

NGUYỄN HOÀNG VIỆT



THPT QG
2022

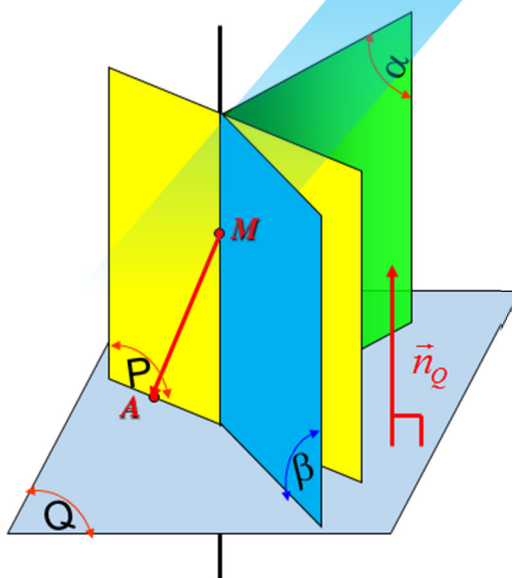
Môn **TOÁN**

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

0905193688

82 Võ Thị Sáu, Q. Thuận

Ba Dân – Quảng Bình



Mục lục

Chương 3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	1
Bài 1. TỌA ĐỘ VEC TƠ - TỌA ĐỘ ĐIỂM	1
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	3
Dạng 1. Tọa độ véc tơ	3
Dạng 2. Tọa độ điểm	6
Dạng 3. Hình chiếu, đối xứng qua các trục, các mặt toạ độ	11
Dạng 4. Tính diện tích và thể tích	12
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	14
Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	17
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	17
(B) PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	17
Dạng 1. Xác định tâm I , bán kính r của mặt cầu cho trước	17
Dạng 2. Mặt cầu dạng khai triển $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (1).	18
Dạng 3. Lập phương trình mặt cầu	20
Dạng 4. Vị trí tương đối	24
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	26
Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	29
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	29
(B) PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	31
Dạng 1. Xác định véc tơ pháp tuyến và điểm thuộc mặt phẳng	31
Dạng 2. Lập phương trình mặt phẳng khi biết các yếu tố liên quan	31
Dạng 3. Phương trình theo đoạn chắn	35
Dạng 4. Khoảng cách và góc	36
Dạng 5. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng	38
Dạng 6. Vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt cầu	39
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	43

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	46
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	46
(B) PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	49
Dạng 1. Xác định điểm thuộc và véc tơ chỉ phương của đường thẳng	49
Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng khi biết vài yếu tố liên quan	50
Dạng 3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng	53
Dạng 4. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng	55
Dạng 5. Góc và khoảng cách	56
Dạng 6. Hình chiếu H của điểm M lên mặt phẳng (P)	58
Dạng 7. Hình chiếu H của điểm M lên đường thẳng d	59
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	61
Bài 5. MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ	66
(A) PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	66
Dạng 1. Tìm max - min bằng cách thiết lập hàm và khảo sát hàm	66
Dạng 2. Tìm max - min bằng cách sử dụng mối quan hệ giữa đường cao và đường xiên	68
Dạng 3. Tìm max - min bằng cách quy về tìm hình chiếu của điểm lên mặt	70
Dạng 4. Tìm max - min bằng cách quy về tìm điều kiện ba điểm thẳng hàng	73
Dạng 5. Tìm max min liên quan đến phương trình theo đoạn chắn	74
(B) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	76
Bài 6. BỘ ĐỀ ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG	80
(A) ĐỀ SỐ 1	80
(B) ĐỀ SỐ 2	83
(C) ĐỀ SỐ 3	85
(D) ĐỀ SỐ 4	88
(E) ĐỀ SỐ 5	91
Bài 7. ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC CHỦ ĐỀ	94
(A) ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1	94
(B) ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2	94
(C) ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3	94
(D) ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 4	94
(E) ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 5	94

F ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC ĐỀ TỔNG ÔN 94





Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1

TỌA ĐỘ VEC TƠ - TỌA ĐỘ ĐIỂM

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hệ trục tọa độ $Oxyz$

⚙ Gồm ba trục đôi một vuông góc: trục Ox , trục Oy và trục Oz .

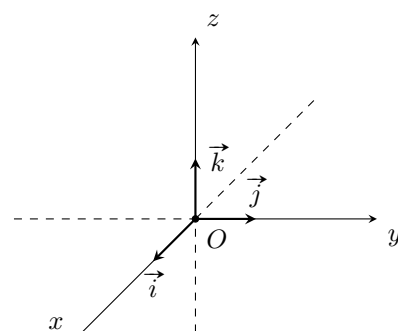
⚙ Ba vec tơ đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

⚠ Chú ý:

$$\textcircled{1} \vec{i} \perp \vec{j}; \vec{j} \perp \vec{k}; \vec{i} \perp \vec{k}$$

$$\textcircled{2} |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

⚙ Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) và (Oxz) được gọi là các mặt phẳng tọa độ.



2. Tọa độ vec tơ

⚙ Cho $\vec{v} = (a, b, c)$ thì $\vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$.

⚙ Cho hai vec tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó

$$\textcircled{1} \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3).$$

$$\textcircled{2} k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3), \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{3} \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \text{ . Đặc biệt } \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

$$\textcircled{4} \vec{a} \text{ cùng phương với } \vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: \vec{a} = k \cdot \vec{b}, (\vec{b} \neq \vec{0}) \text{ hay } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} (b_1 b_2 b_3 \neq 0).$$

3. Tích vô hướng và ứng dụng

⚙ **Định nghĩa:** Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

⚙ Các ứng dụng:

- ① Tính độ dài: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- ② Tính góc: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$.
- ③ Chứng minh vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$.

4. Tích có hướng và ứng dụng

⚙ **Công thức tọa độ:** Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó, tích có hướng của hai véc tơ là một véc tơ kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ và được tính theo công thức sau:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2 b_3 - b_2 a_3; a_3 b_1 - b_3 a_1; a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

⚙ Chú ý:

- ① Gọi $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ thì $\vec{n} \perp \vec{a}$ và $\vec{n} \perp \vec{b}$.
- ② $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.
- ③ Điều kiện 3 véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

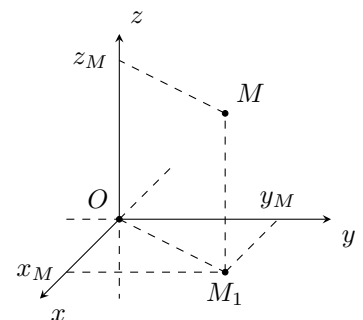
5. Tọa độ điểm

⚙ Xác định tọa độ điểm M (đặc biệt) trên hệ trục $Oxyz$:

- ① $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0)$.
- ② $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$
- ③ $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; z)$
- ④ $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$
- ⑤ $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z)$
- ⑥ $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$

⚙ Xác định tọa độ một điểm M bất kì (không đặc biệt)

- ① Chiếu vuông góc điểm M lên (Oxy) thành M_1 ;
- ② Từ M_1 , hạ vuông góc vào các trục Ox, Oy để xác định hoành x_M và tung y_M ;
- ③ Từ M , hạ vuông góc với trục Oz để xác định cao độ z_M ;
- ④ Kết luận tọa độ $M(x_M; y_M; z_M)$.



⚙ Cho điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$. Ta có

- ① $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- ② $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

- ③ M là trung điểm của đoạn AB thì $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- ④ G là trọng tâm của ΔABC thì $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.
- ⑤ Điều kiện ba điểm A, B, C thẳng hàng: $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$.

6. Công thức tính diện tích, thể tích

- ⚙ Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|$.
- ⚙ Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \right|$.
- ⚙ Thể tích khối tứ diện $ABCD$: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right|$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Tất cả bài toán dưới đây đều xét trong không gian $Oxyz$.

Dạng 1. Tọa độ véc tơ

- ✎ **Ví dụ 1.** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Điều kiện để $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$ là
- Ⓐ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$. Ⓑ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Ⓒ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Ⓓ $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

 Lời giải.

- ✎ **Ví dụ 2.** Cho các véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 1)$, $\vec{b} = (1; -2; -1)$. Kết luận nào sau đây là đúng?
- Ⓐ $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$. Ⓑ $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
 Ⓒ $\vec{a} + \vec{b} = (2; -4; -2)$. Ⓓ $\vec{a} + \vec{b} = (2; -4; 0)$.

 Lời giải.

- ✎ **Ví dụ 3.** Cho $\vec{a} = (1; -1; 3)$, $\vec{b} = (2; 0; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
- Ⓐ $\vec{u} = (4; 2; -9)$. Ⓑ $\vec{u} = (-4; -2; 9)$. Ⓒ $\vec{u} = (1; 3; -11)$. Ⓓ $\vec{u} = (-4; -5; 9)$.

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 4.** Cho ba véctơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

(A) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.

(B) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.

(C) $\vec{a} \perp \vec{b}$.

(D) $\vec{c} \perp \vec{b}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 5.** Cho hai véc-tơ $\vec{u} = \vec{i}\sqrt{3} + \vec{k}$ và $\vec{v} = \vec{j}\sqrt{3} + \vec{k}$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(A) 2.

(B) 1.

(C) -3.

(D) 3.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 6.** Cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m để $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

(A) $m = 4$.

(B) $m = 2$.

(C) $m = 3$.

(D) $m = -2$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 7.** Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$ và $\vec{b} = (2; -1; 4)$. Tính tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

(A) $[\vec{a}, \vec{b}] = (1; -3; 1)$.

(B) $[\vec{a}, \vec{b}] = (11; -2; 5)$.

(C) $[\vec{a}, \vec{b}] = (3; 1; 7)$.

(D) $[\vec{a}, \vec{b}] = (11; 2; -5)$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

❖ Ví dụ 8. Cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 0; -2)$, $\vec{b} = (-2; 1; 3)$, $\vec{c} = (-4; 3; 5)$. Tìm hai số thực m, n sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$.

(A) $m = 2; n = -3$.

(B) $m = -2; n = -3$.

(C) $m = 2; n = 3$.

(D) $m = -2; n = 3$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 9. Để hai vectơ $\vec{a} = (m; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; n; 2)$ cùng phương, ta phải có

(A) $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 10. Cho vectơ $\vec{a} = (1; -2; -1)$ và $\vec{b} = (2; 1; -1)$. Giá trị của $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ là

(A) $-\frac{1}{6}$.

(B) $\frac{1}{6}$.

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 11. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài của vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng

(A) -54 .

(B) 54 .

(C) 9 .

(D) 6 .

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 12.** Cho vectơ $\vec{a} = (2, -1, -2)$ và $\vec{b}$ thỏa $|\vec{b}| = 6$ và $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

- (A) $\sqrt{74}$. (B) $2\sqrt{21}$. (C) $\sqrt{21}$. (D) 8.

 **Lời giải.**

Dạng 2. Tọa độ điểm

❖ **Ví dụ 13.** Cho $A(1; 5; -2); B(2; 1; 1)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A** $I\left(\frac{3}{2}; 3; -\frac{1}{2}\right)$.
 B $I\left(\frac{3}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$.
 C $I\left(\frac{3}{2}; 2; -\frac{1}{2}\right)$.
 D $I(3; 6; -1)$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 14.** Cho tam giác ABC , biết $A(1; -2; 4)$, $B(0; 2; 5)$, $C(5; 6; 3)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- Ⓐ $G(2; 2; 4)$. Ⓑ $G(4; 2; 2)$. Ⓒ $G(3; 3; 6)$. Ⓓ $G(6; 3; 3)$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 15.** Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và điểm B thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OB} = \vec{k} - 3\vec{i}$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB .

(A) $(-4; -2; -2)$.

(B) $(-1; 1; 2)$.

(C) $(4; 2; 2)$.

(D) $(-2; -1; -1)$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 16.** Cho điểm $A(1; -2; -1)$ và $B(2; -1; 3)$. Độ dài của véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là

(A) $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2}$.

(B) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$.

(C) $|\overrightarrow{AB}| = 2$.

(D) $|\overrightarrow{AB}| = 18$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 17.** Cho ba điểm $A(1; 3; 2)$, $B(2; -1; 5)$, $C(3; 2; -1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

(A) $D(2; 6; 8)$.

(B) $D(0; 0; 8)$.

(C) $D(2; 6; -4)$.

(D) $D(4; -2; 4)$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 18.** Cho $A(1; -1; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(2; 1; 3)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là

(A) $M = (3; 2; -3)$.

(B) $M = (3; -2; 3)$.

(C) $M = (3; -2; -3)$.

(D) $M = (3; 2; 3)$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 19.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, với $A(-3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $D(0; 0; 1)$ và $A'(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm C' .

- (A) $C'(10; 4; 4)$. (B) $C'(-13; 4; 4)$. (C) $C'(13; 4; 4)$. (D) $C'(7; 4; 4)$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 20.** Cho $A(2; 1; 4)$, $B(2; 2; 6)$, $C(6; 0; 1)$. Tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu?

- (A) -7 . (B) 5 . (C) -12 . (D) 3 .

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 21.** Cho tam giác ABC có $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$. Số đo của góc B là

- (A) 45° . (B) 60° . (C) 30° . (D) 120° .

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 22.** Cho ba điểm $M(2; 3; 1)$, $N(3; 1; 1)$ và $P(1; m - 1; 2)$. Tìm m để $MN \perp NP$.

- (A) $m = -4$. (B) $m = 2$. (C) $m = 1$. (D) $m = 0$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 23.** Cho ba điểm $A(2; -3; 4)$, $B(1; y; -1)$, $C(x; 4; 3)$. Biết ba điểm A , B , C thẳng hàng. Tính tổng $5x + y$.

☐ A 41.

☐ B 40.

☐ C 42.

☐ D 36.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 24.** Cho điểm $A(3; -1; 5)$, $B(m; 2; 7)$. Tìm tất cả các giá trị của m để $AB = 7$.

☐ A $m = 9$ hoặc $m = -3$.

☐ B $m = -3$ hoặc $m = -9$.

☐ C $m = 9$ hoặc $m = 3$.

☐ D $m = 3$ hoặc $m = -3$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 25.** Cho hai điểm $B(0; 3; 1)$, $C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm tọa độ điểm M .

☐ A $M(-1; 4; -2)$.

☐ B $M(-1; 4; 2)$.

☐ C $M(1; -4; -2)$.

☐ D $M(-1; -4; 2)$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 26.** Cho tam giác ABC có $\overrightarrow{AB} = (-3; 0; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (5; -2; 4)$. Độ dài trung tuyến AM bằng

☐ A $3\sqrt{2}$.

☐ B $4\sqrt{2}$.

☐ C $2\sqrt{3}$.

☐ D $5\sqrt{3}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 27.** Cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

A 5.

B 4.

C 14.

D 15.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 28.** Cho tam giác ABC , biết $A(1; 1; 1)$, $B(5; 1; -2)$, $C(7; 9; 1)$. Tính độ dài đường phân giác trong AD của góc A .

A $\frac{3\sqrt{74}}{2}$.

B $2\sqrt{74}$.

C $3\sqrt{74}$.

D $\frac{2\sqrt{74}}{3}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 29.** Cho tam giác ABC có $A(-2; 0; 2)$, $B(1; 4; 2)$, $C(-5; 4; 2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

A $\left(-2; \frac{25}{8}; 2\right).$

B $\left(-2; \frac{5}{2}; 2\right).$

C $\left(-2; \frac{21}{8}; 2\right).$

D $\left(2; \frac{5}{2}; -2\right).$

 **Lời giải.**

Dạng 3. Hình chiếu, đối xứng qua các trục, các mặt toạ độ

- ☒ Chiếu lên "thành phần" nào thì "thành phần" đó giữ nguyên, các "thành phần" khác bằng 0.
- ☒ Đối xứng qua "thành phần" nào thì "thành phần" đó giữ nguyên, các "thành phần" khác đổi dấu.

⇒ **Ví dụ 30.** Cho điểm $A(-2; 3; 1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên trục Ox có tọa độ là

A $(2; 0; 0).$

B $(0; -3; -1).$

C $(-2; 0; 0).$

D $(0; 3; 1).$

 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 31.** Hình chiếu của điểm $M(1; -3; -5)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A $(1; -3; 5).$

B $(1; -3; 0).$

C $(1; -3; 1).$

D $(1; -3; 2).$

 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 32. Cho điểm $A(3; -1; 1)$. Điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oyz) là điểm
 (A) $M(-3; -1; 1)$. (B) $N(0; -1; 1)$. (C) $P(0; -1; 0)$. (D) $Q(0; 0; 1)$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 33. Cho điểm $A(-3; 2; -1)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua gốc tọa độ O là
 (A) $A'(3; -2; 1)$. (B) $A'(3; 2; -1)$. (C) $A'(3; -2; -1)$. (D) $A'(3; 2; 1)$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 34. Cho điểm $A(-2; 3; 4)$. Khoảng cách từ điểm A đến trục Ox là
 (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 2.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 35. Cho điểm $A(-2; 3; 4)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng Oxy là
 (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 2.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 4. Tính diện tích và thể tích

❖ Ví dụ 36. Cho ba điểm $A(-2; 2; 1)$, $B(1; 0; 2)$ và $C(-1; 2; 3)$. Diện tích tam giác ABC bằng
 (A) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. (B) $3\sqrt{5}$. (C) $4\sqrt{5}$. (D) $\frac{5}{2}$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 37.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $D(6; 5; 2)$. Diện tích của hình bình hành đó bằng

A $2\sqrt{83}$.

B $\sqrt{83}$.

C 83 .

D $\frac{\sqrt{83}}{2}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 38.** Cho bốn điểm $A(0; 1; 1)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(-1; 1; 0)$ và $D(2; 1; -2)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A $\frac{5}{6}$.

B $\frac{5}{3}$.

C $\frac{6}{5}$.

D $\frac{3}{2}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 39.** Cho ba điểm $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$ và $C(2; -1; 3)$. Tìm tọa độ điểm D thuộc Oy sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 5.

A $D(0; -7; 0)$.

B $D(0; 8; 0)$.

C $\begin{bmatrix} D(0; -8; 0) \\ D(0; 7; 0) \end{bmatrix}$.

D $\begin{bmatrix} D(0; -7; 0) \\ D(0; 8; 0) \end{bmatrix}$.

💬 **Lời giải.**

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(1; -2; 3)$; $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$. Khi đó tọa độ $\vec{a} + \vec{b}$ là

- (A) $(3; -2; 0)$. (B) $(3; -5; -3)$. (C) $(3; -5; 0)$. (D) $(1; 2; -6)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{a}$ là

- (A) $(2; -1; -3)$. (B) $(-3; 2; -1)$. (C) $(2; -3; -1)$. (D) $(-1; 2; -3)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = (2; 3; -7)$. Tìm tọa độ của $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

- (A) $\vec{x} = (2; -1; 19)$. (B) $\vec{x} = (-2; 3; 19)$. (C) $\vec{x} = (-2; -3; 19)$. (D) $\vec{x} = (-2; -1; 19)$.

Câu 4. Trong không gian Oxy , cho $A(1; -1; 2)$ và $B(-1; 0; 1)$. Tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- (A) $(2; -1; 1)$. (B) $(-2; -1; -1)$. (C) $(-2; 1; -1)$. (D) $(0; -1; 3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 3)$. Hình chiếu của A trên trục Oz là

- (A) $Q(2; -1; 0)$. (B) $P(0; 0; 3)$. (C) $N(0; -1; 0)$. (D) $M(2; 0; 0)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- (A) $M(3; 0; 0)$. (B) $N(0; -1; 1)$. (C) $P(0; -1; 0)$. (D) $Q(0; 0; 1)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 1; 0)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; -1; 0)$. Tìm tọa độ của điểm N .

- (A) $N(4; 2; 0)$. (B) $N(-4; -2; 0)$. (C) $N(-2; 0; 0)$. (D) $N(2; 0; 0)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tìm tọa độ điểm B biết M là trung điểm của đoạn AB .

- (A) $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$. (B) $B(-4; 9; 8)$. (C) $B(5; 3; -7)$. (D) $B(5; -3; -7)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; 1)$. Trọng tâm G của tam giác OAB có tọa độ là

- (A) $(0; 1; 1)$. (B) $\left(0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. (C) $(0; 2; 4)$. (D) $(-2; -2; -2)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(3; -2; 1)$, $N(1; 0; -3)$. Gọi M' , N' lần lượt là hình chiếu của M và N lên mặt phẳng Oxy . Khi đó độ dài đoạn $M'N'$ là

- (A) $M'N' = 8$. (B) $M'N' = 4$. (C) $M'N' = 2\sqrt{6}$. (D) $M'N' = 2\sqrt{2}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1; 1; 2)$, $B(0; 1; -1)$, $C(x+2; y; -2)$ thẳng hàng. Tổng $x+y$ bằng

- (A) $\frac{7}{3}$. (B) $-\frac{8}{3}$. (C) $-\frac{2}{3}$. (D) $-\frac{1}{3}$.

Câu 12. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C .

- (A) $(0; -2; 0)$. (B) $(2; 2; 2)$. (C) $(2; 0; 2)$. (D) $(2; -2; 2)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-2; 5; 1)$. Khoảng cách từ M đến trục Ox bằng

- (A) $\sqrt{29}$. (B) 2 . (C) $\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{26}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 0; 1)$, $\vec{c} = (-1; 0; 1)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i}$ là

(A) $(-6; 2; 6)$.

(B) $(0; 2; 6)$.

(C) $(6; 2; -6)$.

(D) $(6; 2; 6)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 0; -3)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 0)$. Tính $\cos(\vec{u}; \vec{v})$.

(A) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$.

(B) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

(C) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

(D) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$ và $\vec{v} = (1; 0; m)$. Gọi S là tập hợp các giá trị m để hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 45° . Số phần tử của S là

(A) 4.

(B) 2.

(C) 1.

(D) Vô số.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(0; 3; 1)$, $C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm tọa độ điểm M .

(A) $M(-1; 4; -2)$.

(B) $M(-1; 4; 2)$.

(C) $M(1; -4; -2)$.

(D) $M(-1; -4; 2)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC trọng tâm G . Biết $A(0; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$, $G(1; 1; 1)$. Khi đó điểm C có tọa độ là

(A) $(2; 2; 4)$.

(B) $(-2; 0; 2)$.

(C) $(-2; -3; -2)$.

(D) $(2; 2; 0)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, tìm số thực a để vec-tơ $\vec{u} = (a; 0; 1)$ vuông góc với vec-tơ $\vec{v} = (2; -1; 4)$.

(A) $a = -2$.

(B) $a = 2$.

(C) $a = 4$.

(D) $a = -4$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, để hai vec-tơ $\vec{a} = (m; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; n; 2)$ cùng phương thì $m + n$ bằng

(A) $\frac{11}{6}$.

(B) $\frac{13}{6}$.

(C) $\frac{17}{6}$.

(D) 2.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 0)$ và $B(-4; 3; 2)$, tọa độ điểm M thuộc trục Oy sao cho M cách đều hai điểm A và B là

(A) $(6; 0; 0)$.

(B) $(0; 6; 0)$.

(C) $(0; -6; 0)$.

(D) $(0; 0; 7)$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vec-tơ $\vec{a} = (-2; -3; 1)$, $\vec{b} = (1; 0; 1)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

(A) $-\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

(B) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

(C) $-\frac{3}{2\sqrt{7}}$.

(D) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; 1)$, $B(-3; 0; 3)$, $C(2; 4; -1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

(A) $D(6; -6; 3)$.

(B) $D(6; 6; 3)$.

(C) $D(6; -6; -3)$.

(D) $D(6; 6; -3)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$, $a \neq 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AC' .

(A) $|a|$.

(B) $2|a|$.

(C) $3|a|$.

(D) $\frac{3|a|}{2}$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$, $B(0; -2; 3)$. Tính diện tích tam giác OAB .

(A) $\frac{\sqrt{29}}{6}$.

(B) $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{78}}{2}$.

(D) 2.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ các đỉnh là $A(0; 2; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 0; 2)$ và $D(0; -2; 0)$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu?

(A) 30° .

(B) 45° .

(C) 60° .

(D) 90° .

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0; 2; 2)$, $B\left(\frac{9}{4}; -1; 2\right)$, $C(4; -1; 2)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác trong vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC .

- ☐ A $D(3; -1; -2)$.
 ☐ B $D(3; -1; 2)$.
 ☐ C $D(-3; 1; 2)$.
 ☐ D $D(-3; -1; 2)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; -1; 3)$. Điểm $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất. Tính $P = a + b + c$.

- ☐ A $P = -1$.
 ☐ B $P = 7$.
 ☐ C $P = 5$.
 ☐ D $P = 2$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; -7; 2)$, $B(2; -10; 2)$, $C(2; -7; 6)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- ☐ A $\left(2; -\frac{17}{2}; 4\right)$.
 ☐ B $(2; -8; 3)$.
 ☐ C $\left(2; -8; \frac{10}{3}\right)$.
 ☐ D $\left(2; \frac{5}{2}; -2\right)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; -2; -3)$, $B(-4; -4; 1)$, $C(2; -3; 3)$. Tìm tọa độ của điểm M trong mặt phẳng Oxz sao cho $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- ☐ A $(0; 0; 3)$.
 ☐ B $(0; 0; 2)$.
 ☐ C $(0; 0; 1)$.
 ☐ D $(0; 0; -1)$.

— HẾT —

Bài 2

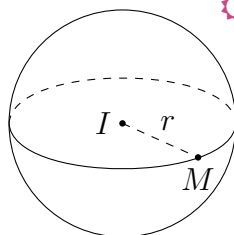
PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Trong không gian, tập hợp tất cả các điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi r ($r > 0$) cho trước được gọi là mặt cầu tâm I bán kính R . Kí hiệu $S(I; r)$ hay viết tắt là (S) .

Vậy $S(I; R) = \{M | IM = r\}$.



2. Phương trình mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính r có phương trình là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Dạng khai triển

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \text{ với } d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 > 0.$$

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Xác định tâm I , bán kính r của mặt cầu cho trước

Loại 1. Cho $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$. Khi đó

- ① Tâm $I(a; b; c)$ (đổi dấu số trong dấu ngoặc);
- ② Bán kính r (Rút căn về phải).

Loại 2. Cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Khi đó

- ① Điều kiện để (*) là mặt cầu là $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$;
- ② Tâm $I(a, b, c)$ (đổi dấu hệ số của x, y, z và chia đôi);
- ③ Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Các ví dụ sau đây đều xét trong không gian $Oxyz$.

Ví dụ 1. Cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 4$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

- (A) $I(2; 1; -1)$. (B) $I(2; 0; -1)$. (C) $I(-2; 0; 1)$. (D) $I(-2; 1; 1)$.

Lời giải.

❖ **Ví dụ 2.** Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

- A** $I(4; -3; 1)$. **B** $I(-4; 3; 1)$. **C** $I(-4; 3; -1)$. **D** $I(4; 3; 1)$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 3.** Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

- A** $I(1; 2; -3)$ và $R = 4$. **B** $I(-1; -2; 3)$ và $R = 4$.
C $I(1; 2; -3)$ và $R = 16$. **D** $I(-1; -2; 3)$ và $R = 16$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 4.** Cho mặt cầu $(S): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12x - 4y + 4 = 0$. Mặt cầu (S) có đường kính AB . Biết điểm $A(-1; -1; 0)$ thuộc mặt cầu (S) . Tọa độ điểm B là

- A** $B(-5; 3; -2)$. **B** $B(-11; 5; 0)$. **C** $B(-11; 5; -4)$. **D** $B(-5; 3; 0)$.

💬 **Lời giải.**

Dạng 2. Mặt cầu dạng khai triển $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (1).

✔ **Bài toán 1.** Kiểm tra hoặc tìm điều kiện để dạng này là một phương trình mặt cầu.

- Xác định các hệ số a, b, c và d .
- Kiểm tra: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì (1) là phương trình mặt cầu; $a^2 + b^2 + c^2 - d \leq 0$ thì (1) không là phương trình mặt cầu.

✔ **Bài toán 2.** Xác định tâm và bán kính của (S) .

- Tâm $I(a, b, c)$ (đổi dấu hệ số của x, y, z và chia đôi);
- Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

⇒ **Ví dụ 5.** Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt cầu?

A $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3z + 8 = 0.$

B $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3z + 7 = 0.$

C $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0.$

D $x^2 + z^2 - 2x + 6z - 2 = 0.$

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 6.** Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

A $x^2 + y^2 - z^2 + 4x - 2y + 6z + 5 = 0.$

B $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 15 = 0.$

C $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + z - 1 = 0.$

D $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2xy + 6z - 5 = 0.$

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 7.** Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - m = 0$ (m là tham số). Biết mặt cầu có bán kính bằng 5. Tìm m .

A $m = 25.$

B $m = 11.$

C $m = 16.$

D $m = -16.$

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 8.** Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+2)y - 2(m+3)z + 16m + 13 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

A $m < 0$ hay $m > 2.$

B $m \leq -2$ hay $m \geq 0.$

C $m < -2$ hay $m > 0.$

D $m \leq 0$ hay $m \geq 2.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 9.** Mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$ có bán kính nhỏ nhất khi m bằng

A $\frac{1}{2}$.

B $\frac{1}{3}$.

C $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D 0.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

📁 **Dạng 3. Lập phương trình mặt cầu**

✔ **Phương pháp chung:** Cần xác định được tọa độ tâm $I(a; b; c)$ và độ dài bán kính r .

✔ **Các bài toán cơ bản:**

① Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và đi qua điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ thì bán kính

$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}.$$

② Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

• Tâm $I(a; b; c)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

• Bán kính $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$.

③ Mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (ngoại tiếp tứ diện $ABCD$)

• **Cách 1:** Gọi tâm I có dạng $I(a; b; c)$, giải hệ điều kiện $IA = IB = IC = ID$.

• **Cách 2:** Gọi (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*).
Thay tọa độ 4 điểm A, B, C, D vào (*), ta được hệ phương trình 4 ẩn số a, b, c, d ;
Giải tìm a, b, c, d . Suy ra tâm $I(a, b, c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

⚠ **Ngoài các dạng này, một số bài toán lập phương trình mặt cầu (dạng khác) sẽ được xét tiếp ở các bài học sau.**

❖ **Ví dụ 10.** Mặt cầu tâm $I(3; -1; 0)$, bán kính $R = 5$ có phương trình là

A $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5$.

B $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 5$.

C $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 25$.

D $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25$.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 11.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -2)$ và đi qua điểm $A(2; ; 1; 2)$.

A $(S): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 5.$

B $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 25.$

C $(S): (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 25.$

D $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z + 1 = 0.$

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 12.** Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB với $A(4; -3; 5)$, $B(2; 1; 3)$ là

A $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 8z - 26 = 0.$

B $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 20 = 0.$

C $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 8z - 20 = 0.$

D $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 26 = 0.$

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 13.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 2)$, biết thể tích khối cầu tương ứng là $V = 972\pi$.

A $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 81.$

B $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 9.$

C $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 9.$

D $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = 81.$

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 14.** Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(-1; 2; 0)$, $B(-2; 1; 1)$ và có tâm nằm trên trục Oz .

A $x^2 + y^2 + z^2 - z - 5 = 0.$

B $x^2 + y^2 + z^2 + 5 = 0.$

C $x^2 + y^2 + z^2 - x - 5 = 0.$

D $x^2 + y^2 + z^2 - y - 5 = 0.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 15.** Cho mặt cầu (S) tâm I nằm trên mặt phẳng (Oxy) đi qua ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm I .

(A) $I(2; -1; 0)$.

(B) $I(0; 0; 1)$.

(C) $I(0; 0; -2)$.

(D) $I(-2; 1; 0)$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 16.** Cho 3 điểm $A(2; 3; 0)$, $B(0; -4; 1)$, $C(3; 1; 1)$. Mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxz) , biết $I(a; b; c)$. Tính tổng $T = a + b + c$.

(A) $T = 3$.

(B) $T = -3$.

(C) $T = -1$.

(D) $T = 2$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 17.** Cho điểm $I(0; 2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với trục Oy .

(A) $x^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 2$.

(B) $x^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 3$.

☐ C $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4.$

☐ D $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9.$

Lời giải.

✎ **Ví dụ 18.** Cho điểm $A(1; 4; 3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm A và cắt trục Ox tại hai điểm B, C sao cho $BC = 6$.

☐ A $(S) : (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 19.$

☐ B $(S) : (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 28.$

☐ C $(S) : (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 26.$

☐ D $(S) : (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 34.$

Lời giải.

✎ **Ví dụ 19.** Cho điểm $A(-2; -4; 5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông?

☐ A $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 = 40.$

☐ B $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 = 82.$

☐ C $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 = 58.$

☐ D $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 = 90.$

Lời giải.

✎ **Ví dụ 20.** Cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; -2)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ là

☐ A $\frac{7}{2}.$

☐ B $\frac{1}{2}.$

☐ C $\frac{3}{2}.$

☐ D $\frac{5}{2}.$

Lời giải.

❖ **Ví dụ 21.** Cho điểm $D(3; 4; -2)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính diện tích mặt cầu (S) .

A $\frac{4\sqrt{29}\pi}{3}$.

B $\frac{29\sqrt{29}\pi}{6}$.

C 116π .

D 29π .

💬 **Lời giải.**

📁 Dạng 4. Vị trí tương đối

Xét điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt cầu $S: (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$ (1). Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (1), nếu

- ① Kết quả bằng 0 thì $M \in (S)$.
- ② Kết quả ra số âm thì M nằm trong (S) .
- ③ Kết quả ra số dương thì M nằm ngoài (S) .

❖ **Ví dụ 22.** Cho điểm $M(1; -1; 3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9$. Khẳng định đúng là

A M nằm ngoài (S) .

B M nằm trong (S) .

C M nằm trên (S) .

D M trùng với tâm của (S) .

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 23.** Cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ và ba điểm $O(0; 0; 0)$, $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; -1)$. Trong số ba điểm trên số điểm nằm trên mặt cầu là

(A) 2.

(B) 0.

(C) 3.

(D) 1.

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 24.** Giả sử tồn tại mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Với những giá trị thực nào của a thì (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π .

(A) $\{1; 10\}$.

(B) $\{-10; 2\}$.

(C) $\{1; -11\}$.

(D) $\{-1; 11\}$.

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 25.** Cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 19 = 0$ và điểm $M(4; -3; 8)$. Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MA với mặt cầu (S) , trong đó A là tiếp điểm. Gọi I là tâm của mặt cầu (S) , diện tích của tam giác MAI bằng

(A) 25.

(B) 125.

(C) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

(D) 50.

💬 **Lời giải.**

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Các câu hỏi sau đều xét trong không gian $Oxyz$.

Câu 1. Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$ có tâm I và bán kính R là

- (A) $I(1; -2; -3); R = 4$. (B) $I(1; 2; -3); R = 2$.
(C) $I(-1; -2; 3); R = 2$. (D) $I(-1; -2; 3); R = 4$.

Câu 2. Cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16$. Tính bán kính của (S) .

- (A) 4. (B) 16. (C) 7. (D) 5.

Câu 3. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 1 = 0$. Tâm và bán kính của (S) lần lượt là

- (A) $I(-1; 3; -4), R = 5$. (B) $I(1; -3; 4), R = 5$.
(C) $I(2; -6; 8), R = \sqrt{103}$. (D) $I(1; -3; 4), R = 25$.

Câu 4. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 25 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính của (S) .

- (A) $I(1; -2; 2), R = \sqrt{34}$. (B) $I(1; 2; -2), R = 5$.
(C) $I(-2; 4; -4), R = \sqrt{29}$. (D) $I(1; -2; 2), R = 6$.

Câu 5. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Thể tích của (S) bằng

- (A) 12π . (B) 9π . (C) 36π . (D) 36.

Câu 6. Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình mặt cầu?

- (A) $(x-1)^2 + (2y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$. (B) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$.
(C) $(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z+1)^2 = 6$. (D) $(x+y)^2 = 2xy - z^2 + 3 - 6x$.

Câu 7. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 2$.

- (A) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$. (B) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$.
(C) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 2$. (D) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 2$.

Câu 8. Cho hai điểm $M(2; 0; 4)$ và $N(0; 2; 3)$. Mặt cầu tâm $A(2; -2; 1)$, bán kính MN có phương trình

- (A) $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. (B) $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.
(C) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. (D) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

Câu 9. Cho hai điểm $I(1; 0; -1)$ và $A(2; 2; -3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình

- (A) $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$. (B) $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 3$.
(C) $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$. (D) $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 10. Cho mặt cầu có phương trình là $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 4z = 0$. Biết OA là đường kính của mặt cầu (S) . Tọa độ điểm A là

- (A) $A(-1; 3; 2)$. (B) $A(-1; -3; 2)$. (C) $A(2; -6; -4)$. (D) $A(-2; 6; 4)$.

Câu 11. Cho hai điểm $M(6; 2; -5)$, $N(-4; 0; 7)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính MN .

- (A) $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+6)^2 = 62$. (B) $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 62$.
(C) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 62$. (D) $(x+5)^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 62$.

Câu 12. Cho hai điểm $A(-1; 1; 2)$, $B(1; 3; 4)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

- (A) $x^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 3$. (B) $x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{3}$.

(C) $x^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = \sqrt{3}$.

(D) $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 3$.

Câu 13. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; -4)$ và diện tích của mặt cầu đó bằng 36π .

(A) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 9$.

(B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 9$.

(C) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 3$.

(D) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 9$.

Câu 14. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; -2)$, biết diện tích mặt cầu bằng 100π . Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

(A) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 86 = 0$.

(B) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 4 = 0$.

(C) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 9 = 0$.

(D) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 11 = 0$.

Câu 15. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2mz + 6m = 0$. Biết đường kính của (S) bằng 12, tìm m .

(A) $\begin{cases} m = -2 \\ m = 8 \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} m = 2 \\ m = -8 \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} m = -2 \\ m = 4 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} m = 2 \\ m = -4 \end{cases}$.

Câu 16. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - m^2 + 5 = 0$ với m là tham số thực. Tìm m sao cho mặt cầu (S) có bán kính $R = 3$.

(A) $m = \pm 2\sqrt{3}$.

(B) $m = \pm 3\sqrt{2}$.

(C) $m = \pm 2\sqrt{2}$.

(D) $m = \pm \sqrt{2}$.

Câu 17. Điều kiện cần và đủ để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + m^2 - 9m + 4 = 0$ là phương trình mặt cầu là

(A) $-1 \leq m \leq 10$.

(B) $m < -1$ hoặc $m > 10$.

(C) $m > 0$.

(D) $-1 < m < 10$.

Câu 18. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình của mặt cầu?

(A) 7.

(B) 8.

(C) 9.

(D) 6.

Câu 19. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Biết $B(6; -6; 0)$, $C(0; 0; 12)$ và đỉnh A thay đổi trên mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Khi đó G thuộc mặt cầu (S_2) có phương trình là

(A) $(S_2): (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 1$.

(B) $(S_2): (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 1$.

(C) $(S_2): (x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z - 8)^2 = 1$.

(D) $(S_2): (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 3$.

Câu 20. Mặt cầu tâm $I(2; 1; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

(A) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 4$.

(B) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 13$.

(C) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 9$.

(D) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 10$.

Câu 21. Cho mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1; 1; 2)$, $B(3; 0; 1)$ và có tâm nằm trên trục Ox . Phương trình mặt cầu (S) là

(A) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{5}$.

(B) $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

(C) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

(D) $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{5}$.

Câu 22. Cho 3 điểm $A(2; 0; 0)$; $B(0; 3; 0)$; $C(2; 3; 6)$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ là

(A) 49π .

(B) $\frac{1372\pi}{3}$.

(C) $\frac{341\pi}{6}$.

(D) $\frac{343\pi}{6}$.

Câu 23. Cho hai điểm $A(1; 0; -1)$, $B(-3; -2; 1)$. Gọi $(\mathcal{S})$ là mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxy) , bán kính bằng $\sqrt{11}$ và đi qua hai điểm A , B . Biết I có tung độ âm, phương trình của $(\mathcal{S})$ là

(A) $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2 = 0$.

(B) $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 7 = 0$.

(C) $x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 7 = 0.$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2 = 0.$

Câu 24. Cho $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(0; -3; 0)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

(A) $\frac{\sqrt{14}}{4}.$

(B) $\sqrt{14}.$

(C) $\frac{\sqrt{14}}{3}.$

(D) $\frac{\sqrt{14}}{2}.$

Câu 25. Cho điểm $I(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

(A) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16.$

(B) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 20.$

(C) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25.$

(D) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9.$

Câu 26. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(3; 1; -2)$, $C(1; 5; 4)$. Biết rằng tâm hình chữ nhật $A'B'C'D'$ thuộc trục hoành, tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

(A) $\frac{\sqrt{91}}{2}.$

(B) $\frac{5\sqrt{3}}{2}.$

(C) $\frac{\sqrt{74}}{2}.$

(D) $\frac{7\sqrt{3}}{2}.$

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$ và $D(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) .

(A) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 56.$

(B) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0.$

(C) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 14.$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 12 = 0.$

Câu 28. Cho tam giác ABC với $A(1; 2; 0)$, $B(3; 2; -1)$, $C(-1; -4; 4)$. Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 52$.

(A) Mặt cầu tâm $I(-1; 0; -1)$, bán kính $r = 2$.

(B) Mặt cầu tâm $I(-1; 0; -1)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

(C) Mặt cầu tâm $I(1; 0; 1)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

(D) Mặt cầu tâm $I(1; 0; 1)$, bán kính $r = 2$.

Câu 29. Cho $A(0; 1; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính

(A) 2.

(B) $\sqrt{2}$.

(C) 3.

(D) $\sqrt{3}$.

Câu 30. Cho điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$ và ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(2; 1; 3)$, $C(0; 2; -3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2 + 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} = 8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

(A) $r = \sqrt{3}$.

(B) $r = 6$.

(C) $r = 3$.

(D) $r = \sqrt{6}$.

—HẾT—

Bài 3

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



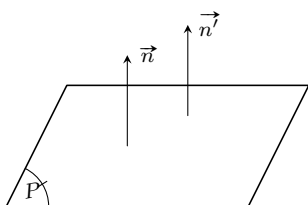
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng

⚙ **Định nghĩa:** Vec tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) là những vec tơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (P) .

⚙ **Chú ý:**

- $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với (P) ;
- Nếu $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ cùng là vec tơ pháp tuyến của (P) thì $\vec{n}' = k \cdot \vec{n}$ (tọa độ tỉ lệ nhau).



2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

⚙ **Công thức:** Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm vec tơ pháp tuyến có phương trình là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Thu gọn ta được dạng

$$ax + by + cz + d = 0$$

⚙ **Chú ý:**

- Cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ (a, b, c không đồng thời bằng 0) thì
 - Một vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (a; b; c)$ (hệ số của x, y và z .)
 - Muốn xác định tọa độ một điểm thuộc (P) , ta chỉ cần cho trước hai biến x, y giá trị cụ thể, thay vào phương trình tính z .
- Phương trình các mặt phẳng tọa độ:
 - $(Oxy): z = 0$.
 - $(Oxz): y = 0$.
 - $(Oyz): x = 0$.
- Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng tọa độ:
 - $\alpha \parallel (Oxy) \Rightarrow z = a \quad a \neq 0$.
 - $\alpha \parallel (Oxz) \Rightarrow y = b \quad b \neq 0$.
 - $\alpha \parallel (Oyz) \Rightarrow x = c \quad c \neq 0$.

3. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

☛ Cho hai mặt phẳng $(P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.
Gọi $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ lần lượt là véc tơ pháp tuyến của (P) và (Q) .

- ① Nếu $\begin{cases} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \\ d_1 = k \cdot d_2 \end{cases}$ thì (P) trùng (Q) .
- ② Nếu $\begin{cases} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \\ d_1 \neq k \cdot d_2 \end{cases}$ thì (P) song song (Q) .
- ③ Nếu $\vec{n}_1 \neq k \cdot \vec{n}_2$ thì (P) cắt (Q) .

Chú ý

Nếu $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ hay

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

thì $(P) \perp (Q)$.

4. Góc giữa hai mặt phẳng

☛ **Công thức tính:** Cho hai mặt phẳng $(P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

- Gọi $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ lần lượt là véc tơ pháp tuyến của (P) và (Q) ;
- Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) , với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Khi đó

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

☛ **Đặc biệt**

- Nếu (P) song song hoặc trùng (Q) thì $\varphi = 0^\circ$.
- Nếu (P) vuông góc với (Q) thì $\varphi = 90^\circ$. Khi đó $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ hay

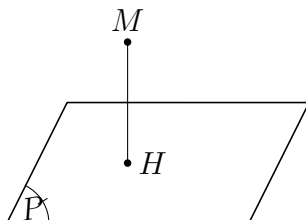
$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

5. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

☛ **Định nghĩa:** Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P) . Khi đó độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến (P) . Kí hiệu $d(M, (P))$.

☛ **Công thức tính:**

$$d(M, (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$





PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Các ví dụ sau đây đều xét trong không gian $Oxyz$.

Dạng 1. Xác định véc tơ pháp tuyến và điểm thuộc mặt phẳng

Cho mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó

- ☑ Một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.
- ☑ Điểm thuộc (P) : Cho trước x, y . Thay vào tìm z .

🔗 **Ví dụ 1.** Cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z + 5 = 0$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- Ⓐ $\vec{n} = (-3; 4; 5)$. Ⓑ $\vec{n} = (-4; -3; 2)$. Ⓒ $\vec{n} = (2; -3; 5)$. Ⓓ $\vec{n} = (2; -3; 4)$.

Lời giải.

🔗 **Ví dụ 2.** Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxz) là

- Ⓐ $\vec{n} = (1; 0; 0)$. Ⓑ $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Ⓒ $\vec{n} = (1; 0; 1)$. Ⓓ $\vec{n} = (0; 1; 0)$.

Lời giải.

🔗 **Ví dụ 3.** Véc-tơ nào sau đây không phải là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x + 3y - 5z + 2 = 0$.

- Ⓐ $\vec{n}_1 = (-1; -3; 5)$. Ⓑ $\vec{n}_2 = (-2; -6; -10)$.
 Ⓒ $\vec{n}_3 = (-3; -9; 15)$. Ⓓ $\vec{n}_4 = (2; 6; -10)$.

Lời giải.

Dạng 2. Lập phương trình mặt phẳng khi biết các yếu tố liên quan

- ① Đề bài cho (P) qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (a, b, c)$. Khi đó:

$$(P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

- ☑ $(P) \perp AB$ thì $\vec{n_P} = \vec{AB}$;
- ☑ (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB thì (P) qua trung điểm I của AB và $\vec{n_P} = \vec{AB}$;
- ☑ $(P) \perp d$ thì $\vec{n_P} = \vec{u_d}$, với $\vec{u_d}$ là véc tơ chỉ phương của d ;
- ☑ $(P) \parallel (Q) : Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n_P} = \vec{n_Q} = (A, B, C)$.

② Đề bài cho (P) song song (hoặc chứa) với giá của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, (với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương) thì $\vec{n_P} = [\vec{a}, \vec{b}]$

- ☑ (P) qua ba điểm A, B, C phân biệt và không thẳng hàng thì $\vec{n_P} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$;
- ☑ (P) qua hai điểm A, B phân biệt và vuông góc với (Q) thì $\vec{n_P} = [\vec{AB}, \vec{n_Q}]$;
- ☑ (P) vuông góc với (Q) và (R) thì $\vec{n_P} = [\vec{Q}, \vec{n_R}]$;
- ☑ (P) qua hai điểm A, B phân biệt và song song với d thì $\vec{n_P} = [\vec{AB}, \vec{u_d}]$;
- ☑ (P) qua điểm A và chứa d thì $\vec{n_P} = [\vec{AM}, \vec{u_d}]$, với $M \in d$.

❖ Ví dụ 4. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 0; 1)$ là
 Ⓐ $-2x + z + 1 = 0$. Ⓑ $-2y + z - 1 = 0$. Ⓒ $-2x + z - 1 = 0$. Ⓓ $-2x + y - 1 = 0$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 5. Cho các điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 0; 1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là
 Ⓐ $2x - y - 1 = 0$. Ⓑ $-y + 2z - 3 = 0$. Ⓒ $2x - y + 1 = 0$. Ⓓ $y + 2z - 5 = 0$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 6. Cho hai điểm $A(4; 0; 1)$ và $B(-2; 2; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

- Ⓐ $3x - y - z + 1 = 0$. Ⓑ $3x + y + z - 6 = 0$.
- Ⓒ $3x - y - z = 0$. Ⓓ $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 7. Phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz)?

- ☐ A $x = y + z$.
 ☐ B $y - z = 0$.
 ☐ C $y + z = 0$.
 ☐ D $x = 0$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 8. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 1; 4)$, $B(2; 7; 9)$ và $C(0; 9; 13)$.

- ☐ A $2x + y + z + 1 = 0$.
 ☐ B $x - y + z - 4 = 0$.
☐ C $7x - 2y + z - 9 = 0$.
 ☐ D $2x + y - z - 2 = 0$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 9. Mặt phẳng (P) song song với (Oxy) và đi qua điểm $A(1; -2; 1)$ có phương trình là phương trình nào sau đây?

- ☐ A $z - 1 = 0$.
 ☐ B $2x + y = 0$.
 ☐ C $x - 1 = 0$.
 ☐ D $y + 2 = 0$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 10. Cho điểm $M(2; 3; 2)$, $(\alpha): 2x - 3y + 2z - 4 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (α) là

- ☐ A $2x - 3y + 2z - 4 = 0$.
 ☐ B $2x - 3y + 2z + 1 = 0$.
☐ C $2x - 3y + z - 1 = 0$.
 ☐ D $2x - 3y + 2z - 1 = 0$.

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 11.** Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Oz và đi qua điểm $P(3; -4; 7)$.

A $4x - 3y = 0.$

B $3x + 4y = 0.$

C $4x + 3y = 0.$

D $-3x + 4y = 0.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 12.** Viết phương trình mặt phẳng (P) biết (P) đi qua hai điểm $M(0; -1; 0)$, $N(-1; 1; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxz) .

A $(P): x + z + 1 = 0.$

B $(P): x - z = 0.$

C $(P): z = 0.$

D $(P): x + z = 0.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 13.** Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + y + z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A $y - z - 1 = 0.$

B $y - 2z = 0.$

C $y + z = 0.$

D $y - z = 0.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 14.** Cho điểm $A(1; 1; 1)$ và hai mặt phẳng $(Q): y = 0$, $(P): 2x - y + 3z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A , vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) , (Q) .

A $3x - y + 2z - 4 = 0.$

B $3x + y - 2z - 2 = 0.$

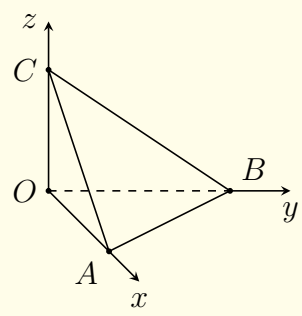
C $3x - 2z = 0.$

D $3x - 2z - 1 = 0.$

💬 **Lời giải.**

Dạng 3. Phương trình theo đoạn chắn

Đề bài cho (P) đi qua $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ thì $(P) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (phương trình theo đoạn chắn)



Thường gặp:

- ☑ $\triangle ABC$ nhận $M(x_0; y_0; z_0)$ làm trọng tâm;
- ☑ $\triangle ABC$ nhận $M(x_0; y_0; z_0)$ làm trực tâm;
- ☑ $V_{O.ABC}$ nhỏ nhất.

❖ **Ví dụ 15.** Mặt phẳng đi qua $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$ có phương trình là
A $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 2$. **B** $2x + 4y + 4z = 0$. **C** $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 0$. **D** $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 16.** Cho điểm $M(1; 2; -3)$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm M_1, M_2, M_3 là
A $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$. **B** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. **C** $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. **D** $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = -1$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 17.** Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho tam giác ABC nhận điểm $G(1; 2; 1)$ là trọng tâm?
A $x + 2y + 2z - 6 = 0$. **B** $2x + y + 2z - 6 = 0$.
C $2x + 2y + z - 6 = 0$. **D** $2x + 2y + 6z - 6 = 0$.

❖ **Ví dụ 18.** Cho điểm $M(1; 2; 5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C mà $OA = OB = OC \neq 0$ là
A 4. **B** 2. **C** 1. **D** 3.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

Nơi Đầu Có Ý Chỉ Ở Đó Có Con Đường

❖ **Ví dụ 19.** Cho điểm $H(1; 2; -3)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC .

(A) $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1.$

(B) $x + 2y + 3z + 14 = 0$.

Ⓒ $x + 2y - 3z - 14 = 0$.

(D) $x + y + z = 0$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 20.** Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; -4; 1)$ và chắn trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn có độ dài đại số lần lượt là a, b, c . Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) khi a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2 là

(A) $4x + 2y - z - 1 = 0$.

(B) $4x - 2y + z + 1 = 0$.

(C) $16x + 4y - 4z - 1 = 0$.

(D) $4x + 2y + z - 1 = 0$.

 **Lời giải.**

Dạng 4. Khoảng cách và góc

✎ **Ví dụ 21.** Cho mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z + 16 = 0$. Điểm $M(0; 1; -3)$, khi đó khoảng cách từ M đến (P) là

A $\frac{21}{9}$.

B $\sqrt{10}$.

C 7.

D 5.

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 22.** Khoảng cách từ $A(-2; 1; -6)$ đến mặt phẳng (Oxy) là

A 6.

B 2.

C 1.

D $\frac{7}{\sqrt{41}}$.

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 23.** Cho hai điểm $A(2; 2; -2)$ và $B(3; -1; 0)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng $(P) : x + y - z + 2 = 0$ tại điểm I . Tỉ số $\frac{IA}{IB}$ bằng

A 2.

B 4.

C 6.

D 3.

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 24.** Cho hai mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$ và $(Q) : x + 2y - 2z - 1 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là

A $\frac{4}{9}$.

B $\frac{2}{3}$.

C $\frac{4}{3}$.

D $-\frac{4}{3}$.

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 25.** Cho mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$, mặt phẳng $(Q) : x - 3y + 5z - 2 = 0$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là

A $\frac{\sqrt{35}}{7}$.

B $-\frac{\sqrt{35}}{7}$.

C $\frac{5}{7}$.

D $-\frac{5}{7}$.

Lời giải.

✎ **Ví dụ 26.** Cho hai mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$. Có bao nhiêu điểm M trên trục Oy thỏa mãn M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) ?

A 0.

B 1.

C 2.

D 3.

Lời giải.

✎ **Ví dụ 27.** Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và (Q) cách điểm A một khoảng bằng $3\sqrt{3}$. Phương trình mặt phẳng (Q) là

A $x + y + z + 3 = 0$ và $x + y + z - 3 = 0$.

B $x + y + z + 3 = 0$ và $x + y + z + 15 = 0$.

C $x + y + z + 3 = 0$ và $x + y + z - 15 = 0$.

D $x + y + z + 3 = 0$ và $x + y - z - 15 = 0$.

Lời giải.

Dạng 5. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

✎ **Ví dụ 28.** Cho mặt phẳng $(P): -x + y + 3z + 1 = 0$. Mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) có phương trình nào sau đây?

A $2x - 2y - 6z + 7 = 0$.

B $-2x + 2y + 3z + 5 = 0$.

C $x - y + 3z - 3 = 0$.

D $-x - y + 3z + 1 = 0$.

Lời giải.

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt

✎ **Ví dụ 29.** Cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$ và $(Q): x + my + z - 1 = 0$. Tìm tham số m để hai mặt phẳng P và Q vuông góc với nhau.

A $m = -4$.

B $m = -\frac{1}{2}$.

C $m = \frac{1}{2}$.

D $m = 4$.

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 30.** Cho hai mặt phẳng $(P): 2x + 4y + 3z - 5 = 0$ và $(Q): mx - ny - 6z + 2 = 0$. Giá trị của m, n sao cho $(P) \parallel (Q)$ là

A $m = 4; n = -8$.

B $m = n = 4$.

C $m = -4; n = 8$.

D $m = n = -4$.

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 31.** Cho hai mặt phẳng $(P): x + my + (m - 1)z + 1 = 0$ và $(Q): x + y + 2z = 0$. Tập hợp tất cả các giá trị m để hai mặt phẳng này **không** song song là

A $(0; +\infty)$.

B $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}$.

C $(-\infty; 3)$.

D $\mathbb{R}$.

💬 **Lời giải.**

📁 **Dạng 6. Vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt cầu**

Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Theo kết quả của Chương II, ta có các trường hợp sau:

① Nếu $d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > R$ thì (P) và (S) không có điểm chung.

② Nếu $d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R$ thì (P) tiếp xúc (S) .

③ Nếu $d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < R$ thì (P) cắt (S) .

❖ **Ví dụ 32.** Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 4 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

Ⓐ (P) tiếp xúc (S) .

Ⓑ (P) không cắt (S) .

Ⓒ (P) đi qua tâm của (S) .

Ⓓ (P) cắt (S) .

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 33.** Cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$ và điểm $A(3; 4; 0)$ thuộc (S) . Phương trình mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A là

Ⓐ $x + y + z - 7 = 0$.

Ⓑ $2x - 2y + z + 2 = 0$.

Ⓒ $2x + 2y + z - 14 = 0$.

Ⓓ $2x - 2y - z + 2 = 0$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 34.** Viết phương trình mặt cầu có tâm là điểm $I(1; 2; 4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 1 = 0$.

Ⓐ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 4$.

Ⓑ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 4$.

Ⓒ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 9$.

Ⓓ $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 4)^2 = 4$.

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 35.** Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 6 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) . Tính bán kính của đường tròn (C) .

- (A) 4. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{7}$. (D) 5.

💬 Lời giải.

✎ **Ví dụ 36.** Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0; 2; 1)$ và $B(-1; 4; 2)$ cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 - 2x + 8y + 6z - 3 = 0$ theo một đường tròn (C) có bán kính lớn nhất.

- (A) $(P): 2x + 3y + 4z - 10 = 0$. (B) $(P): 2x + 5y - 4z - 6 = 0$.
(C) $(P): 2x + 3y - 4z - 2 = 0$. (D) $(P): 2x - 3y - 4z + 10 = 0$.

💬 Lời giải.

✎ **Ví dụ 37.** Mặt phẳng $(P): x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$ cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 5$ theo giao tuyến là đường tròn có diện tích là

- (A) $\frac{11\pi}{4}$. (B) $\frac{9\pi}{4}$. (C) $\frac{15\pi}{4}$. (D) $\frac{7\pi}{4}$.

💬 Lời giải.

✎ **Ví dụ 38.** Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z - 15 = 0$. Mặt phẳng (P) song song với (α) và tiếp xúc với (S) là

- (A) $(P): 2x + y + 2z - 15 = 0$. (B) $(P): 2x + y + 2z + 15 = 0$.
(C) $(P): 2x + y + 2z - 3 = 0$. (D) $(P): 2x + y + 2z + 3 = 0$.

💬 Lời giải.

✎ **Ví dụ 39.** Cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm tại I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 5$.

- A

$(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25.$
- B

$(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16.$
- C

$(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 34.$
- D

$(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 34.$

💬 **Lời giải.**

✎ **Ví dụ 40.** Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) , biết (α) song song với $(P) : 2x + y - 2z + 11 = 0$ và cắt mặt cầu (S) theo tiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π .

- A

$2x + y - 2z - 11 = 0.$
- B

$2x - y - 2z - 7 = 0.$
- C

$2x + y - 2z - 5 = 0.$
- D

$2x + y - 2z - 7 = 0.$

💬 **Lời giải.**



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 5y + 1 = 0$. Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là

- (A)** $\vec{n}_1 = (2; -5; 1)$. **(B)** $\vec{n}_2 = (2; -5; 0)$. **(C)** $\vec{n}_3 = (2; 5; 0)$. **(D)** $\vec{n}_4 = (-2; 5; 1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 1 = 0$. Véc-tơ nào sau đây không là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) ?

- (A)** $\vec{n}_4 = (4; 2; -2)$. **(B)** $\vec{n}_2 = (-2; -1; 1)$. **(C)** $\vec{n}_3 = (2; 1; 1)$. **(D)** $\vec{n}_1 = (2; 1; -1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 1)$. Véc-tơ nào sau đây cũng là véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- (A)** $(4; -2; 2)$. **(B)** $(-4; 2; 3)$. **(C)** $(4; 2; -2)$. **(D)** $(-2; 1; 1)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; -2)$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ?

- (A)** $\vec{n}_4 = (2; 2; -1)$. **(B)** $\vec{n}_3 = (-2; -2; 1)$. **(C)** $\vec{n}_1 = (2; -2; -1)$. **(D)** $\vec{n}_2 = (1; 1; -2)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$ và $C(-10; 5; 3)$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

- (A)** $\vec{n} = (1; 2; 2)$. **(B)** $\vec{n} = (1; -2; 2)$. **(C)** $\vec{n} = (1; 8; 2)$. **(D)** $\vec{n} = (1; 2; 0)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Oxz ?

- (A)** $y = 0$. **(B)** $x = 0$. **(C)** $z = 0$. **(D)** $y - 1 = 0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 6; -7)$ và $B(3; 2; 1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

- (A)** $x - 2y + 4z + 2 = 0$. **(B)** $x - 2y - 3z - 1 = 0$.
(C) $x - 2y + 3z + 17 = 0$. **(D)** $x - 2y + 4z + 18 = 0$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $G(1; 1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng OG có phương trình là

- (A)** $x + y + z - 3 = 0$. **(B)** $x - y + z = 0$. **(C)** $x + y - z - 3 = 0$. **(D)** $x + y + z = 0$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1; -2; 3)$ đến $(P): x + 3y - 4z + 9 = 0$ là

- (A)** $\frac{\sqrt{26}}{13}$. **(B)** $\sqrt{8}$. **(C)** $\frac{17}{\sqrt{26}}$. **(D)** $\frac{4\sqrt{26}}{13}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y - 2z + 4 = 0$ và $(\beta): -x + 2y + 2z - 7 = 0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β)

- (A)** 3. **(B)** -1. **(C)** 0. **(D)** 1.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, hãy tính p và q lần lượt là khoảng cách từ điểm $M(5; -2; 0)$ đến mặt phẳng (Oxz) và mặt phẳng $(P): 3x - 4z + 5 = 0$.

- (A)** $p = 2$ và $q = 3$. **(B)** $p = 2$ và $q = 4$. **(C)** $p = -2$ và $q = 4$. **(D)** $p = 5$ và $q = 4$.

Câu 12. Góc giữa hai mặt phẳng $(P): 8x - 4y - 8z - 11 = 0$ và $(Q): \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$ bằng

- (A)** 90° . **(B)** 30° . **(C)** 45° . **(D)** 60° .

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $A(4; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; 6)$. Phương trình của (α) là

- (A)** $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 0$. **(B)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$.

(C) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 1.$

(D) $3x - 6y + 2z - 1 = 0.$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; m)$. Để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc 60° thì giá trị của m là

(A) $m = \pm \frac{12}{5}.$

(B) $m = \pm \frac{2}{5}.$

(C) $m = \pm \sqrt{\frac{12}{5}}.$

(D) $m = \pm \frac{5}{2}.$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $M(-1; 2; 4)$ và chứa trục Oy có phương trình

(A) $(P) : 4x - z = 0.$

(B) $(P) : 4x + z = 0.$

(C) $(P) : x - 4z = 0.$

(D) $(P) : x + 4z = 0.$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; -2)$ và mặt phẳng $(P) : 3x - y + 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) ?

(A) $(Q) : 3x - y + 2z + 6 = 0.$

(B) $(Q) : 3x - y - 2z - 6 = 0.$

(C) $(Q) : 3x - y + 2z - 6 = 0.$

(D) $(Q) : 3x + y - 2z - 14 = 0.$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : 3x - my - z + 7 = 0$, $(Q) : 6x + 5y - 2z - 4 = 0$. Xác định m để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

(A) $m = 4.$

(B) $m = -\frac{5}{2}.$

(C) $m = -30.$

(D) $m = \frac{5}{2}.$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) tiếp xúc mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$ tại điểm $M(4; -3; 1)$.

(A) $3x - 4y - 7 = 0.$

(B) $4x - 3y + z - 26 = 0.$

(C) $4x - 3y + z - 8 = 0.$

(D) $3x - 4y - 24 = 0.$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) , (Q) lần lượt có phương trình là $x + y - z = 0$, $x - 2y + 3z = 4$ và cho điểm $M(1; -2; 5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P) , (Q) .

(A) $5x + 2y - z + 14 = 0.$

(B) $x - 4y - 3z + 6 = 0.$

(C) $x - 4y - 3z - 6 = 0.$

(D) $5x + 2y - z + 4 = 0.$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm H và cắt các trục tọa độ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho H là trọng tâm của tam giác ABC .

(A) $(P) : x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

(B) $(P) : x + 2y + 3z - 14 = 0.$

(C) $(P) : x + y + z - 6 = 0.$

(D) $(P) : \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1.$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 0; 3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $3OA = 2OB = OC \neq 0$?

(A) 3.

(B) 8.

(C) 4.

(D) 2.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(1; -3; 8)$ và chắn trên tia Oz một đoạn thẳng dài gấp đôi các đoạn thẳng mà nó chắn trên các tia Ox và Oy . Giả sử $(\alpha) : ax + by + cz + d = 0$, với a, b, c, d là các số nguyên và $d \neq 0$. Tính $S = \frac{a+b+c}{d}$.

(A) $S = -\frac{5}{4}.$

(B) $S = \frac{5}{4}.$

(C) $S = 3.$

(D) $S = -3.$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(2; 2; 2)$, mặt phẳng $(P) : 2x + 2y + z + 8 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính $r = 8$. Diện tích của mặt cầu (S) là

(A) $20\pi.$

(B) $200\pi.$

(C) $10\pi.$

(D) $400\pi.$

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 25$ và mặt phẳng $(P): 4x + 3z - 34 = 0$. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc (S) ?

- (A) 0. (B) 1. (C) Vô số. (D) 2.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α) là $\frac{5\sqrt{91}}{91}$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (α) ?

- (A) $P(2; -1; 1)$. (B) $N(1; 2; 2)$. (C) $M(1; -2; 2)$. (D) $Q(1; 2; -2)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 3. Viết phương trình của mặt cầu (S) .

- (A) $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. (B) $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.
(C) $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. (D) $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B . Biết tiếp diện của (S) tại A, B vuông góc. Tính độ dài AB .

- (A) $AB = \frac{5}{2}$. (B) $AB = 5$. (C) $AB = 5\sqrt{2}$. (D) $AB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; 0), M(1; 1; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi qua A, M và cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại $B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $b > 0, c > 0$. Khi diện tích tam giác ABC nhỏ nhất, hãy tính giá trị của tích bc .

- (A) $bc = 8$. (B) $bc = 64$. (C) $bc = 2$. (D) $bc = 16$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 4)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. (P) đi qua điểm nào dưới đây?

- (A) $(0; 1; 3)$. (B) $(2; 2; 0)$. (C) $(1; 1; 2)$. (D) $(-1; 1; 4)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất là

- (A) $x + 2y + 3z - 14 = 0$. (B) $3x + 2y + z - 10 = 0$.
(C) $6x + 3y + 2z - 18 = 0$. (D) $6x - 3y + 2z - 6 = 0$.

—HẾT—

Bài 4

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

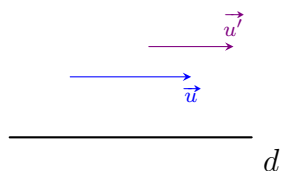
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vec tơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa: Vec tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d là những vec tơ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d .

Chú ý:

- $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d .
- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{u}'$ cùng là vec tơ chỉ phương của d thì $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$ (tọa độ tỉ lệ nhau).



2. Phương trình tham số của đường thẳng

Công thức: Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ làm vec tơ chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

Chú ý:

① Cho đường thẳng d : $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ thì

- Một vec tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ (hệ số của t).
- Muốn xác định tọa độ một điểm thuộc d , ta chỉ cần cho trước giá trị cụ thể của tham số t , thay vào hệ phương trình tính x , y và z .

② Phương trình các trục tọa độ:

$$\begin{aligned} \bullet \quad Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \bullet \quad Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \bullet \quad Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \end{aligned}$$

③ Nếu u_1, u_2 và u_3 đều khác 0 thì (1) có thể được viết dưới dạng

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \quad (2)$$

(2) được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng d .

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Xét hai đường thẳng

- $d_1: \begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \\ z = z_0 + u_3t \end{cases}$ qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$;
- $d_2: \begin{cases} x = x'_0 + v_1t' \\ y = y'_0 + v_2t' \\ z = z'_0 + v_3t' \end{cases}$ qua điểm $N(x'_0; y'_0; z'_0)$, vec tơ chỉ phương $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Cách 1: Ta xét mối quan hệ giữa hai vec tơ chỉ phương $\vec{u}$ và $\vec{v}$:

Trường hợp 1: Hai vec tơ chỉ phương có bộ tọa độ tỉ lệ nhau hay $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$. Khi đó d_1 và d_2 sẽ có khả năng song song hoặc trùng nhau. Thay tọa độ điểm M vào phương trình d_2

- Nếu thỏa mãn thì d_1 trùng d_2 ;
- Nếu không thỏa mãn thì d_1 song song d_2 .

Trường hợp 2: Hai vec tơ chỉ phương có bộ tọa độ không tỉ lệ nhau hay $\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$. Khi đó d_1 và d_2 sẽ có khả năng cắt hoặc chéo nhau. Ta xét hệ

$$\begin{cases} x_0 + u_1t = x'_0 + v_1t' \\ y_0 + u_2t = y'_0 + v_2t' \\ z_0 + u_3t = z'_0 + v_3t' \end{cases}$$

- Nếu hệ này có nghiệm duy nhất $(t; t')$ thì d_1 cắt d_2 ;
- Nếu hệ này vô nghiệm thì d_1 chéo d_2 .

Cách 2: Ta tính $[\vec{u}, \vec{v}]$. Khi đó sẽ có một trong hai trường hợp xảy ra như sau

Trường hợp 1: Nếu $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ và

- $[\vec{u}, \overrightarrow{MN}] \neq \vec{0}$ thì d_1 song song d_2 ;
- $[\vec{u}, \overrightarrow{MN}] = \vec{0}$ thì d_1 trùng d_2 .

Trường hợp 2: Nếu $[\vec{u}, \vec{v}] \neq \vec{0}$ và

- $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0$ thì d_1 chéo d_2 ;
- $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ thì d_1 cắt d_2 .

Chú ý

d_1 vuông góc với d_2 khi

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

hay

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$$

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Xét đường thẳng d : $\begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \\ z = z_0 + u_3t \end{cases}$ và mặt phẳng (P) : $Ax + By + Cz + D = 0$.

Phương pháp: Xét hệ $\begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \\ z = z_0 + u_3t \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \Rightarrow A(x_0 + u_1t) + B(y_0 + u_2t) + C(z_0 + u_3t) + D = 0$ (*)

- Nếu (*) có đúng 1 nghiệm t thì d cắt (P) ;
- Nếu (*) vô nghiệm thì d song song (P) ;
- Nếu (*) nghiệm đúng với mọi t thì d nằm trong (P) .

Đặc biệt: Với $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d và $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của (P) thì

$$d \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u} \text{ cùng phương với } \vec{n} \text{ hay } \vec{u} = k \cdot \vec{n}$$

5. Góc giữa hai đường thẳng

Công thức tính: Xét hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- Gọi $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của d_1 và d_2 ;
- Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 , với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Khi đó

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \right| = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Đặc biệt

- Nếu d_1 song song hoặc trùng d_2 thì $\varphi = 0^\circ$.
- Nếu d_1 vuông góc với d_2 thì $\varphi = 90^\circ$. Khi đó $\vec{u} \perp \vec{v}$ hay

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$$

6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Công thức tính: Xét đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- Gọi $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{n} = (A; B; C)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của d và véc tơ pháp tuyến của (P) ;
- Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) , với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Khi đó

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|u_1 A + u_2 B + u_3 C|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

⚙ Đặc biệt

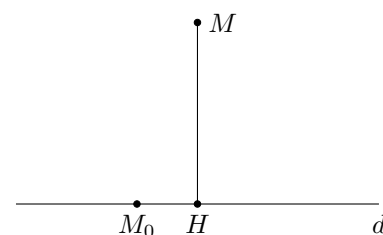
- Nếu d song song hoặc trùng (P) thì $\varphi = 0^\circ$, khi đó $\vec{u} \perp \vec{n}$
- Nếu d vuông góc với (P) thì $\varphi = 90^\circ$, khi đó $\vec{u} = k \cdot \vec{n}$.

7. Khoảng cách

⚙ Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng:

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d qua điểm M_0 và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$. Khi đó, khoảng cách từ điểm M đến d được tính theo công thức

$$d(M, d) = MH = \frac{|\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$



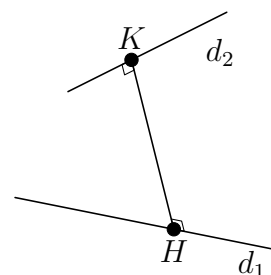
⚙ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 .

- d_1 qua điểm M và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$;
- d_2 qua điểm N và có véc tơ chỉ phương $\vec{v}$.

Khi đó khoảng cách giữa d_1 và d_2 được tính theo công thức

$$d(d_1, d_2) = HK = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{MN}|}{|[\vec{u}, \vec{v}]|}$$



HK là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2

B

PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

📁 Dạng 1. Xác định điểm thuộc và véc tơ chỉ phương của đường thẳng

🔗 Ví dụ 1. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- (A) $\vec{u} = (-1; 3; -1)$. (B) $\vec{u} = (1; 2; 2)$. (C) $\vec{u} = (-1; 3; 2)$. (D) $\vec{u} = (-1; 3; 1)$.

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 2.** Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$. Điểm nào trong các điểm dưới đây nằm trên đường thẳng d ?

(A) $P(5; 2; 5)$.

(B) $Q(1; 0; 0)$.

(C) $M(3; 2; 2)$.

(D) $N(1; -1; 2)$.

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 3.** Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Đường thẳng d **không** đi qua điểm nào sau đây?

(A) $M(1; 2; 5)$.

(B) $N(2; 3; -1)$.

(C) $P(3; 5; 4)$.

(D) $Q(-1; -1; 6)$.

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

 Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng khi biết vài yếu tố liên quan

❖ **Ví dụ 4.** Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

(A) $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

 Lời giải.

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 5.** Cho hai điểm $A(2; -1; 3)$, $B(3; 2; -1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB ?

A $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$

B $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$

C $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$

D $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 6.** Cho đường thẳng $\Delta : \frac{2x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$, điểm $A(2; -3; 4)$. Đường thẳng qua A và song song với Δ có phương trình là

A $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$

B $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$

C $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$

D $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 7.** Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $N(2; -3; -5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) : 2x - 3y - z + 2 = 0$.

A $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-1}$

C $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{-5}$

B $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-5}{-1}$

D $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-5}$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 8.** Cho tam giác ABC có $A(3; 2; -4)$, $B(4; 1; 1)$ và $C(2; 6; -3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

$$\textcircled{A} d: \frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

$$\textcircled{C} d: \frac{x-3}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

$$\textcircled{B} d: \frac{x+12}{3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

$$\textcircled{D} d: \frac{x+7}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

 Lời giải.

❖ Ví dụ 9. Cho $A(4; -2; 3)$, $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 \\ z = 1 - t \end{cases}$, đường thẳng d đi qua A cắt và vuông góc với Δ có

một vec-tơ chỉ phương là

$$\textcircled{A} \text{ vec-tơ } \vec{a} = (5; 2; 15).$$

$$\textcircled{B} \text{ vec-tơ } \vec{a} = (4; 3; 12).$$

$$\textcircled{C} \text{ vec-tơ } \vec{a} = (1; 0; 3).$$

$$\textcircled{D} \text{ vec-tơ } \vec{a} = (-2; 15; -6).$$

 Lời giải.

❖ Ví dụ 10. Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d và cắt trục hoành. Tìm một vec-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ .

$$\textcircled{A} \vec{u} = (0; 2; 1).$$

$$\textcircled{B} \vec{u} = (1; 0; 1).$$

$$\textcircled{C} \vec{u} = (1; -2; 0).$$

$$\textcircled{D} \vec{u} = (2; 2; 3).$$

 Lời giải.

❖ Ví dụ 11. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 0; 2)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2 .

$$\textcircled{A} \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

$$\textcircled{B} \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-4}.$$

$$\textcircled{C} \frac{x-5}{-2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-2}{4}.$$

$$\textcircled{D} \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}.$$

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 12.** Cho đường thẳng $d : x = y = z$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng tọa độ (Oyz) .

(A) $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 13.** Cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P) : x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1; -1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN .

(A) $\Delta : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{2}$

(B) $\Delta : \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$

(C) $\Delta : \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$

(D) $\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{2}$

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng



❖ Ví dụ 14. Cho hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 2t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A) d trùng d' . (B) d cắt d' . (C) d và d' chéo nhau. (D) d song song với d' .

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 15. Cho các đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$, $d_2 : \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = 1 \end{cases}$. Tìm vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- (A) Song song. (B) Chéo nhau. (C) Cắt nhau. (D) Trùng nhau.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 16. Cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-m} = \frac{z-2}{-3}$ và $d_2 : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d_1 vuông góc d_2 .

- (A) $m = 5$. (B) $m = 1$. (C) $m = -5$. (D) $m = -1$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 17. Cho hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, và $d' : \begin{cases} x = -1 - t' \\ y = 2 + t' \\ z = 3 - t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$. Tìm a để hai đường thẳng trên cắt nhau.

- (A) $a = 1$. (B) $a = 0$. (C) $a = -2$. (D) $a = -1$.

 Lời giải.

Dạng 4. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

❖ **Ví dụ 18.** Cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d với mặt phẳng (Oxy) .

(A) $M(-1; 2; 0)$.

(B) $M(1; 0; 0)$.

(C) $M(2; -1; 0)$.

(D) $M(3; -2; 0)$.

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 19.** Cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + y - 2z + 9 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) .

(A) $(2; 1; 1)$.

(B) $(0; -1; 4)$.

(C) $(1; -3; 3)$.

(D) $(2; -5; 1)$.

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 20.** Cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-m}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + my - (m^2 + 1)z + m - 2m^2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của m để đường thẳng d nằm trên (P) ?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) Vô số.

 Lời giải.

❖ Ví dụ 21. Cho mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = m + t \\ y = -1 + nt \\ z = 4 + 2t \end{cases}$. Tìm điều kiện của m và n để đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α) .

A $\begin{cases} m \neq 3 \\ n = -3 \end{cases}$

B $\begin{cases} m = 3 \\ n \neq -3 \end{cases}$

C $\begin{cases} m = 3 \\ n = -3 \end{cases}$

D $\begin{cases} m \neq 3 \\ n \neq -3 \end{cases}$

💬 Lời giải.

📁 Dạng 5. Góc và khoảng cách

❖ Ví dụ 22. Cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$, $d_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$. Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là

A 30° .

B 150° .

C 120° .

D 60° .

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 23. Cho tam giác ABC biết $A(1; -1; 1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; -4; 0)$. Góc giữa hai đường thẳng AB và AC bằng

A 135° .

B 45° .

C 60° .

D 30° .

💬 Lời giải.

⇒ **Ví dụ 24.** Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}$ song song với mặt phẳng $(P) : x + 2y + z + 2 = 0$.

Tính khoảng cách d từ đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P) .

(A) $d = \frac{1}{6}$.

(B) $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(C) $d = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

(D) $d = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 25.** Cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$.

Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A và B . Tính độ dài đoạn AB ?

(A) $\frac{\sqrt{17}}{17}$.

(B) $\frac{2\sqrt{29}}{29}$.

(C) $\frac{\sqrt{29}}{29}$.

(D) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 26.** Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình là $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}, d_2 : \frac{x-2}{1} =$

$\frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$. Mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn song song với d_1 và d_2 . Khi đó, giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ d_1 và d_2 đến mặt phẳng (P) là

(A) $\frac{2}{3}$.

(B) $\frac{5}{3}$.

(C) $\frac{7}{3}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

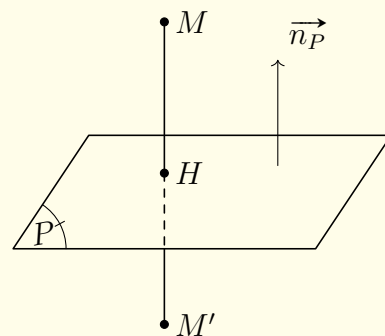
💬 **Lời giải.**

Dạng 6. Hình chiếu H của điểm M lên mặt phẳng (P)

- Viết phương trình đường thẳng MH qua M và nhận $\vec{n}_P$ làm véc tơ chỉ phương;
- Giải hệ giữa đường MH với mặt phẳng (P) , tìm t . Từ đó, suy ra tọa độ H .

 Gọi M' đối xứng với M qua mặt phẳng (P) thì

$$\begin{cases} x'_M = 2x_M - x_H \\ y'_M = 2y_M - y_H \\ z'_M = 2z_M - z_H \end{cases}$$



❖ Ví dụ 27. Gọi hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -1; -4)$ lên mặt phẳng $(P) : 2x - 2y - z - 3 = 0$ là điểm $H(a; b; c)$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)** $a + b + c = -1$. **(B)** $a + b + c = 3$. **(C)** $a + b + c = 5$. **(D)** $a + b + c = -\frac{5}{3}$.

 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 28. Cho mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z + 9 = 0$ và điểm $A(-7; -6; 1)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P) .

- (A)** $A'(1; 2; -3)$. **(B)** $A'(1; 2; 1)$. **(C)** $A'(5; 4; 9)$. **(D)** $A'(9; 0; 9)$.

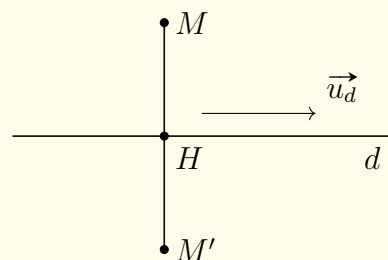
 **Lời giải.**

Dạng 7. Hình chiếu H của điểm M lên đường thẳng d

- Tham số điểm $H \in d$ theo ẩn t ;
- Giải $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0$, tìm t . Từ đó, suy ra tọa độ H .

 Gọi M' đối xứng với M qua mặt phẳng d thì

$$\begin{cases} x'_M = 2x_M - x_H \\ y'_M = 2y_M - y_H \\ z'_M = 2z_M - z_H \end{cases}.$$



❖ **Ví dụ 29.** Cho điểm $A(4; -3; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$. Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d . Tọa độ điểm H là

- Ⓐ $H(5; 4; -1)$. Ⓑ $H(1; 0; -1)$. Ⓒ $H(-5; -4; 1)$. Ⓓ $H(-2; -2; 0)$.

 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 30. Cho điểm $M(1; 2; -6)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Điểm N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng d có tọa độ là

- Ⓐ $N(0; 2; -4)$. Ⓑ $N(-1; 2; -2)$. Ⓒ $N(1; -2; 2)$. Ⓓ $N(-1; 0; 2)$.

 **Lời giải.**

Gv Ths: Nguyễn Hoàng Việt



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ

chỉ phương của đường thẳng d ?

- (A) $\vec{n} = (1; -2; 1)$. (B) $\vec{n} = (1; 2; 1)$. (C) $\vec{n} = (-1; -2; 1)$. (D) $\vec{n} = (-1; 2; 1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+8}{4} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{1}$. Khi đó một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là

- (A) $(4; -2; 1)$. (B) $(4; 2; -1)$. (C) $(4; -2; -1)$. (D) $(4; 2; 1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Véc-tơ nào dưới đây là

véc-tơ chỉ phương của d ?

- (A) $\vec{u}_1 = (0; 3; -1)$. (B) $\vec{u}_2 = (1; 3; -1)$. (C) $\vec{u}_3 = (1; -3; -1)$. (D) $\vec{u}_4 = (1; 2; 5)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây **không** phải

là vectơ chỉ phương của đường thẳng?

- (A) $(6; -4; 2)$. (B) $(3; -2; 1)$. (C) $(-3; 2; -1)$. (D) $(-3; 2; 1)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 4; -7)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) là

- (A) $\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-7}{-2}$. (B) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-7}$.
(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$. (D) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{-2}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và vuông góc với d có phương trình là

- (A) $(P): x - y + 2z = 0$. (B) $(P): x - 2y - 2 = 0$.
(C) $(P): x + y + 2z = 0$. (D) $(P): x - y - 2z = 0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; -1)$, $B(1; 2; 4)$. Phương trình nào dưới đây không phải phương trình đường thẳng AB ?

- (A) $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{5}$. (B) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. (D) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-5}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 2; 2)$. Đường thẳng đi qua M song song với Oy có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 2 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

$$\textcircled{C} \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

$$\textcircled{D} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 1)$ và hai mặt phẳng (P) , (Q) lần lượt có phương trình là $x - 3z + 1 = 0$, $2y - z + 1 = 0$. Đường thẳng d đi qua I và song song với mặt phẳng (P) , (Q) có phương trình là

$$\textcircled{A} \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{5}.$$

$$\textcircled{B} \frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

$$\textcircled{C} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-5}.$$

$$\textcircled{D} \frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y + z - 1 = 0$ là

$$\textcircled{A} M(1; -1; 0).$$

$$\textcircled{B} M(-1; 0; 1).$$

$$\textcircled{C} M(-1; 1; 0).$$

$$\textcircled{D} M(1; 0; -1).$$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ là

$$\textcircled{A} M(0; 2; 3).$$

$$\textcircled{B} M(0; 0; -2).$$

$$\textcircled{C} M(0; 0; 2).$$

$$\textcircled{D} M(0; -2; -3).$$

Câu 12. Đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3}$ vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

$$\textcircled{A} (\alpha_1): 4x + 2y + 6z - 2018 = 0.$$

$$\textcircled{B} (\alpha_2): 2x + y - 3z - 2017 = 0.$$

$$\textcircled{C} (\alpha_3): 3x + y + 2z - 2017 = 0.$$

$$\textcircled{D} (\alpha_4): 2x - y + 3z - 2018 = 0.$$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ và $\Delta': \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

$$\textcircled{A} \Delta \text{ trùng với } \Delta'.$$

$$\textcircled{B} \Delta \text{ và } \Delta' \text{ chéo nhau.}$$

$$\textcircled{C} \Delta \text{ và } \Delta' \text{ song song với nhau.}$$

$$\textcircled{D} \Delta \text{ cắt } \Delta'.$$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-1; 4; 2)$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng BC .

$$\textcircled{A} \sqrt{6}.$$

$$\textcircled{B} \sqrt{2}.$$

$$\textcircled{C} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\textcircled{D} \sqrt{3}.$$

Câu 15. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2}$ và $d_2: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 3t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$.

$$\textcircled{A} \frac{2\sqrt{110}}{55}.$$

$$\textcircled{B} \frac{\sqrt{110}}{23}.$$

$$\textcircled{C} \frac{\sqrt{55}}{7}.$$

$$\textcircled{D} \frac{\sqrt{11}}{3}.$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, gọi M là giao điểm của đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$ và mặt phẳng Oyz . Tính OM .

$$\textcircled{A} OM = 5.$$

$$\textcircled{B} OM = 7.$$

$$\textcircled{C} OM = \sqrt{14}.$$

$$\textcircled{D} OM = 3.$$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 6)$, $B(-3; 1; -2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- (A) 2. (B) 3. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : 3x - 2y + 2z - 5 = 0$, $(Q) : 4x + 5y - z + 1 = 0$. Các điểm A, B phân biệt thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) . Khi đó $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với véc-tơ nào sau đây?

- (A) $\vec{w} = (3; -2; 2)$. (B) $\vec{v} = (-8; 11; -23)$. (C) $\vec{k} = (4; 5; -1)$. (D) $\vec{u} = (8; -11; -23)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng song song $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $d': \frac{x-4}{1} =$

$\frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng (d, d') , đồng thời cách đều hai đường thẳng d và d' .

- (A) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-2}$. (B) $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+2}{2}$.
(C) $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{2}$. (D) $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, gọi H hình chiếu vuông góc của $M(2; 0; 1)$ lên đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ điểm H .

- (A) $H(2; 2; 3)$. (B) $H(0; -2; 1)$. (C) $H(1; 0; 2)$. (D) $H(-1; -4; 0)$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+1}{1}$. Cosin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là

- (A) $\frac{4}{9}$. (B) $\frac{\sqrt{65}}{9}$. (C) $\frac{5}{9}$. (D) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu của $A(2; -1; 1)$ lên đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$

Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- (A) $a + 2b + 3c = 10$. (B) $a + 2b + 3c = 5$. (C) $a + 2b + 3c = 8$. (D) $a + 2b + 3c = 12$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-6}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{1}$. Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua d .

- (A) $B(-3; 4; -4)$. (B) $B(2; -1; 3)$. (C) $B(3; 4; -4)$. (D) $B(3; -4; 4)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm M , cắt và vuông góc với đường thẳng d là

- (A) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$. (B) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.
(C) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{2}$. (D) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, gọi d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{x-2}{3} =$

$\frac{z+3}{1}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của d' ?

- (A) $\vec{u} = (2; 3; 0)$. (B) $\vec{u} = (2; 3; 1)$. (C) $\vec{u} = (-2; 3; 0)$. (D) $\vec{u} = (2; -3; 0)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + y - 2z + 1 = 0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào dưới đây?

- (A) $(2; 3; 3)$. (B) $(5; 6; 8)$. (C) $(0; 1; 3)$. (D) $(1; -2; 0)$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0; 5; 3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1; 1; 0)$ thuộc đường thẳng AC . Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AC ?

- (A) $\vec{u}(1; 2; 3)$. (B) $\vec{u}(0; -2; 6)$. (C) $\vec{u}(0; 1; -3)$. (D) $\vec{u}(0; 1; 3)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) d song song với (P) . (B) d nằm trong (P) .
(C) d cắt và không vuông góc với (P) . (D) d vuông góc với (P) .

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ và $d': \frac{x-4}{6} = \frac{y-6}{8} = \frac{z-8}{10}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) d vuông góc với d' . (B) d song song với d' . (C) d trùng với d' . (D) d và d' chéo nhau.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ và $(d_2): \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

- (A) (d_1) và (d_2) cắt nhau. (B) (d_1) và (d_2) vuông góc nhau.
(C) (d_1) và (d_2) trùng nhau. (D) (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(10; 2; -2)$ và $B(5; 1; -3)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$.

- (A) $m = -52$. (B) $m = 52$. (C) $m = 2$. (D) $m = -2$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ là điểm

- (A) $M(-1; 2; 2)$. (B) $M(0; 1; 2)$. (C) $M(2; 1; 0)$. (D) $M(1; 1; 1)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ lên mặt phẳng Oxy .

- (A) $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 \end{cases}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả giá trị tham số m để đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ song song với mặt phẳng $(P): 2x + y - m^2z + m = 0$.

- (A) $m \in \{-2; 2\}$. (B) $m \in \emptyset$. (C) $m = -2$. (D) $m = 2$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Tìm số thực m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

(A) $m \geq \frac{31}{2}$. (B) $m \leq \frac{31}{2}$. (C) $m < \frac{31}{2}$. (D) $m > \frac{31}{2}$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$. Biết điểm $A(a; b; c)$, ($c < 0$) là điểm nằm trên đường thẳng d và cách (P) một khoảng bằng 1. Tính tổng $S = a + b + c$.

(A) $S = 2$. (B) $S = -\frac{2}{5}$. (C) $S = 4$. (D) $S = \frac{12}{5}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 2; 3)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

- (A) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$. (B) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$.
(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$. (D) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$, $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A , song song với (P) sao cho khoảng cách từ B đến d là lớn nhất.

- (A) $\frac{x+3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$. (B) $\frac{x+3}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$.
(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. (D) $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z-1}{-7}$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ (với m là tham số thực) và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$. Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN = 8$.

- (A) $m = -12$. (B) $m = -7$. (C) $m = 12$. (D) $m = 7$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$, $\Delta_2: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Tính bán kính mặt cầu (S) .

- (A) $\frac{\sqrt{10}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{11}}{2}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $\sqrt{2}$.

—HẾT—

Bài 5

MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ

A PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Tìm max - min bằng cách thiết lập hàm và khảo sát hàm

❖ Ví dụ 1. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my + 4mz - 12m - 10 = 0$. Bán kính nhỏ nhất của (S) là

- (A) $R = 6$. (B) $R = 2$. (C) $R = 5$. (D) $R = 4$.

Lời giải.

❖ Ví dụ 2. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; -2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- (A) $M(1; 0; -2)$. (B) $M(3; 1; -3)$. (C) $M(-1; -1; -1)$. (D) $M(5; 2; -4)$.

Lời giải.

❖ Ví dụ 3. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ và ba điểm $A(1; 3; -2)$, $B(0; 4; -5)$, $C(1; 2; -4)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

- (A) 0. (B) -1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

✎ **Ví dụ 4.** Cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB .

(A) $S = 4$.

(B) $S = \sqrt{7}$.

(C) $S = 2\sqrt{2}$.

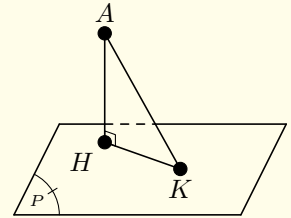
(D) $S = 2\sqrt{7}$.

💬 **Lời giải.**

Dạng 2. Tìm max - min bằng cách sử dụng mối quan hệ giữa đường cao và đường xiên

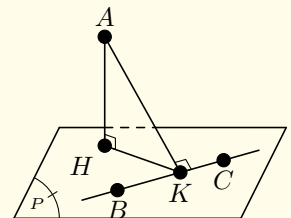
Bài toán 1. Tìm mặt phẳng (P) chứa điểm K và cách điểm A một khoảng lớn nhất.

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) .
- Chú ý rằng AK cố định, ta có đánh giá $AH \leq AK$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi H trùng K hay $AK \perp (P)$.
- Khi đó (P) là mặt phẳng qua điểm K và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm véc tơ pháp tuyến.



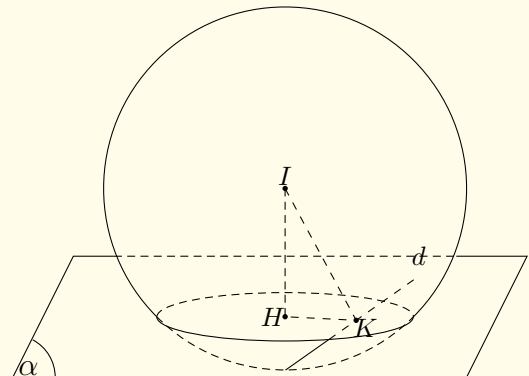
Bài toán 2. Tìm mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d (hoặc hai điểm B, C) và cách điểm A một khoảng lớn nhất.

- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên (P) và d .
- Chú ý rằng AK cố định, ta có đánh giá $AH \leq AK$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi H trùng K hay $AK \perp (P)$.
- Khi đó (P) là mặt phẳng qua điểm K và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm véc tơ pháp tuyến.



Bài toán 3. Tìm mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d (hoặc hai điểm A, B) và cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính (chu vi, diện tích) nhỏ nhất.

- Gọi I là tâm của mặt cầu.
- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và d .
- Chú ý rằng IK cố định. Để bán kính đường tròn giao tuyến nhỏ nhất thì IH phải lớn nhất. Ta có đánh giá $IH \leq IK$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi H trùng K hay $IK \perp (P)$.
- Khi đó (P) là mặt phẳng qua điểm K và nhận $\overrightarrow{IK}$ làm véc tơ pháp tuyến.



Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(3; 0; 3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là

- (A) $x - 2y + 2z + 5 = 0$. (B) $x - y + 2z + 3 = 0$.
 (C) $2x - 2y + 4z + 3 = 0$. (D) $2x - y + 2z = 0$.

Lời giải.

❖ **Ví dụ 6.** Cho điểm $A(3; 2; -1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P)

chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất là

A $2x + y - 3z + 3 = 0.$

B $x + 2y - z - 1 = 0.$

C $3x + 2y - z + 1 = 0.$

D $2x - y - 3z + 3 = 0.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 7.** Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hai điểm $M(3; -2; 6), N(0; 1; 0)$. Giả sử $(\alpha): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua M, N và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $a + b^2 + c^3$.

A 9.

B 12.

C 5.

D 3.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 8.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

Ⓐ $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Ⓑ $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}$.

Ⓒ $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}$.

Ⓓ $\frac{x+3}{-26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

💬 **Lời giải.**

📁 Dạng 3. Tìm max – min bằng cách quy về tìm hình chiếu của điểm lên mặt.

Cho ba điểm A, B, C và mặt phẳng (P) .

✍ Ta thường gặp một trong hai bài toán sau:

- ① Tìm điểm $M \in (P)$ để biểu thức $T = |m \cdot \overrightarrow{MA} + n \cdot \overrightarrow{MB} + k \cdot \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất;
- ② Tìm điểm $M \in (P)$ để biểu thức $T = m \cdot MA^2 + n \cdot MB^2 + k \cdot MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất;

 Các bước giải:

① Gọi I là điểm thỏa $m.\overrightarrow{IA} + n.\overrightarrow{IB} + k.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Giải tìm điểm I .

Có thể ghi nhớ nhanh $I = \frac{m \cdot A + n \cdot B + k \cdot C}{m + n + k}$ (*).

② Khi đó $T_{\min}$ khi $IM_{\min}$. Suy ra M là hình chiếu vuông góc của I lên (P) .

❖ **Ví dụ 9.** Cho $A(-3; 0; 0)$, $B(0; 0; 3)$, $C(0; -3; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Gọi $M(a, b, c)$ là điểm trên (P) sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất. Tính $a + b + c$.

(A) $a + b + c = 0$.

(B) $a + b + c = -1$.

(C) $a + b + c = 5$.

(D) $a + b + c = 3$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 10.** Cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z + 9 = 0$ và ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(2; 0; -1)$, $C(3; 1; 1)$. Tìm tọa độ điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $M(1; -2; -3)$.

(B) $M(-3; 1; -4)$.

(C) $M(-3; 2; -5)$.

(D) $M(1; -3; -2)$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 11.** Cho đường thẳng $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ và ba điểm $A(1; 3; -2)$, $B(0; 4; -5)$, $C(1; 2; -4)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

(A) 0.

(B) -1.

(C) 3.

(D) 4.

💬 **Lời giải.**

Dạng 4. Tìm max - min bằng cách quy về tìm điều kiện ba điểm thẳng hàng

✎ **Ví dụ 12.** Cho hai điểm $E(1; -2; 4)$, $F(1; -2; -3)$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho tổng $ME + MF$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ điểm M .

☐ A $M(-1; 2; 0)$.

☐ B $M(-1; -2; 0)$.

☐ C $M(1; -2; 0)$.

☐ D $M(1; 2; 0)$.

 Lời giải.

✎ **Ví dụ 13.** Cho hai điểm $A(-1; 3; 4)$, $B(3; 1; 0)$. Gọi M là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là ngắn nhất. Tìm hoành độ x_0 của điểm M .

☐ A $x_0 = 4$.

☐ B $x_0 = 3$.

☐ C $x_0 = 2$.

☐ D $x_0 = 1$.

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 14.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 2; 1)$ và $B(-1; 4; -3)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

A $M(-5; 1; 0)$.

B $M(5; 1; 0)$.

C $M(5; -1; 0)$.

D $M(-5; -1; 0)$.

💬 **Lời giải.**

Dạng 5. Tìm max min liên quan đến phương trình theo đoạn chắn

❖ **Ví dụ 15.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(1; 1; 4)$ cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A, B, C phân biệt sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Tính thể tích nhỏ nhất đó.

A 72.

B 108.

C 18.

D 36.

💬 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 16.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $M(1; 1; 1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM cắt các **tia** Oy , Oz lần lượt tại B , C . Khi mặt phẳng (P) thay đổi thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

- ☐ **A** $5\sqrt{5}$.
 ☐ **B** $2\sqrt{6}$.
 ☐ **C** $4\sqrt{6}$.
 ☐ **D** $3\sqrt{6}$.

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Nơi Đầu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường



B BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - (4m - 2)x + 2my + (4m + 2)z - 7 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối cầu là

- (A) $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$. (B) 972π . (C) 36π . (D) 300π .

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1; 2; 1)$ và $B(3; 2; 3)$, có tâm thuộc mặt phẳng $(P) : x - y - 3 = 0$, đồng thời có bán kính nhỏ nhất. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- (A) $\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 1. (D) 2.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 3; 4)$, $B(9; -7; 2)$. Tìm trên trục Ox tọa độ điểm M sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- (A) $M(5; 0; 0)$. (B) $M(-2; 0; 0)$. (C) $M(4; 0; 0)$. (D) $M(9; 0; 0)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(-1; -1; 6)$, $B(2; -1; 0)$. Biết điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho biểu thức $T = MA^2 + 3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là $T_{\min}$. Khi đó, $T_{\min}$ bằng bao nhiêu?

- (A) $T_{\min} = \frac{1}{2}$. (B) $T_{\min} = 25$. (C) $T_{\min} = \frac{25}{2}$. (D) $T_{\min} = 45$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng Δ sao cho $|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a + 2b + 4c$ bằng bao nhiêu?

- (A) 0. (B) -1. (C) 1. (D) 2.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách gốc tọa độ một đoạn lớn nhất.

- (A) $x + y + 2z - 12 = 0$. (B) $2x + y + 3z - 19 = 0$.
(C) $3x + 2y + 3z - 22 = 0$. (D) $3x - 2y + 3z - 14 = 0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(1; 2; -1)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- (A) $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{11}}{8}$. (D) $\frac{7\sqrt{2}}{6}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1)$, $B(1; 2; 1)$ và đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho diện tích tam giác MAB có giá trị nhỏ nhất.

- (A) $M(2; -3; -2)$. (B) $M(0; -1; 2)$. (C) $M(1; -2; 0)$. (D) $M(-1; 0; 4)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-5; 2; 2)$, $B(-1; 6; 2)$. Mặt phẳng $(P) : x + y - 2z - 5 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc (P) thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất, khi đó tính giá trị của tích $P = abc$.

- (A) $P = -20$. (B) $P = 0$. (C) $P = 12$. (D) $P = 24$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, trong đó $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $I(1; 2; 3)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó các số a, b, c thỏa mãn đẳng thức nào sau đây?

- (A) $a + b + c = 12$. (B) $a^2 + b = c - 6$. (C) $a + b + c = 18$. (D) $a + b - c = 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 4; 9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

- (A) $d = \frac{36}{7}$. (B) $d = \frac{24}{5}$. (C) $d = \frac{8}{3}$. (D) $d = \frac{26}{\sqrt{14}}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $\Delta_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (h; k; 1)$. Giá trị $h - k$ bằng

- (A) 0. (B) 4. (C) 6. (D) -2.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$ và $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 0; -1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

- (A) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. (B) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.
(C) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. (D) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

- (A) $y + z + 1 = 0$. (B) $x + 3y + 5z + 2 = 0$.
(C) $x - 2y - 3 = 0$. (D) $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(0; -1; 2)$ và $N(-1; 1; 3)$. Một mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0; 0; 2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tìm tọa độ một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

- (A) $\vec{n} = (1; -1; 1)$. (B) $\vec{n} = (1; 1; -1)$. (C) $\vec{n} = (2; 1; -1)$. (D) $\vec{n} = (2; -1; 1)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Biết rằng phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất, có dạng $ax + by + cz - 3 = 0$ (với a, b, c là các số nguyên). Tính tổng $T = a + b + c$.

- (A) 3. (B) -3. (C) -2. (D) -5.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-2; -2; 1)$, $A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách A một khoảng bé nhất.

- (A) $\vec{u}(1; 0; 2)$. (B) $\vec{u}(2; 1; 6)$. (C) $\vec{u}(-1; 0; 2)$. (D) $\vec{u}(2; 2; -1)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z + 24 = 0$. Gọi I là tâm mặt cầu và H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M .

- (A) $M(-1; 0; 4)$. (B) $M(0; 1; 2)$. (C) $M(3; 4; 2)$. (D) $M(4; 1; 2)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(2; 0; 2)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm B, C và cách A một khoảng cách lớn nhất. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của (α) ?

- (A) $\vec{n}(1; 0; -1)$. (B) $\vec{n}(5; 2; -1)$. (C) $\vec{n}(5; -2; -1)$. (D) $\vec{n}(5; 1; -2)$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC , với $A(5; 7; 2)$, $B(1; -9; -2)$, $C(9; -7; 9)$ và mặt phẳng $(P) : 3x - y + z + 1 = 0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

- (A) 345. (B) 367. (C) 378. (D) 389.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 1; 0)$, $B(-9; 4; 9)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y + z + 1 = 0$. Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IA - IB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó, tổng $a + b + c$ là

- (A) $a + b + c = 22$. (B) $a + b + c = -4$. (C) $a + b + c = -13$. (D) $a + b + c = 13$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -3; 0)$, $B(5; -1; -2)$. Điểm $M(a; b; c)$ nằm trên (P) và $|MA - MB|$ lớn nhất. Giá trị tích $a \cdot b \cdot c$ bằng

- (A) 1. (B) 12. (C) 24. (D) -24.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; 1)$, $B(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z - 4 = 0$. Gọi M là điểm nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $AM + BM$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính độ dài đoạn OM .

- (A) $OM = 2\sqrt{5}$. (B) $OM = \frac{\sqrt{86}}{4}$. (C) $OM = 4\sqrt{86}$. (D) $OM = \frac{\sqrt{59}}{2}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$ và $A(1; -1; 0)$, $B(0; -1; 2)$, $C(-1; 1; 0)$. Biết điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho biểu thức $|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- (A) $M\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. (B) $M(0; 1; -1)$. (C) $M\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. (D) $M(2; -1; -4)$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + y - 3z + 7 = 0$ và ba điểm $A(2; -1; 0)$, $B(0; -1; 2)$, $C(2; 3; -1)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tổng $T = x_0 + 3y_0 - 2z_0$ bằng bao nhiêu?

- (A) $T = 0$. (B) $T = -4$. (C) $T = 1$. (D) $T = -14$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y - 3z + 1 = 0$ và ba điểm $A(1; 1; -1)$, $B(-3; 1; 0)$, $C(-2; 1; -1)$. Biết điểm $M \in (\alpha)$ sao cho biểu thức $T = |2\vec{MA} + 5\vec{MB} - 6\vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- (A) $M(0; 1; 0)$. (B) $M(2; -1; 2)$. (C) $M(1; 0; 1)$. (D) $M(-1; 2; -1)$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; -2; -3)$, $B(-4; -4; 1)$, $C(2; -3; 3)$. Tìm tọa độ của điểm M trong mặt phẳng Oxz sao cho $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- (A) $(0; 0; 3)$. (B) $(0; 0; 2)$. (C) $(0; 0; 1)$. (D) $(0; 0; -1)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$ và điểm $M(0; -1; 0)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo đường tròn (C) có chu vi nhỏ nhất. Gọi $N(a; b; c)$ thuộc (C) sao cho $ON = \sqrt{6}$. Tính b .

(A) $b = 2$.

(B) $b = -2$.

(C) $b = -1$.

(D) $b = 3$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 1)$, $C(1; 0; -2)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(Q) : 2x - y - 2z + 3 = 0$.

(A) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

(B) $\frac{121}{54}$.

(C) 24.

(D) $\frac{91}{54}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng d đi qua A và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(3; 4; -4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới một góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào sau đây?

(A) $H(-2; -1; 3)$.

(B) $I(-1; -2; 3)$.

(C) $K(3; 0; 15)$.

(D) $J(-3; 2; 7)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta) : \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (Δ) sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (Q) là

(A) $x - 2y + z = 0$.

(B) $x + 22y + 10z = 0$.

(C) $x - 2y - z = 0$.

(D) $x + 10y - 22z = 0$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0; -1; 2)$ và $N(-1; 1; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M, N và tạo với mặt phẳng $(Q) : 2x - y - 2z - 2 = 0$ góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1; 2; 3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng là

(A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(B) $\frac{7\sqrt{3}}{11}$.

(C) $\sqrt{3}$.

(D) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $S : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ có tâm I và mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z + 24 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Điểm M thuộc (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M .

(A) $M(-1; 0; 4)$.

(B) $M(0; 1; 2)$.

(C) $M(3; 4; 2)$.

(D) $M(4; 1; 2)$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x - y + z + 3 = 0$, $(Q) : x + 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với (Q) . Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng

(A) 14.

(B) $3 + 5\sqrt{3}$.

(C) 28.

(D) $9 + 5\sqrt{2}$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0; 0; -4)$, $B(2; 0; 0)$ và cắt (S) theo một giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(\alpha) : ax + by - z + c = 0$. Tính $P = a - b + c$.

(A) $P = 8$.

(B) $P = 0$.

(C) $P = 2$.

(D) $P = -4$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 3)$, $B(6; 5; 5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB . Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P) : 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{R}$. Tính $S = b + c + d$.

(A) $S = -18$.

(B) $S = -24$.

(C) $S = -11$.

(D) $S = -14$.

—HẾT—

Bài 6

BỘ ĐỀ ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG

A ĐỀ SỐ 1

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 4)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- (A) $(2; -2; 4)$. (B) $(4; -2; 4)$. (C) $(-4; 2; 4)$. (D) $(4; 2; 2)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}(1; 2; 3)$ và $\vec{v}(-1; 3; 0)$. Khi đó tích có hướng $[\vec{u}; \vec{v}]$ là

- (A) $(-9; 3; -5)$. (B) $(9; 3; 5)$. (C) $(-9; -3; 5)$. (D) $(9; -3; 5)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc-tơ: $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Tọa độ véc-tơ $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$ là

- (A) $(1; 2; -7)$. (B) $(0; 27; 3)$. (C) $(0; -27; 3)$. (D) $(0; 27; -3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1; 2; -3)$ và $C(7; 4; -2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là

- (A) $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$. (B) $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$. (C) $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$. (D) $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1; 2; -2)$ và đi qua điểm $M(3; -4; 1)$.

- (A) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 49 = 0$. (B) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 40 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z - 40 = 0$. (D) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z - 40 = 0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 12 = 0$ và điểm $M(2; 2; 1)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) Điểm M nằm trong mặt cầu (S) .
(B) Điểm M nằm trên mặt cầu (S) .
(C) Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) .
(D) Điểm M cách tâm của mặt cầu một đoạn bằng bán kính.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z = 19$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

- (A) $I(1; -2; 1)$, $R = 5$. (B) $I(1; -2; 1)$, $R = \sqrt{19}$.
(C) $I(-1; 2; -1)$, $R = \sqrt{19}$. (D) $I(-1; 2; -1)$, $R = 5$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oy và điểm $M(1; 4; -3)$ là

- (A) $3x + z = 0$. (B) $3x + y = 0$. (C) $x + 3z = 0$. (D) $3x - z = 0$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3z - 1 = 0$. Véc-tơ pháp tuyến của (α) là

- (A) $\vec{n}(2; 3; -1)$. (B) $\vec{n}(2; 3; 0)$. (C) $\vec{n}(2; 0; -3)$. (D) $\vec{n}(-2; 0; -3)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(2; 1; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$. Phương trình của mặt phẳng (P) là

(A) $3x - y + z - 4 = 0 = 0.$

(B) $x + 3y - z - 6 = 0.$

(C) $x - 3y + z + 2 = 0.$

(D) $x + 2y + 4z = 0.$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng đi qua gốc tọa độ, đồng thời vuông góc với cả hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$ là

(A) $2x + y - 2z + 1 = 0.$

(B) $2x - y - 2z = 0.$

(C) $2x - y + 2z = 0.$

(D) $2x + y - 2z = 0.$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; -1; 2)$, $B(-3; 1; 2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

(A) $3x + y = 0.$

(B) $3x - y = 0.$

(C) $x - 3y = 0.$

(D) $x + 3y = 0.$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -2; 0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(0; 0; 1)$. Đường thẳng d có phương trình tham số

(A) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \\ z = t \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t. \\ z = t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = t \\ y = -2t. \\ z = 1 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t. \\ z = 0 \end{cases}$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và nhận $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ làm véc-tơ chỉ phương.

(A) $\frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z+6}{3}.$

(B) $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{6}.$

(C) $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}.$

(D) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{3}.$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của đường thẳng d đi qua điểm $M(-2; 1; 2)$ và song song với trục Ox là

(A) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}.$

(B) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t. \\ z = 2 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t. \\ z = 2t \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$. Tìm hình chiếu của A trên mặt phẳng (α) ?

(A) $H\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right).$

(B) $H\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$

(C) $H\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right).$

(D) $H\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right).$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 3y - z + 1 = 0$ và $(\beta): x + 3y - z - 5 = 0$. Tính khoảng cách giữa (α) và (β) .

(A) $\frac{6\sqrt{3}}{2}.$

(B) $\frac{6\sqrt{11}}{11}.$

(C) $\frac{\sqrt{11}}{6}.$

(D) $\frac{3\sqrt{11}}{11}.$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z - 1 = 0$, và $(Q): (2 - m)x + (2m - 1)y + 12z - 2 = 0$ với m là tham số thực. Tìm m để $(P) \parallel (Q)$.

(A) $m = -6.$

(B) $m = 4.$

(C) $m = -2.$

(D) $m = -4.$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(4; 1; 1)$, $C(1; 1; 5)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

(A) $I(-2; -1; -2).$

(B) $I(2; -1; 2).$

(C) $I(2; 1; 2).$

(D) $I(1; 2; 2).$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 2)$, $B(1; 1; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng

A 5.

B 3.

C 4.

D 10.

—HẾT—

B ĐỀ SỐ 2

Câu 1. Cho $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (-2; -1; 3)$. Tính $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

- (A) $\vec{a} \wedge \vec{b} = (5; -1; 3)$. (B) $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-5; 1; -3)$.
 (C) $\vec{a} \wedge \vec{b} = (5; 1; 3)$. (D) $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-5; -1; -3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(0; -3; 2)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$. (B) $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
 (C) $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$. (D) $\overrightarrow{OM} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; 3; -1)$ và $B(1; -1; 9)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn AB là

- (A) $I(3; 1; 4)$. (B) $I(2; 2; -5)$. (C) $I(2; 6; -10)$. (D) $I(-1; -3; -5)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M(0; 2; -1)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (2; -1; -3)$.

- (A) $\frac{x}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$. (B) $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.
 (C) $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$. (D) $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 1$. Mặt cầu (S) có tâm I là

- (A) $I(1; -2; 3)$. (B) $I(1; 2; -3)$. (C) $I(-1; 2; -3)$. (D) $I(-1; 2; 3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(3; -1; 2)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z = 0$.

- (A) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 2$. (B) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$.
 (C) $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$. (D) $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z - 5 = 0$. Điểm nào sau đây **không** thuộc mặt cầu (S) ?

- (A) $B(-1; -2; 0)$. (B) $A(0; 2; 2)$. (C) $C(-3; 4; -2)$. (D) $D(1; 0; -2)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -3x + 2z - 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

- (A) $\vec{n} = (3; 0; 2)$. (B) $\vec{n} = (-3; 2; -1)$. (C) $\vec{n} = (3; 2; -1)$. (D) $\vec{n} = (-3; 0; 2)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây chứa trục Ox ?

- (A) $2y + z = 0$. (B) $x + 2y = 0$. (C) $x + 2y - z = 0$. (D) $x - 2z = 0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x + 3y - 4z - 5 = 0$ có phương trình là

- (A) $2x + 3y + 4z - 14 = 0$. (B) $2x - 3y - 4z + 6 = 0$.
 (C) $2x + 3y - 4z - 4 = 0$. (D) $2x + 3y - 4z + 4 = 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 0; 1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

- (A) $x - 2y - 4z + 6 = 0$. (B) $x + 2y - 4z + 1 = 0$.
 (C) $x + y + 2z - 5 = 0$. (D) $x + 2y - 4z + 6 = 0$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài đoạn AM .

(A) $AM = 3\sqrt{3}$.

(B) $AM = \sqrt{29}$.

(C) $AM = 2\sqrt{7}$.

(D) $AM = \sqrt{30}$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + (m+1)y - 2z + m = 0$ và $(Q): 2x - y + 3 = 0$ (với m là tham số thực). Tìm m để hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

(A) $m = -1$.

(B) $m = 3$.

(C) $m = 1$.

(D) $m = -5$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(2; 4; -1)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, B là

(A) $\frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+1}{4}$.

(B) $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{4}$.

(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-4}$.

(D) $\frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{-4}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 1)$ và mặt phẳng $(P): -x + y + z = 0$. Đường thẳng qua M vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

(A) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ và điểm $A(3; 1; 1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi chứa đường thẳng d . Khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất thì điểm nào sau đây thuộc (P) ?

(A) $(-2; 3; 2)$.

(B) $(-2; 3; -2)$.

(C) $(2; -3; -2)$.

(D) $(-2; -3; 2)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 25$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Biết rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $J(a; b; c)$. Tính $a + b + c$.

(A) $a + b + c = -2$.

(B) $a + b + c = 6$.

(C) $a + b + c = 2$.

(D) $a + b + c = -6$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 3; -5)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành một cấp số cộng có công sai bằng 2. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $mx + ny + pz - 15 = 0$ với $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Tính $m + n + p$.

(A) 3.

(B) -5.

(C) 15.

(D) 23.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1; 6; 2), B(3; 0; 0)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x - y + 2 = 0$. Bán kính của mặt cầu (S) có giá trị nhỏ nhất là

(A) $\frac{\sqrt{462}}{6}$.

(B) $\frac{\sqrt{534}}{4}$.

(C) $\frac{\sqrt{218}}{6}$.

(D) $\frac{\sqrt{530}}{4}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc (S) . Gọi M và N là hai tiếp điểm. Tính độ dài MN .

(A) $MN = 2\sqrt{2}$.

(B) $MN = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(C) $MN = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(D) $MN = 4$.

—HẾT—

C ĐỀ SỐ 3

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 2)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(3; 2; 4)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- (A) $G\left(\frac{2}{3}; 1; 9\right)$. (B) $G(2; 3; 9)$. (C) $G\left(\frac{2}{3}; 1; 3\right)$. (D) $G\left(2; \frac{1}{3}; 3\right)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (0; 4; -3)$. Tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có tọa độ là

- (A) $(6; 3; 4)$. (B) $(-6; 3; -4)$. (C) $(6; -3; 4)$. (D) $(-6; -3; -4)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 0; 1)$, $\vec{c} = (-1; 0; 1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i}$.

- (A) $\vec{n} = (-6; 2; 6)$. (B) $\vec{n} = (6; 2; 6)$. (C) $\vec{n} = (6; 2; -6)$. (D) $\vec{n} = (0; 2; 6)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 2y + 4z + 27 = 0$ có bán kính bằng

- (A) $2\sqrt{3}$. (B) 3. (C) $\sqrt{3}$. (D) 9.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 3)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 14 = 0$. Khẳng định nào được cho dưới đây là đúng?

- (A) M nằm trên (S) . (B) M nằm ngoài (S) .
(C) M nằm trong (S) . (D) M trùng với tâm của (S) .

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào cho dưới đây chứa trục Oz ?

- (A) $2y + 3z = 0$. (B) $x - 2z = 0$. (C) $3x - 4y = 0$. (D) $6x + 5 = 0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- (A) $\vec{n}_1 = (-1; 0; 1)$. (B) $\vec{n}_2 = (3; -1; 2)$. (C) $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$. (D) $\vec{n}_4 = (3; 0; -1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) là

- (A) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 10 = 0$. (B) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$. (D) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 10 = 0$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 2 = 0$ có phương trình là

- (A) $2x - y + 3z - 9 = 0$. (B) $2x - y + 3z - 11 = 0$.
(C) $2x - y - 3z + 11 = 0$. (D) $2x - y + 3z + 11 = 0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1; 2; -2)$, $B(2; -1; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x - 2y - z + 1 = 0$ có phương trình là

- (A) $15x + 7y + z - 27 = 0$. (B) $15x - 7y + z - 27 = 0$.
(C) $15x - 7y + x + 27 = 0$. (D) $15x + 7y - z + 27 = 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$ và $(\beta): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để (α) vuông góc với (β) .

- (A) $|m| = 1$. (B) $|m| = 2$. (C) $|m| = \sqrt{3}$. (D) $m = \sqrt{2}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oy và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π là

(A) $(P): x - 3z = 0.$

(B) $(P): 3x + z = 0.$

(C) $(P): 3x + z + 2 = 0.$

(D) $(P): 3x - z = 0.$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC ?

(A) $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

(B) $x - 2y + z = 0.$

(C) $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}.$

(D) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

(A) $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}.$

(B) $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}.$

(C) $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}.$

(D) $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}.$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1; 1; 2)$, $B(0; 1; -1)$, $C(x+2; y; -2)$ thẳng hàng. Tổng $x + y$ bằng

(A) $\frac{7}{3}.$

(B) $-\frac{8}{3}.$

(C) $-\frac{2}{3}.$

(D) $-\frac{1}{3}.$

Câu 16. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ có tâm I và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 24 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) . Điểm M thuộc (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M .

(A) $M(-1; 0; 4).$

(B) $M(3; 4; 2).$

(C) $M(0; 1; 2).$

(D) $M(4; 1; 2).$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và mặt phẳng $(Q): x-y+z-1=0$. Mặt phẳng (R) vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (R) bằng 2. Phương trình mặt phẳng (R) là

(A) $2x - 2z - 2\sqrt{2} = 0.$

(B) $x - z - 2\sqrt{2} = 0.$

(C) $x - z + 2\sqrt{2} = 0.$

(D) $x - z + 2\sqrt{2} = 0$ và $x - z - 2\sqrt{2} = 0.$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = (m-1)t \\ y = (2m+1)t \\ z = 1 + (2m^2+1)t \end{cases}$. Với giá trị nào của m

thì đường thẳng d nằm trong mặt phẳng Oyz ?

(A) $m = -1.$

(B) $m = 1.$

(C) $m = 1$ hoặc $m = -1.$

(D) $m = 2.$

Câu 20. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy một góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

(A) $E(-3; 0; 4).$

(B) $M(3; 0; 2).$

(C) $N(-1; -2; -1).$

(D) $F(1; 2; 1).$

—HẾT—

Nơi Đầu Có Ý Chí Ở Đó Có Con Đường



D

ĐỀ SỐ 4

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình của mặt phẳng đi qua $A(2; 6; -3)$ và song song với mặt phẳng (Oyz) .

- (A) $x = 2$. (B) $y = 6$. (C) $x + z = 12$. (D) $z = -3$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}(1; -2; 3)$; $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$. Khi đó tọa độ $\vec{a} + \vec{b}$ là

- (A) $(3; -2; 0)$. (B) $(3; -5; 0)$. (C) $(1; 2; -6)$. (D) $(3; -5; -3)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 2 = 0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

- (A) $\vec{n}_3 = (2; 3; -2)$. (B) $\vec{n}_1 = (2; -1; 3)$. (C) $\vec{n}_4 = (1; -1; 3)$. (D) $\vec{n}_2 = (2; 1; 3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 0; -3)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 0)$. Tính $\cos(\vec{u}; \vec{v})$.

- (A) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$. (B) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$.
(C) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. (D) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 16$. Bán kính của mặt cầu (S) là

- (A) 5. (B) 4. (C) 16. (D) 7.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t + 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Tìm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .

- (A) $(2; -1; -2)$. (B) $(-2; 1; 1)$. (C) $(1; 1; 1)$. (D) $(-2; 1; 2)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$, $\vec{c} = (-2; 5; 1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ là

- (A) $\vec{u} = (6; 0; -6)$. (B) $\vec{u} = (-6; 6; 0)$. (C) $\vec{u} = (0; 6; -6)$. (D) $\vec{u} = (6; -6; 0)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ $A(-2; 1; -6)$ đến mặt phẳng (Oxy) là

- (A) 1. (B) $\frac{7}{\sqrt{41}}$. (C) 6. (D) 2.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ và $\Delta_2: \frac{x+3}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Δ_1 cắt và vuông góc với Δ_2 . (B) Δ_1 cắt và không vuông góc với Δ_2 .
(C) Δ_1 song song Δ_2 . (D) Δ_1 và Δ_2 chéo nhau và vuông góc với nhau.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): 2x - y + 5z - 15 = 0$ và điểm $E(1; 2; -3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua E và song song với mặt phẳng (Q) .

- (A) $(P): 2x - y + 5z - 15 = 0$. (B) $(P): 2x - y + 5z + 15 = 0$.
(C) $(P): x + 2y - 3z - 15 = 0$. (D) $(P): x + 2y - 3z + 15 = 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z = 0$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S) . Phương trình của mặt phẳng (Q) là

(A) (Q) : $2x + 2y - 2z + 19 = 0$.

(B) (Q) : $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

(C) (Q) : $x + 2y - 2z - 17 = 0$.

(D) (Q) : $x + 2y - 2z - 35 = 0$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 2; -1)$ và đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 5t \\ z = -4 + t \end{cases}$$
. Viết phương

trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d .

(A) $x + 3y - 4z - 13 = 0$.

(B) $x - 5y + z - 8 = 0$.

(C) $x - 5y + z + 8 = 0$.

(D) $x + 5y + z - 11 = 0$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; -1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $D(1; 1; 1)$ và song song với mặt phẳng (ABC) là

(A) $3x + 2y - 6z + 1 = 0$.

(B) $3x + 2y - 5z = 0$.

(C) $6x + 2y - 3z - 5 = 0$.

(D) $2x + 3y - 6z + 1 = 0$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (d) : $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{1}$. Trong các mặt phẳng sau đây, mặt phẳng nào song song với đường thẳng (d) ?

(A) $5x - 3y + z - 9 = 0$.

(B) $3x + 4y - 3z + 16 = 0$.

(C) $5x - 3y + z - 7 = 0$.

(D) $3x + 4y - 3z + 3 = 0$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và song song với đường thẳng d : $x = y = z$.

(A) Δ : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

(B) Δ : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}$.

(C) Δ : $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}$.

(D) Δ : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 16. Trong không gian Oxy , cho điểm $M(1; -1; 1)$ và mặt phẳng (P) : $-x + y + z = 0$. Đường thẳng qua M vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

(B) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$.

(C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

(D) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm M' là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy) .

(A) $M'(-2; 1; 0)$.

(B) $M'(0; 0; 1)$.

(C) $M'(2; 1; -1)$.

(D) $M'(2; -1; 0)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; 0)$ và chứa đường thẳng d : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; a; b)$. Tính $a + b$.

(A) $a + b = 2$.

(B) $a + b = -3$.

(C) $a + b = 0$.

(D) $a + b = 3$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d : $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{3}$ đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $A(-1; 4; -2)$.

(B) $C(1; -1; 3)$.

(C) $B(1; -4; 2)$.

(D) $D(-1; 1; -3)$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 0)$, $B(2; -1; 2)$. Phương trình của mặt cầu có đường kính AB là

(A) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \sqrt{24}$.

(B) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \sqrt{6}$.

(C) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 24$.

(D) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 6$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Tọa độ điểm A là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oyz) là

(A) $A(1; -2; 3)$.

(B) $A(1; -2; 0)$.

(C) $A(0; -2; 3)$.

(D) $A(1; 0; 3)$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oyz) là một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u} = (2; 1; -3)$.

(B) $\vec{u} = (0; 1; 3)$.

(C) $\vec{u} = (0; 1; -3)$.

(D) $\vec{u} = (2; 0; 0)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 3; 4)$, $B(3; 1; 0)$. Gọi M là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là ngắn nhất. Tìm hoành độ x_0 của điểm M .

(A) $x_0 = 1$.

(B) $x_0 = 4$.

(C) $x_0 = 3$.

(D) $x_0 = 2$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 0; 1)$, $B(6; -2; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A , B và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{2}{7}$ là

(A) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z + 12 = 0 \\ 2x + 3y - 6z - 1 = 0 \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x + 3y - 6z = 0 \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} 2x - 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} 2x - 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x - 3y - 6z + 1 = 0 \end{cases}$.

—HẾT—

E

ĐỀ SỐ 5

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d ?

- (A) $(1; -2; 1)$. (B) $(1; 2; 1)$. (C) $(-1; -2; 1)$. (D) $(-1; 2; 1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 3x - 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách từ A đến (P) .

- (A) $\frac{21}{\sqrt{29}}$. (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. (C) $\frac{5}{\sqrt{29}}$. (D) $\frac{5}{9}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, tìm tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 3)^2 = 18$.

- (A) $I(-1; -4; 3), R = \sqrt{18}$. (B) $I(1; -4; -3), R = \sqrt{18}$.
(C) $I(1; 4; 3), R = \sqrt{18}$. (D) $I(1; -4; 3), R = \sqrt{18}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .

- (A) $A(-1; -2; -3)$. (B) $A(1; 2; 3)$. (C) $A(2; -4; 6)$. (D) $A(1; -2; 3)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (-1; 0; 2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- (A) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$. (B) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$. (C) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$. (D) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 4y + 3z - 2 = 0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là ?

- (A) $\vec{n}_2 = (1; 4; 3)$. (B) $\vec{n}_1 = (0; -4; 3)$. (C) $\vec{n}_4 = (-4; 3; -2)$. (D) $\vec{n}_3 = (-1; 4; -3)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): -6x + my - 2mz - m^2 = 0$ và $(Q): 2x + y - 2z + 3 = 0$ (m là tham số). Tìm m để mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) .

- (A) $m = 12$. (B) $m = \frac{12}{7}$. (C) $m = \frac{5}{12}$. (D) $m = \frac{12}{5}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-4; 5; -3)$, $\vec{b} = (2; -2; 1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

- (A) $\vec{x} = (0; -1; 1)$. (B) $\vec{x} = (-8; 9; 1)$. (C) $\vec{x} = (2; 3; -2)$. (D) $\vec{x} = (0; 1; -1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 3; 5)$, $B(2; 0; 1)$ và $G(1; 4; 2)$ là trọng tâm. Tìm tọa độ điểm C .

- (A) $C\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$. (B) $C(0; 0; 9)$. (C) $C(0; 9; 0)$. (D) $C(0; -9; 0)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{-2}$ là

- (A) $-11x + 5y + 7z + 11 = 0$. (B) $-11x + 5y + 7z + 1 = 0$.
(C) $11x - 5y - 7z + 1 = 0$. (D) $-11x + 5y + 7z - 1 = 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- (A) $N(3; -1; 0)$. (B) $M(3; 0; 0)$. (C) $P(0; -1; 0)$. (D) $Q(0; 0; 1)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + (m+1)y - 2z + m = 0$ và $(Q): 2x - y + 3 = 0$ với m là tham số thực. Tìm m để (P) vuông góc với (Q) .

- (A) $m = 3$. (B) $m = -5$. (C) $m = 1$. (D) $m = -1$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M , cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .

- (A) $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$. (B) $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1}$.
(C) $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$. (D) $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 4)$, $B(4; 3; -2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

- (A) $3x + y - 3z - 2 = 0$. (B) $3x + y - 3z - 8 = 0$.
(C) $3x + y - 3z - 1 = 0$. (D) $3x + y + 3z - 8 = 0$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-8}{1} = \frac{z+4}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

- (A) $(0; 10; -7)$. (B) $(2; 8; -4)$. (C) $(5; 5; -1)$. (D) $(-1; 11; -7)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và điểm $M(5; -3; 5)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) . Tọa độ điểm H là

- (A) $H(3; -1; -1)$. (B) $H(3; 1; 1)$. (C) $H(-1; -1; 1)$. (D) $H(3; 0; 0)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là

- (A) $\vec{n} = (2; 1; 0)$. (B) $\vec{n} = (-2; -1; 1)$. (C) $\vec{n} = (2; 1; -1)$. (D) $\vec{n} = (1; 2; 0)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$. Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\cos \alpha = \frac{4}{9}$. (B) $\sin \alpha = -\frac{4}{9}$. (C) $\sin \alpha = \frac{4}{9}$. (D) $\cos \alpha = -\frac{4}{9}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - m = 0$. Tìm tất cả m để (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính lớn nhất.

- (A) $m = 7$. (B) $m = 4$. (C) $m = 0$. (D) $m = -4$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B . Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- (A) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$. (B) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36$.
(C) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$. (D) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3}$ vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- (A) $(\alpha_1): 4x + 2y + 6z - 2018 = 0$. (B) $(\alpha_3): 3x + y + 2z - 2017 = 0$.
(C) $(\alpha_4): 2x - y + 3z - 2018 = 0$. (D) $(\alpha_2): 2x + y - 3z - 2017 = 0$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0; 5; 3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1; 1; 0)$ thuộc đường thẳng AC . Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AC ?

- (A) $\vec{u}(0; 1; -3)$. (B) $\vec{u}(0; -2; 6)$. (C) $\vec{u}(0; 1; 3)$. (D) $\vec{u}(1; 2; 3)$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 0; -1)$ và $A(2; 2; -3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

- (A) $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$. (B) $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$.
(C) $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 3$. (D) $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 4y + 7z + 2 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc mặt phẳng (P) có phương trình là

- (A) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 + 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 7 + 3t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 7t \end{cases}$
(C) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 7t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 3t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 7t \end{cases}$

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - 2y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

- (A) $-2x + y + z - 3 = 0$. (B) $x - z + 2 = 0$.
(C) $x - y + 1 = 0$. (D) $x - 2y + z = 0$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $P(3; 1; 0)$, $Q(-9; 4; 9)$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|MP - MQ|$ có giá trị lớn nhất. Tọa độ của M là

- (A) $M(7; 2; -13)$. (B) $M(-7; -26; -13)$. (C) $M(-7; 2; 13)$. (D) $M(7; -28; 13)$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; 2; 1)$, $B(-2; 3; 6)$. Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi biểu thức $|\vec{MA} + 3\vec{MB}|$ nhỏ nhất.

- (A) $\frac{7}{2}$. (B) 2. (C) $-\frac{7}{2}$. (D) -2.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 0)$, $B(0; 3; -2)$. Điểm M thay đổi thuộc mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 64$. Giá trị lớn nhất của $MA^2 - 3MB^2$ bằng

- (A) 18. (B) $-210 + 160\sqrt{2}$. (C) $8 - 5\sqrt{2}$. (D) $-210 - 160\sqrt{2}$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(10, -4, 2)$, $B(a, b, c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oxz, Oyz . Biết M, N, P nằm trên đoạn thẳng AB theo thứ tự đó sao cho $2AM = MN = NP = 2PB$. Tính giá trị biểu thức $T = a - b + c$

- (A) $T = -16$. (B) $T = -8$. (C) $T = 4$. (D) $T = -4$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - z + 10 = 0$ và điểm $A(1; 0; 0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A , vuông góc với (P) , cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại các điểm B, C không trùng O . Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

- (A) 1. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 4. (D) $\frac{4}{3}$.

—HẾT—

Bài 7

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC CHỦ ĐỀ

A ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1

1. A	2. D	3. C	4. C	5. B	6. B	7. D	8. D	9. B	10. D
11. C	12. C	13. D	14. A	15. A	16. C	17. B	18. D	19. A	20. C
21. B	22. A	23. D	24. C	25. B	26. C	27. B	28. A	29. B	30. C

B ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2

1. B	2. A	3. B	4. A	5. C	6. A	7. A	8. B	9. C	10. C
11. C	12. D	13. D	14. D	15. A	16. C	17. D	18. A	19. B	20. B
21. C	22. D	23. A	24. D	25. A	26. D	27. A	28. C	29. B	30. D

C ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3

1. B	2. C	3. A	4. A	5. A	6. A	7. D	8. A	9. D	10. D
11. B	12. C	13. C	14. C	15. B	16. C	17. B	18. D	19. B	20. B
21. D	22. A	23. D	24. B	25. C	26. C	27. C	28. D	29. B	30. A

D ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 4

1. D	2. A	3. A	4. D	5. C	6. A	7. A	8. A	9. B	10. A
11. B	12. A	13. D	14. B	15. A	16. A	17. B	18. D	19. C	20. C
21. B	22. D	23. D	24. A	25. A	26. A	27. D	28. B	29. C	30. D
31. C	32. C	33. A	34. C	35. C	36. A	37. D	38. D	39. A	40. B

E ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 5

1. C	2. B	3. C	4. D	5. D	6. C	7. A	8. B	9. B	10. C
11. A	12. A	13. A	14. A	15. B	16. C	17. A	18. C	19. C	20. C
21. B	22. C	23. B	24. A	25. D	26. C	27. C	28. B	29. D	30. B
31. D	32. C	33. C	34. D	35. D	36. A				

F ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC ĐỀ TỔNG ÔN

1. Đề số 1

1. B	2. C	3. C	4. A	5. B	6. C	7. A	8. D	9. D	10. C
11. D	12. B	13. A	14. D	15. D	16. D	17. B	18. D	19. C	20. D

2. Đề số 2

1. A	2. D	3. A	4. D	5. C	6. B	7. B	8. D	9. A	10. D
11. D	12. B	13. C	14. C	15. B	16. B	17. C	18. D	19. A	20. B

3. Đề số 3

1. C	2. D	3. A	4. C	5. C	6. C	7. D	8. C	9. B	10. A
11. B	12. D	13. C	14. D	15. C	16. A	17. B	18. D	19. B	20. C

4. Đề số 4

1. A	2. A	3. B	4. B	5. B	6. B	7. D	8. C	9. A	10. B
11. C	12. C	13. A	14. D	15. D	16. A	17. A	18. D	19. C	20. A
21. D	22. C	23. C	24. D	25. B					

5. Đề số 5

1. D	2. A	3. D	4. D	5. B	6. D	7. D	8. D	9. C	10. B
11. A	12. C	13. C	14. A	15. D	16. B	17. A	18. C	19. B	20. C
21. A	22. C	23. A	24. B	25. B	26. A	27. B	28. B	29. A	30. B

