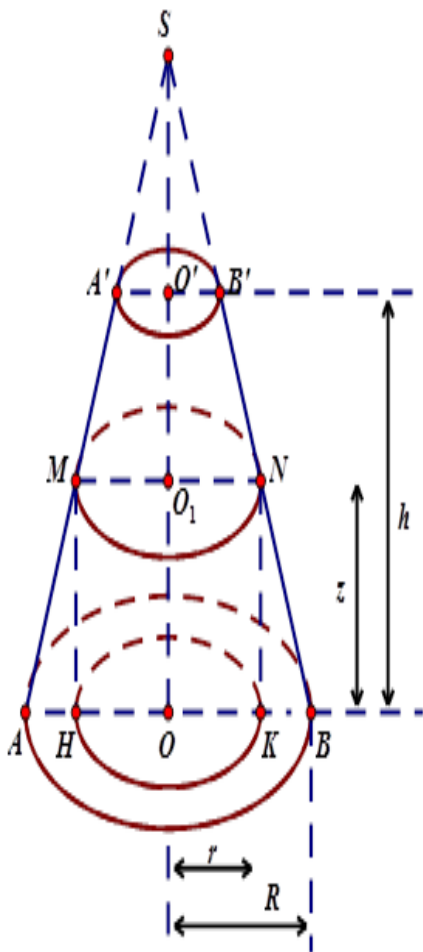
Ths. Trần Đình Cư
GV Chuyên luyện thi THPT Quốc Gia, TP Huế

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

CHỦ ĐỀ 9: CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN VÀ CÁC KHỐI LỒNG NHAU

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

CHỦ ĐỀ 9: CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN VÀ CÁC KHỐI LỒNG NHAU



**TỔNG HỢP 32 CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP
MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO**

TẤT CẢ ĐỀU CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT

HUẾ, NGÀY 12/03/2017

**BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
VÀ CÁC KHỐI LỒNG NHAU**

Trong quá trình tìm kiếm lời giải nhiều bài toán hình học, sẽ rất có lợi nếu chúng ta xem xét các phần tử biên, phần tử giới hạn nào đó, tức là phần tử mà tại đó mỗi đại lượng hình học có thể nhận giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất, chẳng hạn như cạnh lớn nhất, cạnh nhỏ nhất của một tam giác; góc lớn nhất hoặc góc nhỏ nhất của một đa giác v.v...

Những tính chất của các phần tử biên, phần tử giới hạn nhiều khi giúp chúng ta tìm được lời giải thu gọn của bài toán.

Phương pháp tiếp cận như vậy tới lời giải bài toán được gọi là nguyên tắc cực hạn.

Như vậy bài toán cực trị hình học là cần thiết trong không gian, nó thường xuất hiện ở những câu hỏi khó trong phần thi trắc nghiệm THPT Quốc gia.

PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp cần kết hợp giữa các quan điểm tìm cực trị như sau:

1. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG DỤNG

Bất đẳng thức Cauchy cho các biến đại lượng không âm.

$$\begin{cases} f(x) = A(x) + B(x) \geq 2\sqrt{A(x).B(x)} = \text{const}; \forall x \in D \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} g(x) = A(x).B(x) \leq \left[\frac{A(x) + B(x)}{2} \right]^2 = \text{const}; \forall x \in D \end{cases} \quad (2)$$

Nếu $\exists x_0 \in D$, để đẳng thức trong (1) hoặc (2) xảy ra $\Leftrightarrow A(x_0) = B(x_0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min_{x \in D} f(x) = f(x_0) \\ \max_{x \in D} g(x) = g(x_0) \end{cases} \quad (\text{ycbt})$$

Bất đẳng thức Schwartz cho các biến đại lượng tùy ý.

$$p(x) = a(x).\alpha(x) + b(x).\beta(x) \leq \sqrt{[a^2(x) + b^2(x)][\alpha^2(x) + \beta^2(x)]} = \text{const}; \forall x \in D \quad (3)$$

$$q(x) = [a^2(x) + b^2(x)][\alpha^2(x) + \beta^2(x)] \geq [a(x)\alpha(x) + b(x)\beta(x)]^2 = \text{const}; \forall x \in D \quad (4)$$

Nếu $\exists x_0 \in D$, để đẳng thức trong (3) hoặc (4) xảy ra:

$$\Leftrightarrow \frac{a(x_0)}{\alpha(x_0)} = \frac{b(x_0)}{\beta(x_0)} \Rightarrow \begin{cases} \max_{x \in D} p(x) = p(x_0) \\ \min_{x \in D} q(x) = q(x_0) \end{cases} \quad (\text{ycbt})$$

2. SỬ DỤNG TÍNH BỊ CHẶN CỦA HÀM LƯỢNG GIÁC

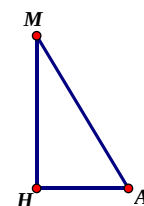
$$h(x) = \sin u(x) \cdot \cos u(x) \leq 1;$$

$$\text{nếu } \exists x_0 \in D: \begin{cases} \sin u(x_0) = 1 \\ \cos u(x_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \exists \max_{x \in D} h(x) = h(x_0) = 1$$

3. SỬ DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ LẬP BẢNG BIẾN THIÊN

4. SỬ DỤNG CÁC NGUYÊN LÝ HÌNH HỌC CỰC HẠN

$$\begin{cases} MH \text{ là đường vuông góc} \\ MA \text{ là đường xiên} \\ HA \text{ là hình chiếu} \end{cases} \Rightarrow \exists \min MA = MH \Leftrightarrow A \equiv H$$

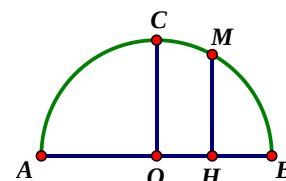


Từ ý nghĩa đường kính là dây cung dài nhất của đường tròn, ta có:

Hệ quả: M ở trên đường tròn (AB) đường kính AB; với O là tâm

$$\text{thì: } \exists \max d[M; AB] = CO \Leftrightarrow MH \equiv CO; CO \perp AB$$

Khoảng cách ngắn nhất giữa hai đường thẳng là độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.



Xác định điểm M trên đường thẳng (d) để $(MA + MB)_{\min}$

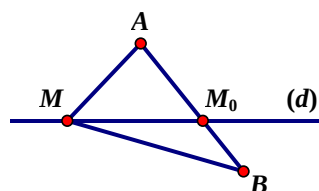
Đây là bài toán Bất đẳng thức Δ , cần phân biệt các trường hợp:

- A, B ở khác bên so với (d):

$$MA + MB \geq AB$$

$$\Rightarrow \min(MA + MB) = AB$$

tổng oùng: $M \equiv M_0 = (AB) \cap (d)$



- A, B ở cùng bên so với (d):

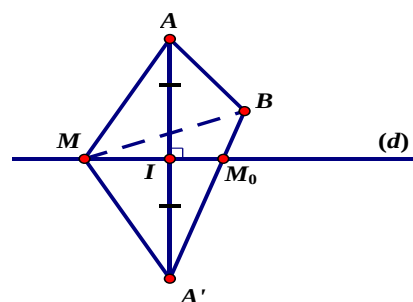
Dựng A' đối xứng với A qua (d).

Lúc đó: A' và B ở khác bên so với (d), nên trở về trường hợp trên:

$$MA + MB \geq AB \Leftrightarrow MA' + MB' \geq AB$$

$$\Rightarrow \min(MA + MB) = \min(MA' + MB) = AB$$

tổng oùng: $M \equiv M_0 = (A'B) \cap (d)$



Kết luận: Vậy trong mọi trường hợp ta xác định được M thỏa mãn ycbt.

Xác định điểm M trên đường thẳng (d) để $|MA - MB|_{\max}$

Tương tự, cần phân biệt hai trường hợp:

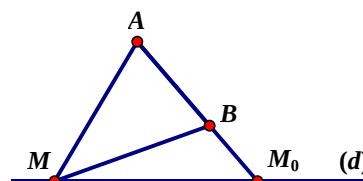
- A, B ở cùng bên so với (d)

$$|MA - MB| \leq AB$$

$$\Rightarrow \max |MA - MB| = AB$$

$$\text{tương ứng } M \equiv M_0 = (AB) \cap (d)$$

- A, B ở khác bên so với (d)

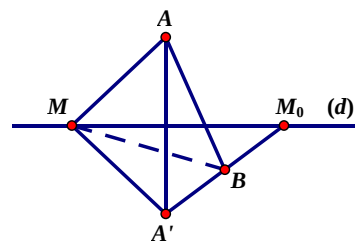


$$|MA - MB| \leq |MA' - MB| \leq AB$$

Với A' là hình đối xứng của điểm A qua (d) , thì A' và B ở cùng phía với (d) .

$$\max |MA - MB| = \max |MA' - MB| = AB$$

$$\text{tổ hợp } M \equiv M_0 = (A'B) \cap (d)$$



Kết luận: Vậy trong mọi trường hợp ta đã xác định điểm M thỏa ycbt.

I. MỘT SỐ VÍ DỤ MẪU

Ví dụ 1. Cho một hình nón cắt tròn xoay có chiều cao h , các bán kính đáy là r và R ($r < R$).

Tìm kích thước của hình trụ tròn xoay có cùng trục đối xứng, nội tiếp trong hình nón cắt đó và có thể tích lớn nhất.

Giải

Gọi x là bán kính, z là chiều cao của hình trụ. Ta có:
$$\begin{cases} r \leq x \leq R \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

Giả sử rằng hình trụ nội tiếp trong hình nón cắt như thiết diện qua trục như hình bên. Thiết diện này cắt hình nón theo hình thang cân $AA'B'B$, cắt hình trụ theo hình chữ nhật $HKNM$.

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{SO'}{SO - SO'} = \frac{r}{R - r} = \frac{SO'}{OO'}$$

$$\Rightarrow SO' = \frac{rh}{R - r}, SO = \frac{rh}{R - r} + h = \frac{Rh}{R - r}$$

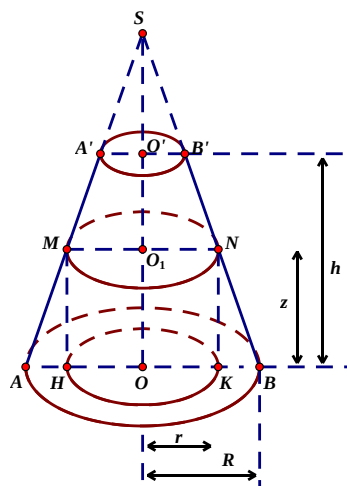
$$\frac{O_1M}{OA} = \frac{SO_1}{SO} \Leftrightarrow \frac{x}{OA} = \frac{SO_2}{SO} \Rightarrow x = \frac{OA + SO_1}{SO}$$

$$\text{Mà } SO_1 = SO - z \Rightarrow x = \frac{R(SO - z)}{SO}$$

$$\text{Thể tích } V \text{ hình trụ là: } V = V(x) = \pi x^2 z = \frac{\pi R^2}{SO^2} \cdot (SO - z)^2 z$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{\pi R^2}{SO^2} (SO^2 + z^2 - 2SO \cdot z) z$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{\pi R^2}{SO^2} (z^3 - 2SO \cdot z^2 + SO^2 z) \quad (0 < z \leq h)$$



$$\Rightarrow V'(x) = \frac{\pi R^2}{SO^2} \left(3z^2 - 4SO \cdot z + SO^2 \right) = 3 \frac{\pi R^2}{SO^2} \left(z - \frac{SO}{3} \right) (z - SO)$$

$$\Rightarrow V'(x) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{SO}{3} \vee z = SO \Leftrightarrow z = \frac{Rh}{3(R-r)} \vee z = \frac{Rh}{R-r}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{Rh}{3(R-r)}$	$\frac{Rh}{(R-r)}$	h
V'(x)		+ 0	- 0	+ 0
		$\nearrow$ CD	$\searrow$ CT	$\nearrow$ CD

$$\exists \max y \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{Rh}{3(R-r)} \Rightarrow x = \frac{Rh}{3} \\ z = h \Rightarrow x = r \end{cases}$$

Để ý rằng: $0 < z < h$, ta có: $z = \frac{Rh}{3(R-r)} < h \Leftrightarrow \frac{r}{R} < \frac{2}{3}$

Kết luận:

• $\frac{r}{R} < \frac{2}{3}$: Thể tích của hình trụ lớn nhất khi hình trụ có kích thước bán kính đáy: $x = \frac{Rh}{3}$,

chiều cao: $z = \frac{Rh}{3(R-r)}$.

• $\frac{2}{3} \leq \frac{r}{R} < 1$: hình trụ có thể tích lớn nhất khi hình trụ có kích thước bán kính đáy: $x = r$ và chiều cao $z = h$.

Ví dụ 2. Cho nửa hình cầu bán kính r và một nửa hình nón xoay ngoại tiếp với nửa hình cầu (mặt đáy của hai hình nằm trong cùng một mặt phẳng). Gọi góc đỉnh của nón là 2α .

a) Với góc α nào thì diện tích toàn phần của hình nón bằng $\frac{12}{5}$ diện tích toàn phần của nửa hình cầu.

b) Với góc α nào thì hình nón có thể tích nhỏ nhất.

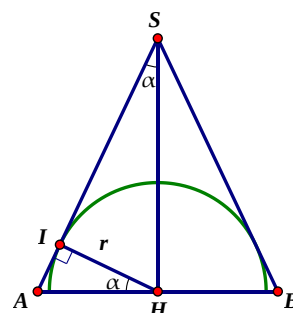
Hướng dẫn giải

a. Gọi (SAB) là một tiết diện qua đỉnh S và tâm H của hình nón ngoại tiếp với nửa hình cầu bán kính r , ta có:

$$HI = r, \text{ AHI} = \text{ASH} = \frac{1}{2} \text{ASB} = \alpha$$

$$\Rightarrow AH = \frac{HI}{\cos \alpha} = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{AH}{\sin \alpha} = \frac{r}{\cos \alpha \sin \alpha}; SH = \frac{HI}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \alpha}$$



BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN VÀ CÁC KHỐI LỒNG NHAU

Gọi S_c^{tp} ; S_n^{tp} và V_n theo thứ tự là diện tích toàn phần của nửa hình cầu, hình nón và thể tích của hình nón, ta có:

$$\Rightarrow S_c^{\text{tp}} = \pi r^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2$$

$$\Rightarrow S_n^{\text{tp}} = \pi AH^2 + \pi AH.SA = \pi \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} + \pi \frac{r}{\cos \alpha} \cdot \frac{r}{\cos \alpha \sin \alpha}$$

$$\text{Vì } S_n^{\text{tp}} = \frac{12}{5} S_c^{\text{tp}} \Leftrightarrow \frac{\pi r^2 (\sin \alpha + 1)}{\sin \alpha - \sin^3 \alpha} = \frac{12}{5} \cdot 3\pi r^2$$

$$\Leftrightarrow 36 \sin^3 \alpha - 31 \sin \alpha + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 36(\sin \alpha + 1) \left(\sin \alpha - \frac{5}{6} \right) \left(\sin \alpha - \frac{1}{6} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{5}{6} \vee \sin \alpha = \frac{1}{6}$$

(vì α là một nửa góc ở đỉnh của hình nón $\Rightarrow \frac{\pi}{2} > \alpha > 0$)

Tương ứng diện tích toàn phần của hình nón bằng $\frac{12}{5}$ diện tích toàn phần của nửa mặt cầu (ycbt).

$$\text{b. Ta có: } V_n = V_n(\alpha) = \frac{1}{3} \pi AH^2 . SH = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{r}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow V_n = \frac{1}{3} \pi r^3 \frac{1}{\cos^2 \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{3} \pi r^3 \frac{1}{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}$$

$$\text{Do đó: } V_n' = V_n'(\alpha) = \frac{1}{3} \pi r^3 \frac{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \cos \alpha}{(\sin \alpha - \sin^3 \alpha)^2}$$

$$\Rightarrow V_n'(\alpha) = \pi r^3 \frac{\cos \alpha \left(\sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)}{(\sin \alpha - \sin^3 \alpha)^2}$$

Khi α biến thiên trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ thì $V_n' = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha = \alpha_1 \text{ trong đó } \sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có bảng biến thiên:

α	0	α_1	$\frac{\pi}{2}$
V_n'	-	0	+
V_n	$\frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{2}$		

Do đó hàm $V_n(\alpha)$ đạt cực tiểu tại $\alpha = \alpha_1$.

Vậy với α xác định bởi $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ thì hình nón có thể tích nhỏ nhất $V_n = \pi r^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ycbt).

Ví dụ 3. Cho khối tứ diện ABCD, biết BCD là một tam giác đều cạnh a và có tâm là điểm O. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD nhận đường tròn (BCD) làm một đường tròn lớn. Xác định vị trí của đỉnh A trên mặt cầu ấy để thể tích tứ diện ABCD lớn nhất.

Giải

Đề ý đường tròn (BCD) là một đường tròn lớn của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và có O là tâm của tam giác BCD cạnh a, nên tâm O của tam giác BCD cũng chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

$$\Rightarrow OA = OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Từ đó diện tích S_c của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

$$S_c = 4\pi OA^2 = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{4}{3}\pi a^2$$

Gọi AH là đường cao của tứ diện ABCD hạ từ đỉnh A xuống mặt đáy (BCD).

$$\Delta HOA \left(H = 90^\circ \right) \Rightarrow AH \leq OA$$

Và tính được thể tích của khối tứ diện ABCD bằng:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot AH = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a \right) \cdot AH \\ &= \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{12} \cdot AH \leq \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{12} \cdot OA \quad (1) \end{aligned}$$

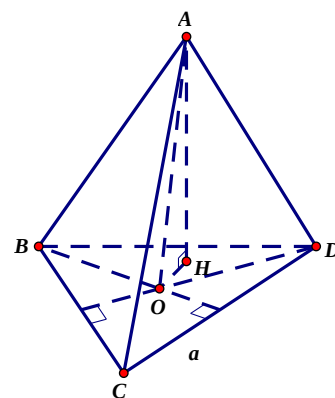
Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O$ (hình chóp A. BCD đều)

$$\Rightarrow \exists \max V = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{12} \cdot OA \text{ (ycbt).}$$

Ví dụ 4. Trong tất cả các lăng trụ tam giác đều có cùng diện tích toàn phần S, tìm các cạnh bên và cạnh đáy của lăng trụ có thể tích lớn nhất.

Giải

Gọi x là cạnh đáy và h là cạnh bên của lăng trụ.



Ta có diện tích toàn phần của lăng trụ: $S = 2 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 3xh = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + 3xh$

Ta có thể tích của lăng trụ là: $V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}h$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số: $\frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3xh}{2} + \frac{3xh}{2}$

Ta có: $\frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3xh}{2} + \frac{3xh}{2} \geq 3\sqrt{\frac{x^2\sqrt{3} \cdot 9x^2 \cdot h^2}{8}}$

$$\Leftrightarrow S \geq 3\sqrt{\frac{9\sqrt{3}x^4 \cdot h^2}{8}} \Rightarrow S^3 \geq 27 \cdot \frac{9\sqrt{3}x^4 h^2}{8} \Rightarrow \sqrt{S^3} \geq 9\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{2}} x^2 h$$

$$V = \frac{x^2\sqrt{3}h}{4} \leq \frac{2\sqrt{2}S\sqrt{S}}{4 \cdot 9\sqrt[4]{3}} = \frac{S\sqrt{2S}}{18\sqrt[4]{3}}$$

$$\text{Vậy } \max V = \frac{S\sqrt{2S}}{18\sqrt[4]{3}}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3xh}{2} = \frac{S}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}} = \frac{a}{3} \sqrt{2S\sqrt{3}} \\ h = \frac{1}{3} \cdot \frac{2S\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Ví dụ 5. Cho mặt cầu tâm O bán kính R. Một hình nón nội tiếp trong hình cầu có chiều cao là x ($0 < x < 2R$).

- Tính thể tích V, diện tích xung quanh S của hình nón.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa V, S, R độc lập đối với x.
- Với giá trị nào của x thì V lớn nhất?

Giải

- Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón.

$$r^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - (x - R)^2$$

$$r^2 = 2Rx - x^2 = x(2R - x)$$

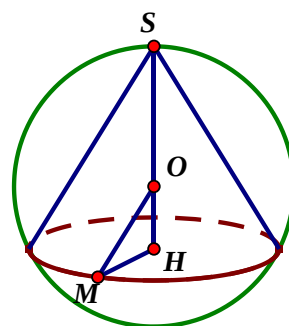
$$\text{Thể tích của hình nón: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{1}{3} \pi x^2 (2R - x)$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình nón: } S = \pi r SM$$

$$\text{Biết } SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{x^2 + x(2R - x)} = \sqrt{2Rx}$$

$$\text{b. Ta có: } V = \frac{1}{3} \pi x^2 (2R - x) \quad (1)$$

$$S = \pi x \sqrt{2R(2R - x)} \Rightarrow S^2 = 2\pi^2 R x^2 (2R - x) \quad (2)$$



Lấy (2) chia (1) ta được: $\frac{S^2}{V} = 6\pi R$

c. Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số: $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 2R-x$

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (2R-x) \leq \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (2R-x)}{3} \right)^3$$

$$\frac{x^2}{4} (2R-x) \leq \frac{8R^3}{27}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 (2R-x) \leq \frac{32\pi R^3}{81}$$

Vậy $\max V = \frac{32\pi R^3}{81}$. Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{x}{2} = 2R-x \Leftrightarrow x = \frac{4R}{3}$

Ví dụ 6. Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp hình cầu bán kính R cho trước. So sánh diện tích toàn phần và thể tích của hình nón với diện tích và thể tích của hình cầu.

Giải

Gọi r là bán kính của đường tròn đáy, h là chiều cao và V là thể tích của hình nón.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Hai tam giác SCA và SDO đồng dạng cho:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{DO} &= \frac{SA}{SO} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{h-R} \\ \Rightarrow \frac{r^2}{R^2} &= \frac{r^2 + h^2}{(h-R)^2} = \frac{r^2 + h^2 - R^2}{(h-R)^2 - R^2} \\ r^2 &= \frac{h^2 R^2}{h(h-2R)} = \frac{hR^2}{h-2R} \end{aligned}$$

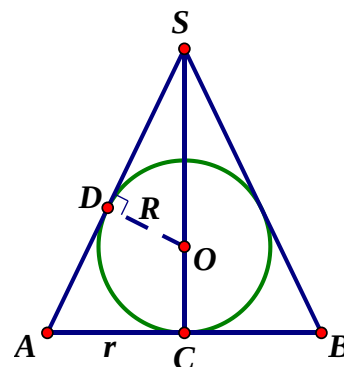
$$\text{Suy ra: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{h^2 R^2}{h-2R}$$

$$\text{Ta có: } \frac{h^2}{h-2R} = \frac{h^2 - 4R^2 + 4R^2}{h-2R} = h + 2R + \frac{4R^2}{h-2R} = (h-2R) + \frac{4R^2}{h-2R} + 4R$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$h-2R + \frac{4R^2}{h-2R} \geq \sqrt{(h-2R) \cdot \frac{4R^2}{h-2R}} \geq 4R$$

$$\text{Vậy: } \frac{h^2}{h-2R} \geq 8R. \text{ Dấu "=" xảy ra khi: } h-2R = \frac{4R^2}{h-2R} \Leftrightarrow h-2R = 2R \Leftrightarrow h = 4R$$



Suy ra: $V \geq \frac{8\pi R^3}{3}$

$\min V = \frac{8\pi R^3}{3}$ khi $h = 4R$ và $r = R\sqrt{2}$

Diện tích toàn phần của hình nón là:

$$S = \pi r S_A + \pi r^2 = \pi R \sqrt{2} \sqrt{2R^2 + 16R^2} + 2\pi R^2 = 8\pi R^2$$

Vậy lúc đó diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đều gấp đôi diện tích và thể tích của hình cầu.

II. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy một điểm M với $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng (α) qua M song song với AC và SB cắt BC, SB, SA lần lượt tại N, P, Q. Xác định x để S_{MNPQ} lớn nhất.

A. a

B. $\frac{a}{4}$

C. $\frac{a}{2}$

D. $\frac{a}{3}$

Phân tích: Trước hết ta phải xác định được MNPQ là hình chữ nhật

Vì $mp(\alpha) // SB$ và $mp(\alpha) // AC$ nên MNPQ là hình bình hành.

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp SO \text{ (}\Delta ACS \text{ cân)} \\ AC \perp BD \text{ (đường chéo hình vuông)} \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp mp(SBD)$$

$$\Rightarrow AC \perp SB, \text{ mà } MQ // SB \Rightarrow MN \perp MQ$$

Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải

Ta có: $MN // AC$

$$\Rightarrow MN = \frac{BM}{BA} \cdot AC = \frac{a-x}{a} \cdot a\sqrt{2} = (a-x)\sqrt{2}$$

ΔSAB có: $MQ // SB$

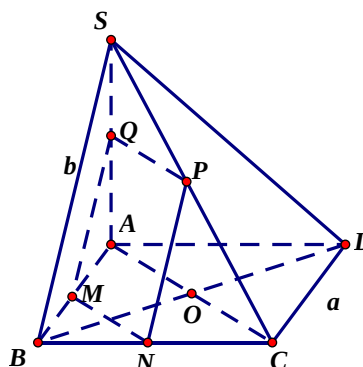
$$\Rightarrow MQ = \frac{AM}{AB} \cdot SB = \frac{bx}{a}$$

$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \frac{b\sqrt{2}}{a} (a-x)x \text{ (đvdt)}$$

Ta có:

$$\frac{(a-x)+x}{2} \geq \sqrt{(a-x)x} \Rightarrow \frac{a^2}{4} \geq (a-x)x$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } a-x=x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}.$$



Vậy chọn đáp án C.

Câu 2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a và ΔSBD cân tại S. Trên AB, AD lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = k$ ($0 < k < 1$). Mặt phẳng (α) qua MN song song với SA cắt SD, SC, SB tại P, Q, R. Tính k để S_{MNPQR} lớn nhất.

A. $k = \frac{1}{2}$

B. $k = \frac{5}{3}$

C. $k = \frac{1}{3}$

D. $k = \frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

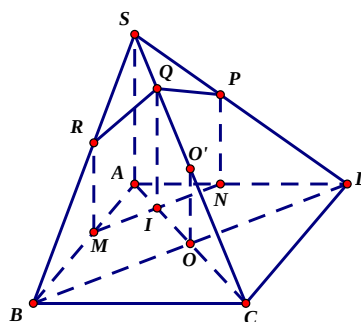
Ta có: MNPQR là hợp hai hình thang vuông bằng nhau MIQR và NIQP, trong đó: $MR \parallel IQ \parallel NP$ (cùng song song với SA), và $MN \parallel BD$.

Ta có:

$$IQ = \frac{(2-k)a}{2}; MR = (1-k)a; MI = \frac{\sqrt{2}ka}{2}$$

$$S_{MNPQR} = 2S_{MIQR} = (IQ + MR) \cdot MI \\ = \frac{\sqrt{2}k(4-3k)a^2}{4} \text{ (đvdt)}$$

$$S_{MNPQR} \max \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}.$$



Vậy chọn đáp án D.

Câu 3. Trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, lấy điểm C tùy ý. Kẻ $CH \perp AB$ (H thuộc AB). Gọi I là điểm giữa của CH. Trên một nửa đường thẳng It vuông góc tại I với mặt phẳng (ABC) lấy điểm S sao cho góc $ASB = 90^\circ$. Đặt $AH = x$. Với giá trị nào của x thì V_{SABC} đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$

B. $x = \frac{R}{2}$

C. $x = 2R$

D. $x = R$

Hướng dẫn giải

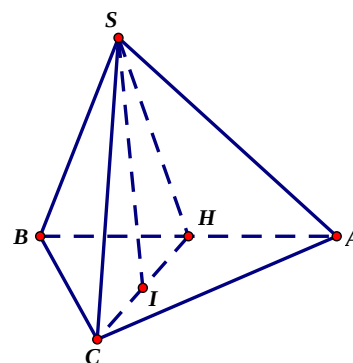
Ta có: $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SI$, trong đó:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} 2R \sqrt{AH \cdot BH} = R \sqrt{x(2R-x)}$$

$$SI = CH \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{x(2R-x)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy: } V = \frac{1}{3} R \sqrt{x(2R-x)} \cdot \frac{\sqrt{3x(2R-x)}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{6} x(2R-x)$$

V lớn nhất khi $x(2R-x)$ lớn nhất.



Biết $x(2R-x) \leq \left(\frac{x+2R-x}{2}\right)^2 = R^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2R-x \Leftrightarrow x = R$

Vậy, thể tích tứ diện SABC lớn nhất khi $x = R$ và $V_{\max} = \frac{R^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt)

Vậy chọn đáp án D.

Câu 4. Cho hình chóp đều có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Cho điểm $M \in SA$ sao cho diện tích $\triangle MBD$ nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất $\triangle MBD$.

A. $\frac{3a}{4}$

B. $\frac{a}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}a}{4}$

D. $\frac{a}{4}$

Hướng dẫn giải

Gọi S là diện tích $\triangle MBD$.

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BD \cdot MO = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot MO \quad (1)$$

$\Rightarrow \min S$ xảy ra $\Leftrightarrow \min MO$ xảy ra

Nhưng $\min MO = d[O, SA] = OH$

Vì tứ diện đều nên $O = AB \cap CD$ thì SO là đường cao.

$\Rightarrow \triangle SOA$ vuông tại O (2)

Trong đó:
$$\begin{cases} OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow \triangle SOA$ vuông cân tại $O \Rightarrow OH = OA \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$

(1) $\Rightarrow \min S = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{4}$ xảy ra khi H là trung điểm SA (ycbt)

Vậy chọn đáp án C.

Câu 5. Cho tứ diện ABCD có cạnh $AB = x$, các cạnh còn lại bằng a .

Câu 5.1. Tính diện tích toàn phần của tứ diện theo a, x .

A. $a^2\sqrt{3} + x\sqrt{4a^2 - x^2}$

B. $a^2\sqrt{3} + \sqrt{4a^2 - x^2}$

C. $a^2\sqrt{3} + 2x\sqrt{4a^2 - x^2}$

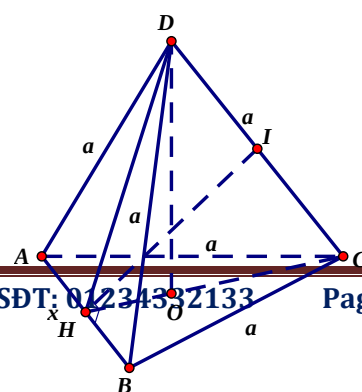
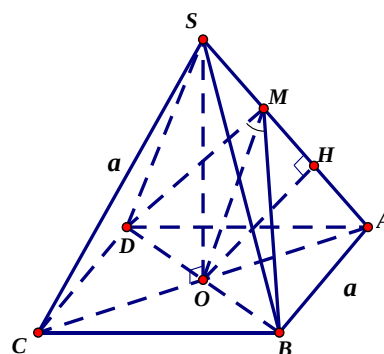
D. $a^2\sqrt{3} + x\sqrt{4a^2 + x^2}$

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm AB theo tính chất tam giác cân

$$\Rightarrow \begin{cases} CH \perp AB \\ DH \perp AB \end{cases}$$

Ta có: $AB = x; DA = DB = DC = AC = BC = a$



Nên: $\begin{cases} \Delta ADC = \Delta BCD \text{ (do hai tam giác đều cạnh } a) \\ \Delta DAB = \Delta CAB \end{cases}$

$$\Rightarrow S_{ADC} = S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

Ta có:

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - x^2} \Rightarrow S_{DAB} = S_{CAB} = \frac{1}{2}CH \cdot AB = \frac{1}{4}x\sqrt{4a^2 - x^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow S_{tp} = \frac{1}{2} \left(a^2\sqrt{3} + x\sqrt{4a^2 - x^2} \right)$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 5.2. Với giá trị nào của x thì thể tích V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}a}{4}$ D. $\frac{3a}{4}$

Hướng dẫn giải

Gọi O là hình chiếu của D xuống mặt phẳng (ABC)

Do $AD = DB = DC = a \Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow DO$ là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

DO hiển nhiên là đường cao tứ diện $DABC$. Gọi I là trung điểm DC . Ta có:

$$DH = HC \Rightarrow \Delta DHC \text{ cân} \Rightarrow HI \perp DC$$

$$\text{Khi đó: } HI = \sqrt{HC^2 - IC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - x^2}$$

$$\text{Từ: } S_{DHC} = \frac{1}{2}DO \cdot HC = \frac{1}{2}HI \cdot DC \Rightarrow DO = \frac{HI \cdot DC}{HC} \Rightarrow DO = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - x^2} \cdot a}{\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - x^2}} = \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}} \cdot \frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{12}ax\sqrt{3a^2 - x^2} \text{ (ycbt); } (0 < x < a\sqrt{3})$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$V_{ABCD}^2 = \frac{a^2x^2}{144}(3a^2 - x^2) \leq \frac{a^2}{144} \cdot \left[\frac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2} \right]^2 = \frac{a^2}{144} \cdot \frac{9a^4}{4} = \left(\frac{a^3}{8} \right)^2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} \leq \frac{a^3}{8} \quad (4)$$

$$\text{Dấu đẳng thức trong (3) và (4) xảy ra} \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Vậy $\max(V_{ABCD}) = \frac{a^3}{8}$ tương ứng $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (ycbt).

Vậy chọn đáp án B.

Câu 6. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2x$ và bốn cạnh còn lại có độ dài bằng 1.

Câu 6.1. Tính diện tích toàn phần của tứ diện.

A. $2x\sqrt{1+x^2}$

B. $2x\sqrt{1-x^2}$

C. $2x\sqrt{x^2-1}$

D. $x\sqrt{1-x^2}$

Hướng dẫn giải

Nhận thấy bốn mặt của tứ diện là bốn tam giác bằng nhau.

$$\Rightarrow S_{TP} = 4S_{ACD} = 2AI \cdot CD, \text{ với } I \text{ là trung điểm của } CD$$

$$\Rightarrow ID = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AI^2 = AD^2 - ID^2 = 1 - x^2 \\ AI = \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{do } 0 < x < 1) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_{TP} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 6.2. Xác định x để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

D. $\frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải

Vì $S_{TP} > 0$ nên S_{TP} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_{TP}^2 đạt giá trị lớn nhất, mà $S_{TP}^2 = 4x^2(1-x^2)$

$$\text{Nhưng } 0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Bất đẳng thức Cauchy} \Rightarrow x^2(1-x^2) \leq \left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow S_{TP}^2 \leq 1 \quad (1)$$

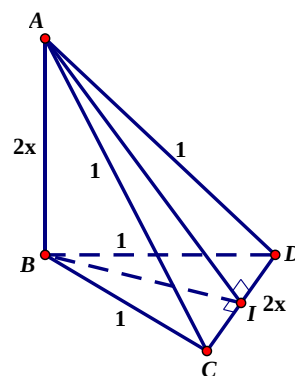
$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{vì } x > 0)$$

$$\text{Vậy } \max_{0 < x < 1} S_{TP} = S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \text{ (ycbt)}$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 7. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2x \left(0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $AC = AD = BC = BD = 1$. Gọi

I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Tìm x để thể tích tứ diện ABCD lớn nhất



A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Ta có: $\begin{cases} DI \perp AB \\ CI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ICD) \Rightarrow AB \perp IJ$. Tương tự: $CD \perp IJ$. Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD (đpcm)

Ta có: $IJ = \sqrt{ID^2 - DJ^2} = \sqrt{1 - 2x^2}$

Diện tích ΔICD : $S_{ICD} = \frac{1}{2} IJ \cdot CD = x\sqrt{1 - 2x^2}$

Khi đó: $V_{ABCD} = V_{AICD} + V_{IBCD} = \frac{1}{3} S_{ICD} \cdot (AI + IB)$

$\Rightarrow V(x) = V_{ABCD} = \frac{2}{3} x^2 \sqrt{1 - 2x^2}$ (ycbt)

Áp dụng BĐT Cauchy:

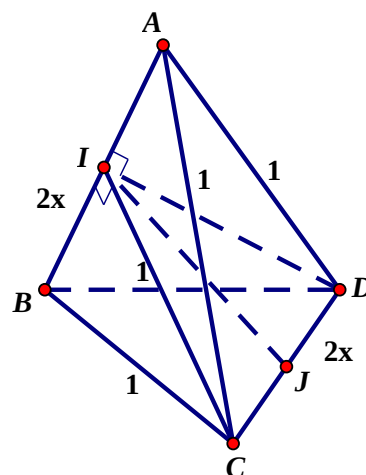
$\Rightarrow V^2(x) = \frac{4}{9} \cdot x^2 \cdot x^2 (1 - 2x^2) \leq \frac{4}{9} \left(\frac{x^2 + x^2 + 1 - 2x^2}{3} \right)^3$

$\Rightarrow V_{ABCD} \leq \frac{2\sqrt{3}}{27}$ (1)

Dấu đẳng thức xảy ra trong (1) khi và chỉ khi:

$x^2 = x^2 = 1 - 2x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $\max(V_{ABCD}) = \frac{2\sqrt{3}}{27}$ xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ycbt)



Câu 8. Một hình nón tròn xoay có bán kính đáy R và đường cao h ($h \leq R$). Có mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón cắt hình nón theo tiết diện có diện tích lớn nhất. Tính diện tích thiết diện

A. $h^2 + R^2$

B. $\frac{5}{2}(h^2 + R^2)$

C. $\frac{3}{2}(h^2 + R^2)$

D. $\frac{1}{2}(h^2 + R^2)$

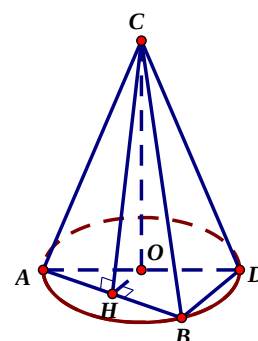
Hướng dẫn giải

Giả sử mặt phẳng đi qua đỉnh C của hình nón cắt hình nón theo thiết diện CAB. Thế thì CAB là một tam giác cân với $CA = CB$.

Gọi O là tâm hình tròn đáy và H là trung điểm của AB.

$CO \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} CH: \text{đường xiên} \\ OH: \text{là hình chiếu} \end{cases}$

Mà $AB \perp OH \Rightarrow AB \perp CH$



Đặt: $x = AH = \frac{1}{2}AB$ thì diện tích S của $\triangle CAB$ là:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot CH = x \cdot CH$$

Nhưng: $CH^2 = CO^2 + OH^2 = CO^2 + OA^2 - AH^2 = h^2 + R^2 - x^2$

$$\Rightarrow S = S(x) = x\sqrt{h^2 + R^2 - x^2}$$

Điều kiện xác định AB: $2x \leq 2R \Leftrightarrow x \leq R$

Đặt $t = x^2$; $\forall x \in [0; R] \Rightarrow 0 \leq t \leq R^2$

$$\Rightarrow S^2 = x^2(h^2 + R^2 - x^2) \Leftrightarrow g(t) = t(h^2 + R^2 - t)$$

Ta viết: $g(t) = -t^2 + (h^2 + R^2)t$; với $0 \leq t \leq R^2$

Theo đề: $h \leq R$, thì $S^2 = g(t)$ ($0 \leq t \leq R^2$) đạt giá trị lớn nhất khi: $t = \frac{1}{2}(h^2 + R^2)$.

$$\Rightarrow \max S = \frac{1}{2}(h^2 + R^2) \text{ tương ứng } x = \sqrt{\frac{h^2 + R^2}{2}}.$$

Vậy chọn đáp án D.

Chú ý: Nếu đề bài cho $h \geq R$, thì $S^2 = g(t)$ ($0 \leq t \leq R^2$) đạt giá trị lớn nhất khi $t = R^2$. Vậy S đạt giá trị lớn nhất khi $x = R$ (AB là một đường kính đáy), và ta có: $\max S = Rh$.

Câu 9. Cho một hình nón tròn xoay cao 15cm, bán kính đáy bằng 6cm. Tìm chiều cao h và bán kính đáy r của hình trụ có diện tích toàn phần lớn nhất nội tiếp trong hình nón đó.

A. $r = 5\text{cm}, h = 2,5\text{cm}$

B. $r = 5\text{cm}, h = 5\text{cm}$

C. $r = 5\text{cm}, h = 2\text{cm}$

D. $r = 2\text{cm}, h = 5\text{cm}$

Hướng dẫn giải

Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ có diện tích toàn phần S lớn

nhất nội tiếp trong hình nón, ta có điều kiện: $\begin{cases} 6 > r > 0 \\ 15 > h > 0 \end{cases} \Rightarrow S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (1)

Gọi (SAB) là thiết diện qua đỉnh S của hình nón có tâm O , đáy là H .

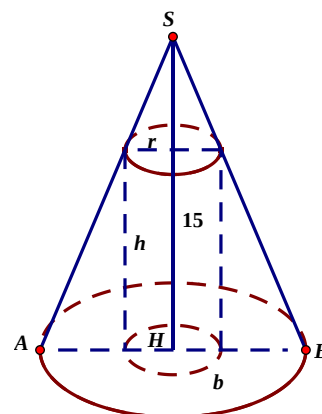
$$\Rightarrow SH = 15\text{cm}$$

$$AH = 6\text{cm} \text{ và } \frac{r}{AH} = \frac{SH-h}{SH} \Leftrightarrow \frac{r}{6} = \frac{15-h}{15}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{2(15-h)}{5} & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = \frac{30-5r}{2} & (3) \end{cases}$$

Thế (3) vào (1) ta có:



$$S = S(x) = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{30-5r}{2} \right) = -3\pi r^2 + 30\pi r \quad (4)$$

$$\Rightarrow S'(x) = -6\pi r + 30\pi = -6\pi(r-5) = 0 \Leftrightarrow r = 5 \Rightarrow S(5) = 75\pi$$

Bảng biến thiên:

r	0	5	6
S'	+	0	-
S		75π	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow \max S = 75\pi$ tương ứng $r = 5$.

Thay $r = 5$ vào (3) và (4) ta được: $h = 2,5$ (cm)

Vậy chọn đáp án A.

Câu 10. Trong các hình nón tròn xoay cùng có diện tích toàn phần bằng π . Tính thể tích hình nón lớn nhất?

A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$

B. $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$

C. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải

Xét $S_{tp} = \pi = \pi R^2 + \pi R\ell$ (ℓ là chiều dài đường sinh)

$$\Rightarrow 1 = R^2 + R\ell \Rightarrow \ell = \frac{1-R^2}{R} = \frac{1}{R} - R$$

Lúc đó:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} R^2 \sqrt{\ell^2 - R^2} = \frac{\pi}{3} R^2 \sqrt{\left(\frac{1}{R} - R\right)^2 - R^2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3} R^2 \sqrt{\frac{1}{R^2} - 2} = \frac{\pi}{3} R \sqrt{1 - 2R^2} \Rightarrow V^2 = \frac{\pi^2}{9} R^2 (1 - 2R^2)$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{\pi^2}{18} \cdot 2R^2 (1 - 2R^2) \leq \frac{\pi^2}{18} \cdot \left(\frac{2R^2 + 1 - 2R^2}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{72} \quad (1)$$

$$V \leq \frac{\pi}{\sqrt{72}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12} \quad (2)$$

Đẳng thức trong (1) hoặc (2) xảy ra $\Leftrightarrow 2R^2 = 1 - 2R^2$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}$$

Vậy: $\max V = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ tương ứng $R = \frac{1}{2}; \ell = \frac{3}{2}$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 11. Trên cạnh AD của hình vuông ABCD cạnh a, người ta lấy điểm M với $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$), và trên nửa đường thẳng Ax vuông góc tại A với mặt phẳng của hình vuông, người ta lấy điểm S với $SA = y$ ($y > 0$). Với giả thiết $x^2 + y^2 = a^2$, tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp S.ABCM.

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{42}$

B. $\frac{\sqrt{3}a^2}{12}$

C. $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

Hướng dẫn giải

Xét $x^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$\Rightarrow V = V_{SABCM} = \frac{a}{6}(x+a)\sqrt{a^2 - x^2}$

Ta có $\max V$ xảy ra $\Leftrightarrow \max(3V^2)$ xảy ra.

Mà $3V^2 = \frac{a^2}{36}(x+a)(x+a)(x+a)(3a-3x)$ (1)

Áp dụng BĐT Cauchy cho 4 số không âm, ta có:

(1) $\Leftrightarrow 3V^2 \leq \frac{a^2}{36} \left[\frac{(x+a) + (x+a) + (x+a) + (3a-3x)}{4} \right]^4$
 $\Leftrightarrow V^2 \leq \frac{a^2}{36 \cdot 3} \cdot \left(\frac{3}{2}a \right)^4 = \frac{81a^6}{36 \cdot 3 \cdot 16} = \frac{3a^6}{64} \Leftrightarrow V \leq \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$ (2)

Dấu đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow a+x = 3a-3x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

Do đó khi M là trung điểm AD thì thể tích V_{SABCM} cực đại và $\max V = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 12. Cho tam giác đều OAB có cạnh bằng $a > 0$. Trên đường thẳng (d) đi qua O vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M với $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A lên MB, OB. Đường thẳng EF cắt d tại N. Xác định x để thể tích tứ diện ABMN là nhỏ nhất.

A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

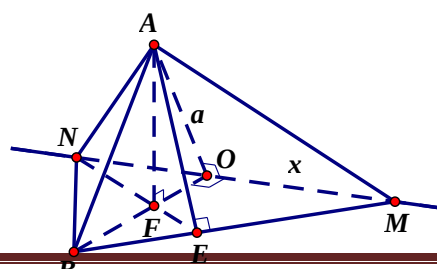
D. $\frac{\sqrt{3}a}{5}$

Hướng dẫn giải

Để ý: $AF \perp (MBO) \equiv (MNB)$

$\Rightarrow AF$ là chiều cao hình chóp A.BMN.

$\Rightarrow V_{ABMN} = \frac{1}{3}AF \cdot S_{MNB} = \frac{1}{6}AF \cdot BO \cdot MN$



Trong đó:
$$\begin{cases} AF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ BO = a \\ MN = MO + ON = x + ON \end{cases}$$

Do đó: $\exists \min(V_{ABMN}) \Leftrightarrow \exists \min(x + ON)$

Mặt khác, ta có: $\triangle NOF \sim \triangle BOM$

$$\Rightarrow \frac{NO}{BO} = \frac{OF}{OM} \Leftrightarrow OM \cdot NO = BO \cdot OF \Leftrightarrow x \cdot ON = \frac{a^2}{2} = \text{const}$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có: $x + ON \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{2} \quad (*)$

Dấu đẳng thức trong (*) xảy ra $\Leftrightarrow x = ON = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \exists \min(x + ON) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow x = ON = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy thể tích tứ diện ABMN nhỏ nhất khi và chỉ khi: $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 13. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD với $AB = 2a$. Trên mặt phẳng chứa BC và vuông góc với (P) lấy điểm E sao cho $\triangle EBC$ là tam giác đều; điểm I nằm trên đoạn BC, đặt: $BI = x$. O là trung điểm của AE.

Câu 13.1. Tính độ dài OI theo a và x.

A. $\sqrt{x^2 + ax + 2a^2}$ B. $\sqrt{x^2 - ax + 2a^2}$ C. $\sqrt{x^2 + ax - 2a^2}$ D. $\sqrt{x^2 - ax - 2a^2}$

Hướng dẫn giải

Định lý đường trung tuyến cho:

$$OI^2 = \frac{2AI^2 + 2EI^2 - AE^2}{4}$$

Với
$$\begin{cases} EF^2 = 3a^2 \\ AF^2 = 5a^2 \\ AE^2 = AF^2 + EF^2 = 8a^2, AI^2 = 4a^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow OI = \sqrt{x^2 - ax + 2a^2}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 13.2. Tìm x để độ dài OI lớn nhất.

A. $\frac{a}{2}$ B. $2a$ C. a D. $\frac{a}{5}$

Câu 13.3. Tìm x để độ dài OI bé nhất.

A. $\frac{a}{2}$

B. $2a$

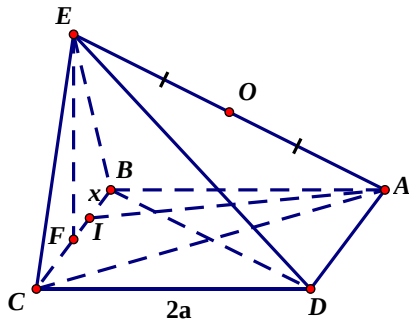
C. a

D. $\frac{a}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta viết: $OI^2 = f(x) = x^2 - ax + 2a^2; \forall x \in [0; 2a]$

$f'(x) = (2x - a) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ Dựa vào bảng biến thiên, ta có:



x	$-\infty$	0	$\frac{a}{2}$	$2a$	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$
$f(x)$		$(a\sqrt{2})^2$	$\left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2$	$(2a)^2$	

$$\begin{cases} \max_{0 \leq x \leq 2a} f(x) = f(2a) = (2a)^2 \\ \min_{0 \leq x \leq 2a} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max_{0 \leq x \leq 2a} OI = S(2a) = 2a \\ \min_{0 \leq x \leq 2a} OI = S\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Câu 14. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2x$ và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1. Xác định x để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 2

D. $\frac{2}{5}$

Hướng dẫn giải

Nhận thấy các mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau.

Suy ra, diện tích toàn phần của tứ diện là: $S_{tp} = 4S_{ACD} = 2AI \cdot CD$ (1)

Với AI là đường cao của $\triangle CAD$ cân tại A, ta có:

$$AI = \sqrt{1 - x^2}; (0 < x < 1) \xRightarrow{(1)} S_{tp} = 2 \cdot 2x \sqrt{1 - x^2} = 4x \sqrt{1 - x^2}; (0 < x < 1)$$

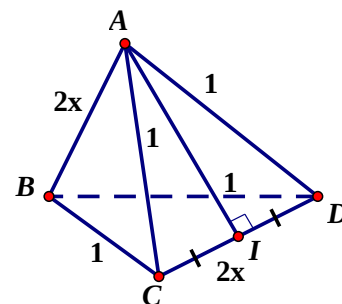
Nhận thấy:

$$\exists \max(S_{tp}) \Leftrightarrow \exists \max\left(x \sqrt{1 - x^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \exists \max\left(16x^2(1 - x^2)\right)$$

Áp dụng BĐT Cauchy:

$$S_{tp}^2 = 16x^2(1 - x^2) \leq 16 \cdot \left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{2}\right)^2 = 4 \quad (2)$$



Dấu đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy với $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì diện tích toàn phần của tứ diện đạt giá trị lớn nhất là $\max S_{tp} = 2$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 15. Cho tứ diện ABCD sao cho $AB = 2x$, $CD = 2y$ và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1. Xác định x và y để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = y = \frac{1}{2}$

B. $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $x = y = 1$

D. $x = y = \frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ta có: $\triangle ABD$ cân tại D.

$$\Rightarrow DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Tương tự: $AN = \sqrt{1 - y^2}$. Lúc đó:

$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DM = x\sqrt{1 - x^2}$$

Hoàn toàn tương tự: $S_{BCD} = S_{ACD} = y\sqrt{1 - y^2}$

Vậy diện tích toàn phần S_{tp} của tứ diện là:

$$S_{tp} = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{BCD} + S_{ACD} = 2\left(x\sqrt{1 - x^2} + y\sqrt{1 - y^2}\right)$$

Áp dụng BĐT Schwartz, ta có:

$$S_{tp} \leq 2\left|x\sqrt{1 - x^2} + y\sqrt{1 - y^2}\right| \leq \left[x^2 + (1 - x^2)\right] + \left[y^2 + (1 - y^2)\right] \Rightarrow S_{tp} \leq 2 \quad (1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 - x^2} \\ y = \sqrt{1 - y^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Vậy } \max S_{tp} = 2 \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy chọn đáp án B.

Câu 16. Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông. Biết $SB = a\sqrt{2}$, góc $BSC = \frac{\pi}{4}$, góc $ASB = \alpha$; $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Với giá trị nào của α thì V_{SABC} lớn nhất.

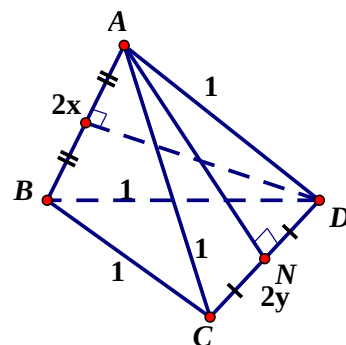
A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{\pi}{4}$

Hướng dẫn giải

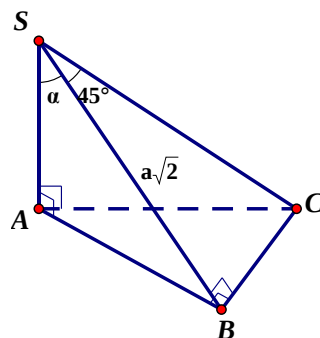


Thể tích tứ diện SABC là:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} BC \cdot S_{SAB}$$

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{6} a\sqrt{2} SA \cdot AB$$

Với chú ý:
$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{AB}{SB} \Rightarrow AB = a\sqrt{2} \sin \alpha \\ \cos \alpha = \frac{SA}{SB} \Rightarrow SA = a\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$



Khi đó:
$$V_{SABC} = \frac{1}{6} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \sin \alpha \cdot a\sqrt{2} \cos \alpha = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \sin 2\alpha$$

Vậy:
$$\max(V_{SABC}) \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 17. Cho tam diện ba mặt vuông Oxyz. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C. Giả sử A, B, C thay đổi nhưng luôn có:

$$OA + OB + OC + AB + BC + AC = k \text{ không đổi.}$$

Hãy xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện OABC.

A. $\frac{1}{6} \left(\frac{k}{3+3\sqrt{2}} \right)^3$ B. $\frac{1}{6} \left(\frac{k}{3-3\sqrt{2}} \right)^3$ C. $\frac{1}{6} \left(\frac{k}{3+3\sqrt{3}} \right)^3$ D. $\frac{1}{6} \left(\frac{k}{-3+3\sqrt{2}} \right)^3$

Hướng dẫn giải

Ta có: $OA + OB + OC + AB + BC + AC = k$

$$\Leftrightarrow a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2} = k$$

Với $a > 0, b > 0, c > 0$.

Áp dụng BĐT Cauchy:

$$\bullet a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (1)$$

$$\bullet \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2ab} \quad (2)$$

$$\bullet \sqrt{b^2 + c^2} \geq \sqrt{2bc} \quad (3)$$

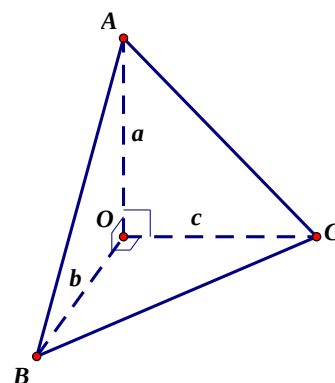
$$\bullet \sqrt{a^2 + c^2} \geq \sqrt{2ac} \quad (4)$$

Lấy: (2)+(3)+(4) và áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2} \geq \sqrt{2ab} + \sqrt{2bc} + \sqrt{2ac} \geq 3\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{abc} \quad (5)$$

Thể tích hình chóp: $V_{SABC} = \frac{1}{6} abc \Leftrightarrow 6V_{SABC} = abc$

Tương tự: (1)+(5) và lại áp dụng BĐT Cauchy, ta có:



$$\begin{aligned} (1)+(5) \\ \Rightarrow k \geq (3+3\sqrt{2})\sqrt[3]{abc} \Rightarrow k \geq (3+3\sqrt{2})\sqrt[3]{6 \cdot V_{SABC}} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{SABC} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{k}{3+3\sqrt{2}} \right)^3 \quad (7)$$

Dấu đẳng thức trong (7) xảy ra khi đồng thời (5) và (6) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

$$\text{Vậy } \max(V_{SABC}) = \frac{1}{6} \left(\frac{k}{3+3\sqrt{2}} \right)^3 \text{ khi } a = b = c$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 18. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Gọi S là một điểm ở ngoài mặt phẳng (ABCD) sao cho $SB = SD$. Gọi M là điểm tùy ý trên AO với $AM = x$. Mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BD cắt SO, SB, AB tại N, P, Q. Cho $SA = a$. Tính x để diện tích MNPQ lớn nhất.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật. Thật vậy

Vì $SB = SD \Rightarrow$ Hai tam giác SBC và SDC bằng nhau.

Gọi I là trung điểm của SC, ta có:

$$IB = ID \Rightarrow \Delta BID \text{ cân tại I} \Rightarrow IO \perp BD$$

$$\text{Mà } IO \parallel SA \Rightarrow SA \perp BD$$

$$Mp(\alpha) \parallel BD \Rightarrow (\alpha) \text{ cắt hai mặt phẳng (ABO) và (SBO) theo hai giao tuyến: } MQ \parallel NP \parallel OB.$$

$$Mp(\alpha) \parallel SA \Rightarrow (\alpha) \text{ cắt hai mặt phẳng (SAO) và (SAB) theo hai giao tuyến: } MN \parallel PQ \parallel SA.$$

Vậy MNPQ là hình bình hành.

Biết rằng $SA \perp OB \Rightarrow$ MNPQ là hình chữ nhật.

$$\text{Ta có: } S_{MNPQ} = MQ \cdot MN$$

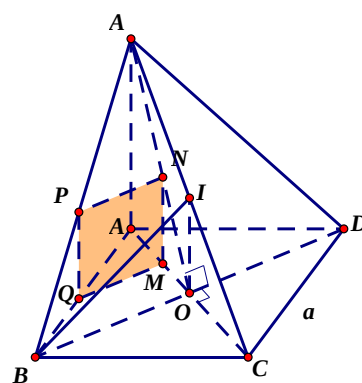
$$\text{Biết tam giác AMQ vuông cân tại M} \Rightarrow MQ = MA = x$$

$$\text{Và } \frac{NM}{SA} = \frac{OM}{OA} \Leftrightarrow \frac{NM}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow NM = \frac{a\sqrt{2} - 2x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = x(a - x\sqrt{2}) \quad (\text{với } 0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{2}}{2})$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số $x\sqrt{2}$ và $(a - x\sqrt{2})$

$$\text{Ta có: } x\sqrt{2}(a - x\sqrt{2}) \leq \left(\frac{x\sqrt{2} + a - x\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4}$$



$$\text{Vậy } \frac{x(a - x\sqrt{2})}{2} \leq \frac{a^2}{4\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{8} \Rightarrow S_{MNPQ} \leq \frac{a^2\sqrt{2}}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x\sqrt{2} = a - x\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AO .

Vậy chọn đáp án B.

Câu 19. Cho tam diện $Oxyz$ có các góc $xOy = yOz = zOx = \alpha$. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy A, B, C sao cho $OA = OB = OC = x$. Tính α để diện tích xung quanh lớn nhất.

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{4}$

Hướng dẫn giải

$$V_1 \begin{cases} xOy = yOz = zOx = \alpha \\ OA = OB = OC = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OAC$$

$$\Rightarrow AB = BC = CA$$

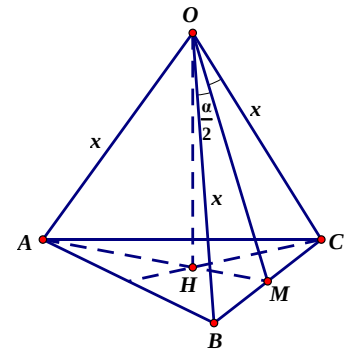
Gọi H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow OH$ là trục của tam giác ABC .

$$\text{Ta có: } S_{xq} = 3S_{OBC} = \frac{3}{2}x^2 \sin \alpha$$

$$\max S_{xq} = \frac{3}{2}x^2 \text{ khi } \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy chọn đáp án A.



Câu 20. Hình chóp tứ giác $SABCD$ có cạnh $SA = x, x \in (0, \sqrt{3})$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài 1. Xác định x để hình chóp có thể tích lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Hướng dẫn giải

Để thấy hai tam giác SBD và CBD bằng nhau (c.c.c)

$$\Rightarrow OS = OC$$

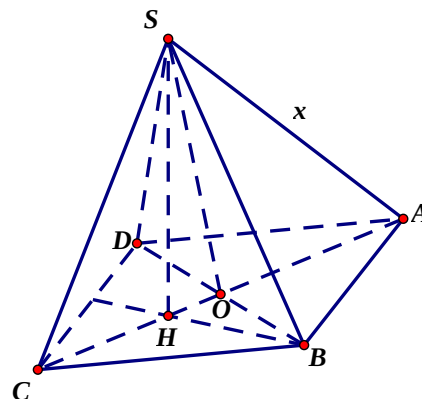
$$\Rightarrow OS = OC = OA$$

$\Rightarrow \triangle ASC$ vuông tại S .

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

$$\triangle ASC \text{ vuông cho } AC = \sqrt{x^2 + 1}$$

$\triangle COD$ vuông tại O cho:



$$OD = \sqrt{CD^2 - OC^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2 + 1}{4}} = \frac{\sqrt{3 - x^2}}{2}$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \sqrt{3 - x^2} \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

Vì $SB = SC = SD = 1 \Rightarrow SH$ là trục của tam giác $BCD \Rightarrow SH \perp AC$

$$\text{Tam giác ASC vuông cho: } \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} \Rightarrow SH = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{Ta có: } V = \frac{x\sqrt{3 - x^2}}{6} = \frac{\sqrt{x^2(3 - x^2)}}{6}$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy: } \sqrt{x^2(3 - x^2)} \leq \frac{x^2 + 3 - x^2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{\max} = \frac{1}{4} \text{ khi } x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy chọn đáp án C.}$$

Câu 21. Trong các hình trụ có diện tích toàn phần không đổi $2\pi a^2$. Tìm thể tích hình trụ lớn nhất.

A. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$

B. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{5}$

C. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$

D. $\frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải

Gọi x, y lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ. Theo giả thiết ta có:

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2 \Leftrightarrow x^2 + xy = a^2 \quad (1)$$

Thể tích hình trụ là: $V = \pi x^2 y$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số: $x^2, \frac{xy}{2}, \frac{xy}{2}$, ta có:

$$x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} \geq 3\sqrt{\frac{x^4 y^2}{4}} \Leftrightarrow a^2 \geq 3\sqrt{\frac{x^4 y^2}{4}} \Leftrightarrow a^6 \geq 27 \frac{x^4 y^2}{4} \Leftrightarrow x^2 y \leq \frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } V \leq \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}. \text{ Suy ra } \max V = \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}. \text{ Dấu "}" xảy ra khi } x^2 = \frac{xy}{2} = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án D.

Câu 22. Trong các hình trụ có diện tích xung quanh cộng diện tích một đáy không đổi là $2\pi a^2$. Tìm thể tích hình trụ lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{2\sqrt{6}\pi a^3}{9}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Hướng dẫn giải

Nếu hình trụ hỏ một đáy, ta có: $\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2 \Rightarrow x^2 + 2xy = 2a^2$

Thể tích của hình trụ: $V = \pi x^2 y$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số: x^2, xy, xy . Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + xy &\geq 3\sqrt[3]{x^4 y^2} \Leftrightarrow 2a^2 \geq 3\sqrt[3]{x^4 y^2} \\ \Leftrightarrow 8a^6 &\geq 27x^4 y^2 \Leftrightarrow x^2 y \leq \frac{2\sqrt{2}a^3}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x^2 y \leq \frac{2\sqrt{6}a^3}{9} \Rightarrow V \leq \frac{2\sqrt{6}\pi a^3}{9} \\ \Rightarrow \max V &= \frac{2\sqrt{6}\pi a^3}{9} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi: $x^2 = xy = \frac{2a^2}{3} \Leftrightarrow x = y = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 23. Trong tất cả các hình trụ có cùng thể tích V , tính diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất.

A. $3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$

B. $3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{5}}$

C. $3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{9}}$

D. $3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{7}}$

Hướng dẫn giải

Gọi x, y lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.

Ta có: $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ và $V = \pi x^2 y$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số: $x^2, \frac{xy}{2}, \frac{xy}{2}$

Ta có:

$$x^2 \cdot \frac{xy}{2} \cdot \frac{xy}{2} \leq \left(\frac{x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2}}{3} \right)^3 \Leftrightarrow \frac{x^4 y^2}{4} \leq \left(\frac{x^2 + xy}{3} \right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{V^2}{4\pi^2} \leq \frac{\left(\frac{S}{2\pi} \right)^3}{27} \Rightarrow S^3 \geq \frac{27\pi V^2}{4} \Leftrightarrow S \geq 3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } x^2 = \frac{xy}{2} = \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{V}{2\pi}} \\ y = 2\sqrt{\frac{V}{2\pi}} \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 24. Trong tất cả hình nón có cùng diện tích toàn phần πa^2 , tìm hình nón có thể tích lớn nhất.

A. $\max V = \frac{\pi\sqrt{2}}{11}a^3$ **B.** $\max V = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3$ **C.** $\max V = \frac{\pi\sqrt{2}}{13}a^3$ **D.** $\max V = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}a^3$

Hướng dẫn giải

Gọi x, y lần lượt là chiều cao, bán kính đáy của hình nón, ta có:

$$\begin{cases} \pi y^2 + \pi y\sqrt{x^2 + y^2} = \pi a^2 & (1) \\ V = \frac{1}{3}\pi y^2 x & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $y\sqrt{x^2 + y^2} = a^2 - y^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < a \\ y^2(x^2 + y^2) = a^4 - 2a^2y^2 + y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < a \\ y^2 = \frac{a^4}{x^2 + 2a^2} \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi a^4 \frac{x}{x^2 + 2a^2}$$

Biết: $\frac{x^2 + 2a^2}{x} = x + \frac{2a^2}{x} \geq 2\sqrt{2a^2} = 2\sqrt{2}a$ (BĐT Cauchy) $\Rightarrow \frac{x}{x^2 + 2a^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}a}$

Suy ra $V \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3$

Vậy: $\max V = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3$. Dấu "=" xảy ra khi: $x = \frac{2a^2}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\sqrt{2} \\ y = \frac{a}{2} \end{cases}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 25. Trong tất cả hình nón có độ dài đường sinh là a , tìm hình nón có thể tích lớn nhất.

A. $\max V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$ **B.** $\max V = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}a^3$ **C.** $\max V = \frac{\pi\sqrt{3}}{23}a^3$ **D.** $\max V = \frac{\pi\sqrt{2}}{13}a^3$

Hướng dẫn giải

Gọi x, y lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình nón, ta có: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = a \\ V = \pi x^2 y \end{cases}$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số: $\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2}, y$, ta có:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + y^2 \geq 3\sqrt[3]{x^4 y^2} \Leftrightarrow a^2 \geq 3\sqrt[3]{x^4 y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^4 y^2 \leq \frac{a^6}{27} \Leftrightarrow x^2 y \leq \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V \leq \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{27} \Rightarrow \max V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$$

Dấu “=” xảy ra khi: $\frac{x^2}{2} = y^2 = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\sqrt{\frac{2}{3}} \\ y = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 26. Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp một hình trụ có bán kính r và chiều cao h .

A. $\min V = \frac{\pi r^2 h}{5}$

B. $\min V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

C. $\min V = \frac{\pi r^2 h}{4}$

D. $\min V = \frac{\pi r^2 h}{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi x, y là bán kính và chiều cao của hình nón ngoại tiếp.

Thể tích hình nón là: $V = \frac{1}{3} \pi x^2 y$

Các tam giác SOE và SID đồng dạng cho :

$$\frac{y}{x} = \frac{y-h}{r} \Rightarrow y = \frac{hx}{x-r} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \frac{hx^3}{x-r}$$

Xét biểu thức: $\frac{x-r}{3} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^2(x-r)}{x^3} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{r}{x}\right)$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số: $\frac{r}{x}, \frac{r}{x}, \left(2 - \frac{2r}{x}\right)$

Ta có: $\frac{r}{x} \cdot \frac{r}{x} \cdot \left(2 - \frac{2r}{x}\right) \leq \left(\frac{\frac{r}{x} + \frac{r}{x} + 2 - \frac{2r}{x}}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{x}\right)^2 \left(1 - \frac{r}{x}\right) \leq \frac{4}{27} \Rightarrow \frac{x^3}{x-r} \geq \frac{27r^2}{4}$$

Vậy: $\frac{x-r}{x^3} \leq \frac{4}{27r^2} \Rightarrow \frac{x^3}{x-r} \geq \frac{27r^2}{4} \Rightarrow V \geq \frac{\pi r^2 h}{4} \Rightarrow \min V = \frac{\pi r^2 h}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi: $\frac{r}{x} = 2 \left(1 - \frac{r}{x}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3r}{2}$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 27. Cho một hình nón tròn xoay đỉnh S, thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh là $2R$. Người ta cho một hình cầu nội tiếp với mặt bên của hình nón. Tính bán kính hình cầu để phần thể tích chung của hình nón và hình cầu lớn nhất.

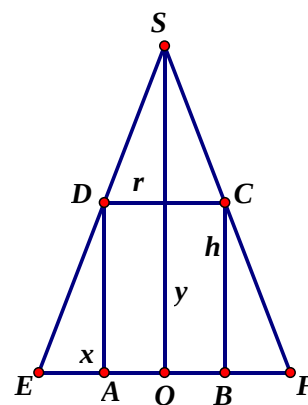
A. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{R}{2}$

Hướng dẫn giải



BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN VÀ CÁC KHỐI LỒNG NHAU

Để sử dụng file word, quý thầy cô vui lòng đóng góp chút kinh phí để tạo động lực cho tác giả ra đời những chuyên đề khác hay hơn

STT	TÊN TÀI LIỆU	GIÁ	MÃ SỐ
1	KỸ THUẬT GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM SỐ PHỨC_123 Tặng 6 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 1-6}	60K	SO PHUC_123
2	CHỦ ĐỀ 1_KHỐI ĐA DIỆN {26 Trang} Tặng 5 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 7-11}	50K	HHKG_KDD
3	CHỦ ĐỀ 2_THỂ TÍCH KHỐI CHÓP {59 Trang} Tặng 10 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 12-21}	110 K	HHKG_TTKC
4	CHỦ ĐỀ 3_THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ {34 Trang} Tặng 5 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 22-26}	70K	HHKG_TTLT
5	CHỦ ĐỀ 456_NÓN TRỤ CẦU {56 Trang} Tặng 10 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 27-36}	110 K	HHKG_NTC
6	CHỦ ĐỀ 7_KHOẢNG CÁCH {68 Trang} Tặng 12 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 37-49}	130 K	HHKG_KC
7	CHỦ ĐỀ 8_GÓC {21 Trang} Tặng 5 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 50-54}	50K	HHKG_GOC
8	CHỦ ĐỀ 9_CỰC TRỊ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN VÀ CÁC KHỐI LỒNG NHAU {29 Trang} Tặng 8 đề word thi thử THPT Quốc gia 2017 (có đáp án và lời giải chi tiết) {Đề 55-63}	80k	HHKG_CT

Hướng dẫn thanh toán

Quý thầy cô thanh toán cho mình qua ngân hàng. Sau khi chuyển khoản, mình sẽ lập tức gửi tài liệu cho quý thầy cô.

Nếu trong ngày mà thầy cô chưa nhận được thì vui lòng gọi điện trực tiếp cho mình.

Thầy cư. SĐT: 01234332133

NGÂN HÀNG			
TÊN TÀI KHOẢN	TRẦN ĐÌNH CƯ	TRẦN ĐÌNH CƯ	TRẦN ĐÌNH CƯ
SỐ TÀI KHOẢN	4010205025243	0161000381524	55110000232924
CHI NHÁNH	THỪA THIÊN HUẾ	THỪA THIÊN HUẾ	THỪA THIÊN HUẾ
Nội dung: Họ và tên_email_ma tài liệu			

Ví dụ: Nguyễn Thị B_nguyenthib@gmail.com_HHKG_TTKC

Lưu ý:

Thầy cô đọc kỹ file PDF trước khi mua, tài liệu mua chỉ dùng với mục đích cá nhân, không được bán lại hoặc chia sẻ cho người khác.

CHÚC QUÝ THẦY CÔ DẠY TỐT VÀ THÀNH CÔNG TRONG SỰ NGHIỆP TRỒNG NGƯỜI