

ĐỀ THI KHẢO SÁT

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ, tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1: Môđun của số phức $z = 2 + 2i$ bằng

- A. 8. B. $\sqrt{10}$. C. 10. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

- A. 3. B. 36. C. 9. D. 6.

Câu 3: Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^4 - x - 2$

- A. Điểm $P(-1; -1)$. B. Điểm $N(-1; -2)$. C. Điểm $M(-1; 0)$. D. Điểm $Q(-1; 1)$.

Câu 4: Diện tích S của mặt cầu bán kính r được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $S = \frac{1}{3}\pi r^3$. B. $S = 4\pi r^3$. C. $S = 4\pi r^2$. D. $S = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Câu 5: Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ là

- A. $\int f(x)dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$.
C. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}x^{\frac{-3}{2}} + C$. D. $\int f(x)dx = -2x^{\frac{1}{2}} + C$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 6$ là

- A. $(\log_2 6; +\infty)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; \log_2 6)$.

Câu 8: Một khối chóp có thể tích bằng 60 và chiều cao bằng 10. Diện tích đáy của khối chóp đó bằng

- A. 6. B. 2. C. 150. D. 18.

Câu 9: Tập xác định của hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $(0; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 10: Nghiệm của phương trình $\log(2x)=1$ là

- A. $x = \frac{1}{5}$. B. $x = 5$. C. $x = 25$ D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 11: Biết rằng $\int_0^3 f(x)dx = 5$ và $\int_0^2 f(x)dx = 3$ khi đó giá trị $\int_2^3 f(x)dx$ bằng

- A. 3. B. 2. C. -10. D. 7.

Câu 12: Cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $\bar{w} = 2 + 3i$. Số phức $z - w$ bằng

- A. $1 + 4i$. B. $1 - 2i$. C. $5 + 4i$. D. $1 + 5i$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_4 = (-1; 2; -3)$. B. $\vec{n}_3 = (-3; 4; -1)$. C. $\vec{n}_2 = (2; -3; 4)$. D. $\vec{n}_1 = (2; 3; 4)$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $A = (7; 3; -2)$ và $B = (2; 1; 1)$. Toạ độ vectơ $\vec{OA} - 2\vec{OB}$ là

- A. $(3; 2; -4)$. B. $(3; 1; -4)$. C. $(5; 2; -1)$. D. $(1; -2; 1)$.

Câu 15: Trên mặt phẳng toạ độ, điểm biểu diễn số phức $3 - 2i$ có toạ độ là

- A. $(2; 3)$. B. $(-2; 3)$. C. $(3; -2)$. D. $(-3; -2)$.

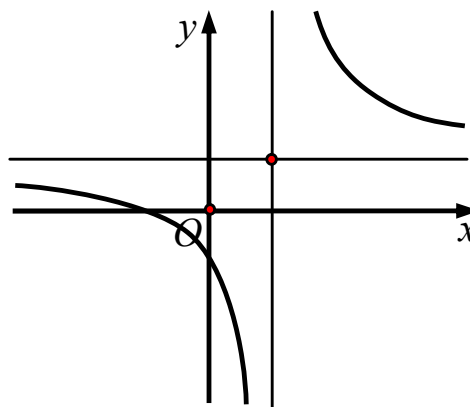
Câu 16: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{-x+1}$ là đường thẳng

- A. $x = 1$. B. $y = -2$. C. $y = 2$. D. $x = -2$.

Câu 17: Với a là số thực dương tùy ý, $\log_9(81a^2)$ bằng

- A. $\frac{1}{2} + \log_3 a$. B. $2\log_3 a$. C. $(\log_3 a)^2$. D. $2 + \log_3 a$.

Câu 18: Đường cong như hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



- A. $y = \frac{3x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{2x-1}{2x-2}$. C. $y = -x^3 + x - 1$. D. $y = \frac{2x+1}{2x-2}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. Điểm $Q(2; 2; 3)$. B. Điểm $N(2; -2; -3)$.
 C. Điểm $M(1; 2; -3)$. D. Điểm $P(1; 2; 3)$.

Câu 20: Với n, k là số nguyên dương và $k \leq n$, công thức nào dưới đây đúng?

A. $A_n^k = n!$. B. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. C. $A_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. D. $A_n^k = \frac{n!}{k!}$.

Câu 21: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h . Thể tích V của khối lăng trụ đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V = \frac{1}{3}Bh$. B. $V = \frac{4}{3}Bh$. C. $V = 6Bh$. D. $V = Bh$.

Câu 22: Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log x$ là:

A. $y' = \frac{1}{\log x}$. B. $y' = \frac{\ln 10}{x}$. C. $y' = \frac{1}{x}$. D. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-1	1	-1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 24: Cho hình trụ có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l . Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S_{xq} = 4\pi rl$. B. $S_{xq} = 2\pi rl$. C. $S_{xq} = 3\pi rl$. D. $S_{xq} = \pi rl$.

Câu 25: Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 6$ thì $\int_2^5 3f(x) dx$ bằng

A. 6. B. 3. C. 18. D. 12.

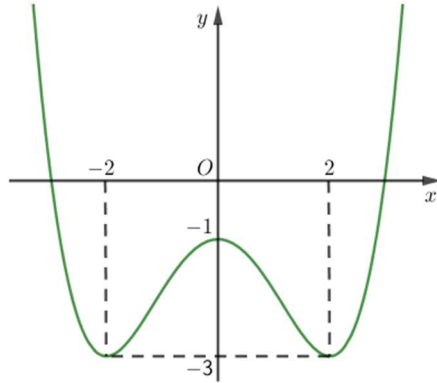
Câu 26: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_3 bằng

A. 11. B. 15. C. 7. D. 10.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = 2 - \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = 2 - \sin x + C$. B. $\int f(x) dx = 2x - \sin x + C$.
 C. $\int f(x) dx = 2x + \sin x + C$. D. $\int f(x) dx = \sin x + C$.

Câu 28: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng?



- A. 0. B. -1. C. -3. D. 2.

Câu 29: Trên đoạn $[2; 5]$, hàm số $y = x - \frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

- A. $x = 5$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = 4$.

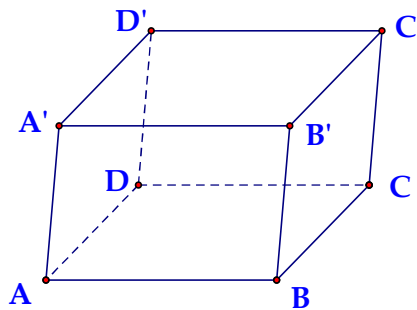
Câu 30: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \frac{-x+1}{x+2}$. B. $y = e^{-x^2+x}$. C. $y = -x^3 + x^2 - 4x$. D. $y = x^5 + 2x^3 + 2$.

Câu 31: Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2(2a) + 3\log_2 b = 2$, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a = \frac{2}{b^3}$. B. $2a = 3b + 4$. C. $a = 3b + 2$. D. $a = \frac{1}{b^3}$.

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và AD bằng



- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 135° .

Câu 33: Nếu $\int_1^3 [2f'(x) + 1] dx = 8 - 2f(1)$ thì $f(3)$ bằng

- A. $\frac{7}{2}$. B. 2. C. 3. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(2; -5; 3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 \end{cases}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $2x - y - z - 4 = 0$.

B. $2x - y - z - 6 = 0$.

C. $2x - y - 9 = 0$.

D. $2x - y + 1 = 0$.

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)\bar{z} = 4+2i$. Phần ảo của z bằng

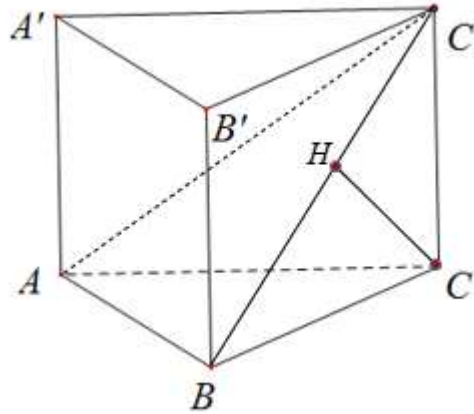
A. 1.

B. -1.

C. 3.

D. -3.

Câu 36: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = 3; AA' = 4$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABC') là:



A. $\frac{12}{5}$.

B. $\frac{5}{12}$.

C. $\frac{7}{12}$.

D. $\frac{12}{7}$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên BC' ta chứng minh được $CH \perp (ABC')$ do đó

$$d(C, (ABC')) = CH. \text{ Ta có } \frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} \Rightarrow CH = \frac{12}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(C, (ABC')) = \frac{12}{7}.$$

Câu 37: Gọi S là tập hợp các ước tự nhiên của 31049568. Lấy 1 số thuộc S , xác suất để lấy được 1 số không là bội của 6 bằng

A. $\frac{7}{9}$.

B. $\frac{2}{9}$.

C. $\frac{2}{7}$.

D. $\frac{5}{7}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 31049568 = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 13^3 \text{ gọi } x \in S \Rightarrow x = 2^a \cdot 3^b \cdot 13^c \text{ trong đó } \begin{cases} 0 \leq a \leq 5 \\ 0 \leq b \leq 6 \\ 0 \leq c \leq 3. \end{cases}$$

Do đó tập S có số phần tử là $6 \cdot 7 \cdot 4 \Rightarrow n(\Omega) = 6 \cdot 7 \cdot 4$.

Gọi A : "Số được chọn không là bội của 6"

$$\text{Khi đó } \bar{A} : \text{"Số được chọn là bội của 6"} \text{ khi đó } \begin{cases} 1 \leq a \leq 5 \\ 1 \leq b \leq 6 \end{cases} \Rightarrow n(\bar{A}) = 5 \cdot 6 \cdot 4$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{5.6.4}{6.7.4} = \frac{5}{7} \text{ do đó } \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{2}{7}$$

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;-2)$, $B(3;-2;0)$ và $C(1;2;2)$. Đường cao kẻ từ A của tam giác ABC có phương trình là:

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$.

C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{2}$.

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

Lời giải

Gọi đường cao kẻ từ A là AH khi đó

$$\begin{cases} AH \subset (ABC) \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_{AH} = \vec{n}_{(ABC)} \wedge \vec{BC} = (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \wedge \vec{BC} = (-24; 24; -72) = 24(1; -1; 3).$$

Vậy đường cao tam giác ABC có phương trình là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$.

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(-4^x + 5.2^{x+2} - 64) \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} 4x+8} \geq 0$?

A. 15.

B. 16.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Điều kiện $\log_{\frac{1}{2}} 4x+8 \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 4x \leq 8 \Leftrightarrow 0 < x \leq 64$.

$$\begin{aligned} (-4^x + 5.2^{x+2} - 64) \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} 4x+8} \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} 4x+8 = 0 \\ -4^x + 5.2^{x+2} - 64 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64 \\ -(2^x)^2 + 20.2^x - 64 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 64 \\ -(2^x)^2 + 20.2^x - 64 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64 \\ 4 \leq 2^x \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có 4 số nguyên x thỏa mãn bài toán.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-5	$\frac{3}{2}$	4	0	$+\infty$

Tập nghiệm của phương trình $\log(x-1).f'(f(x)) = 0$ có số phần tử là

A. 12.

B. 8.

C. 7.

D. 13.

Lời giải

Phương trình $\log(x-1).f'(f(x))=0$ có điều kiện $x>1$. Khi đó

$$\log(x-1).f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log(x-1)=0 \\ f'(f(x))=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ f(x)=-1 \quad (\text{Vô nghiệm}) \\ f(x)=1 \quad 2 \text{ nghiệm} \\ f(x)=2 \quad 3 \text{ nghiệm} \\ f(x)=4 \quad 2 \text{ nghiệm, trong đó có nghiệm } x=2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $\log(x-1).f'(f(x))=0$ có 7 phần tử.

Câu 41. Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2 - 6z + 10m - m^2 = 0$ (m là tham số thực).

Tổng tất cả các giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|z_2 + |z_2|z_1 = 12$ bằng

- A. 6. B. 10. C. 20. D. 25.

Lời giải

Phương trình $z^2 - 6z + 10m - m^2 = 0$ có $\Delta' = 9 - 10m + m^2$

Trường hợp 1: $\Delta' = 9 - 10m + m^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 9 \\ m \leq 1 \end{cases}$. Khi đó z_1, z_2 là số thực và $\begin{cases} z_1 + z_2 = 6 \\ z_1 \cdot z_2 = 10m - m^2 \end{cases}$

+ Nếu $z_1 \cdot z_2 < 0 \Rightarrow |z_1|z_2 + |z_2|z_1 = 0$ không thỏa mãn

+ Nếu $z_1 \cdot z_2 > 0 \Leftrightarrow 10m - m^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 10$ do $z_1 + z_2 > 0 \Rightarrow z_1, z_2 > 0$.

$$|z_1|z_2 + |z_2|z_1 = 12 \Leftrightarrow z_1z_2 = 6 \Leftrightarrow 10m - m^2 = 6 \Leftrightarrow m = 5 \pm \sqrt{19} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Trường hợp 2: $\Delta' = 9 - 10m + m^2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 9$. Khi đó z_1, z_2 là số phức liên hợp của nhau

$$|z_1|z_2 + |z_2|z_1 = 12 \Leftrightarrow |z_1|(z_2 + z_1) = 12 \Leftrightarrow |z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = 4 \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = 4 \Leftrightarrow 10m - m^2 = 4 \Leftrightarrow m = 5 \pm \sqrt{21} \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy có 2 giá trị $m = 5 \pm \sqrt{19}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán nên tổng tất cả các giá trị của m bằng 10.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$; $(\beta): 2x + y - 3z + 3 = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (α) đồng thời Δ song song với mặt phẳng (β) và Δ cắt trục Oy đi qua điểm nào sau đây

- A. $(-2; -2; 1)$. B. $(2; -4; 1)$. C. $(-2; 2; -1)$. D. $(-2; 1; -3)$.

Lời giải

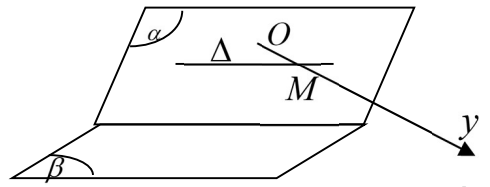
+Ta có: $\overline{n_\alpha} = (1; 1; -1); \overline{n_\beta} = (2; 1; -3)$.

Do $\Delta \subset (\alpha) \Rightarrow \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_\alpha; \Delta // (\beta) \Rightarrow \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_\beta$

Suy ra: $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (-2; 1; -1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ .

+ Do $\Delta \subset (\alpha)$ Gọi $M = \Delta \cap Oy \Rightarrow M = Oy \cap (\alpha)$. Suy ra $M(0; -3; 0)$.

Vậy pt của Δ là:
$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -3 + t \\ z = -t \end{cases}$$
 thay tọa độ các điểm ta thấy đường thẳng đi qua $(2; -4; 1)$.



Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \cos x - x \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = F(\pi) = 2$, khi đó giá trị của $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{4 + \pi}{2}$.

B. 2.

C. 3.

D. $\frac{2 + \pi}{2}$.

Lời giải

Giả thiết suy ra $f(x) = \int (\cos x - x \sin x) dx = \sin x - \int x \sin x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$. Theo công thức nguyên hàm từng phần suy ra

$$f(x) = \sin x + x \cos x - \int \cos x dx = x \cos x + C_1.$$

Lại có $F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cos x + C_1) dx$ tương tự ta tìm được

$$F(x) = x \sin x + \cos x + C_1 x + C_2.$$

$$\text{Do } \begin{cases} F(0) = 2 \\ F(\pi) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + C_2 = 2 \\ -1 + C_1 \pi + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = \frac{2}{\pi} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x \sin x + \cos x + \frac{2}{\pi} x + 1 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2 = \frac{4 + \pi}{2}.$$

Câu 44. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \frac{1}{z - i \cdot |z|}$ có phần ảo bằng $\frac{1}{4}$. Xét

các số phức $z_1, z_2, z_3 \in S$, giá trị lớn nhất của $P = z_1 \cdot \overline{(z_3 - z_2)} + z_2 \cdot \overline{(z_3 - z_1)} + z_3 \cdot \overline{(z_1 + z_2)}$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 10.

D. 12.

Lời giải

Ta có

$$w = \frac{1}{z - i \cdot |z|} = \frac{\bar{z} + i \cdot |z|}{(z - i \cdot |z|)(\bar{z} + i \cdot |z|)} = \frac{\bar{z} + i \cdot |z|}{2|z|^2 + i \cdot |z|(z - \bar{z})}. \text{ Đặt } z = a + bi; a, b \in \mathbb{R} \text{ \& } i^2 = -1.$$

$$w = \frac{a}{2|z|^2 - 2b|z|} + \frac{|z| - b}{2|z|(|z| - b)}i = \frac{a}{2|z|^2 + 2b|z|} + \frac{1}{2|z|}i \text{ giả thiết suy ra } |z| = 2.$$

$$P = z_1(\overline{z_3 - z_2}) + z_2(\overline{z_3 - z_1}) + z_3(\overline{z_1 + z_2}) = -(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3 + z_1\overline{z_3} + \overline{z_1}z_3$$

Sử dụng $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$ ta được

$$P = |z_1 - z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 - |z_2 - z_3|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - |z_3 - z_1|^2 + |z_3|^2 + |z_1|^2 = |z_1 - z_2|^2 - |z_2 - z_3|^2 - |z_3 - z_1|^2 + 8$$

Trong mặt phẳng Oxy gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 khi đó A, B, C thuộc đường tròn tâm (O, 2) bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của

$$P = AB^2 - BC^2 - AC^2 + 8$$

+ Nếu $A \equiv B \Rightarrow P = -2BC^2 + 8 \leq 8$. Dấu bằng xảy ra khi $A \equiv B \equiv C$.

+ Nếu 3 điểm A, B, C phân biệt khi đó ABC tạo thành tam giác

Theo định lý sin ta có $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 4$ do đó

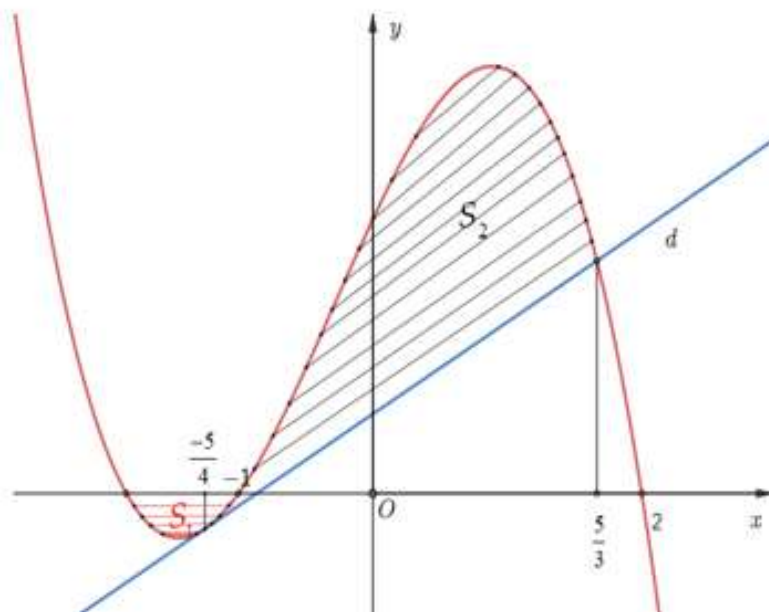
$$P = 16(\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B) + 8 = 16\left(\sin^2 C - 1 + \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2}\right) + 8$$

$$= 16(-\cos^2 C + \cos(A+B) \cdot \cos(A-B)) + 8 = 4(-4\cos^2 C - 4\cos C \cos(A-B)) + 8$$

$$-4(2\cos C + \cos(A-B))^2 + 8 + 4\cos^2(A-B) \leq 12.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 2\cos C + \cos(A-B) = 0 \\ \cos(A-B) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 30^\circ \\ C = 120^\circ \end{cases}.$$

Câu 45. Cho hàm số bậc ba $f(x) = \frac{-1}{2}x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là (C) cắt trục hoành tại 3 phân biệt trong đó 2 điểm có hoành độ hoành độ lần lượt là $x = -1, x = 2$. Đường thẳng d tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -\frac{5}{4}$ cắt đồ thị tại điểm có hoành độ $x = \frac{5}{3}$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi phần đồ thị (C) bên dưới trục hoành với trục hoành, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và tiếp tuyến d (như hình vẽ bên).



Biết rằng tỉ số $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$ (phân số tối giản) khi đó $19a - b$ bằng

A. 459.

B. 435.

C. 705.

D. 775.

Lời giải

Giả thiết suy ra $f(x) = \frac{-1}{2}(x-\alpha)(x+1)(x-2)$. Gọi phương trình tiếp tuyến d là $y = mx + n$

suy ra $f(x) - mx - n = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{5}{4}\right)^2\left(x - \frac{5}{3}\right)$ hay $f(x) = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{5}{4}\right)^2\left(x - \frac{5}{3}\right) + mx + n$.

So sánh hệ số của x^2 trong hai cách biểu diễn $f(x)$ ta được $\alpha = \frac{-11}{6}$. Thay vào $f(x)$ tính được

$$S_1 = \int_{-\frac{11}{6}}^{-1} \left| \frac{-1}{2} \left(x + \frac{11}{6} \right) (x+1)(x-2) \right| dx = \frac{5125}{31104}, \quad S_2 = \int_{-1}^{\frac{5}{3}} \left| \frac{-1}{2} \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 \left(x - \frac{5}{3} \right) \right| dx = \frac{28561}{31104}.$$

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{656}{12005}$ do đó $19a - b = 459$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành biết rằng $\widehat{SAD} = \widehat{BAC} = 90^\circ$, cạnh $SA = 2\sqrt{2}a$, $BC = 2a$, $SB = \sqrt{6}a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD biết khoảng cách giữa CH và SB bằng $\sqrt{2}a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

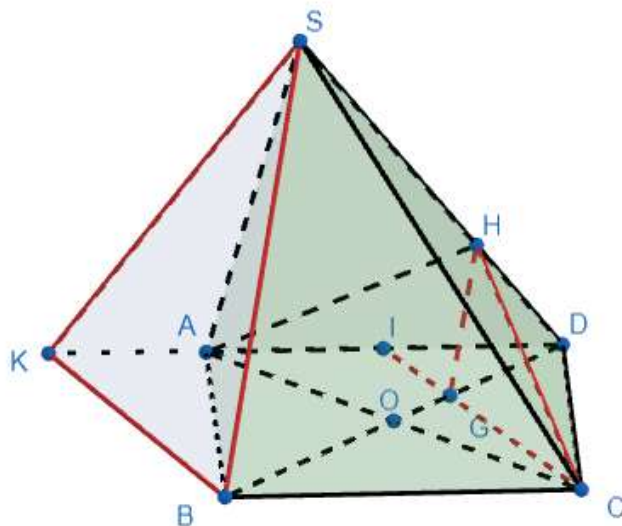
A. $\sqrt{2}a^3$.

B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

C. $\sqrt{10}a^3$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{3}a^3$.

Lời giải



Tam giác SAD vuông tại S nên $\frac{HD}{SD} = \frac{HD \cdot SD}{SD^2} = \frac{AD^2}{SD^2} = \frac{(2a)^2}{(2a)^2 + (2\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{3}$

Kẻ $HG \parallel SB, G \in BD \Rightarrow \frac{DG}{DB} = \frac{DH}{DS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DF}{DO} = \frac{2}{3}$ do đó G là trọng tâm tam giác ACD và CG đi qua trung điểm I của AD .

Kẻ $BK \parallel IC, K \in AD \Rightarrow (HCI) \parallel (SBK) \Rightarrow d(CH; SB) = d((CHI); (SBK)) = d(I; (SBK))$.

Do đó $d(I; (SBK)) = 2d(A; (SBK)) = 2 \frac{3V_{SABK}}{S_{\Delta SBK}} = a\sqrt{2} \Rightarrow V_{SABK} = \frac{S_{\Delta SBK} \cdot a\sqrt{2}}{6}$

Dễ thấy $IKBC$ là hình bình hành và I là trung điểm AD nên A là trung điểm IK .

Giả thiết suy ra $SK = 3a, BK = CI = \frac{1}{2}AD = a$ và $SB = \sqrt{6}a$ do đó $S_{\Delta SBK} = \frac{\sqrt{5}}{2}a^2$.

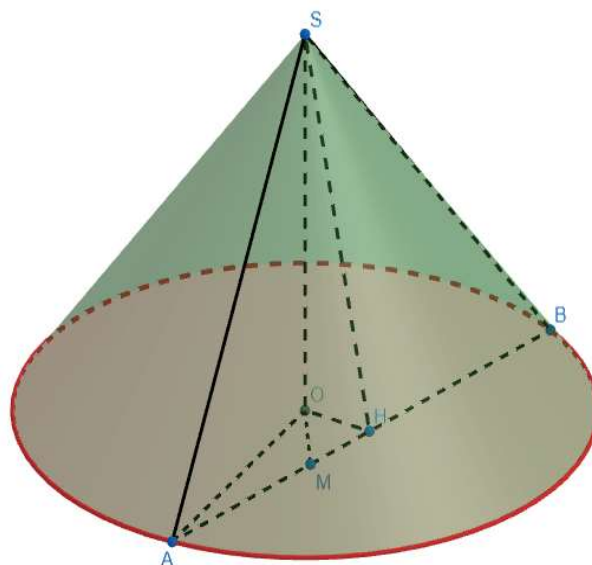
$$\Rightarrow V_{SABK} = \frac{a^3 \sqrt{10}}{12}$$

Lại có $S_{\Delta ABK} = S_{\Delta IDC} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABCD} \Rightarrow V_{SABK} = \frac{1}{4}V_{SABCD} \Rightarrow V_{SABCD} = 4V_{SABK} = \frac{\sqrt{10}}{3}a^3$

Câu 47: Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h = \sqrt{5}$ và bán kính đáy $r = 2\sqrt{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua S và điểm M nằm trong đường tròn đáy cách tâm đáy một khoảng bằng 1. Diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (P) có giá trị lớn nhất là

- A. 6. B. $\frac{\sqrt{409}}{4}$. C. $\frac{13}{2}$. D. $\sqrt{42}$.

Lời giải



TSP-2022

TSP-2022

Gọi thiết diện là tam giác SAB , H là trung điểm AB , O là tâm đáy đặt $OH = x, 0 \leq x \leq 1$

Khi đó $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 5} \cdot 2\sqrt{8 - x^2} = \sqrt{-x^4 + 3x^2 + 40}$

Ta có $S_{\Delta SAB}^2 = -x^4 + 3x^2 + 40 = f(x)$ dễ thấy $\text{Max}_{[0;1]} f(x) = 42$ do đó $\text{Max} S_{\Delta SAB} = \sqrt{42}$.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên $x \in (-10; 10)$ sao cho ứng với mỗi x có ít nhất 8 số nguyên y thỏa mãn $2^{70-6y} + 4^{x^2+y} \cdot \log_2(10-x-y) \leq 65 \cdot 4^{x^2+y}$?

A. 7 .

B. 8 .

C. 10 .

D. 15 .

Lời giải

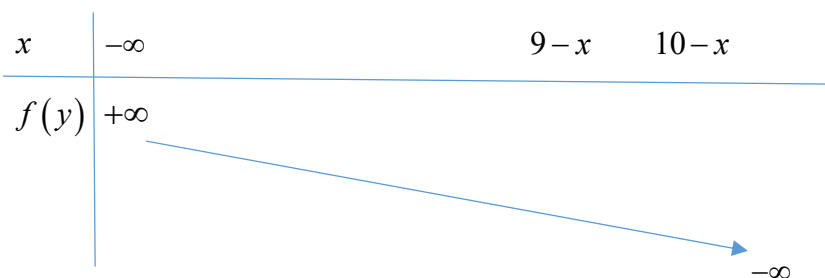
Điều kiện $10 - x - y > 0 \Leftrightarrow y < 10 - x$.

Bất phương trình tương đương $4^{-x^2-4y+35} + \log_2(10-x-y) - 65 \leq 0$.

Xét hàm số $f(y) = 4^{-x^2-4y+35} + \log_2(10-x-y) - 65, y \in (-\infty; 10-x)$.

Ta có $f'(y) = -4 \cdot 4^{-x^2-4y+35} \ln 4 - \frac{1}{(10-x-y) \ln 2} < 0, \forall x \in (-\infty; 10-x)$

Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 10-x)$.



Nhận xét: $f(-x+9) = 4^{-x^2+4x-1} - 65 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $y = -x+9$ là nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình đã cho.

Do đó yêu cầu bài toán trở thành $y = -x+2$ cũng là nghiệm hay $f(-x+2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4^{-x^2+4x+27} + \log_2(8) - 65 \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 27 - \log_4(62) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 - \sqrt{15 - \log_4 62} \\ x \geq 2 + \sqrt{15 - \log_4 62} \end{cases}.$$

Do x nguyên và $x \in (-10; 10)$ nên $x \in \{-9, \dots, -4, 8, 9\}$.

Vậy có 8 giá trị x thỏa mãn bài toán.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z-7=0$ đi qua $M(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x+2y-4z-7=0$. Đường thẳng d qua M cắt $(P), (S)$ lần lượt tại các điểm A, B sao cho M là trung điểm AB . Biết độ dài ngắn nhất của đoạn AB là $2\sqrt{a-2\sqrt{b}}$ giá trị của $a+b$ bằng

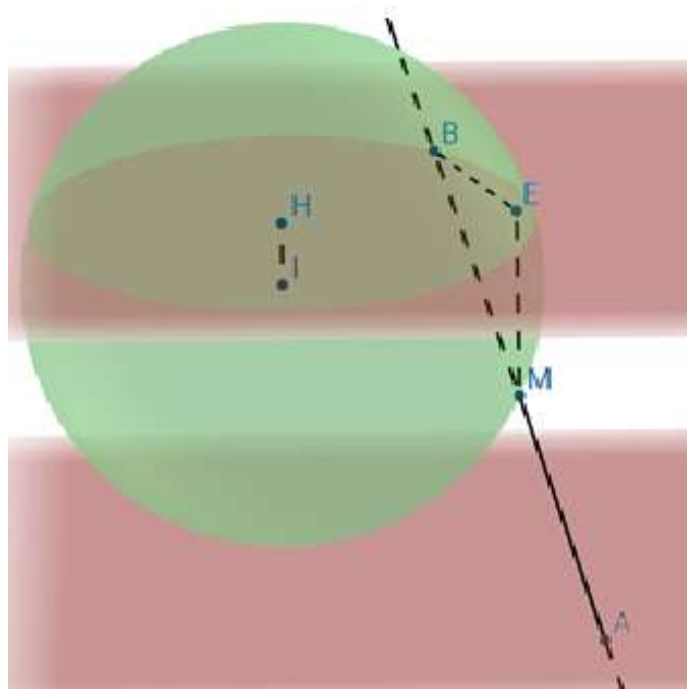
A. 232.

B. 223.

C. 212.

D. 192.

Lời giải

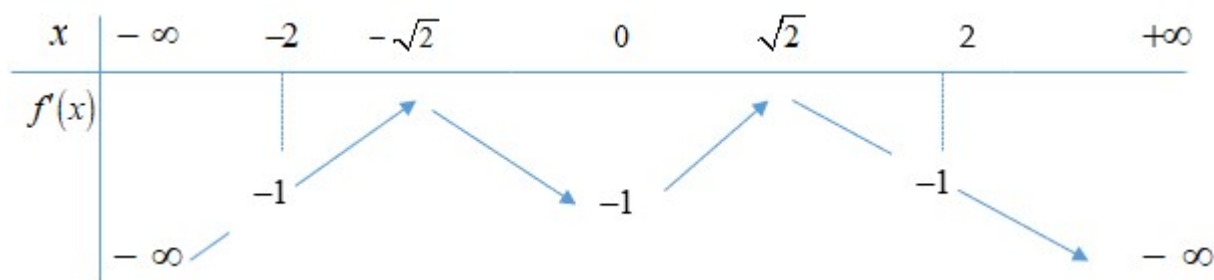


Giả thiết suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-2;-1;2)$ và bán kính $R=4$. Giả thiết suy ra B thuộc mặt phẳng (Q) ảnh của M qua phép đối xứng tâm M .

Để dàng tìm được $(Q): x+2y-2z+11=0$. Lại có $B \in (S) \Rightarrow B \in (S) \cap (Q)$ là một đường tròn tâm $H\left(\frac{-7}{3}; \frac{-5}{3}; \frac{8}{3}\right)$ bán kính $r = \sqrt{15}$. Gọi E là hình chiếu của M trên (Q) khi đó tìm được $E(1; -3; 3)$.

Ta có $AB = 2BM = 2\sqrt{9+EB^2} \geq 2\sqrt{9+(EH-r)^2} = 2\sqrt{37-2\sqrt{195}}$. Dấu bằng xảy ra khi H, E, B theo thứ tự thẳng hàng.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có $f(2) = 36, f(-2) = -32$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-50; 50)$ để hàm số $g(x) = \left| f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - \frac{6}{2x-1} + m \right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 63.

B. 34.

C. 36.

D. 62.

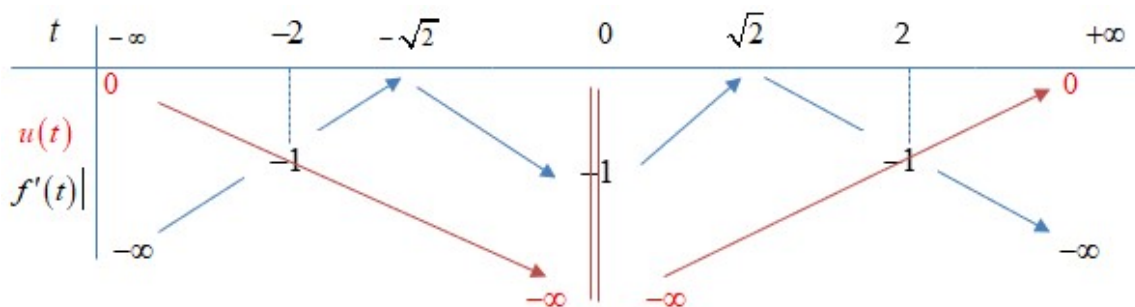
Lời giải

Xét hàm số $h(x) = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) - \frac{6}{2x-1} + m, D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; -1\right\}$.

Ta có $h'(x) = f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{12}{(2x-1)^2}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{-4(x+1)^2}{(2x-1)^2}$ đặt $t = \frac{2x-1}{x+1}$ ta được phương trình $f'(t) = \frac{-4}{t^2}$

Đặt $u(t) = \frac{-4}{t^2}$ dễ dàng suy ra được bảng sau



Do đó $f'(t) = \frac{-4}{t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-2 \end{cases}$ thay lại ta được $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{-1}{4}$. Ta có bảng biến thiên của $h(x)$.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	-	-	0	+	+
$h(x)$	$36+m$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-28+m$		$+\infty$ ↗ $-\infty$	$36+m$ ↗

Do $h(x)$ có 1 điểm cực trị nên để hàm số $|h(x)|$ có 5 điểm cực trị khi chỉ khi đồ thị $h(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt do đó ta được điều kiện là $\begin{cases} 36+m > 0 \\ -28+m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -36 < m < 28$.

Vậy có 63 giá trị của m .

----- THE END -----