

LƯ' SĨ PHÁP

Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

GIẢI TÍCH 12



CHƯƠNG

II

HÀM SỐ

LŨY THỪA

MŨ VÀ LÔGARIT

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

0939989966 - 0916620899

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn tài liệu **TRỌNG TÂM GIẢI TÍCH 12**.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

Bài tập Giải tích 12 gồm 2 phần

Phần 1. Phần tự luận

Ở phần này tôi trình bày đầy đủ lí thuyết và bài tập có hướng dẫn giải ở từng bài học. Với mong muốn các em nắm được phương pháp giải bài tập trước khi chuyển sang giải Toán trắc nghiệm.

Phần 2. Phần trắc nghiệm có đáp án

Ở phần này tôi trình bày tóm tắt các lý thuyết cần nắm, kỹ năng làm bài trắc nghiệm, hướng dẫn sử dụng máy tính cầm tay cần thiết trong quá trình làm bài trắc nghiệm.

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh để lần sau cuốn bài tập hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gọi về số 0939 98 99 66 – 0916 620 899

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sĩ Pháp

GV_ Trường THPT Tuy Phong

MỤC LỤC

Phần 1. Hàm số Lũy Thừa – Mũ – Lôgarit

Bài 1. Lũy Thừa..... 01 – 08

Bài 2. Hàm Số Lũy Thừa..... 09 – 13

Bài 3. Lôgarit 14 – 24

Bài 4. Hàm Số Mũ – Hàm Số Lôgarit 25 – 34

Ôn Tập Hàm Số Lũy Thừa – Mũ – Lôgarit 35 – 41

Phần 2. Phương Trình – Hệ Phương Trình – Bất Phương Trình Mũ – Lôgarit

Bài 1. Phương Trình Mũ 42 – 52

Bài 2. Phương Trình Lôgarit 53 – 64

Bài 3. Hệ Phương Trình Mũ – Lôgarit 65 – 71

Bài 4. Bất Phương Trình Mũ 72 – 77

Bài 5. Hệ Phương Trình Lôgarit 78 – 83

Ôn tập Phương Trình – Hệ Phương Trình – Bất Phương Trình
Mũ – Lôgarit..... 84 – 98

TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

Bài 1. Lũy thừa – Hàm số lũy thừa 99 – 104

Bài 2. Lôgarit..... 105 – 108

Bài 3. Hàm Số Mũ – Hàm Số Lôgarit 109 – 119

Bài 4. Phương Trình – Hệ Phương Trình – Bất Phương Trình
Mũ – Lôgarit..... 120 – 126

Ôn tập chương II..... 127 – 153

Một số câu trong kì thi THPT 154 – 169

Đáp án 170 – 175

CHƯƠNG II

PHẦN I

HÀM SỐ LŨY THỪA

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

---o0o---

§1. LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. KHÁI NIỆM LŨY THỪA

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó: $a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}}$.

Trong biểu thức: a^n , ta gọi a là cơ số, n là số mũ

2. Lũy thừa với số mũ nguyên âm, lũy thừa với số mũ 0

Cho $a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$, quy ước: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^0 = 1$

Chú ý:

- ♦ 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa
- ♦ Người ta thường dùng các lũy thừa của 10 với số mũ nguyên để biểu thị những số rất lớn và những số rất bé. Chẳng hạn: Khối lượng của Trái Đất là $5,97.10^{24} \text{ kg}$; khối lượng nguyên tử của hiđrô là $1,66.10^{-24} \text{ kg}$.

3. Căn bậc n

a) Khái niệm

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$

❖ Khi n lẻ và $b \in \mathbb{R}$: Tồn tại duy nhất căn bậc n của b , kí hiệu $\sqrt[n]{b}$

❖ Khi n chẵn:

- ♦ $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n của b
- ♦ $b = 0$: Có một căn bậc n của b , kí hiệu $\sqrt[n]{0} = 0$
- ♦ $b > 0$: Có hai căn bậc n của b trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$

b) Tính chất của căn bậc n

Với hai số không âm a, b , hai số nguyên dương m, n , ta có:

$$\begin{aligned} \textcircled{1}. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b} & \textcircled{2}. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, (b > 0) & \textcircled{3}. \left(\sqrt[n]{a}\right)^m &= \sqrt[n]{a^m} \\ \textcircled{4}. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[m \cdot n]{a} & \textcircled{5}. \sqrt[n]{a^n} &= \begin{cases} a, & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a|, & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lũy thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

5. Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Giả sử a là một số dương, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$.

Khi đó: $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$

II. Tính chất của lũy thừa với số mũ thực

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực tùy ý. Khi đó, ta có:

1) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

2) $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

3) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$

4) $(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

6) $a^\alpha > 0$

7) Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

8) Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

B. BÀI TẬP**DẠNG 1. ♦ Tính các giá trị của một biểu thức.**

♦ Rút gọn biểu thức.

Bài 1.1. Tính các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = 9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} \quad \text{b) } B = 144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} \quad \text{c) } C = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 0,25^{-\frac{5}{2}} \quad \text{d) } D = (0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$$

HD & Giải

$$\text{a) } A = 9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = (3^2)^{\frac{2}{5}} \cdot (3^3)^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{4}{5}} \cdot 3^{\frac{6}{5}} = 3^{\frac{4+6}{5}} = 3^2 = 9$$

$$\text{b) } B = 144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = 12^{\frac{3}{2}} : 3^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} : 3^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$$

$$\text{c) } C = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 0,25^{-\frac{5}{2}} = 16^{\frac{3}{4}} + 4^{\frac{5}{2}} = 2^3 + 2^5 = 40$$

$$\text{d) } D = (0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = 5^3 - 2^2 = 121$$

Bài 1.2. Tính các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + 128^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} \quad \text{b) } B = 4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}}$$

$$\text{c) } C = (25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} \quad \text{d) } D = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$$

HD & Giải

$$\text{a) } A = \left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + 128^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} = 3^{10} \cdot \frac{1}{27^3} + \frac{1}{0,2^4} \cdot \frac{1}{25^2} + \frac{1}{128} \cdot 2^9 = 3 + 1 + 4 = 8$$

$$\text{b) } B = 4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}} = 2^{6+2\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}} = 2^3 = 8$$

$$\text{c) } C = (25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} = (5^{2+2\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} = 5^{2+2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}} = 5 - 5^{-1} = \frac{24}{5}$$

$$\text{d) } D = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = \frac{2^{3+\sqrt{5}} \cdot 3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = 2^{3+\sqrt{5}-2-\sqrt{5}} \cdot 3^{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}} = 2 \cdot 3^2 = 18$$

Bài 1.3. Tính các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}} \quad \text{b) } B = 0,001^{\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}} + (9^0)^2$$

$$\text{c) } C = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5}$$

$$\text{d) } D = (-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}$$

HD❧Giải

$$\text{a) } A = 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}} = \left((3^4)^{-\frac{3}{4}}\right) + \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{\frac{3}{5}} = (3)^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -\frac{80}{27}$$

$$\text{b) } B = 0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}} + (9^0)^2 = (10^{-3})^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} (2^6)^{\frac{2}{3}} - (2^3)^{-\frac{1}{3}} + 1 = 10 - 2^2 - 2^{-4} + 1 = \frac{111}{16}$$

$$\text{c) } C = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5} = \left((3^3)^{\frac{2}{3}}\right) + \left((2^4)^{-\frac{3}{4}}\right) - (5^2)^{\frac{1}{2}} = 3^2 + 2^3 - 5 = 12$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= (-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3} = \left((-2)^{-1}\right)^{-4} - (5^4)^{\frac{1}{4}} - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{19}{27} \\ &= 2^4 - 5 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} - \frac{19}{27} = 11 - \frac{8}{27} - \frac{19}{27} = 10 \end{aligned}$$

Bài 1.4. Tính các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8}$$

$$\text{b) } B = \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$$

$$\text{c) } C = \sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$$

$$\text{d) } D = \sqrt[3]{\sqrt{729}}$$

HD❧Giải

$$\text{a) } A = \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-8} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

$$\text{b) } B = \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{3})^3} = \sqrt{3}$$

$$\text{c) } C = \sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{d) } D = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

Bài 1.5. Cho a, b là những số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$$

$$\text{b) } B = \frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}}$$

$$\text{c) } C = \frac{(\sqrt[4]{a^3 b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$$

$$\text{d) } D = \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}}$$

HD❧Giải

$$\text{a) } A = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^{\sqrt{7}+1+2-\sqrt{7}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5$$

$$\text{b) } B = \frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \frac{a^2}{a} = a$$

$$\text{c) } C = \frac{(\sqrt[4]{a^3 b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}} = \frac{a^3 b^2}{\sqrt[6]{a^{12} b^6}} = \frac{a^3 b^2}{a^2 b} = ab$$

$$\text{d) } D = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)} - \frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(a+1)} = (1+a) - (1-a) = 2a$$

Bài 1.6. Cho a, b là những số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}}\right)}$$

$$\text{b) } B = \frac{b^{\frac{1}{5}} \left(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$$

$$\text{c) } C = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$$

$$\text{d) } D = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$$

HD Giải

$$\text{a) } A = \frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)} = \frac{a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}} = \frac{a + a^2}{a + 1} = a, (a \neq -1)$$

$$\text{b) } B = \frac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}}\right)} = \frac{b^{\frac{1}{5}}\left(b^{\frac{4}{5}} - b^{-\frac{1}{5}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}} - b^{-\frac{2}{3}}\right)} = \frac{b^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} - b^{\frac{1}{5}-\frac{1}{5}}}{b^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}} = \frac{b-1}{b-1} = 1, (b \neq 1)$$

$$\text{c) } C = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}, (a \neq b)$$

$$\text{d) } D = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{ab}$$

Bài 1.7. Cho a, b là những số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\text{b) } B = \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{c) } C = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$$

$$\text{d) } D = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab}\right)$$

HD Giải

$$\text{a) } A = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 : \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 : \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = \frac{1}{a}$$

$$\text{b) } B = \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{4}}(1 - a^2)}{a^{\frac{1}{4}}(1 - a)} - \frac{b^{\frac{1}{2}}(1 - b^2)}{b^{\frac{1}{2}}(b + 1)} = (1 + a) - (1 - b) = a + b$$

$$\text{c) } C = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) = \frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{\frac{2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{ab}}} = \frac{\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\sqrt[3]{ab}}{\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$$

$$\text{d) } D = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab}\right) = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a + b$$

Dạng 2. ♦ Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

♦ So sánh giá trị của biểu thức

Chú ý: • Nếu $a > 1$ thì $\alpha < \beta \Leftrightarrow a^\alpha < a^\beta$ • Nếu $0 < a < 1$ thì $\alpha < \beta \Leftrightarrow a^\alpha > a^\beta$

Bài 1.8. Hãy so sánh các cặp số sau:

- a) $5^{2\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{2}}$ b) $7^{6\sqrt{3}}$ và $7^{3\sqrt{6}}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}}$ và $\left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{8}}$ và $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

HD & Giải

a) Ta có: $2\sqrt{3} = \sqrt{12}, 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$. Do $12 < 18$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

Vì cơ số $a = 5 > 1$ nên $5^{2\sqrt{3}} < 5^{3\sqrt{2}}$

b) Ta có: $\begin{cases} 6\sqrt{3} = \sqrt{108} > \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \\ a = 7 > 1 \end{cases} \Rightarrow 7^{6\sqrt{3}} > 7^{3\sqrt{6}}$

c) Ta có: $\begin{cases} 2\sqrt{5} = \sqrt{20} > \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ 0 < a = \frac{1}{3} < 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$

d) Ta có: $\begin{cases} \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 \\ 0 < a = \frac{1}{4} < 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{8}} > \left(\frac{3}{4}\right)^3$

Bài 1.9. Hãy so sánh các cặp số sau:

- a) $\sqrt[3]{10}$ và $\sqrt[5]{20}$ b) $\sqrt[4]{5}$ và $\sqrt[3]{7}$ c) $\sqrt[4]{13}$ và $\sqrt[5]{23}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ và $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$

HD & Giải

a) Đưa hai căn đã cho về cùng căn bậc 15, ta được:

$\begin{cases} \sqrt[3]{10} = \sqrt[15]{10^5} = \sqrt[15]{100000} \\ \sqrt[5]{20} = \sqrt[15]{20^3} = \sqrt[15]{8000} \end{cases}$. Do $100000 > 8000$ nên $\sqrt[3]{10} > \sqrt[5]{20}$

b) Ta có: $\begin{cases} \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125} \\ \sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401} \end{cases}$. Do $125 < 2401$ nên $\sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{7}$

c) Ta có: $\begin{cases} \sqrt[4]{13} = \sqrt[20]{13^5} = \sqrt[20]{371293} \\ \sqrt[5]{23} = \sqrt[20]{23^4} = \sqrt[20]{279841} \end{cases}$. Do $371293 > 279841$ nên $\sqrt[4]{13} > \sqrt[5]{23}$

d) Ta có: $\begin{cases} \sqrt{3} > \sqrt{2} \\ 0 < a = \frac{1}{3} < 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$

Bài 1.10. Hãy so sánh các cặp số sau:

- a) $\sqrt{2}$ và $\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30}$ và $\sqrt[3]{63}$
c) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15}$ và $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$ d) $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}$ và $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$

HD & Giải

a) Ta có: $\begin{cases} \sqrt{2} = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8 \\ (\sqrt[3]{3})^6 = 3^2 = 9 \end{cases}$. Do $8 < 9$ nên $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

b) Ta có: $\begin{cases} \sqrt{3} > \sqrt{1} \\ \sqrt[3]{30} > \sqrt[3]{27} = 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > 4 \Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > \sqrt[3]{64}$
 $\sqrt[3]{63} < \sqrt[3]{64} = 4$

c) Ta có:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{8} = 2 \\ \sqrt{15} < \sqrt{16} = 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < 6$$

$$\begin{cases} \sqrt{10} > \sqrt{9} = 3 \\ \sqrt[3]{28} > \sqrt[3]{27} = 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{10} + \sqrt[3]{28} > 6$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < \sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$$

d) Ta có:
$$\left(\sqrt{3} \right)^{\frac{5}{6}} = 3^{-\frac{5}{12}}$$

$$\sqrt[3]{3^{-1} \sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{3^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{3^{-1} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{3^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{3^{-\frac{5}{4}}} = 3^{-\frac{5}{12}} \Rightarrow \left(\sqrt{3} \right)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{3^{-1} \sqrt{\frac{1}{3}}}$$

Bài 1.11. Không dùng máy tính và bảng số. Chứng minh:

a) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2$ b) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} = 3$
 c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$ d) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$

HD & Giải

a) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2$

Cách 1. Ta có: $7+5\sqrt{2} = 1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^3$. Tương tự: $7-5\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^3$

Suy ra: $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2} = 2$

Cách 2. Đặt $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. Ta cần chứng minh $x = 2$

Ta có:

$$\begin{aligned} x^3 &= \left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \right)^3 = 7+5\sqrt{2} + 7-5\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \right) \\ &= 14 - 3 \left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \right) = 14 - 3x \end{aligned}$$

Từ đó ta có: $x^3 + 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (vì $x^2 + 2x + 7 > 0$)

Cách 3. Ta có: $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = -1$. Do đó $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2$ nếu $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ và

$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ là nghiệm của phương trình $X^2 - 2X - 1 = 0$, tức là:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2} & (1) \\ \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Ta chứng minh đẳng thức (1). Ta có: $(1+\sqrt{2})^3 = 1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2} = 7+5\sqrt{2}$. Từ đó suy ra (1).

Đẳng thức (2) chứng minh tương tự. Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

b) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} = 3$. Đặt $x = \sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$. Ta cần chứng minh $x = 3$

Ta có: $x^3 = \left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} \right)^3$

$$\Leftrightarrow x^3 = 6 + \sqrt{\frac{847}{27}} + 6 - \sqrt{\frac{847}{27}} + 3\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} \cdot \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} \left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} \right)$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 12 + 3\sqrt[3]{36 - \frac{847}{27}} \cdot x \Leftrightarrow x^3 = 12 + 3 \cdot \frac{5}{3} x \Leftrightarrow x^3 - 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

(vì $x^2 + 3x + 4 > 0$)

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$

Cách 1. Ta có:

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 = 4+2\sqrt{3} + 4-2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = 8-2\sqrt{16-12} = 4$$

Vì $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} > 0$ nên $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$.

Cách 2. Ta có: $4 \pm 2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 \pm 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} \pm 1)^2$

Nên: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1) = 2$

d) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$. Có thể giải bằng ba cách như câu a)

Đặt $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. Ta cần chứng minh $x = 3$

Ta có: $x^3 = \left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (vì $x^2+3x+6 > 0$)

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1.12. Hãy tính:

a) $A = \left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ b) $B = 4^{1-2\sqrt{3}} \cdot 16^{1+\sqrt{3}}$ c) $C = 27^{\sqrt{2}} : 3^{3\sqrt{2}}$ d) $D = \left(2^{\sqrt[3]{8}}\right)^{\sqrt[3]{4}}$

Bài 1.13. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ b) $B = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$
 c) $C = \left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab}\right) : \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$ d) $D = \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1$

Bài 1.14. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ b) $B = a^{\pi} \cdot \sqrt[4]{a^2 : a^{4\pi}}$ c) $C = \left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ d) $D = a^{\sqrt{2}} \cdot a^{13} : \sqrt[3]{a^{3\sqrt{2}}}$

Bài 1.15. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}\right)^2} + 1$ b) $B = \frac{\left(a^{2\sqrt{3}} - 1\right)\left(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}}$
 c) $C = \frac{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{7}}}{\frac{2\sqrt{5}}{a^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{b^{\frac{2}{3}}} + b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$ d) $D = \sqrt{\left(a^{\pi} + b^{\pi}\right)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} ab\right)^{\pi}}$

Bài 1.16. So sánh các số:

a) 3^{600} và 5^{400} b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}}$ c) 7^{30} và 4^{40} d) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ và $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$

Bài 1.17. Chứng minh rằng: $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + (0,25)^{-\frac{5}{2}} = 40$

Bài 1.18. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \left(\frac{b^2}{a}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^{-3} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

$$b) (a^2 + b^2)(a^{-2} + b^{-2})^{-1}, (a \neq 0, b \neq 0)$$

$$c) \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}, (a > 0)$$

$$d) \left(2x + \frac{y}{2}\right)^{-1} \left[(2x)^{-1} + \left(\frac{y}{2}\right)^{-1} \right]$$

$$e) \frac{2n^{\frac{1}{3}} \left(3n^{\frac{1}{3}} - 4n^{\frac{4}{3}}\right)}{2n^{-\frac{1}{3}}}$$

$$f) \frac{\left(\sqrt[3]{4a}\right)^2}{\sqrt[6]{4a}}$$

Kết quả:

Bài 1.12. $A = 3\sqrt{3}$, $B = 64$, $C = 1$, $D = 4$

Bài 1.13. $A = \sqrt[4]{b}$, $B = 2\sqrt[3]{ab}$, $C = 1$, $D = \sqrt{a}$

Bài 1.14. $A = a$, $B = \sqrt{a}$, $C = a^3$, $D = a^{1,3}$

Bài 1.15. $A = \frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$, $B = a^{\sqrt{3}} + 1$, $C = a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}$, $D = |a^{\pi} - b^{\pi}|$

Bài 1.16. a) $3^{600} > 5^{400}$, b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}}$, c) $7^{30} > 4^{40}$, d) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi} < \left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$

Bài 1.18. a) $\frac{1}{a^4 b}$ b) $a^2 b^2$ c) a d) $\frac{1}{xy}$ e) $3n - 4n^2$ f) $2\sqrt{a}$

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α :

- ♦ Với α nguyên dương, tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- ♦ Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ♦ Với α không nguyên, tập xác định là $D = (0; +\infty)$.

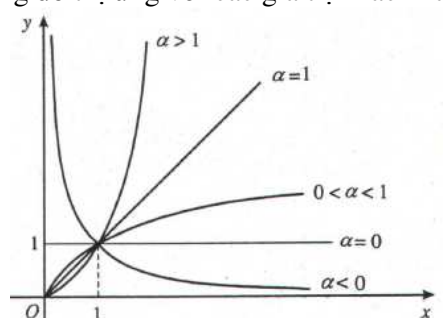
Lưu ý: $y = x^\alpha, \alpha = \frac{1}{n}, n$ là số chẵn. Tập xác định: $D = [0; +\infty)$.

3. Đạo hàm

Hàm số $y = x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Công thức tính đạo hàm của hàm hợp đối với hàm số lũy thừa có dạng: $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$

4. Tính chất của hàm số lũy thừa trên khoảng $(0; +\infty)$

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Đạo hàm	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
Chiều biến thiên	Hàm số luôn đồng biến	Hàm số luôn nghịch biến
Tiệm cận	Không có	Tiệm cận ngang là trục Ox , tiệm cận đứng là trục Oy
Đồ thị	Đồ thị luôn đi qua điểm $(1;1)$ Hình dạng đồ thị ứng với các giá trị khác nhau của α 	

B. BÀI TẬP

DẠNG 1. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α :

- ♦ Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$
- ♦ Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ♦ Với α không nguyên, tập xác định là $(0; +\infty)$

Bài 2.1. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$ b) $y = (2-x^2)^{\frac{3}{5}}$ c) $y = (x^2-1)^{-2}$ d) $y = (x^2-x-2)^{\sqrt{2}}$

HD & Giải

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Vậy tập xác định là: $D = (-\infty; 1)$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Vậy tập xác định là: $D = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

c) $y = (x^2 - 1)^{-2} = \frac{1}{(x^2 - 1)^2}$. Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Vậy tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

d) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 2$

Vậy tập xác định là: $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Bài 2.2. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = 3(x-1)^{-3}$ b) $y = \sqrt[4]{x^2 - 3x - 4}$ c) $y = (x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}}$ d) $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{1}{4}}$

HD & Giải

a) $y = 3(x-1)^{-3} = \frac{3}{(x-1)^3}$. Hàm số xác định khi và chỉ khi $(x-1)^3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Vậy tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq 4$

Vậy tập xác định là: $D = (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$

c) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^3 - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Vậy tập xác định là: $D = (2; +\infty)$

d) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^3 - 3x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ hoặc $x > 2$

Vậy tập xác định là: $D = (0; 1) \cup (2; +\infty)$

DẠNG 2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

Cho hàm số $y = x^\alpha$ có tập xác định $D; \alpha \in \mathbb{R}$

Lưu ý:

- $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
- $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$ với $u = u(x), y = u^\alpha(x)$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$

Bài 2.3. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = (2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$ b) $y = (3x + 1)^{\frac{\pi}{2}}$ c) $y = (4 - x - x^2)^{\frac{1}{4}}$ d) $y = (5 - x)^{\sqrt{3}}$

HD & Giải

a) $y' = \left((2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} (2x^2 - x + 1)' (2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} (4x - 1) (2x^2 - x + 1)^{-\frac{2}{3}}$

b) $y' = \left[(3x + 1)^{\frac{\pi}{2}} \right]' = \frac{\pi}{2} (3x + 1)' (3x + 1)^{\frac{\pi}{2}-1} = \frac{3\pi}{2} (3x + 1)^{\frac{\pi}{2}-1}$

c) $y' = \frac{1}{4} (4 - x - x^2)' (4 - x - x^2)^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} (-1 - 2x) (4 - x - x^2)^{-\frac{3}{4}}$

d) $y' = \left[(5 - x)^{\sqrt{3}} \right]' = \sqrt{3} (5 - x)' (5 - x)^{\sqrt{3}-1} = -\sqrt{3} (5 - x)^{\sqrt{3}-1}$

Bài 2.4. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = (2x+1)^\pi$ b) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ c) $y = \left(\frac{x}{b}\right)^a \left(\frac{a}{x}\right)^b, (a > 0, b > 0)$ d) $y = (x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}}$

HD & Giải

a) $y' = \left[(2x+1)^\pi\right]' = \pi(2x+1)'(2x+1)^{\pi-1} = 2\pi(2x+1)^{\pi-1}$

b) $y' = \left[\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}\right]' = \frac{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)'}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}} = \frac{\frac{6x^2}{(1-x^3)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}} = \frac{2x^2}{(1-x^3)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}}$

c) $y' = \left[\left(\frac{x}{b}\right)^a \left(\frac{a}{x}\right)^b\right]' = \left[\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]' \left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{x}{b}\right)^a \left[\left(\frac{a}{x}\right)^b\right]'$
 $= \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{x}{b}\right)^a b \left(\frac{a}{x}\right)^{b-1} \left(-\frac{a}{x^2}\right) = \left(\frac{x}{b}\right)^a \left(\frac{a}{x}\right)^b \frac{a-b}{x}$

d) $y' = \left[(x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}}\right]' = \frac{\pi}{3} (x^3 - 8)' (x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}-1} = \pi x^2 (x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}-1}$

DẠNG 3. Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$

Khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể ta phải xét hàm số đó trên toàn tập xác định của nó

① Tập xác định

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α

② Sự biến thiên

- ♦ Tìm đạo hàm y' . Xét dấu y' và kết luận chiều biến thiên của hàm số
- ♦ Tìm tiệm cận (nếu có)
- ♦ Lập bảng biến thiên

③ Đồ thị

Lưu ý: Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$

Bài 2.5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^{\frac{4}{3}}$ b) $y = x^{-3}$ c) $y = x^{-4}$ d) $y = x^{\frac{\pi}{2}}$

HD & Giải

a) $y = x^{\frac{4}{3}}$ ♦ Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

♦ Sự biến thiên: • Đạo hàm: $y' = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$

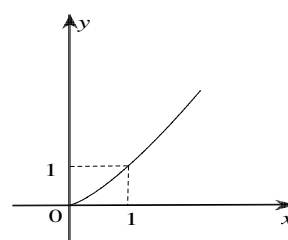
• $y' > 0$ trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số đồng biến

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	0	$+\infty$
y'		+
y	0	$+\infty$

♦ Đồ thị:



b) $y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

♦ Sự biến thiên:

• Đạo hàm: $y' = -\frac{3}{x^4} < 0, \forall x \in D$

• Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$

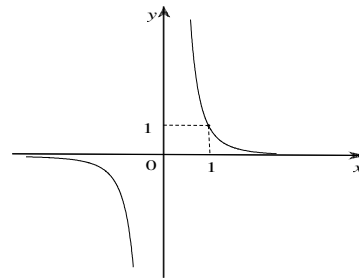
• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là TCD

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là TCN

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-		-	
y	0		$+\infty$		0

♦ Đồ thị: Hàm số đã cho là hàm số lẻ. Nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.



c) $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

♦ Sự biến thiên:

• Đạo hàm: $y' = -\frac{4}{x^5}$

• $y' > 0$ trên khoảng $(-\infty; 0)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này và $y' < 0$ trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

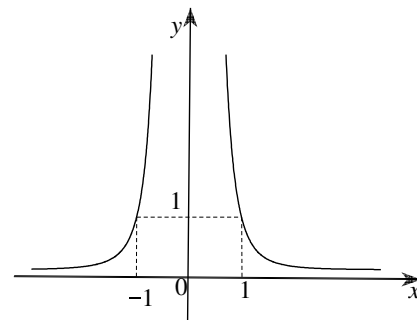
• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là TCD

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là TCN

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+		-	
y	0		$+\infty$		0

♦ Đồ thị: Hàm số đã cho là hàm số chẵn. Nên đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.



d) $y = x^{\frac{\pi}{2}}$

♦ Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

♦ Sự biến thiên:

• Đạo hàm: $y' = \frac{\pi}{2} x^{\frac{\pi}{2}-1}$

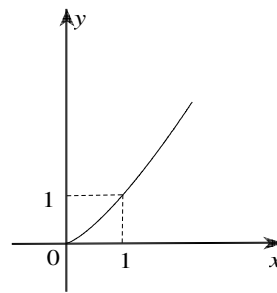
• $y' > 0$ trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số đồng biến

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

♦ Bảng biến thiên:

x	0	$+\infty$
y'		+
y	0	$+\infty$

♦ Đồ thị:



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 2.6. Tìm tập xác định các hàm số sau:

- a) $y = x^4$ b) $y = x^7$ c) $y = x^0$ d) $y = x^{-15}$ e) $y = \sqrt[8]{x}$
 f) $y = \sqrt[7]{x}$ g) $y = x^{-\frac{5}{8}}$ h) $y = x^\pi$ i) $y = x^{\sqrt{3}}$ j) $y = x^{\frac{1}{4}}$

Bài 2.7. Tìm tập xác định các hàm số sau:

- a) $y = \sqrt[3]{5x+4}$ b) $y = (4-x^2)^{\frac{1}{2}}$ c) $y = (x^2+x-2)^{-2}$ d) $y = \sqrt{x^2+3x-4}$

Bài 2.8. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

- a) $y = \sqrt[5]{x}$ b) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ c) $y = \sqrt[n]{x-1}$ d) $y = \sqrt[n]{x^m}$
 e) $y = \sqrt[4]{x^4+x^2+1}$ f) $y = \sqrt{4x^2-3x-1}$ g) $y = (12-x)^{\sqrt{3}}$ h) $y = (x^2+x-4)^{\frac{1}{4}}$

Bài 2.9. Hãy vẽ đồ thị mỗi cặp hàm số sau trên cùng một hệ trục tọa độ:

- a) $y = x^4$ và $y = x^{\frac{1}{4}}$ b) $y = x^5$ và $y = x^{-5}$ c) $y = x^2$ và $y = x^{\frac{1}{2}}$

Bài 2.10. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

- a) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ b) $y = x^{\frac{\pi}{4}}$ c) $y = (\sqrt{3})^x$

Kết quả:

Bài 2.6. a) $D = \mathbb{R}$; b) $D = \mathbb{R}$; c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; e) $D = [0; +\infty)$;

f) $D = \mathbb{R}$; g) $D = (0; +\infty)$; h) $D = (0; +\infty)$; i) $D = (0; +\infty)$; j) $D = (0; +\infty)$

Bài 2.7. a) $D = \mathbb{R}$; b) $D = [-2; 2]$; c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$; d) $D = (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$

Bài 2.8. a) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; b) $-\frac{1}{5x\sqrt[5]{x^4}}$; c) $\frac{1}{n\sqrt[n]{(x-1)^{n-1}}}$; d) $\frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}$

e) $\frac{4x^3+2x}{3\sqrt[3]{(x^4+x^2+1)^2}}$; f) $\frac{8x-3}{2\sqrt{4x^2-3x-1}}$; g) $-\sqrt{3}(12-x)^{\sqrt{3}-1}$; h) $\frac{2x+1}{4\sqrt[4]{(x^2+x-4)^3}}$

§3. LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Với hai số dương a, b ($a \neq 1$). Số α nghiệm đúng đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Như vậy: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$

Chú ý: Không có lôgarit của số âm và số 0.

2. Tính chất

Cho hai số dương a và b , $a \neq 1$. Ta có:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a (a^\alpha) = \alpha$$

3. Quy tắc tính

a) Lôgarit của một tích

Với các số dương a, b_1, b_2 và $a \neq 1$. Ta có: $\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

Lưu ý: Lôgarit của một tích bằng tổng các lôgarit

b) Lôgarit của một thương

Với các số dương a, b_1, b_2 và $a \neq 1$. Ta có: $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

Lưu ý: ♦ Lôgarit của một thương bằng hiệu các lôgarit

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b, (a, b > 0, a \neq 1)$$

c) Lôgarit của một lũy thừa

Với các số dương a, b và $a \neq 1$. Với mọi α , ta có: $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

Lưu ý: ♦ Lôgarit của một lũy thừa bằng tích của số mũ với lôgarit của cơ số.

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b, (a, b > 0, a \neq 1)$$

d) Đổi cơ số

Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$. Ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, b \neq 1$$

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b, \alpha \neq 0$$

4. Kí hiệu lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên

a) Lôgarit thập phân

Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. $\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$

b) Lôgarit tự nhiên

Lôgarit tự nhiên (lôgarit Nê – pe) là lôgarit cơ số e . $\log_e b$ được viết là $\ln b$

Lưu ý: $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ và một giá trị gần đúng của e là: $e \approx 2,718281828459045$

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm điều kiện để một biểu thức lôgarit có nghĩa

$$\text{Lưu ý: } \log_a b \text{ có nghĩa } \begin{cases} b > 0 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases}$$

Bài 3.1. Tìm x để biểu thức sau có nghĩa:

a) $\log_2(1-x^2)$

b) $\log_\pi(x^2+3x-4)$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(x^3+x^2-2x)$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^4+5x^2-6)$

HD\&Giải

a) $\log_2(1-x^2)$ có nghĩa $\Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

b) $\log_\pi(x^2+3x-4)$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2+3x-4 > 0 \Leftrightarrow x < -4$ hoặc $x > 1$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(x^3+x^2-2x)$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^3+x^2-2x > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0$ hoặc $x > 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^4+5x^2-6)$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^4+5x^2-6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < -6 \\ x^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$

Bài 3.2. Tìm x để biểu thức sau có nghĩa:

a) $\log_{x-3}(x^2-4)$

b) $\log_x \frac{7}{3x-2}$

HD\&Giải

a) $\log_{x-3}(x^2-4)$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x-3 \neq 1 \\ x^2-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x \neq 4 \\ \begin{cases} x < -2 \\ x > 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x \neq 4 \\ x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$

b) $\log_x \frac{7}{3x-2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \frac{7}{3x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x \neq 1$

Dạng 2. ♦ Tính giá trị của một biểu thức
♦ Rút gọn biểu thức

Lưu ý: Vận dụng và dùng linh hoạt tính chất; quy tắc tính lôgarit.

Bài 3.3. Tính:

a) $\log_{\frac{1}{2}} 4$

b) $\log_3 \frac{1}{27}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

d) $3^{2\log_3 5}$

HD\&Giải

a) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 2^2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$

b) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \log_3 3^{-3} = -3$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} 2^3 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$

d) $3^{2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^2 = 5^2 = 25$

Bài 3.4. Tính:

a) $\log_2 \frac{1}{8}$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2$

c) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

d) $\log_{0,5} 0,125$

HD\&Giải

a) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 (2)^{-3} = -3 \log_2 2 = -3$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{2^{-2}} 2 = -\frac{1}{2} \log_2 2 = -\frac{1}{2}$

c) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \log_3 (3)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_3 3 = \frac{1}{4}$

d) $\log_{0,5} 0,125 = \log_{0,5} (0,5)^3 = 3$

Bài 3.5. Tính:

a) $4^{\log_2 3}$

b) $27^{\log_9 2}$

c) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$

d) $4^{\log_8 27}$

HD\&Giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 4^{\log_2 3} &= 2^{2\log_2 3} = 2^{\log_2 (3^2)} = 9 & \text{b)} \quad 27^{\log_9 2} &= 3^{3\log_9 2} = 3^{\frac{3}{2}\log_3 2} = 3^{\log_3 \left(2^{\frac{3}{2}}\right)} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \\ \text{c)} \quad 9^{\log_{\sqrt{3}} 2} &= 3^{\frac{2\log_3 2}{\frac{1}{2}}} = 3^{4\log_3 2} = 3^{\log_3 2^4} = 2^4 = 16 & \text{d)} \quad 4^{\log_8 27} &= 2^{2\log_8 27} = 2^{2\log_2 3^3} = 2^{\log_2 3^2} = 9 \end{aligned}$$

Bài 3.6. Tính:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 4^{\log_2 \frac{1}{7}} & & \text{b)} \quad \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}} & & \text{c)} \quad 3^{5\log_3 2} & & \text{d)} \quad 3^{\frac{\log_1 2}{27}} \end{aligned}$$

HD\&Giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 4^{\log_2 \frac{1}{7}} &= 2^{2\log_2 \frac{1}{7}} = \left(2^{\log_2 \frac{1}{7}}\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} & \text{b)} \quad \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}} &= \left(5^{-2}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}} = \left(5^{\log_5 \frac{1}{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9 \\ \text{c)} \quad 3^{5\log_3 2} &= \left(3^{\log_3 2}\right)^5 = 2^5 = 32 & \text{d)} \quad 3^{\frac{\log_1 2}{27}} &= 3^{\log_{-3} 2} = 3^{-\frac{1}{3}\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Bài 3.7. Tính:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \log_{\frac{1}{2}} 2 + 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8} & & \text{b)} \quad 2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45} & \\ \text{c)} \quad \log_7 49 - \log_7 343 & & \text{d)} \quad \log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 15 & \end{aligned}$$

HD\&Giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \log_{\frac{1}{2}} 2 + 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8} &= \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \left(2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{12} \\ \text{b)} \quad 2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45} &= \log_{\frac{1}{3}} 6^2 - \log_{\frac{1}{3}} (400)^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{45}\right)^3 \\ &= \log_{\frac{1}{3}} 36 - \log_{\frac{1}{3}} 20 + \log_{\frac{1}{3}} 45 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{36 \cdot 45}{20} = \log_{\frac{1}{3}} 81 = -\log_3 3^4 = -4 \\ \text{c)} \quad \log_7 49 - \log_7 343 &= \log_7 \frac{49}{343} = \log_7 \frac{1}{7} = -\log_7 7 = -1 \\ \text{d)} \quad \log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 15 &= \log_5 \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{15} = \log_5 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 3.8. Tính:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{\log_7 16}{\log_7 15 - \log_7 30} & & \text{b)} \quad \log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 & \\ \text{c)} \quad \log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3) & & \text{d)} \quad \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 & \end{aligned}$$

HD\&Giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{\log_7 16}{\log_7 15 - \log_7 30} &= \frac{\log_7 16}{\log_7 \frac{15}{30}} = \frac{\log_7 2^4}{\log_7 2^{-1}} = \frac{4\log_7 2}{-\log_7 2} = -4 \\ \text{b)} \quad \log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 &= \frac{1}{2}\log_5 3 - \frac{1}{2}\log_5 3 - \frac{1}{2}\log_5 4 + 2\log_5 5 + \log_5 2 \\ &= -\log_5 2 + 2 + \log_5 2 = 2 \\ \text{c)} \quad \log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3) &= \log_{\frac{1}{4}} (2\log_3 2 \cdot \log_2 3) = \log_{\frac{1}{4}} 2 = -\frac{1}{2}\log_2 2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$d) \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 = \log_8 \frac{12 \cdot 20}{15} = \log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}$$

Bài 3.9. Tính:

$$a) \frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$$

$$b) \frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21}$$

$$c) \log_{36} 2 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{6}} 3$$

$$d) 36^{\log_6 5} + 10^{1 - \log_2 2} - 8^{\log_2 3}$$

HD & Giải

$$a) \frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9} = \frac{\log_5 \frac{36}{12}}{\log_5 3^2} = \frac{\log_5 3}{2 \log_5 3} = \frac{1}{2}$$

$$b) \frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21} = \log_7 6 - \log_7 14 - \log_7 21 = \log_7 \left(\frac{6}{14 \cdot 21} \right) = \log_7 7^{-2} = -2$$

$$c) \log_{36} 2 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{6}} 3 = \frac{1}{2} \log_6 2 + \frac{1}{2} \log_6 3 = \frac{1}{2} \log_6 6 = \frac{1}{2}$$

$$d) 36^{\log_6 5} + 10^{1 - \log_2 2} - 8^{\log_2 3} = 6^{2 \log_6 5} + 10^{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} - 2^{3 \log_2 3} = 6^{\log_6 5^2} + 10^{\log_{10} 5} - 2^{\log_2 3^3} = 5^2 - 5 + 3^3 = 3$$

Bài 3.10. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \log_{\frac{1}{3}} 7 + 2 \log_9 49 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}$$

$$b) \log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2$$

$$c) \log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$$

$$d) \log \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \log 4 + 4 \log \sqrt{2}$$

HD & Giải

$$a) \log_{\frac{1}{3}} 7 + 2 \log_9 49 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7} = \log_{3^{-1}} 7 + 2 \log_{3^2} 7^2 - \log_{3^{\frac{1}{2}}} 7^{-1} = -\log_3 7 + 2 \log_3 7 + 2 \log_3 7 = 3 \log_3 7$$

$$b) \log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2 = (\log_3 6 \cdot \log_6 2) \cdot \log_2 3^2 = \log_3 2 \cdot \frac{2}{3} \log_2 3 = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$$

$$c) \log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 = \log_a b^2 + \log_a b^2 = 2 \log_a b^2 = 4 \log_a |b|$$

$$d) \log \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \log 4 + 4 \log \sqrt{2} = -\log 8 + \log 2 + \log 4 = -\log 8 + \log 8 = 0$$

Bài 3.11. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \log \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \log 36 + \frac{3}{2} \log \frac{9}{2}$$

$$b) \log 72 - 2 \log \frac{27}{256} + \log \sqrt{108}$$

$$c) \log \frac{1}{8} - \log 0,375 + 2 \log \sqrt{0,5625}$$

$$d) 72 \left(49^{\frac{1}{2} \log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4} \right)$$

HD & Giải

$$a) \log \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \log 36 + \frac{3}{2} \log \frac{9}{2} = \log \left(\frac{4}{9} \cdot 6 \cdot \left(\frac{9}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \log \left(\frac{4}{9} \cdot 6 \cdot \sqrt{\left(\frac{9}{2} \right)^3} \right) = \log \left(\frac{4}{9} \cdot 6 \cdot \frac{3^3}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \log 18\sqrt{2}$$

$$b) \log 72 - 2 \log \frac{27}{256} + \log \sqrt{108} = \log (2^3 \cdot 3^2) - \log \frac{3^6}{2^{16}} + \log \sqrt{2^2 \cdot 3^3} \\ = \log \left(2^3 \cdot 3^2 \cdot \frac{2^{16}}{3^6} \cdot 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \right) = \log \left(2^{20} \cdot 3^{-\frac{5}{2}} \right) = 20 \log 2 - \frac{5}{2} \log 3$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \log \frac{1}{8} - \log 0,375 + 2 \log \sqrt{0,5625} &= \log 2^{-3} - \log (0,5^3 \cdot 3) + 2 \log \sqrt{0,5^4 \cdot 3^2} \\ &= \log 2^{-3} - \log 2^{-3} - \log 3 + 2 \log 2^{-2} + 2 \log 3 = \log 2^{-4} + \log 3 = \log \frac{3}{16} \\ \text{d) } 72 \left(49^{\frac{1}{2} \log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4} \right) &= 72 \left(49^{\log_7 \frac{3}{6}} + 5^{\log_5 4^{-2}} \right) = 72 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{16} \right) = \frac{45}{2} \end{aligned}$$

Dạng 3. ♦ Tìm x**Lưu ý:** • Vận dụng định nghĩa.

① $\log_a x = \alpha \Leftrightarrow x = a^\alpha, (0 < a \neq 1)$

② $\log_x b = \alpha \Leftrightarrow x^\alpha = b, (0 < x \neq 1, b > 0)$

• Đưa biểu thức về cùng cơ số : $\log_a x = \log_a b \Leftrightarrow x = b, (0 < a \neq 1, b > 0)$

• Tính chất; quy tắc tính lôgarit

Bài 3.12. Tìm x, biết:

a) $\log_5 x = 4$

b) $\log_2 (5-x) = 3$

c) $\log_3 (x+2) = 3$

d) $\log_{\frac{1}{6}} (0,5+x) = -1$

HD\&Giải

a) $\log_5 x = 4 \Leftrightarrow x = 5^4 = 625$

b) $\log_2 (5-x) = 3 \Leftrightarrow 5-x = 2^3 \Leftrightarrow x = -3$

c) $\log_3 (x+2) = 3 \Leftrightarrow x+2 = 3^3 \Leftrightarrow x = 25$

d) $\log_{\frac{1}{6}} (0,5+x) = -1 \Leftrightarrow 0,5+x = \left(\frac{1}{6} \right)^{-1} \Leftrightarrow x = 5,5$

Bài 3.13. Cho a và b là các số dương. Tìm x, biết:

a) $\log_3 x = 4 \log_3 a + 7 \log_3 b$

b) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4} \log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7} \log_{\frac{2}{3}} b$

c) $\log_5 x = 2 \log_5 a - 3 \log_5 b$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} b$

HD\&Giải

a) $\log_3 x = 4 \log_3 a + 7 \log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 (a^4 b^7) \Leftrightarrow x = a^4 b^7$

b) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4} \log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7} \log_{\frac{2}{3}} b \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3}} x = \log_{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} + \log_{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{7}} \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3}} x = \log_{\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{4}{7}} \right) \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{4}{7}}$

c) $\log_5 x = 2 \log_5 a - 3 \log_5 b \Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 a^2 - \log_5 b^3 \Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 \frac{a^2}{b^3} \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{b^3}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}} - \log_{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{5}}} \Leftrightarrow x = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{5}}}$

Bài 3.14. Tìm x, biết:

a) $\log_3 x + \log_9 x = \frac{3}{2}$

b) $\log_4 x = \frac{1}{3} \log_4 216 - 2 \log_4 10 + 4 \log_4 3$

c) $\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3} \log_3 125 - \log_3 4 + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 2$

d) $\log_6 x = 3 \log_6 2 + 0,5 \log_6 25 - 2 \log_6 3$

HD\&Giải

a) $\log_3 x + \log_9 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \log_3 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$

$$b) \log_4 x = \frac{1}{3} \log_4 216 - 2 \log_4 10 + 4 \log_4 3 \Leftrightarrow \log_4 x = \log_4 \left(\frac{(216)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^4}{10^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x = \log_4 \left(\frac{486}{100} \right) \Leftrightarrow x = \frac{243}{50}$$

$$c) \log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3} \log_3 125 - \log_3 4 + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 2 \Leftrightarrow -\log_3 x = \log_3 (125)^{\frac{1}{3}} - \log_3 4 + \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3^2}} 2$$

$$\Leftrightarrow -\log_3 x = \log_3 \left(\frac{5 \cdot 2}{4} \right) \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 \left(\frac{5}{2} \right)^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$d) \log_6 x = 3 \log_6 2 + 0,5 \log_6 25 - 2 \log_6 3 \Leftrightarrow \log_6 x = \log_6 \left(\frac{2^3 \cdot 5}{3^2} \right) \Leftrightarrow x = \frac{40}{9}$$

Dạng 4. ♦ Biểu diễn các lôgarit qua các yếu tố cho trước
♦ Chứng minh đẳng thức

Bài 3.15.

- a) Cho $\log_2 20 = \alpha$. Hãy tính $\log_{20} 5$ theo α .
b) Cho $\log_2 5 = a$. Hãy tính $\log_4 1250$ theo a .
c) Cho $\log_{30} 3 = a, \log_{30} 5 = b$. Hãy tính $\log_{30} 1350$ theo a, b .
d) Cho $\log_{15} 3 = c$. Hãy tính $\log_{25} 15$ theo c .

HD & Giải

a) Ta có: $\alpha = \log_2 20 = \log_2 (2^2 \cdot 5) = 2 \log_2 2 + \log_2 5 = 2 + \log_2 5 \Rightarrow \log_2 5 = \alpha - 2$

Mặt khác: $\log_{20} 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 20}$. Vậy $\log_{20} 5 = \frac{\alpha - 2}{\alpha}$

b) Ta cần phân tích 1250 thành tích các lũy thừa của 2 và 5. Ta có: $1250 = 2 \cdot 5^4$

Do đó: $\log_4 1250 = \log_{2^2} (2 \cdot 5^4) = \frac{1}{2} \log_2 (2 \cdot 5^4) = \frac{1}{2} (\log_2 2 + \log_2 5^4) = \frac{1}{2} (1 + 4 \log_2 5) = \frac{1}{2} (1 + 4a)$

Vậy: $\log_4 1250 = \frac{1}{2} (1 + 4a)$

c) Ta có: $1350 = 3^2 \cdot 5 \cdot 30$

Do đó: $\log_{30} 1350 = \log_{30} (3^2 \cdot 5 \cdot 30) = 2 \log_{30} 3 + \log_{30} 5 + \log_{30} 30 = 2a + b + 1$

d) Ta có: $\log_{25} 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 25} = \frac{\log_3 (3 \cdot 5)}{\log_3 5^2} = \frac{\log_3 3 + \log_3 5}{2 \log_3 5} = \frac{1 + \log_3 5}{2 \log_3 5}$

Mặt khác: $c = \log_{15} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 15} = \frac{1}{\log_3 (3 \cdot 5)} = \frac{1}{1 + \log_3 5} \Rightarrow \log_3 5 = \frac{1}{c} - 1$

Vậy: $\log_{25} 15 = \frac{1 + \frac{1}{c} - 1}{2 \left(\frac{1}{c} - 1 \right)} = \frac{1}{2(1 - c)}$

Bài 3.16.

- a) Cho $\log_3 15 = a, b = \log_3 10$. Hãy tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a, b .
b) Cho $\log_2 3 = a, b = \log_3 5, c = \log_7 2$. Hãy tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c .

c) Cho $\log_a b = \sqrt{5}$. Hãy tính $\log_{\frac{a}{\sqrt{b}}} \sqrt[5]{a^3 b^6}$.

d) Cho $\log_{25} 7 = a, b = \log_2 5$. Hãy tính $\log_5 6,125$ theo a, b .

HD & Giải

a) Ta có: $\log_{\sqrt{3}} 50 = \log_{\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}} (2 \cdot 5^2) = 2 \log_3 2 + 4 \log_3 5$

Mặt khác:

$$\diamond a = \log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = 1 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 5 = a - 1$$

$$\diamond b = \log_3 10 = \log_3 (2 \cdot 5) = \log_3 2 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 2 = b - \log_3 5 = b - a + 1$$

$$\text{Do đó: } \log_{\sqrt{3}} 50 = 2(b - a + 1) + 4(a - 1) = 2a + 2b - 2$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \log_{140} 63 &= \log_{140} (3^2 \cdot 7) = 2 \log_{140} 3 + \log_{140} 7 = \frac{2}{\log_3 140} + \frac{1}{\log_7 140} = \frac{2}{\log_3 (2^2 \cdot 5 \cdot 7)} + \frac{1}{\log_7 (2^2 \cdot 5 \cdot 7)} \\ &= \frac{2}{2 \log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 7} + \frac{1}{2 \log_7 2 + \log_7 5 + 1} \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\diamond \log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a}$$

$$\diamond \log_7 5 = \log_7 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 5 = c \cdot a \cdot b$$

$$\diamond \log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} = \frac{1}{\log_7 2 \cdot \log_2 3} = \frac{1}{ca}$$

$$\text{Vậy: } \log_{140} 63 = \frac{2}{\frac{2}{a} + b + \frac{1}{ca}} + \frac{1}{2c + cab + 1} = \frac{2ac + 1}{abc + 2c + 1}$$

$$\text{c) Ta có: } \log_{\frac{a}{\sqrt{b}}} \sqrt[5]{a^3 b^6} = \frac{\log_a \sqrt[5]{a^3 b^6}}{\log_a \frac{a}{\sqrt{b}}} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{6}{5} \log_a b}{1 - \frac{1}{2} \log_a b} = \frac{6(1 + 2\sqrt{5})}{5(2 - \sqrt{5})} = -\frac{6(12 + 2\sqrt{5})}{5}$$

$$\text{d) Ta có: } \log_5 6,125 = \log_5 \frac{6125}{1000} = \log_5 \frac{49}{8} = \log_5 49 - \log_5 8 = 2 \log_5 7 - 3 \log_5 2$$

Mặt khác:

$$\diamond a = \log_{25} 7 = \frac{1}{2} \log_5 7 \Rightarrow \log_5 7 = 2a$$

$$\diamond b = \log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2} \Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{b}$$

$$\text{Vậy: } \log_5 6,125 = 4a - \frac{3}{b}$$

Bài 3.17. Hãy chứng minh:

$$\text{a) } \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$$

$$\text{b) } \log_3 7 + \log_7 3 > 2$$

$$\text{c) } 4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4}$$

$$\text{d) } 3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$$

HD & Giải

$$\text{a) Ta có: } \log_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}} \text{ và } \left| \log_{\frac{1}{2}} 3 \right| + \frac{1}{\left| \log_3 \frac{1}{2} \right|} > 2 \text{ (vì } \left| \log_{\frac{1}{2}} 3 \right| \neq \frac{1}{\left| \log_3 \frac{1}{2} \right|} \text{)}$$

Mặt khác: $\log_3 \frac{1}{2} < 0$ nên $-\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}} > 2$ hay $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} > 2$

b) Ta có: $\log_3 7 > 0, \log_7 3 > 0$ và $\log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} \neq \log_7 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si, ta có: $\log_7 3 + \frac{1}{\log_7 3} > 2$. Suy ra: $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$

c) $4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4} \Leftrightarrow \log_4 4^{\log_5 7} = \log_4 7^{\log_5 4} \Leftrightarrow \log_5 7 = \log_5 4 \cdot \log_4 7$ (đúng).

d) $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3} \Leftrightarrow \log_3 3^{\log_2 5} = \log_3 5^{\log_2 3} \Leftrightarrow \log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5$ (đúng).

Bài 3.18. Hãy chứng minh:

a) $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b, (a, b, c > 0; a, c, ab \neq 1)$

b) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, (0 < a, b, c \neq 1)$

HD\>Giải

a) Ta có: $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = \frac{\frac{1}{\log_c a}}{\frac{1}{\log_c ab}} = \frac{\log_c ab}{\log_c a} = \frac{\log_c a + \log_c b}{\log_c a} = 1 + \frac{\log_c b}{\log_c a} = 1 + \log_a b$

b) Ta có: $a^{\log_c b} = a^{\log_c a \cdot \log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_c a} = b^{\log_c a}$. Vậy $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, (0 < a, b, c \neq 1)$

Bài 3.19. Cho $x^2 + 9y^2 = 10xy, (x, y > 0; 0 < a \neq 1)$.

Chứng minh: $\log_a (x + 3y) - 2 \log_a 2 = \frac{1}{2} (\log_a x + \log_a y)$

HD\>Giải

Ta có: $x^2 + 9y^2 = 10xy \Leftrightarrow x^2 + 6xy + 9y^2 = 16xy \Leftrightarrow (x + 3y)^2 = 16xy$

Lấy lôgarit cơ số a hai vế, ta có:

$\log_a (x + 3y)^2 = \log_a 16xy \Leftrightarrow 2 \log_a (x + 3y) = \log_a 2^4 + (\log_a x + \log_a y)$

$\Leftrightarrow \log_a (x + 3y) = 2 \log_a 2 + \frac{1}{2} (\log_a x + \log_a y) \Leftrightarrow \log_a (x + 3y) - 2 \log_a 2 = \frac{1}{2} (\log_a x + \log_a y)$

Dạng 5. ♦ So sánh lôgarit

Lưu ý: Cho $a, b > 0$, ta có:

① Nếu $c > 1$ thì $\log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a < b$

② Nếu $0 < c < 1$ thì $\log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a > b$

Hệ quả:

① Nếu $c > 1$ thì $\log_c a > 0 \Leftrightarrow a > 1$

② Nếu $0 < c < 1$ thì $\log_c a > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$

Bài 3.20. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{0,3} \frac{1}{2}$ và $\log_{\pi} 0,7$

b) $\log_{12} 2$ và $\log_{0,2} 7$

c) $\log_2 3$ và $\log_6 5$

d) $\log_{0,2} 0,3$ và $\log_{0,5} 0,4$

HD\>Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} \diamond \begin{cases} 0,3 < 1 \\ \frac{1}{2} < 1 \end{cases} &\Rightarrow \log_{0,3} \frac{1}{2} > 0 \quad (1) & \diamond \begin{cases} 0,7 < 1 \\ \pi > 1 \end{cases} &\Rightarrow \log_{\pi} 0,7 < 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\log_{0,3} \frac{1}{2} > \log_{\pi} 0,7$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \diamond \begin{cases} 2 > 1 \\ 12 > 1 \end{cases} &\Rightarrow \log_{12} 2 > 0 \quad (1) & \diamond \begin{cases} 7 > 1 \\ 0,2 < 1 \end{cases} &\Rightarrow \log_{0,2} 7 < 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\log_{12} 2 > \log_{0,2} 7$

c) Ta có: $\diamond \log_2 3 > \log_2 2 \Rightarrow \log_2 3 > 1 \quad (1)$

$\diamond \log_6 5 < \log_6 6 \Rightarrow \log_6 5 < 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\log_2 3 > \log_6 5$

d) Ta có: $\diamond \log_{0,2} 0,3 < \log_{0,2} 0,2 \Rightarrow \log_{0,2} 0,3 < 1 \quad (1)$

$\diamond \log_{0,5} 0,4 > \log_{0,5} 0,5 \Rightarrow \log_{0,5} 0,4 > 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\log_{0,2} 0,3 < \log_{0,5} 0,4$

Bài 3.21. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_3 5$ và $\log_7 4$

b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_5 3$

c) $\log_2 10$ và $\log_5 30$

d) $\log_3 10$ và $\log_8 57$

HD & Giải

a) Ta có: $\diamond \log_3 5 > \log_3 3 \Rightarrow \log_3 5 > 1 \quad (1)$

$\diamond \log_7 4 < \log_7 7 \Rightarrow \log_7 4 < 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\log_3 5 > \log_7 4$

b) Ta có: $\diamond \log_{0,3} 2 < \log_{0,3} 1 \Rightarrow \log_{0,3} 2 < 0 \quad (1)$

$\diamond \log_5 3 > \log_5 1 \Rightarrow \log_5 3 > 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\log_{0,3} 2 < \log_5 3$

c) Ta có: $\diamond \log_2 10 > \log_2 8 \Rightarrow \log_2 10 > 3 \quad (1)$

$\diamond \log_5 30 < \log_5 125 \Rightarrow \log_5 30 < 3 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\log_2 10 > \log_5 30$

d) Ta có: $\diamond \log_3 10 > \log_3 9 \Rightarrow \log_3 10 > 2 \quad (1)$

$\diamond \log_8 57 < \log_8 64 \Rightarrow \log_8 57 < 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\log_3 10 > \log_8 57$

Bài 3.22. So sánh các cặp số sau:

a) $\frac{1}{2} + \log 3$ và $\log 19 - \log 2$

b) $\log \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$ và $\frac{\log 5 + \log \sqrt{7}}{2}$

HD & Giải

a) Ta có: $\alpha = \frac{1}{2} + \log 3 = \frac{1}{2} \log 10 + \log 3 = \log 3\sqrt{10} \Rightarrow 10^\alpha = 3\sqrt{10}$

và $\beta = \log 19 - \log 2 = \log \frac{19}{2} \Rightarrow 10^\beta = \frac{19}{2}$

Ta lại có:
$$\begin{cases} \left(3\sqrt{10}\right)^2 = 90 = \frac{360}{4} \\ \left(\frac{19}{2}\right)^2 = \frac{361}{4} \end{cases} \Rightarrow 3\sqrt{10} < \frac{19}{2} \text{ . Nên } 10^\alpha < 10^\beta$$

$\Rightarrow \alpha < \beta$ hay $\frac{1}{2} + \log 3 < \log 19 - \log 2$

b) Ta có: $\alpha = \log \frac{5+\sqrt{7}}{2} \Rightarrow \frac{5+\sqrt{7}}{2} = 10^\alpha$ và $\beta = \frac{\log 5 + \log \sqrt{7}}{2} = \log \sqrt{5\sqrt{7}} \Rightarrow 10^\beta = \sqrt{5\sqrt{7}}$

Ta lại có:
$$\begin{cases} \left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{32+10\sqrt{7}}{4} = 8 + \frac{5}{2}\sqrt{7} \\ \left(\sqrt{5\sqrt{7}}\right)^2 = 5\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{5+\sqrt{7}}{2} > \sqrt{5\sqrt{7}}$$

Nên $10^\alpha > 10^\beta \Rightarrow \alpha > \beta$ hay $\log \frac{5+\sqrt{7}}{2} > \frac{\log 5 + \log \sqrt{7}}{2}$

Dạng 6. ♦ Lôgarit thập phân – Lôgarit tự nhiên

Lưu ý: Cho $a, b > 0$, ta có:

- ① $\log_{10} a$ được gọi là lôgarit thập phân của a và kí hiệu là $\log a$ hay $\lg a$
- ② $\log_e a$ được gọi là lôgarit tự nhiên (hay lôgarit Nê – pe) của a kí hiệu $\ln a$

Bài 3.23. Đổi sang lôgarit Nê – pe

a) $\log_2 (x^2 + 16)$

b) $\lg(x - 5)$

HD & Giải

a) $\log_2 (x^2 + 16) = \frac{\ln(x^2 + 16)}{\ln 2}$

b) $\lg(x - 7) = \frac{\ln(x - 7)}{\ln 10}$

Bài 3.24. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (\ln a + \log_a e)^2 - \ln^2 a - \log_a^2 e, (0 < a \neq 1)$

b) $B = 2 \ln a + 3 \log_a e - \frac{3}{\ln a} - \frac{2}{\log_a e}, (0 < a \neq 1)$

HD & Giải

a)
$$\begin{aligned} A &= (\ln a + \log_a e)^2 - \ln^2 a - \log_a^2 e = \ln^2 a + 2 \ln a \cdot \log_a e + \log_a^2 e - \ln^2 a - \log_a^2 e \\ &= \ln^2 a + 2 \ln a \cdot \frac{1}{\ln a} + \log_a^2 e - \ln^2 a - \log_a^2 e = 2 \end{aligned}$$

b)
$$B = 2 \ln a + 3 \log_a e - \frac{3}{\ln a} - \frac{2}{\log_a e} = 2 \ln a + \frac{3}{\ln a} - \frac{3}{\ln a} - 2 \ln a = 0$$

Bài 3.25. Hãy tính

a) $A = \log(2 + \sqrt{3})^{20} + \log(2 - \sqrt{3})^{20}$

b) $B = 3 \log(\sqrt{2} + 1) + \log(5\sqrt{2} - 7)$

$$c) C = \ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e}$$

$$d) D = 5 \ln e^{-1} + 4 \ln(e^2 \sqrt{e})$$

HD & Giải

$$a) A = \log(2 + \sqrt{3})^{20} + \log(2 - \sqrt{3})^{20} = \log[(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})]^{20} = \log 1^{20} = 0$$

$$b) B = 3 \log(\sqrt{2} + 1) + \log(5\sqrt{2} - 7) = \log(\sqrt{2} + 1)^3 + \log(5\sqrt{2} - 7) \\ = \log(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7) = \log 1 = 0$$

$$c) C = \ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{2} \ln e + \ln 1 - \ln e = -\frac{1}{2} \ln e = -\frac{1}{2}$$

$$d) D = 5 \ln e^{-1} + 4 \ln(e^2 \sqrt{e}) = -5 \ln e + 10 \ln e = 5 \ln e = 5$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3.26. Tính:

$$a) \log_a \left(\frac{a^2 \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right)$$

$$b) \log_5 \log_5 \underbrace{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\dots \sqrt[5]{5}}}}}_{n \text{ dấu căn}}$$

Bài 3.27.

a) Biểu diễn $\log_{30} 8$ qua $\log_{30} 5$ và $\log_{30} 3$

b) Biểu diễn $\log_9 20$ qua $a = \log 2, b = \log 3$

Bài 3.28. Biểu diễn trực tiếp y theo x , biết:

$$a) \ln y = \frac{1}{3} \ln x + \ln 4$$

$$b) \log y + \frac{1}{2} \log x = \log 3$$

Bài 3.29.

a) Cho $\log_2 7 = a, \log_{12} 24 = b$. Hãy tính $\log_{54} 168$ theo a, b .

b) Cho $\log_6 15 = a, \log_{12} 18 = b$. Hãy tính $\log_{25} 24$ theo a, b .

Kết quả:

$$\text{Bài 3.26. a) } \frac{173}{60}; \text{ b) } -n \quad \text{Bài 3.27. a) } \log_{30} 8 = 3 - 3(\log_{30} 5 + \log_{30} 3) \quad \text{b) } \log_9 20 = \frac{1+a}{2b}$$

$$\text{Bài 3.28. a) } y = 4x^{\frac{1}{3}}; \text{ b) } y = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Bài 3.29.

$$a) \log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{\log_7 3 + 1 + 3 \log_7 2}{\log_7 2 + 3 \log_7 3}. \text{ Từ giả thiết } \log_2 7 = a, \log_{12} 24 = b \text{ ta tính được } \log_7 2$$

$$\text{và } \log_7 3 \text{ từ hệ phương trình: } \begin{cases} 2 \log_7 2 + \log_7 3 = a \\ 3 \log_7 2 + \log_7 3 = ab \end{cases}$$

$$b) \log_{25} 24 = \frac{1}{2} \log_5 24 = \frac{3}{2} \log_5 2 + \frac{1}{2} \log_5 3$$

$$a = \log_6 15 = \frac{1 + \log_5 3}{\log_2 5 + \log_5 3} \quad (1); \quad b = \log_{12} 18 = \frac{\log_5 2 + 2 \log_5 3}{2 \log_5 2 + \log_5 3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta tính được $\log_5 2$ và $\log_5 3$ theo a và b

§4. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Hàm số mũ

1. Định nghĩa

Cho $a > 0, a \neq 1$. Hàm số $y = a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a .

2. Đạo hàm của hàm số mũ

Giới hạn: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$

3. Khảo sát hàm số mũ $y = a^x, (0 < a \neq 1)$

$a > 1$	$0 < a < 1$																														
① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ ② Sự biến thiên: $y' = a^x \cdot \ln a > 0, \forall x$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ - TCN: trục Ox ③ Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td><td>$+\infty$</td></tr></table> ④ Đồ thị	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'	+	+	+	+	y	0	1	a	$+\infty$	① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ ② Sự biến thiên: $y' = a^x \cdot \ln a < 0, \forall x$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ - TCN: trục Ox ③ Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>a</td><td>0</td></tr></table> ④ Đồ thị	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'	-	-	-	-	y	$+\infty$	1	a	0
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'	+	+	+	+																											
y	0	1	a	$+\infty$																											
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'	-	-	-	-																											
y	$+\infty$	1	a	0																											

Bảng tóm tắt các tính chất hàm số mũ $y = a^x, (0 < a \neq 1)$

Tập xác định	$D = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$
Đạo hàm	$y' = a^x \cdot \ln a$
Chiều biến thiên	$a > 0$: Hàm số đồng biến $0 < a < 1$: Hàm số nghịch biến
Tiệm cận	Trục Ox là tiệm cận ngang
Đồ thị	Đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$, nằm phía trên trục hoành ($y = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

II. Hàm số lôgarit

1. Định nghĩa

Cho $a > 0, a \neq 1$. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số lôgarit** cơ số a .

2. Đạo hàm của hàm số lôgarit

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

3. Khảo sát hàm số lôgarit $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$

$a > 1$	$0 < a < 1$																														
① Tập xác định: $D = (0; +\infty)$ ② Sự biến thiên: $y' = \frac{1}{x \ln a} > 0, \forall x > 0$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ - TCD: trục Oy ③ Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr></table> ④ Đồ thị	x	0	1	a	$+\infty$	y'		+	+	+	y	$-\infty$	0	1	$+\infty$	① Tập xác định: $D = (0; +\infty)$ ② Sự biến thiên: $y' = \frac{1}{x \ln a} < 0, \forall x > 0$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ - TCD: trục Oy ③ Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>a</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>0</td><td>$-\infty$</td></tr></table> ④ Đồ thị	x	0	a	1	$+\infty$	y'		-	-	-	y	$+\infty$	1	0	$-\infty$
x	0	1	a	$+\infty$																											
y'		+	+	+																											
y	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
x	0	a	1	$+\infty$																											
y'		-	-	-																											
y	$+\infty$	1	0	$-\infty$																											

Bảng tóm tắt các tính chất hàm số mũ $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$

Tập xác định	$D = (0; +\infty)$
Đạo hàm	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
Chiều biến thiên	$a > 0$: Hàm số đồng biến $0 < a < 1$: Hàm số nghịch biến
Tiệm cận	Trục Oy là tiệm cận đứng
Đồ thị	Đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$, nằm phía bên phải trục tung

Bảng đạo hàm của các hàm số lũy thừa, mũ, logarit

Hàm sơ cấp	Hàm hợp ($u = u(x)$)
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(x^u)' = ux^{u-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$ $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(u+v)' = u' + v'$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$(u-v)' = u' - v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lôgarit**Lưu ý:** Hàm số $\log_a f(x)$ (với $0 < a \neq 1$) xác định khi và chỉ khi $f(x) > 0$ **Bài 4.1.** Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \ln \frac{x-1}{-2x-3}$

b) $y = \ln \sqrt{x^2 - 4x - 12}$

c) $y = \log_5 (4-x)^2$

d) $y = \sqrt{x^2 + x - 2} \cdot \log_3 (9 - x^2)$

HD & Giải

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{x-1}{-2x-3} > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < 1$. Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \left(-\frac{3}{2}; 1\right)$

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 6$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow (4-x)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 4$. Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ 9 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \leq -2 \\ 1 \leq x < 3 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (-3; -2] \cup [1; 3)$

Bài 4.2. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \log_2 (5-2x)$

b) $y = \log_3 (x^2 - 2x)$

$$c) y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 3)$$

$$d) y = \log_{0,4} \frac{3x+2}{1-x}$$

HD&Giải

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 5 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$. Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$
 Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 3$.
 Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{3x+2}{1-x} > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < 1$. Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \left(-\frac{3}{2}; 1\right)$

Dạng 2. Giới hạn

Lưu ý: ♦ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ♦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Bài 4.3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{5x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 5} (2^x - 3^x)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right)$

HD&Giải

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{5x} - \frac{e^{3x} - 1}{5x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2}{5} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} (2^x - 3^x) = 2^5 - 3^5 = -211$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}$ (với $y = \frac{1}{x}, x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+$)

Bài 4.4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 9} \log_3 x$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x+1)}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1) - \ln(2x+1)}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$

HD&Giải

a) $\lim_{x \rightarrow 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \ln(4x+1)}{4x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x+1)}{4x} = 4$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1) - \ln(2x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{x}$
 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{3x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{2x} = 3 - 2 = 1$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Bài 4.5. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x+3} - e^3}{2x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{2x} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan x}$$

HD & Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x+3} - e^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} e^3 - e^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x} - 1}{5x} \cdot \frac{5}{2} e^3 \right) = \frac{5}{2} e^3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x} - 1}{5x} \right) = \frac{5}{2} e^3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot (\sqrt{x+1} + 1) = 2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3 \cdot \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^2}{2} \right] = 1 \cdot 0 = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}{\frac{\tan x}{x}} \cdot 2 \right] = \frac{1}{1} \cdot 2 = 2$$

Dạng 3. Đạo hàm của hàm số

Lưu ý: Dùng công thức tính đạo hàm của các hàm số

Bài 4.6. Tính đạo hàm các hàm số sau:

$$a) y = 8^{x^2+x+1} \quad b) y = 2xe^x + 3 \sin 2x \quad c) y = 5x^2 - 2^x \cos x \quad d) y = \frac{x+1}{3^x}$$

HD & Giải

$$a) y' = (8^{x^2+x+1})' = 8^{x^2+x+1} (x^2 + x + 1)' \ln 8 = 8^{x^2+x+1} (2x+1) \ln 8$$

$$b) y' = (2xe^x + 3 \sin 2x)' = (2xe^x)' + (3 \sin 2x)' = 2e^x (x+1) + 6 \cos 2x$$

$$c) y' = (5x^2 - 2^x \cos x)' = (5x^2)' - (2^x \cos x)' = 10x + 2^x (\sin x - \ln 2 \cdot \cos x)$$

$$d) y' = \left(\frac{x+1}{3^x} \right)' = \frac{(x+1)' \cdot 3^x - (x+1)(3^x)'}{(3^x)^2} = \frac{1 - (x+1) \ln 3}{3^x}$$

Bài 4.7. Tính đạo hàm các hàm số sau:

$$a) y = (x^2 - 2x + 2)e^x \quad b) y = (\sin x - \cos x)e^{2x} \quad c) y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad d) y = 2^x - \sqrt{e^x}$$

HD & Giải

$$a) y' = [(x^2 - 2x + 2)e^x]' = (x^2 - 2x + 2)' \cdot e^x + (x^2 - 2x + 2)(e^x)' = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2 e^x$$

$$b) y' = [(\sin x - \cos x)e^{2x}]' = (\sin x - \cos x)' e^{2x} + (\sin x - \cos x)(e^{2x})' \\ = (\cos x + \sin x)e^{2x} + 2(\sin x - \cos x)e^{2x} = (3 \sin x - \cos x)e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)' = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \end{aligned}$$

$$\text{d) } y' = (2^x - \sqrt{e^x})' = (2^x)' - (\sqrt{e^x})' = 2^x \ln 2 - \frac{(e^x)'}{2\sqrt{e^x}} = 2^x \ln 2 - \frac{1}{2} \sqrt{e^x}$$

Bài 4.8. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = x^3 \sqrt{e^{x^2} + 1}$ b) $y = 3^x - \sqrt{3^{3x} + 2}$ c) $y = (x^2 + 1)e^x$ d) $y = (\sin x + \cos x)\sqrt{e^x}$

HD & Giải

$$\text{a) } y' = \left(x^3 \sqrt{e^{x^2} + 1} \right)' = 3x^2 \sqrt{e^{x^2} + 1} + \frac{x^3 (e^{x^2} + 1)'}{2\sqrt{e^{x^2} + 1}} = 3x^2 \sqrt{e^{x^2} + 1} + \frac{x^3 \cdot 2x \cdot e^{x^2}}{2\sqrt{e^{x^2} + 1}} = \frac{x^2 (x^2 e^{x^2} + 3e^{x^2} + 3)}{\sqrt{e^{x^2} + 1}}$$

$$\text{b) } y' = (3^x - \sqrt{3^{3x} + 2})' = 3^x \ln 3 - \frac{(3^{3x} + 2)'}{2\sqrt{3^{3x} + 2}} = 3^x \ln 3 - \frac{3e^{3x}}{2\sqrt{3^{3x} + 2}}$$

$$\text{c) } y' = \left[(x^2 + 1)e^x \right]' = (x^2 + 1)' e^x + (x^2 + 1) \cdot (e^x)' = (x^2 + 1)' e^x$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y' &= \left[(\sin x + \cos x) \sqrt{e^x} \right]' = (\sin x + \cos x)' \sqrt{e^x} + (\sin x + \cos x) (\sqrt{e^x})' \\ &= (\cos x - \sin x) \sqrt{e^x} + (\sin x + \cos x) \frac{\sqrt{e^x}}{2} = \frac{\sqrt{e^x}}{2} (3 \cos x - \sin x) \end{aligned}$$

Bài 4.9. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \ln(x^2 + 1)$ b) $y = \frac{\ln x}{x}$ c) $y = (1 + \ln x) \ln x$ d) $y = x^2 \ln \sqrt{x^2 + 1}$

HD & Giải

$$\text{a) } y' = \left[\ln(x^2 + 1) \right]' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\text{b) } y' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(\ln x)' x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\text{c) } y' = \left[(1 + \ln x) \ln x \right]' = (1 + \ln x)' \ln x + (1 + \ln x) \cdot (\ln x)' = \frac{1 + 2 \ln x}{x}$$

$$\text{d) } y' = \left(x^2 \ln \sqrt{x^2 + 1} \right)' = 2x \ln \sqrt{x^2 + 1} + x^2 \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 1})'}{\sqrt{x^2 + 1}} = x \ln(x^2 + 1) + \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Bài 4.10. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \ln |\cos x|$ b) $y = \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right|$ c) $y = \ln \left| \frac{1 - x}{1 + x} \right|$ d) $y = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right|$

HD & Giải

$$\text{a) } y' = \left(\ln |\cos x| \right)' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$b) y = \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| = \ln |1 + \sin x| - \ln |\cos x|.$$

$$y' = (\ln |1 + \sin x| - \ln |\cos x|)' = \frac{(1 + \sin x)'}{1 + \sin x} - \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$c) y = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \ln |1-x| - \ln |1+x|. \quad y' = (\ln |1-x| - \ln |1+x|)' = \frac{(1-x)'}{1-x} - \frac{(1+x)'}{1+x} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$d) y = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \right| = \ln |\sqrt{x^2+1}-1| - \ln |x|.$$

$$y' = (\ln |\sqrt{x^2+1}-1| - \ln |x|)' = \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)'}{\sqrt{x^2+1}-1} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-1)} = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

Bài 4.11. Tính đạo hàm các hàm số sau:

$$a) y = \log_2(2x+1) \quad b) y = 3x^2 - \ln x + 4 \sin x \quad c) y = \log(x^2 + x + 1) \quad d) y = \frac{\log_3 x}{x}$$

HD&Giải

$$a) y' = [\log_2(2x+1)]' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2} = \frac{2}{(2x+1)\ln 2} \quad b) y' = (3x^2 - \ln x + 4 \sin x)' = 6x - \frac{1}{x} + 4 \cos x$$

$$c) y' = [\log(x^2 + x + 1)]' = \frac{(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)\ln 10} = \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)\ln 10}$$

$$d) y' = \left(\frac{\log_3 x}{x} \right)' = \frac{(\log_3 x)' x - (x)' \log_3 x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x \ln 3} \cdot x - \log_3 x}{x^2} = \frac{1 - \log_3 x \cdot \ln 3}{x^2 \ln x} = \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 3}$$

Bài 4.12. Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Tính $f'(\sqrt{3})$

HD&Giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = [\ln(x + \sqrt{x^2+1})]' = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})'}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(x + \sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{Vậy: } f'(\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}$$

Bài 4.13.

$$a) \text{ Cho } y = e^{4x} + 2e^{-x}. \text{ Chứng minh: } y''' - 13y' - 12y = 0$$

$$b) \text{ Cho } y = e^{2x} \sin 5x. \text{ Chứng minh: } y'' - 4y' + 29y = 0$$

HD&Giải

$$a) y = e^{4x} + 2e^{-x}. \text{ Ta có: } \begin{cases} y' = 4e^{4x} - 2e^{-x} \\ y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x} \\ y''' = 64e^{4x} - 2e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} VT &= y''' - 13y' - 12y = (64e^{4x} - 2e^{-x}) - 13(4e^{4x} - 2e^{-x}) - 12(e^{4x} + 2e^{-x}) \\ &= 64e^{4x} - 2e^{-x} - 52e^{4x} + 26e^{-x} - 12e^{4x} - 24e^{-x} = 0 = VP \quad (\text{ĐPCM}) \end{aligned}$$

b) Cho $y = e^{2x} \sin 5x$. Ta có:
$$\begin{cases} y' = e^{2x} (2 \sin 5x + 5 \cos 5x) \\ y'' = e^{2x} (-21 \sin 5x + 20 \cos 5x) \end{cases}$$

$$VT = y'' - 4y' + 29y = e^{2x} (-21 \sin 5x + 20 \cos 5x) - 4e^{2x} (2 \sin 5x + 5 \cos 5x) + 29e^{2x} \sin 5x \\ = e^{2x} (-21 \sin 5x + 20 \cos 5x - 8 \sin 5x - 20 \cos 5x + 29 \sin 5x) = 0 = VP \quad (\text{ĐPCM})$$

Bài 4.14. Chứng minh rằng:

a) Hàm số $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ b) Hàm số $y = 3^x (x - \sqrt{x^2 + 1})$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

HD\>Giải

a) Hàm số $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{3}$.

♦ Tập xác định $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = \left(\frac{2^x - 2^{-x}}{3} \right)' = \frac{2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) Hàm số $y = 3^x (x - \sqrt{x^2 + 1})$

♦ Tập xác định $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = (3^x \ln 3) (x - \sqrt{x^2 + 1}) + 3^x \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = 3^x (x - \sqrt{x^2 + 1}) \left(\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$

Mặt khác:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 \\ \ln 3 > 1 > \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \ln 3 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy: Hàm số $y = 3^x (x - \sqrt{x^2 + 1})$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Bài 4.15. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất các hàm số sau:

a) $y = 2^x$ trên đoạn $[-1; 2]$

b) $y = 2^{|x|}$ trên đoạn $[-1; 1]$

HD\>Giải

a) Hàm số $y = 2^x$

♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \supset [-1; 2]$

♦ $y' = (2^x)' = 2^x \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

♦ $y(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; $y(2) = 2^2 = 4$

♦ Vậy: $\text{Max}_{[-1; 2]} y = 4$, $\text{Min}_{[-1; 2]} y = \frac{1}{2}$

b) Trên đoạn $[-1; 1]$, ta có: $y = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x, & \text{khi } x \in [0; 1] \\ 2^{-x}, & \text{khi } x \in [-1; 0] \end{cases}$

Do đó, trên đoạn $[0; 1]$ hàm số đồng biến, trên đoạn $[-1; 0]$ hàm số nghịch biến. Suy ra các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất sẽ đạt được tại các đầu mút. Ta có: $y(-1) = 2^{-(-1)} = 2$; $y(1) = 2^1 = 2$;

$y(0) = 2^0 = 1$. Vậy: $\text{Max}_{[-1; 1]} y = y(-1) = y(1) = 2$, $\text{Min}_{[-1; 1]} y = y(0) = 1$

Dạng 4. Khảo sát hàm số mũ và lôgarit
Lưu ý: Các bước khảo sát hàm số.

Bài 4.16. Khảo sát các hàm số sau:

a) $y = 2^x$

b) $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$

HD Giải

a) $y = 2^x$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

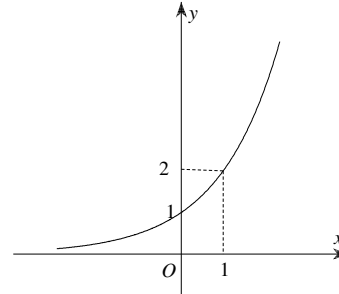
② Sự biến thiên:

- ♦ $y' = 2^x \ln 2 > 0, \forall x \in D$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$
- ♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị có tiệm cận ngang là trục Ox

③ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'			+	
y		0	1	2

④ Đồ thị:



b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

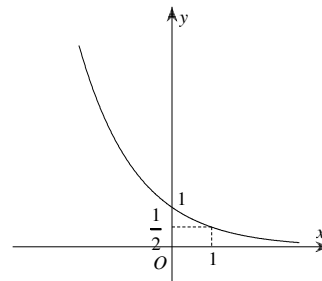
② Sự biến thiên:

- ♦ $y' = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} < 0, \forall x \in D$ nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$
- ♦ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị có tiệm cận ngang là trục Ox

③ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'			-	
y	$+\infty$	1	$\frac{1}{2}$	0

④ Đồ thị:



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4.17. Tìm tập xác định các hàm số sau:

- a) $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$ b) $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 5x + 6)$ c) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$ d) $y = \log_5 \frac{x - 3}{x + 3}$
 e) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x - 4}{x + 4}$ f) $y = \log_{\pi}(2^x - 2)$ g) $y = \log_3(3^{x-1} - 9)$ h) $y = \log_{\pi} \frac{x^2 - 16}{x + 5}$

Bài 4.18. Tính đạo hàm các hàm số sau:

- a) $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$ b) $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 5x + 6)$ c) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$
 d) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x - 4}{x + 4}$ e) $y = \log_{\pi}(2^x - 2)$ f) $y = \log_3(3^{x-1} - 9)$

Bài 4.19. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = (3x+1)^e$ b) $y = \sqrt[3]{x}$ c) $y = \sqrt[3]{\ln^2 2x}$ d) $y = \sqrt[3]{\sqrt{\cos x}}$

Bài 4.20. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = 3^x + 12^x$ b) $y = 4^{x^2+x+1}$ c) $y = 4^{\cos x}$ d) $y = 3^{\frac{1}{\cos x}}$

Bài 4.21. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = 5x^2 - \ln x + 8 \cos x$ b) $y = \frac{\log_3 x}{x} + \log(x^2 + x + 1)$ c) $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln x$ d) $y = e^{\cos 2x}$

Bài 4.22. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = x + \ln|\sin x + \cos x|$ b) $y = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$ c) $y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}$ d) $y = \frac{\ln x}{x} + \frac{1 - \ln x}{x + \ln x}$

Bài 4.23. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $y'' + 2y' + 2y = 0$ với $y = e^{-x} \sin x$ b) $xy' + 1 = e^y$ với $y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$
 c) $xy' = y(y \ln x - 1)$ với $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$ d) $y + xy' + x^2 y'' = 0$ với $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$

Bài 4.24. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

Kết quả:

Bài 4.17.

a) $D = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; b) $D = (-1; 6)$; c) $D = (-5; -3) \cup (3; +\infty)$; d) $D = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$
 e) $D = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; f) $D = (1; +\infty)$; g) $D = (3; +\infty)$; h) $D = (-5; -4) \cup (4; +\infty)$

Bài 4.18. a) $y' = \frac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 8}$; b) $y' = \frac{-4x+10}{(-x^2+5x+6)\ln 3}$; c) $y' = \frac{x^2+10x+9}{(x^2-9)(x+5)\ln 0,7}$

d) $y' = \frac{8}{(16-x^2)\ln 3}$; e) $y' = \frac{2^x \ln 2}{(2^x-2)\ln x}$; f) $y' = \frac{3^{x-1}}{3^{x-1}-9}$

Bài 4.19. a) $y' = 3e(3x+1)^{e-1}$; b) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; c) $y' = \frac{2}{3x} \ln \frac{1}{3} 2x$; d) $y' = -\frac{\sin x}{6 \cos^{\frac{5}{6}} x}$

Bài 4.20. a) $y' = 3^x \ln 3 + 12^x \ln 12$; b) $y' = (2x+1)4^{x^2+x+1} \ln 4$

c) $y' = -\sin x \cdot 4^{\cos x} \ln 4$; d) $y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot 3^{\frac{1}{\cos x}} \ln 3$

Bài 4.21. a) $y' = 10x - \frac{1}{x} - 8 \sin x$; b) $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 3} + \frac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 10}$

c) $y' = \frac{x^2(\ln x + 1) + 1}{x\sqrt{x^2+1}}$; d) $y' = -2 \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$

Bài 4.22. a) $y' = \frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x}$; $y' = x \cdot e^{2x}$; c) $y' = \frac{1}{1+e^x}$; d) $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{-2}{x(1 + \ln x)^2}$

Bài 4.24. a) $\frac{1}{e}$; b) e^6 ; c) $\frac{1}{e}$; d) 2

ÔN TẬP

HÀM SỐ LŨY THỪA

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài 1. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = 25^{\log_5 6} + 10^{1+\log 2} - 2^{\log_4 9}$

b) $B = \log_2 \log_5 \sqrt[4]{5}$

c) $C = \log \sqrt[5]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}}}$

d) $D = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$

HD&Giải

a) $A = 25^{\log_5 6} + 10^{1+\log 2} - 2^{\log_4 9} = (5^{\log_5 6})^2 + 10 \cdot 10^{\log 2} - (2^{\log_2 9})^{\frac{1}{2}} = 6^2 + 20 - 3 = 53$

b) $B = \log_2 \log_5 \sqrt[4]{5} = \log_2 \log_5 5^{\frac{1}{4}} = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-3} = -3$

c) $C = \log \sqrt[5]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{5} \left[\log \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\log \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} \right) \right] = \frac{1}{6} \log \frac{2}{3}$

d) $D = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} = \log_2 (12 \cdot 2) \log_2 96 - \log_2 (96 \cdot 2) \log_2 12$
 $= (1 + \log_2 12) \log_2 96 - (1 + \log_2 96) \log_2 12 = \log_2 96 - \log_2 12 = \log_2 \frac{96}{12} = \log_2 8 = 3$

Bài 2. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3^x - 3}$

b) $y = \log \frac{x-1}{2x-3}$

c) $y = \log \sqrt{x^2 - x - 12}$

d) $y = \sqrt{25^x - 5^x}$

HD&Giải

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3^x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Vậy tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-3} > 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > \frac{3}{2}$.

Vậy tập xác định hàm số là: $D = (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - x - 12 > 0 \Leftrightarrow x < -3$ hoặc $x > 4$.

Vậy tập xác định hàm số là: $D = (-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 25^x - 5^x \geq 0 \Leftrightarrow 5^{2x} \geq 5^x \Leftrightarrow x \geq 0$

Vậy tập xác định hàm số là: $D = [0; +\infty)$

Bài 3. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{4^x - 2}}$

b) $y = \log_6 \frac{3x+2}{1-x}$

c) $y = \sqrt{\log x + \log(x+2)}$

d) $y = \sqrt{\log(x-1) + \log(x+1)}$

HD&Giải

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 4^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} > 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Vậy tập xác định hàm số là: $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{3x+2}{1-x} > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 1$. Vậy tập xác định hàm số là: $D = \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \log x + \log(x+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log[x(x+2)] \geq \log 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } x \geq -1 + \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1 + \sqrt{2}$.

Vậy tập xác định hàm số là: $D = [-1 + \sqrt{2}; +\infty)$

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \log(x-1) + \log(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log[(x-1)(x+1)] \geq \log 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 > 0 \\ x > 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt{2} \text{ hoặc } x \geq \sqrt{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$. Vậy tập xác định hàm số là: $D = [\sqrt{2}; +\infty)$

Bài 4. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 4x + 5)$

b) $y = \log_{\pi}\left(3^{x^2-4x} - \frac{1}{27}\right)$

c) $y = \sqrt{\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15)}$

d) $y = \sqrt{\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x)}$

HD & Giải

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$.

Vậy tập xác định hàm số là: $D = (-1; 5)$

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3^{x^2-4x} - \frac{1}{27} > 0 \Leftrightarrow 3^{x^2-4x} > 3^{-3} \Leftrightarrow x^2 - 4x > -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ hoặc } x > 3$. Vậy tập xác định hàm số là: $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \log_{x-2}(x^2 - 8x + 15) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x-2 \neq 1 \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \\ x^2 - 8x + 14 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 3 \\ x < 3 \text{ hoặc } x > 5 \\ x \leq 4 - \sqrt{2} \text{ hoặc } x \geq 4 + \sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \sqrt{2} \leq x < 3 \\ x \geq 4 + \sqrt{2} \end{cases}$. Vậy tập xác định hàm số là: $D = [4 - \sqrt{2}; 3) \cup [4 + \sqrt{2}; +\infty)$

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq x - 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ x \geq 3 \\ x \geq \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 2 \leq x < 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Vậy tập xác định hàm số là: $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$. Tính $f'(\ln 2)$

HD&Giải

Ta có: $f'(x) = \left[\ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}) \right]' = \frac{(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})'}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}}$

Mà: $(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})' = e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x(\sqrt{1+e^{2x}} + e^x)}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

Do đó: $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. Vậy: $f'(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2}}{\sqrt{1+e^{2\ln 2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Bài 6. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = e^{3x+1} \cos 2x$

b) $y = \ln \sqrt{x^3 - 1}$

c) $y = \log_2(x^2 + e^x)$

d) $y = 5^{\cos x + \sin x}$

e) $y = 3x^{-3} - \log_3 x$

f) $y = \sqrt[3]{(3x-2)}$

HD&Giải

a) $y' = (e^{3x+1} \cos 2x)' = (e^{3x+1})' \cos 2x + e^{3x+1} (\cos 2x)' = 3e^{3x+1} \cos 2x - 2e^{3x+1} \sin 2x$

b) $y' = (\ln \sqrt{x^3 - 1})' = \frac{(\sqrt{x^3 - 1})'}{\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{3x^2}{2(x^3 - 1)}$

c) $y' = [\log_2(x^2 + e^x)]' = \frac{(x^2 + e^x)'}{(x^2 + e^x) \ln 2} = \frac{2x + e^x}{(x^2 + e^x) \ln 2}$

d) $y' = (5^{\cos x + \sin x})' = (\cos x + \sin x)' 5^{\cos x + \sin x} \cdot \ln 5 = (\cos x - \sin x) 5^{\cos x + \sin x} \cdot \ln 5$

e) $y' = [3x^{-3} - \log_3 x]' = -9x^{-4} - \frac{1}{x \ln 3}$

f) $y' = [\sqrt[3]{(3x-2)}]' = 2(3x-2)^{-\frac{1}{3}}$

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ trên đoạn $[3; 6]$

b) $f(x) = x^2 \ln x$ trên đoạn $[1; e]$

c) $f(x) = xe^{-x}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

d) $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$ trên đoạn $[0; \ln 4]$

HD&Giải

a) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ trên đoạn $[3; 6]$ ♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus [-2; 1] \supset [3; 6]$

♦ $f'(x) = \left[\ln(x^2 + x - 2) \right]' = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \notin [3; 6]$

♦ $f(3) = \ln(3^2 + 3 - 2) = \ln 10$ và $f(6) = \ln(6^2 + 6 - 2) = \ln 40$

♦ Vậy: $\max_{[3; 6]} f(x) = \ln 40$ và $\min_{[3; 6]} f(x) = \ln 10$

b) $f(x) = x^2 \ln x$ trên đoạn $[1; e]$ ♦ Tập xác định: $D = (0; +\infty) \supset [1; e]$

♦ $f'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x > 0, \forall x \in [1; e]$ nên $f(x)$ đồng biến

♦ Vậy: $\max_{[1; e]} f(x) = f(e) = e^2$ và $\min_{[1; e]} f(x) = f(1) = 0$

c) $f(x) = xe^{-x}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ ♦ Tập xác định: $D = [0; +\infty)$

♦ $f'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x}(1-x)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ♦ $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{e}; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

♦ Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-
y	0	$\frac{1}{e}$	0

♦ Vậy: $\max_{[0;+\infty)} f(x) = f(1) = \frac{1}{e}$ và $\min_{[0;+\infty)} f(x) = f(0) = 0$

d) $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3, x \in [0; \ln 4]$ ♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \supset [0; \ln 4]$

♦ $y' = 2e^{2x} - 4e^x$. $y' = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 4e^x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 2 \\ e^x = 0 \text{ (ptvn)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \ln 2 \in [0; \ln 4]$

♦ $f(0) = 0; f(\ln 2) = -1; f(\ln 4) = 3$

♦ Vậy: $\max_{[0; \ln 4]} f(x) = f(\ln 4) = 3$ và $\min_{[0; \ln 4]} f(x) = f(\ln 2) = -1$

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 - \ln(1-2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ b) $f(x) = x \ln 3x$ trên đoạn $\left[\frac{e}{3}; \frac{e^2}{3}\right]$
 c) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$ d) $f(x) = x^2 \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}; e^2\right]$

HD & Giải

a) $f(x) = x^2 - \ln(1-2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ ♦ Tập xác định: $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \supset [-2; 0]$

♦ $f'(x) = [x^2 - \ln(1-2x)]' = 2x + \frac{2}{1-2x} = \frac{-4x^2 + 2x + 2}{1-2x}, \forall x < \frac{1}{2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin [-2; 0] \\ x = -\frac{1}{2} \in [-2; 0] \end{cases}$

♦ $f(-2) = 4 - \ln 5; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln 2; f(0) = 0$ ♦ Vậy: $\max_{[-2; 0]} f(x) = 4 - \ln 5$ và $\min_{[-2; 0]} f(x) = \frac{1}{4} - \ln 2$

b) $f(x) = x \ln 3x$ trên đoạn $\left[\frac{e}{3}; \frac{e^2}{3}\right]$ ♦ Tập xác định: $D = (0; +\infty) \supset \left[\frac{e}{3}; \frac{e^2}{3}\right]$

♦ $f'(x) = 1 + \ln 3x > 0, \forall x \in D$ ♦ $f\left(\frac{e}{3}\right) = \frac{e}{3}; f\left(\frac{e^2}{3}\right) = \frac{2e^2}{3}$

♦ Vậy: $\max_{\left[\frac{e}{3}; \frac{e^2}{3}\right]} f(x) = \frac{2e^2}{3}$ và $\min_{\left[\frac{e}{3}; \frac{e^2}{3}\right]} f(x) = \frac{e}{3}$

c) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$ ♦ Tập xác định: $D = (0; +\infty) \supset [1; e^3]$

$$\diamond f'(x) = \left(\frac{\ln^2 x}{x} \right)' = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - \ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [1; e^3] \\ x = e^2 \in [1; e^3] \end{cases}$$

$$\diamond f(1) = 0; f(e^2) = \frac{4}{e^2}; f(e^3) = \frac{9}{e^3} \quad \diamond \text{Vậy: } \underset{[1; e^3]}{\text{Max}} f(x) = \frac{4}{e^2} \text{ và } \underset{[1; e^3]}{\text{Min}} f(x) = 0$$

$$\text{d) } f(x) = x^2 \ln x \text{ trên đoạn } \left[\frac{1}{e}; e^2 \right] \quad \diamond \text{Tập xác định: } D = (0; +\infty) \supset \left[\frac{1}{e}; e^2 \right]$$

$$\diamond f'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \ln x + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left[\frac{1}{e}; e^2 \right] \\ x = \frac{1}{\sqrt{e}} \in \left[\frac{1}{e}; e^2 \right] \end{cases}$$

$$\diamond f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2}; f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}; f(e^2) = 2e^4 \quad \diamond \text{Vậy: } \underset{\left[\frac{1}{e}; e^2\right]}{\text{Max}} f(x) = 2e^4 \text{ và } \underset{\left[\frac{1}{e}; e^2\right]}{\text{Min}} f(x) = -\frac{1}{e^2}$$

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $f(x) = e^{2-3x}$ trên đoạn $[0; 2]$

b) $f(x) = e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0; 2]$

c) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4 \ln(3-x)$ trên đoạn $[-2; 1]$

d) $f(x) = \sqrt{x^2+3} - x \ln x$ trên đoạn $[1; 2]$

HD & Giải

a) $f(x) = e^{2-3x}$ trên đoạn $[0; 2]$ $\diamond$ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \supset [0; 2]$

$$\diamond f'(x) = (e^{2-3x})' = -3e^{2-3x} < 0, \forall x \in D. \text{ Nên } f(x) \text{ nghịch biến trên } [0; 2]$$

$$\diamond \text{Vậy: } \underset{[0; 2]}{\text{Max}} f(x) = f(0) = e^2 \text{ và } \underset{[0; 2]}{\text{Min}} f(x) = f(2) = \frac{1}{e^4}$$

b) $f(x) = e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0; 2]$ $\diamond$ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \supset [0; 2]$

$$\diamond f'(x) = (e^{x^3-3x+3})' = 3(x^2-1)e^{x^3-3x+3}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \end{cases}$$

$$\diamond f(0) = e^3; f(1) = e; f(2) = e^5 \quad \diamond \text{Vậy: } \underset{[0; 2]}{\text{Max}} f(x) = e^5 \text{ và } \underset{[0; 2]}{\text{Min}} f(x) = e$$

c) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4 \ln(3-x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ $\diamond$ Tập xác định: $D = (-\infty; 3) \supset [-2; 1]$

$$\diamond f'(x) = \left[\frac{x^2}{2} - 4 \ln(3-x) \right]' = x + \frac{4}{3-x} = \frac{-x^2+3x+4}{3-x}, \forall x < 3;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+3x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 1] \\ x = 4 \notin [-2; 1] \end{cases}$$

$$\diamond f(-2) = 2 - 4 \ln 5; f(-1) = \frac{1}{2} - 8 \ln 2; f(1) = \frac{1}{2} - 4 \ln 2$$

$$\diamond \text{Vậy: } \underset{[-2; 1]}{\text{Max}} f(x) = \frac{1}{2} - 4 \ln 2 \text{ và } \underset{[-2; 1]}{\text{Min}} f(x) = \frac{1}{2} - 8 \ln 2$$

d) $f(x) = \sqrt{x^2+3} - x \ln x$ trên đoạn $[1; 2]$ $\diamond$ Tập xác định: $D = (0; +\infty) \supset [1; 2]$

$$\diamond f'(x) = (\sqrt{x^2+3} - x \ln x)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - (1 + \ln x);$$

Với $x \in [1; 2]$ ta có: $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} < 1 \\ 1 + \ln x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - (1 + \ln x) < 0$. Nên $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$

♦ Vậy: $\max_{[1;2]} f(x) = f(1) = 2$ và $\min_{[1;2]} f(x) = f(2) = \sqrt{7} - 2 \ln 2$

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$ trên đoạn $[0; 2]$ b) $y = f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$ trên đoạn $[0; \ln 4]$

HƯỚNG DẪN GIẢI

a) $y = (x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$. ♦ TXĐ: $D = \mathbb{R}$

♦ $y' = (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x)e^{-x} = e^{-x}(2 - x^2)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \in [0; 2] \\ x = -\sqrt{2} \notin [0; 2] \end{cases}$

♦ $y(0) = 0$; $y(\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$; $y(2) = 8e^{-2}$

♦ Vậy: $\max_{[0;2]} y = y(\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$; $\min_{[0;2]} y = y(0) = 0$

b) $y = f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$. ♦ TXĐ: $D = \mathbb{R} \supset [0; \ln 4]$

♦ $y' = 2e^{2x} - 4e^x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 4e^x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 2 \\ e^x = 0 \text{ (ptvn)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \ln 2 \in [0; \ln 4]$

♦ $y(0) = 0$; $y(\ln 2) = -1$; $y(\ln 4) = 3$ ♦ Vậy: $\max_{[0; \ln 4]} y = y(\ln 4) = 3$; $\min_{[0; \ln 4]} y = y(\ln 2) = -1$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Cho a, b, x là những số dương. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \left[\frac{2a + (ab)^{\frac{1}{2}}}{3a} \right]^{-1} \left[\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a - (ab)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right]$

b) $B = \sqrt{16^{\frac{1}{\log_7 4}} + 81^{\frac{1}{\log_6 9}} + 15}$

c) $B = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} \right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} \right)^{-2}$

d) $D = 49^{1 - \log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$

Bài 12. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{5^x - 25}$

b) $y = \log(\sin x + \cos x)$

c) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_7 \frac{x^2 - 3}{x + 1} \right)}$

Bài 13. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - 25} + \lg(42 + x - x^2)$

b) $y = \sqrt{x^2 + x - 2} \cdot \log_2(9 - x^2)$

c) $y = \sqrt{\log_3(7 - 2x - x^2)}$

d) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{5}}(x - 4) - 1}$

Bài 14. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+5}}$

b) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+5}} - \log_2 \sqrt{x^2 - x - 6}$

c) $y = \sqrt{\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x)}$

d) $y = \sqrt{\log_2 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)}$

Bài 15. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = 3x^2 e^x + 3 \cos 4x$

b) $y = 4x^3 - 3^{2x} \sin(2x+1)$

c) $y = 3x^2 - \ln 2x + 5 \cos x$

d) $y = \log_3(x^2 + 3x + 4)$

Bài 16. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$ trên đoạn $[-1;1]$

b) $y = e^x(x^2 - x - 1)$ trên đoạn $[0;3]$

c) $y = \log^2 x - 4 \log x + 3$ trên đoạn $[10;1000]$

d) $y = 27^x - 9^x - 8 \cdot 3^x - 1$ trên đoạn $[0;1]$

Bài 17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = e^{x^2-2x}$ trên đoạn $[0;3]$

b) $y = \ln(x+e)$ trên đoạn $[0;e]$

c) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ trên đoạn $[1;3]$

d) $y = xe^{-x}$ trên đoạn $[0;2]$

Bài 18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^2 e^x$ trên đoạn $[-1;2]$

b) $y = e^x(x^2 - 2x - 2)$ trên đoạn $[1;4]$

c) $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};e\right]$

d) $y = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}}^3 x + \log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 1$ trên đoạn $\left[\frac{1}{4};4\right]$

Bài 19. Tính giá trị đạo hàm của hàm số sau tại điểm x_0 :

a) $y = \frac{\log_2 x}{e^{2x}}, \quad x_0 = 1$

b) $y = \ln 2x(x^2 - 2^x), \quad x_0 = 1$

Kết quả

Bài 11. a) $A = 3\sqrt{b}$;

b) $B = 36$;

c) $C = \frac{a+x}{\sqrt{ax}}$; d) $D = \frac{25}{2}$

Bài 12. a) $x \neq 2$;

b) $-\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

c) $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < x \leq \frac{7-\sqrt{89}}{2}$ hoặc $\frac{1+\sqrt{17}}{2} < x \leq \frac{7+\sqrt{89}}{2}$

Bài 13. a) $D = (-6; -5] \cup [5; 7)$;

b) $D = (-3; -2] \cup [1; 3)$;

c) $D = [-1-\sqrt{7}; -1+\sqrt{7}]$;

d) $D = \left(4; \frac{21}{5}\right]$

Bài 14. a) $D = (-\infty; -4) \setminus \{-5\}$;

b) $D = (3; +\infty)$;

c) $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$;

d) $D = [1-\sqrt{2}; -1] \cup [1+\sqrt{2}; 1)$

Bài 15. a) $(3x^2 + 6x)e^x - 12 \sin 4x$

b) $12x^2 - 3^{2x} [2 \sin(2x+1) \ln 3 + 2 \cos(2x+1)]$

c) $6x - \frac{1}{x} - 5 \sin x$

d) $\frac{2x+3}{(x^2+3x+4) \ln 3}$

Bài 16.

a) $\text{Max}_{[-1;1]} f(x) = f(0) = e$ và $\text{Min}_{[-1;1]} f(x) = f(\pm 1) = 1$

b) $\text{Max}_{[0;3]} f(x) = f(3) = 6e^3$ và $\text{Min}_{[0;3]} f(x) = f(1) = -e$

c) $\text{Max}_{[10;1000]} f(x) = \text{Max}_{[1;3]} g(x) = g(1) = g(3) = 0$ và $\text{Min}_{[10;1000]} f(x) = \text{Max}_{[1;3]} g(x) = g(2) = -1$

d) $\text{Max}_{[0;1]} f(x) = \text{Max}_{[1;3]} g(x) = g(3) = -7$ và $\text{Min}_{[0;1]} f(x) = \text{Max}_{[1;3]} g(x) = g(2) = -13$

PHẦN II

PHƯƠNG TRÌNH

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

---o0o---

PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

§1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Phương trình mũ cơ bản

Phương trình mũ có dạng: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$)

- Nếu $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm
- Nếu $b > 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$

2. Phương trình mũ đơn giản

Phương trình có thể đưa về phương trình mũ cơ bản bằng cách áp dụng các phương pháp:

Phương pháp 1. Đưa về cùng cơ số

Biến đổi phương trình đưa về dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

♦ Với $0 < a \neq 1$. Ta có: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

♦ Nếu cơ số a thay đổi thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$

♦ Đặc biệt: ♦ $a^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ♦ $[f(x)]^{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) \neq 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

Phương pháp 2: Đặt ẩn số phụ

Dạng 1. Phương trình có dạng: $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$, $Aa^{3x} + Ba^{2x} + Ca^x + D = 0$ (bậc hai, bậc ba), ta đặt $t = a^x, (t > 0)$

Dạng 2. Phương trình có dạng: $A.a^{2x} + B.(a.b)^x + C.b^{2x} = 0$

Biến đổi phương trình đưa về dạng: $A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B\left(\frac{a}{b}\right)^x + C = 0$. Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x (t > 0)$

Dạng 3. Phương trình có dạng: $A.a^x + B.b^x + C = 0$

Với $a.b = 1$ hoặc $a^x.b^x = 1$. Đặt $t = a^x, (t > 0)$, khi đó $b^x = \frac{1}{t}$

Phương pháp 3. Lấy lôgarit hai vế (lôgarit hóa)

Với $M, N > 0$ và $0 < a \neq 1$. Ta có:

- ♦ $M = N \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N$ ♦ $a^{f(x)} = M \Leftrightarrow f(x) = \log_a M$
- ♦ $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \log_a b$ hay $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow g(x) = f(x) \log_b a$

Ngoài ra, phương trình có thể giải bằng phương pháp đồ thị, giải bằng cách áp dụng tính chất của hàm số mũ.

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số

Với $0 < a \neq 1$. Ta có: ♦ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. ♦ $a^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Bài 1.1. Giải các phương trình sau:

a) $(1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ b) $9^{x+1} = 27^{2x+1}$ c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$ d) $5^{x^2-5x-6} = 1$

HD & Giải

a) $(1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{5x-7} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow 5x-7 = -x-1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

b) $9^{x+1} = 27^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{2(x+1)} = 3^{3(2x+1)} \Leftrightarrow 2(x+1) = 3(2x+1) \Leftrightarrow -4x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow x^2-2x-3 = -x-1$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$. Vậy phương trình có nghiệm $x = -1, x = 2$

d) $5^{x^2-5x-6} = 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-5x-6} = 5^0 \Leftrightarrow x^2-5x-6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1, x = 6$

Bài 1.2. Giải các phương trình sau:

a) $(0,3)^{3x-2} = 1$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$ c) $2^{x^2-3x+2} = 4$
d) $(0,5)^{x+7} \cdot (0,5)^{1-2x} = 2$ e) $(2+\sqrt{3})^{2x} = 2-\sqrt{3}$ f) $(3-2\sqrt{2})^{3x} = 3+2\sqrt{2}$

HD & Giải

a) $(0,3)^{3x-2} = 1 \Leftrightarrow (0,3)^{3x-2} = (0,3)^0 \Leftrightarrow 3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{3}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25 \Leftrightarrow 5^{-x} = 5^2 \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$. Vậy phương trình có nghiệm $x = -2$

c) $2^{x^2-3x+2} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2} = 2^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 2 \Leftrightarrow x^2-3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0, x = 3$.

d) $(0,5)^{x+7} \cdot (0,5)^{1-2x} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+7+1-2x} = 2 \Leftrightarrow 2^{x-8} = 2^1 \Leftrightarrow x-8 = 1 \Leftrightarrow x = 9$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 9$

e) $(2+\sqrt{3})^{2x} = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{2x} = (2+\sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

Chú ý: $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1 \Rightarrow 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$

f) $(3 - 2\sqrt{2})^{3x} = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (3 - 2\sqrt{2})^{3x} = (3 - 2\sqrt{2})^{-1} \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{3}$.

Bài 1.3. Giải các phương trình sau:

a) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$

c) $2.3^{x+1} - 6.3^{x-1} - 3^x = 9$

d) $0,125.4^{2x-3} = (4\sqrt{2})^x$

HD & Giải

a) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108 \Leftrightarrow \frac{1}{3}.3^{2x} + 3^{2x} = 108 \Leftrightarrow 3^{2x} = 81 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28 \Leftrightarrow 2.2^x + \frac{1}{2}.2^x + 2^x = 28 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$

c) $2.3^{x+1} - 6.3^{x-1} - 3^x = 9 \Leftrightarrow 6.3^x - 2.3^x - 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

d) $0,125.4^{2x-3} = (4\sqrt{2})^x \Leftrightarrow 2^{-3}.2^{2(2x-3)} = 2^{\frac{5}{2}x} \Leftrightarrow 2(2x-3) - 3 = \frac{5}{2}x \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 6$

Bài 1.4. Giải các phương trình sau:

a) $(0,75)^{2x-3} = \left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$

b) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3.5^x$

c) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x}.17 + 7^x.17 = 0$

d) $2^{x+1}.5^x = 200$

HD & Giải

a) $(0,75)^{2x-3} = \left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{5-x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-5} \Leftrightarrow 2x-3 = x-5 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2$

b) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3.5^x \Leftrightarrow 20.2^x = 8.5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^1 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

c) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x}.17 + 7^x.17 = 0 \Leftrightarrow 16.7^x - 16.5^x \Leftrightarrow 7^x = 5^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{25}\right)^x = \left(\frac{7}{25}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

d) $2^{x+1}.5^x = 200 \Leftrightarrow 2.10^x = 2.10^2 \Leftrightarrow 10^x = 10^2 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$

Bài 1.5. Giải các phương trình sau:

a) $5^{x+1} + 6.5^x - 3.5^{x-1} = 52$

b) $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 9.5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$

c) $3^x.2^{x+1} = 72$

d) $(0,5)^{2+3x} = (\sqrt{2})^{-x}$

HD & Giải

a) $5^{x+1} + 6.5^x - 3.5^{x-1} = 52 \Leftrightarrow 5.5^x + 6.5^x - \frac{3}{5}.5^x = 52 \Leftrightarrow \frac{52}{5}.5^x = 52 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

b) $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 9.5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} \Leftrightarrow (3+9+27).3^x = (9+5+25).5^x \Leftrightarrow 3^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

c) $3^x \cdot 2^{x+1} = 72 \Leftrightarrow 2 \cdot 6^x = 72 \Leftrightarrow 6^x = 6^2 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$

d) $(0,5)^{2+3x} = (\sqrt{2})^{-x} \Leftrightarrow 2^{-(2+3x)} = 2^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow -2-3x = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$. Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{4}{5}$

Bài 1.6. Giải các phương trình sau:

a) $3^{x+4} + 3 \cdot 5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3}$

b) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$

c) $8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x = 24 + 6^x$

d) $4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} = 60$

HD & Giải

a) $3^{x+4} + 3 \cdot 5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3}$

$$\Leftrightarrow 81 \cdot 3^x - 27 \cdot 3^x = 625 \cdot 5^x - 375 \cdot 5^x \Leftrightarrow 54 \cdot 3^x = 250 \cdot 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x = -3.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$

b) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} \Leftrightarrow 7 \cdot 6^x = 7 \cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

c) $8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x = 24 + 6^x \Leftrightarrow (8 \cdot 3^x - 3^x \cdot 2^x) - (8 \cdot 3 - 3 \cdot 2^x) = 0 \Leftrightarrow 3^x (8 - 2^x) - 3(8 - 2^x) = 0$

$$\Leftrightarrow (8 - 2^x)(3^x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 2^x = 0 \\ 3^x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có nghiệm } x = 3, x = 1$$

d) $4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} = 60 \Leftrightarrow 36 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^x - 21 \cdot 3^x = 60 \Leftrightarrow 20 \cdot 3^x = 60 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

Vấn đề 2: Giải phương trình mũ bằng cách đặt ẩn số phụ

Dạng 1. Phương trình có dạng: $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$; $Aa^{3x} + Ba^{2x} + Ca^x + D = 0$ (bậc hai, bậc ba), ta đặt $t = a^x$

Dạng 2. Phương trình có dạng: $A \cdot a^{2x} + B(a \cdot b)^x + C \cdot b^{2x} = 0$

Biến đổi phương trình đưa về dạng: $A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B\left(\frac{a}{b}\right)^x + C = 0$. Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Dạng 3. Phương trình có dạng: $A \cdot a^x + B \cdot b^x + C = 0$

Với $a \cdot b = 1$ hoặc $a^x \cdot b^x = 1$. Đặt $t = a^x$, khi đó $b^x = \frac{1}{t}$

Lưu ý: Ẩn số phụ $t > 0$

Bài 1.7. Giải các phương trình sau:

a) $64^x - 8^x - 56 = 0$

b) $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$

c) $e^{2x} - 4 \cdot e^{-2x} = 3$

d) $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3(2 - \sqrt{3})^x + 2 = 0$

HD & Giải

a) $64^x - 8^x - 56 = 0 \Leftrightarrow 8^{2x} - 8^x - 56 = 0$. Đặt $t = 8^x (t > 0)$.

Phương trình viết lại theo t : $t^2 - t - 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = -7 \end{cases} \Leftrightarrow t = 8$.

♦ Với $t = 8 \Rightarrow 8^x = 8 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

b) $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$. Đặt $t = 3^x (t > 0)$.

Phương trình viết lại theo t : $t^2 - 4t - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow t = 9$.

♦ Với $t = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$

c) $e^{2x} - 4e^{-2x} = 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 \cdot \frac{1}{e^{2x}} = 3$. Đặt $t = e^{2x} (t > 0)$.

Phương trình viết lại theo t : $t - \frac{4}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4$.

♦ Với $t = 4 \Rightarrow e^{2x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln 4$. Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2} \ln 4$

d) Nhận xét rằng: $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$; $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

Do đó nếu đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x$ điều kiện $t > 0$, thì: $(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$ và $(7 + 4\sqrt{3})^x = t^2$

Khi đó phương trình tương đương với:

$t^2 - \frac{3}{t} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 3 = 0 \end{cases}$ (phương trình vô nghiệm)

♦ Với $t = 1 \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

Bài 1.8. Giải các phương trình sau

a) $3 \cdot 4^x - 2 \cdot 6^x = 9^x$

b) $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$

c) $\left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt{6 - \sqrt{35}}\right)^x = 12$

d) $4^{\cot^2 x} + 2^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 3 = 0$

HD & Giải

a) $3 \cdot 4^x - 2 \cdot 6^x = 9^x \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0$. Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x (t > 0)$.

Phương trình viết lại theo t : $3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$.

♦ Với $t = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

b) $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$. Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x (t > 0)$.

Phương trình viết lại theo t : $t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (vì $t^2 + t + 2 = 0$ vô nghiệm)

♦ Với $t = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

c) $\left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt{6 - \sqrt{35}}\right)^x = 12$. Ta có $\left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{6 - \sqrt{35}}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt{6 - \sqrt{35}}\right)^x}$

Đặt $t = \left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x (t > 0)$. Phương trình viết lại theo t : $t + \frac{1}{t} = 12 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 + \sqrt{35} \\ t = 6 - \sqrt{35} \end{cases}$

♦ Với $t = 6 + \sqrt{35} \Rightarrow \left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x = 6 + \sqrt{35} \Leftrightarrow \left(6 + \sqrt{35}\right)^{\frac{x}{2}} = 6 + \sqrt{35} \Leftrightarrow x = 2$

♦ Với $t = 6 - \sqrt{35} \Rightarrow \left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x = 6 - \sqrt{35} \Leftrightarrow x = -2$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{-2; 2\}$

d) Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (*)

Vì $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ nên phương trình (1) được biết dưới dạng: $4^{\cot^2 x} + 2.2^{\cot^2 x} - 3 = 0$ (2)

Đặt $t = 2^{\cot^2 x}$ điều kiện $t \geq 1$ vì $\cot^2 x \geq 0 \Leftrightarrow 2^{\cot^2 x} \geq 2^0 = 1$

Khi đó phương trình (2) có dạng: $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$

♦ Với $t = 1 \Rightarrow 2^{\cot^2 x} = 1 \Leftrightarrow \cot^2 x = 0 \Leftrightarrow \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (thỏa đk(*))

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 1.9. Giải các phương trình sau:

a) $9^x - 4.3^x - 45 = 0$

b) $25^x - 6.5^x + 5 = 0$

c) $4.9^x + 12^x - 3.16^x = 0$

d) $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$

e) $3^{\frac{x}{5}} + 3^{\frac{x-10}{10}} = 84$

f) $(3^x + 2^x)(3^x + 3.2^x) = 8.6^x$

HD & Giải

a) $9^x - 4.3^x - 45 = 0$. Đặt $t = 3^x (t > 0)$

Phương trình viết lại theo t : $t^2 - 4t - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \text{ (nhận)} \\ t = -5 \text{ (loại)} \end{cases}$

♦ Với $t = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$

b) $25^x - 6.5^x + 5 = 0$. Đặt $t = 5^x (t > 0)$.

Phương trình viết lại theo t : $t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases}$

♦ Với $t = 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ và với $t = 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 0, x = 1$

c) Chia hai vế phương trình cho 16^x và đặt $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x (t > 0)$, ta được: $4t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{3}{4} \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm $t = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 1$

d) Đặt $t = 13^x (t > 0)$, ta được: $13t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -\frac{12}{13} \text{ (loại)} \end{cases}$

♦ Với $t = 1 \Rightarrow 13^x = 13^0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

e) d) $3^{\frac{x}{5}} + 3^{\frac{x-10}{10}} = 84$. Đặt $t = 3^{\frac{x}{10}} (t > 0)$, ta có phương trình:

$t^2 + \frac{t}{3} = 84 \Leftrightarrow 3t^2 + t - 252 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = -\frac{26}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$

♦ Với $t = 9 \Rightarrow 3^{\frac{x}{10}} = 9 \Leftrightarrow x = 20$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 20$

f) Chia hai vế phương trình cho $6^x (6^x > 0)$, ta được:

$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1\right] \left[1 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x\right] = 8$. Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x (t > 0)$,

ta có phương trình: $(t+1)\left(1+\frac{3}{t}\right)=8 \Leftrightarrow t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x=0 \\ t=3 \Rightarrow x=\log_{\frac{3}{2}} 3 \end{cases}$

♦ Với $t=1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x=0$

♦ Với $t=3 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}} 3$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$ và $x=\log_{\frac{3}{2}} 3$

Bài 1.10. Giải các phương trình sau:

a) $-8^x + 2 \cdot 4^x + 2^x - 2 = 0$

b) $4^{x+1} - 6 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

c) $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$

d) $3^{4x+8} - 4 \cdot 3^{2x+5} + 27 = 0$

HD & Giải

a) Đặt $t=2^x, (t>0)$, ta có phương trình: $-t^3 + 2t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(2-t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \text{ (loại)} \\ t=2 \end{cases}$

♦ Với $t=1 \Rightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x=0$

♦ Với $t=2 \Rightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x=1$. Vậy phương trình có nghiệm $x=0$ và $x=1$

b) Đặt $t=2^{x+1}, (t>0)$, ta có phương trình: $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=4 \end{cases}$

♦ Với $t=2 \Rightarrow 2^{x+1} = 2 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$

♦ Với $t=4 \Rightarrow 2^{x+1} = 4 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$. Vậy phương trình có nghiệm $x=0$ và $x=1$

c) Đặt $t=3^x, (t>0)$, ta có phương trình: $3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=\frac{1}{3} \end{cases}$

♦ Với $t=3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x=1$

♦ Với $t=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-1$. Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=-1$

d) $3^{4x+8} - 4 \cdot 3^{2x+5} + 27 = 0 \Leftrightarrow 3^{2(2x+4)} - 12 \cdot 3^{2x+4} + 27 = 0$

Đặt $t=3^{2x+4}, (t>0)$, ta có phương trình: $t^2 - 12t + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=9 \end{cases}$

♦ Với $t=3 \Rightarrow 3^{2x+4} = 3 \Leftrightarrow 2x+4=1 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

♦ Với $t=9 \Rightarrow 3^{2x+4} = 9 \Leftrightarrow 2x+4=2 \Leftrightarrow x=-1$. Vậy phương trình có nghiệm $x=-\frac{3}{2}$ và $x=-1$

Bài 1.11. Giải các phương trình sau:

a) $(4-\sqrt{15})^{\tan x} + (4+\sqrt{15})^{\tan x} = 8$

b) $5^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)} = 1$

c) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$

d) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$

HD & Giải

a) Ta có $(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})=1$. Đặt $t=(4-\sqrt{15})^{\tan x}, (t>0)$

Ta được phương trình: $t^2 - 8t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=4+\sqrt{15} \\ t=4-\sqrt{15} \end{cases}$

♦ Với $t=4-\sqrt{15} \Rightarrow (4-\sqrt{15})^{\tan x} = 4-\sqrt{15} \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

♦ Với $t = 4 + \sqrt{15} \Rightarrow (4 - \sqrt{15})^{\tan x} = 4 + \sqrt{15} \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $5^{\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)} = 1 \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0 \Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^x - 13 + 6.\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$. Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x, (t > 0)$.

Ta có phương trình: $6t - 13 + \frac{6}{t} = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$

♦ Với $t = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -1$

♦ Với $t = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm 1$

d) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$. Đặt $t = 2^{x-3}, t > 0$

Phương trình đã cho có dạng: $4t + 2t + t = 448 \Leftrightarrow t = 64$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho: $x = 9$

Bài 1.12. Giải các phương trình sau:

a) $3^{2x+4} + 45.6^x - 9.2^{2x+2} = 0$

b) $8^{x+1} + 8.(0,5)^{3x} + 3.2^{x+3} = 125 - 24.(0,5)^x$

c) $4^{\sqrt{x^2+5-x}} - 2^{\sqrt{x^2+5-x}+2} = -4$

d) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

HD & Giải

a) Nghiệm của phương trình: $x = -2$. *Gợi ý:* Chia hai vế phương trình cho 6^x , rồi đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x (t > 0)$, đưa

phương trình đã cho về dạng: $9t^2 + 5t - 4 = 0$

b) $8^{x+1} + 8.(0,5)^{3x} + 3.2^{x+3} = 125 - 24.(0,5)^x$

$\Leftrightarrow 8.2^{3x} + 8.\frac{1}{2^{3x}} + 24.2^x + 24.\frac{1}{2^x} = 125$

$\Leftrightarrow 8\left(2^{3x} + \frac{1}{2^{3x}}\right) + 24\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) = 125$. Đặt $y = 2^x + \frac{1}{2^x}, y \geq 2$, ta được phương trình:

$8(y^3 - 3y) + 24y = 125 \Leftrightarrow y^3 = \frac{125}{8} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$

Khi đó: $2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2}$, đặt $t = 2^x (t > 0)$, ta có phương trình: $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

♦ Với $t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

♦ Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1, x = 1$

c) Nghiệm của phương trình là $x = 2$. *Gợi ý:* Đặt $t = 2^{\sqrt{x^2+5-x}} (t > 0)$, đưa phương trình đã cho về dạng: $t^2 - 4t + 4 = 0$.

d) Nghiệm của phương trình là $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Gọi ý: Đặt $t = 81^{\cos^2 x} (t > 0)$ và

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, đưa phương trình đã cho về dạng: $t^2 - 30t + 81 = 0$.

Vấn đề 3. Giải phương trình mũ bằng cách lấy lôgarit hai vế (lôgarit hóa)

Với $M, N > 0$ và $0 < a \neq 1$. Ta có:

$$\textcircled{1} M = N \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N$$

$$\textcircled{2} a^{f(x)} = M \Leftrightarrow f(x) = \log_a M$$

$$\textcircled{3} a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \log_a b \text{ hay } a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow g(x) = f(x) \log_b a$$

Bài 1.13. Giải các phương trình sau:

a) $7^{x-1} = 2^x$

b) $2^{2x-1} = 3$

c) $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$

d) $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 5$

HD\>Giải

a) $7^{x-1} = 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{7}{2}} 7$. Vậy phương trình có nghiệm $x = \log_{\frac{7}{2}} 7$

b) $2^{2x-1} = 3 \Leftrightarrow 2x-1 = \log_2 3 \Leftrightarrow x = \frac{1+\log_2 3}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1+\log_2 3}{2}$

c) Lấy lôgarit hai vế với cơ số 3, ta được:

$$\log_3 3^x + \log_3 2^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x + x^2 \log_3 2 = 0 \Leftrightarrow x(1 + x \log_3 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\log_3 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0, x = -\log_3 2$

d) $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 4^x + 4 \cdot 4^x = 5 \Leftrightarrow 4^x = \frac{10}{9} \Leftrightarrow x = \log_4 \frac{10}{9}$. Vậy phương trình có nghiệm $x = \log_4 \frac{10}{9}$

Bài 1.14. Giải các phương trình sau

a) $3^{x-1} \cdot 2^{x^2} = 8 \cdot 4^{x-2}$

b) $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{x-1})^5$

c) $2^{x^2-2x} = \frac{3}{2}$

d) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$

e) $3^{4^x} = 4^{3^x}$

f) $5^{7^x} = 7^{5^x}$

HD\>Giải

a) Lấy lôgarit hai vế với cơ số 2, ta được: $3^{x-1} \cdot 2^{x^2} = 8 \cdot 4^{x-2}$

$$\Leftrightarrow (x-1) \log_2 3 + x^2 = \log_2 8 + (x-2) \log_2 4 \Leftrightarrow x^2 - (2 - \log_2 3)x + 1 - \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 - \log_2 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1; x = 1 - \log_2 3$.

b) $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{x-1})^5 \Leftrightarrow 10^x = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{5(x-1)} \Leftrightarrow x = \log 2 - 1 + 5(x-1) \Leftrightarrow 4x = 6 - \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \log 2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \log 2$.

c) Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình ta được:

$$\log_2 2^{x^2-2x} = \log_2 \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x = \log_2 3 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - \log_2 3 = 0$$

Ta có $\Delta' = 1 - 1 + \log_2 3 = \log_2 3 > 0$. Suy ra phương trình có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{\log_2 3}$.

d) Viết lại phương trình dưới dạng: $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500 \Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{3(x-1)}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} = 1$

Lấy logarit cơ số 2 vế, ta được: $\log_2 \left(5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 (5^{x-3}) + \log_2 \left(2^{\frac{x-3}{x}} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-3) \cdot \log_2 5 + \frac{x-3}{x} \log_2 2 = 0 \Leftrightarrow (x-3) \left(\log_2 5 + \frac{1}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{1}{\log_2 5} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x=3$; $x=-\frac{1}{\log_2 5}$

$$\text{e) } 3^{4^x} = 4^{3^x} \Leftrightarrow \log_3 (3^{4^x}) = \log_3 (4^{3^x}) \Leftrightarrow 4^x = 3^x \log_3 4 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} \right)^x = \log_3 4 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}} (\log_3 4)$$

$$\text{f) } 5^{7^x} = 7^{5^x} \Leftrightarrow \log_5 (5^{7^x}) = \log_5 (7^{5^x}) \Leftrightarrow 7^x = 5^x \log_5 7 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{5} \right)^x = \log_5 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{7}{5}} (\log_5 7)$$

Vấn đề 4: Giải phương trình mũ bằng phương pháp đồ thị. Dạng: $a^x = \alpha x + \beta$
 📌 Vẽ trên cùng một hệ trục đồ thị của hàm số $y = a^x$ và $y = \alpha x + \beta$

👉 Dựa vào đồ thị, tìm hoành độ giao điểm của hai đường, đây là nghiệm của phương trình đã cho
 📏 Thử lại bằng phép tính.

Bài 1.15. Chứng minh rằng phương trình $4^x + 5^x = 9$ chỉ có một nghiệm $x = 1$.

HD🔍Giải

Ta có $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho vì $4^1 + 5^1 = 9$. Ta chứng minh đây là nghiệm duy nhất
 Thật vậy, xét hàm số $f(x) = 4^x + 5^x$

Ta có $f(x)$ đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$ vì $f'(x) = 4^x \ln 4 + 5^x \ln 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó:

+ Với $x > 1$ thì $f(x) > f(1)$ hay $4^x + 5^x > 9$, nên phương trình không thể có nghiệm $x > 1$.

+ Với $x < 1$ thì $f(x) < f(1)$ hay $4^x + 5^x < 9$, nên phương trình không thể có nghiệm $x < 1$.

Vậy, phương trình đã cho chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 1.16. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } 9^x + 2(x-2) \cdot 3^x + 2x - 5 = 0 \quad \text{b) } x \cdot 2^x = x(3-x) + 2(2^x - 1)$$

HD🔍Giải

a) Đặt $t = 3^x (t > 0)$. Khi đó, phương trình đã cho có dạng: $t^2 + 2(x-2)t + 2x - 5 = 0$

Suy ra: $t = -1$ (loại) hoặc $t = 5 - 2x$. Do đó, ta có: $3^x = 5 - 2x$ (1)

Nhận thấy, $x = 1$ là nghiệm của (1)

Mặt khác, hàm số $f(x) = 3^x$ luôn đồng biến, hàm số $g(x) = 5 - 2x$ luôn nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$, nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

$$\text{b) } x \cdot 2^x = x(3-x) + 2(2^x - 1) \Leftrightarrow x \cdot 2^x - x(3-x) - 2 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x(x-2) + x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x(x-2) + (x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2^x + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2^x = 1-x \end{cases} \quad (2)$$

Giải (2). Nhận thấy $x = 0$ là nghiệm của (2).

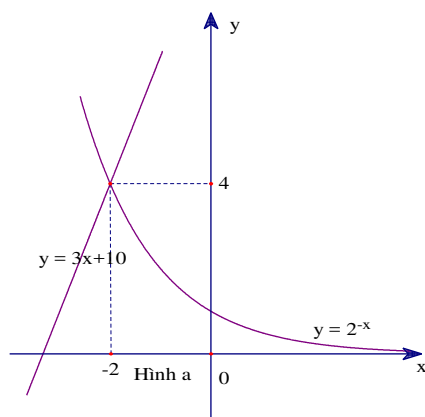
Mặt khác, hàm số $f(x) = 2^x$ luôn đồng biến, hàm số $g(x) = 1 - x$ luôn nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$, nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của (2).

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2, x = 0$.

Bài 1.17. Giải các phương trình sau bằng phương pháp đồ thị

$$\text{a) } 2^{-x} = 3x + 10 \quad \text{b) } 3^x = 11 - x \quad \text{c) } \left(\frac{1}{3} \right)^{-x} = -2x + 5 \quad \text{d) } \left(\frac{1}{3} \right)^x = x + 1$$

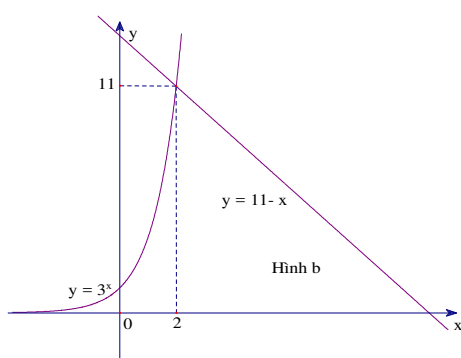
HD🔍Giải



a) Vẽ đồ thị hàm số $y = 2^{-x}$ và đường thẳng $y = 3x + 10$ trên cùng một hệ trục tọa độ, ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = -2$. Thử lại, ta thấy $x = -2$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Mặt khác, hàm số $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ luôn nghịch biến, hàm số

$y = 3x + 10$ luôn đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$. Vậy $x = -2$ là nghiệm duy nhất (Hình a).



b) Vẽ đồ thị hàm số $y = 3^x$ và đường thẳng $y = 11 - x$ trên cùng một hệ trục tọa độ, ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 2$. Thử lại, ta thấy $x = 2$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Mặt khác, hàm số $f(x) = 3^x$ luôn đồng biến, hàm số

$y = 11 - x$ luôn nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$. Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất (Hình b).

c) Nghiệm của phương trình là $x = 1$. *Gợi ý:* Giải tương tự câu a), b)

d) Nghiệm của phương trình là $x = 0$. *Gợi ý:* Giải tương tự câu a), b)

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1.18. Giải các phương trình sau:

a) $e^{2x} - 3e^x - 4 + 12e^{-x} = 0$

c) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$

b) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$

d) $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{7-\sqrt{15}}\right)^x = 13$

Bài 1.19. Giải các phương trình sau:

a) $4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{x}}$

c) $4^{3+2\cos 2x} - 7 \cdot 4^{1+\cos 2x} = 4^{\frac{1}{2}}$

b) $4^{\ln x+1} - 6^{\ln x} - 2 \cdot 3^{\ln x^2+2} = 0$

d) $3^{\log_4 x + \frac{1}{2}} + 3^{\log_4 x - \frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Bài 1.20. Giải các phương trình sau:

a) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

c) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-4}$

b) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$

d) $3^{4x+8} - 4 \cdot 3^{2x+5} + 28 = 2 \log_2 \sqrt{2}$

Kết quả:

Bài 1.18. a) $x \in \{\ln 2; \ln 3\}$; b) $x = -\frac{1}{2}$; c) $x = \pm\sqrt{3}$; d) $x = 3$

Bài 1.19. a) $x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{3}{2}$; b) $x = e^{-2}$; c) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; d) $x = 4^{\frac{\log_2 \frac{4}{\sqrt{3}}}{3}}$

Bài 1.20. a) $x = 10$; b) $x = -2$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) $x \in \left\{-\frac{3}{2}; -1\right\}$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Công thức lôgarit

- ♦ Với a, b là các số dương và $a \neq 1$

$$\clubsuit \alpha \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b \quad \spadesuit \log_a 1 = 0, \log_a a = 1 \quad \heartsuit a^{\log_a b} = b, \log_a(a^\alpha) = \alpha$$

- ♦ Với các số dương a, b_1, b_2 và $a \neq 1$

$$\textcircled{1} \log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2 \quad \textcircled{2} \log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

- ♦ Với các số dương a, b và $a \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

$$\textcircled{\smile} \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \quad \textcircled{\ominus} \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b \quad \textcircled{\otimes} \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

- ♦ Với các số dương a, b, c và $a \neq 1, c \neq 1$

$$\clubsuit \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \spadesuit \log_a b = \frac{1}{\log_b a} (b \neq 1) \quad \heartsuit \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b (\alpha \neq 0)$$

- ♦ Lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên : $\log_{10} x = \lg x$ hoặc $\log_{10} x = \log x$; $\log_e x = \ln x$

Lưu ý: $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ và một giá trị gần đúng của e là: $e \approx 2,718281828459045$

II. Phương trình lôgarit

1. Phương trình lôgarit cơ bản

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b, (0 < a \neq 1)$

Theo định nghĩa lôgarit, phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$, với mọi b .

2. Phương trình lôgarit đơn giản

Phương trình có thể đưa về phương trình lôgarit cơ bản bằng cách áp dụng các phương pháp:

Phương pháp 1: Đưa về cùng cơ số

$$\text{Biến đổi phương trình về dạng: } \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Chú ý:

$$1/ \log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases} \quad 2/ \log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \varphi(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \text{ hoặc } g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$3/ \log_a f^2(x) = 2 \log_a |f(x)|$$

Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ

Đặt $t = \log_a f(x)$, với a và $f(x)$ thích hợp để đưa phương trình lôgarit về phương trình đại số đối với t

Dạng 1. $A(\log_a x)^2 + B \log_a x + C = 0 \quad (0 < a \neq 1)$. Đặt $t = \log_a x$

Dạng 2. $A \log_a x + B \log_x a + C = 0 \quad (0 < a \neq 1)$.

$$\text{Đặt } t = \log_a x \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{t} \quad (0 < x \neq 1)$$

Phương pháp 3: Mũ hóa hai vế

Áp dụng định nghĩa lôgarit: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b \quad (0 < a \neq 1, b > 0)$

Phương pháp 4: Giải bằng phương pháp đồ thị:

Dạng: $\log_a x = \alpha x + \beta; (a \neq 1, \alpha \neq 0)$

$\clubsuit$ Vẽ trên cùng hệ trục đồ thị của hai hàm số: $y = \log_a x$ và $y = \alpha x + \beta$

👉 Dựa vào đồ thị, tìm hoành độ giao điểm của hai đường, đây là nghiệm của phương trình đã cho.

👉 Thử lại bằng phép tính

Phương pháp 5: Dùng tính đơn điệu

Đoán nghiệm và áp dụng tính chất của hàm số lôgarit (hoặc mũ) chứng minh nghiệm đó là duy nhất.

Chú ý:

1/ $0 < a \neq 1$: $y = \log_a x$ là hàm số giảm (nghịch biến)

2/ $a > 1$: $y = \log_a x$ là hàm số tăng (đồng biến)

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1: Đưa về cùng cơ số

Biến đổi phương trình về dạng: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Ta có: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Bài 2.1. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$

b) $\log_3(5x+3) = \log_3(7x+5)$

c) $\log(x-1) - \log(2x-11) = \log 2$

d) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$

HD & Giải

a) Điều kiện: $x > 0$

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11 \Leftrightarrow \log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = 11 \Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = 11$$

$\Leftrightarrow \log_3 x = 6 \Leftrightarrow x = 3^6 = 729$ (thỏa đk). Vậy phương trình có nghiệm $x = 729$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 5x+3 > 0 \\ 7x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{3}{5}$

$$\log_3(5x+3) = \log_3(7x+5) \Leftrightarrow 5x+3 = 7x+5 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (không thỏa đk)}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Điều kiện: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x-11 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{11}{2}$

$$\log(x-1) - \log(2x-11) = \log 2 \Leftrightarrow \log \frac{x-1}{2x-11} = \log 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x-11} = 2 \Leftrightarrow x-1 = 4x-22 \Leftrightarrow x = 7 \text{ (thỏa đk)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 7$.

d) Điều kiện: $\begin{cases} x-5 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$

$$\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3 \Leftrightarrow \log_2[(x-5)(x+2)] = 3 \Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases}$$

So với điều kiện, vậy nghiệm của phương trình là $x = 6$.

Bài 2.2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_7(x-1) \log_7 x = \log_7 x$

b) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$

c) $\log \frac{x+8}{x-1} = \log x$

d) $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2$

HD & Giải

a) Điều kiện: $x > 1$

$$\text{Ta có: } \log_7(x-1) \log_7 x = \log_7 x \Leftrightarrow \log_7(x-1) = 1 \Leftrightarrow x-1 = 7 \Leftrightarrow x = 8$$

Kết hợp với điều kiện, vậy nghiệm của phương trình là $x = 8$.

b) Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x + 2 \log_3 x - \log_3 x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27$

Kết hợp với điều kiện, vậy nghiệm của phương trình là $x = 27$.

c) Điều kiện: $x > 1$

Ta có: $\log \frac{x+8}{x-1} = \log x \Leftrightarrow \frac{x+8}{x-1} = x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, vậy nghiệm của phương trình là $x = 4$.

d) Điều kiện: $x > 3$

Ta có: $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2 \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{(x-3)(3x-7)} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 16x + 21} = 4$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện, vậy nghiệm của phương trình là $x = 5$.

Bài 2.3. Giải các phương trình sau:

a) $\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x - 3)$

b) $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1$

d) $\log_2 \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 1)$

HD & Giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 6x + 7 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$

$\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm $x = 5$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} \log_2 x > 0 \\ \log_4 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$. Ta có:

$\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(\log_2 x) + \log_2\left(\frac{1}{2} \log_2 x\right) = 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(\log_2 x) + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2(\log_2 x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \log_2(\log_2 x) - 1 = 2$

$\Leftrightarrow \log_2(\log_2 x) = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2^4 \Leftrightarrow x = 16$

c) Điều kiện: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 7$. Ta có:

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(7-x)^2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}(7-x)^2\right) \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{2}(7-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 14x - 51 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -17 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, vậy nghiệm của phương trình là: $x = 3$

d) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Ta có: $\log_2 \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 1) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 1) \Leftrightarrow x = x^2 - x - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}. \text{ Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm } x = 1 + \sqrt{2}$$

Bài 2.4. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{2} \log(x^2 + x - 5) = \log 5x + \frac{1}{\log 5x}$

b) $\frac{1}{2} \log(x^2 - 4x - 1) = \log 8x - \log 4x$

c) $\log_{\sqrt{2}} x + 4 \log_4 x + \log_8 x = 13$

d) $\log_5 x + \log_{25} x + \log_{125} x + \log_{625} x = 25$

HD & Giải

a) Phương trình đã cho tương đương
$$\begin{cases} x^2 + x - 5 > 0 \\ 5x > 0 \\ \frac{1}{2} \log(x^2 + x - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 5 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 + x - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 5 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{\sqrt{21}-1}{2} \\ x = -3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \text{ Vậy phương trình có nghiệm là } x = 2.$$

b) Phương trình đã cho tương đương
$$\begin{cases} x^2 - 4x - 1 > 0 \\ x > 0 \\ \log(x^2 - 4x - 1) = \log \frac{8x}{4x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 1 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 4x - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 + \sqrt{5} \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 + \sqrt{5} \\ x = -1 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5. \text{ Vậy phương trình có nghiệm là } x = 5.$$

c) Điều kiện $x > 0$

Phương trình đã cho tương đương : $\log_{\frac{1}{2^2}} x + 4 \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 13$

$$\Leftrightarrow 2 \log_2 x + 2 \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 13 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là $x = 8$.

d) Điều kiện $x > 0$. Ta có: $\log_5 x + \log_{25} x + \log_{125} x + \log_{625} x = 25$

$$\Leftrightarrow \log_5 x + \frac{1}{2} \log_5 x + \frac{1}{3} \log_5 x + \frac{1}{4} \log_5 x = 12 \Leftrightarrow \log_5 x = 12 \Leftrightarrow x = 5^{12}$$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là: $x = 5^{12}$.

Bài 2.5. Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = \log_2 5$

b) $\log_2(x^2+3) + \log_{\frac{1}{2}} 5 = 2 \log_{\frac{1}{4}}(x-1) - \log_2(x+1)$

c) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{16x} 2$

d) $\log_3(x+2)^2 + \log_3 \sqrt{x^2+4x+4} = 9$

HD & Giải

a) Điều kiện: $x > 1$

Ta có: $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = \log_2 5 \Leftrightarrow \log_2(x+3)(x-1) = \log_2 5 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 5$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là: } x = 2.$$

a) Điều kiện: $x > 1$

Ta có: $\log_2(x^2+3) + \log_{\frac{1}{2}} 5 = 2 \log_{\frac{1}{4}}(x-1) - \log_2(x+1) \Leftrightarrow \log_2(x^2+3) - \log_2 5 = -\log_2(x-1) - \log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2+3)(x^2-1) = \log_2 5 \Leftrightarrow (x^2+3)(x^2-1) = 5 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -4 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ptvn} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là: $x = \sqrt{2}$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1; x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{1}{16} \end{cases}$

Ta có: $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{16x} 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 16x} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} = \frac{1}{4 + \log_2 x}$

$\Leftrightarrow 4 + \log_2 x = (1 + \log_2 x) \log_2 x \Leftrightarrow \log_2^2 x = 4 \Leftrightarrow \log_2 x = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là: $x \in \left\{ \frac{1}{4}; 4 \right\}$.

d) Điều kiện: $x \neq -2$

Ta có: $\log_3(x+2)^2 + \log_3 \sqrt{x^2+4x+4} = 9 \Leftrightarrow \log_3(x+2)^2 + \log_3 \sqrt{(x+2)^2} = 9$

$\Leftrightarrow 2 \log_3 |x+2| + \log_3 |x+2| = 9 \Leftrightarrow \log_3 |x+2| = 3 \Leftrightarrow |x+2| = 27 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 27 \\ x+2 = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = -29 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là: $x \in \{-29; 25\}$.

Bài 2.6. Giải các phương trình sau:

a) $\log_4[(x+2)(x+3)] + \log_4 \frac{x-2}{x+3} = 2$

b) $\log x^4 + \log 4x = 2 + \log x^3$

c) $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400$

d) $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = \ln x$

HD & Giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} (x+2)(x+3) > 0 \\ \frac{x-2}{x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 2 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương: $\log_4 \left[(x+2)(x+3) \cdot \frac{x-2}{x+3} \right] = \log_4 16 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{5} \\ x = -2\sqrt{5} \end{cases}$ (thỏa

điều kiện). Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2\sqrt{5}$ và $x = -2\sqrt{5}$

b) Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương:

$4 \log x + \log 4 + \log x = 2 \log 10 + 3 \log x \Leftrightarrow \log x = \log 5 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 5$.

c) Điều kiện $x > 0$. Ta có: $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400 \Leftrightarrow 20^{\log_3 x} = 20^2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 9$.

d) Điều kiện $x > 1$. Ta có: $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = \ln x \Leftrightarrow \ln(4x+2) = \ln x(x-1) \Leftrightarrow 4x+2 = x^2 - x$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{cases}$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$.

Bài 2.7. Giải phương trình sau:

a) $2(\log_9 x)^2 = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1}-1)$

b) $\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$

HD & Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ \sqrt{2x+1}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$. Phương trình được viết dưới dạng:

$$2\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1}-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3^2 x = \log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1}-1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x = 2\log_3 x \cdot \log_3 (\sqrt{2x+1}-1) \Leftrightarrow \left[\log_3 x - 2\log_3 (\sqrt{2x+1}-1)\right]\log_3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x - 2\log_3 (\sqrt{2x+1}-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2x+1-2\sqrt{2x+1}+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2\sqrt{2x+1} = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4(2x+1) = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 4x = 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 4 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

So với điều kiện. Vậy phương trình có nghiệm $x = 1, x = 4$.

b) $\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$

Điều kiện $x > 0$. Ta biến đổi về cùng cơ số 3: $\log_4 x = \log_4 3 \cdot \log_3 x$; $\log_5 x = \log_5 3 \cdot \log_3 x$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\log_3 x + \log_4 3 \cdot \log_3 x = \log_5 3 \cdot \log_3 x \Leftrightarrow \log_3 x (1 + \log_4 3 - \log_5 3) = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Vấn đề 2: Đặt ẩn phụ

Đặt $t = \log_a f(x)$, với a và $f(x)$ thích hợp để đưa phương trình lôgarit về phương trình đại số đối với t

Dạng 1. $A(\log_a x)^2 + B\log_a x + C = 0$ ($0 < a \neq 1$). Đặt $t = \log_a x$

Dạng 2. $A\log_a x + B\log_x a + C = 0$ ($0 < a \neq 1$).

$$\text{Đặt } t = \log_a x \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{t} \quad (0 < x \neq 1)$$

Bài 2.8. Giải các phương trình sau:

a) $\log_2^2(x-1)^2 + \log_2(x-1)^3 = 7$

b) $\log_{4x} 8 - \log_{2x} 2 + \log_9 243 = 0$

c) $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$

d) $\log_2(2x^2 - 5) + \log_{2x^2-5} 4 = 3$

e) $\frac{1}{5-\log x} + \frac{2}{1+\log x} = 1$

f) $\frac{1}{4-\log x} + \frac{2}{2+\log x} = 1$

HD & Giải

a) Điều kiện: $x > 1$. Đặt $t = \log_2(x-1)$,

$$\text{Phương trình viết lại theo } t \text{ là: } 4t^2 + 3t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

❖ Với $t = 1 \Rightarrow \log_2(x-1) = 1 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa điều kiện)

❖ Với $t = -\frac{7}{4} \Rightarrow \log_2(x-1) = -\frac{7}{4} \Leftrightarrow x-1 = 2^{-\frac{7}{4}} \Leftrightarrow x = 1 + 2^{-\frac{7}{4}}$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$ và $x = 1 + 2^{-\frac{7}{4}}$

b) Điều kiện: $x > 0; x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{1}{4}$. Ta có: $\log_{4x} 8 - \log_{2x} 2 + \log_9 243 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_8 4x} - \frac{1}{\log_2 2x} + \frac{5}{2} = 0$

Đặt $t = \log_2 x$ ($t \neq -1, t \neq -2$).

Phương trình viết lại theo t : $\frac{3}{2+t} - \frac{1}{1+t} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 19t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -\frac{4}{5} \end{cases}$ (thỏa điều kiện)

♦ Với $t = -3 \Rightarrow \log_2 x = -3 \Leftrightarrow x = 2^{-3}$ (thỏa điều kiện)

♦ Với $t = -\frac{4}{5} \Rightarrow \log_2 x = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{4}{5}}$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2^{-3}$ và $x = 2^{-\frac{4}{5}}$

c) Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \sqrt{\log_3 x}$ ($t \geq 0$). Phương trình viết lại theo t : $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

♦ Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{\log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$ (nhận)

♦ Với $t = 2 \Rightarrow \sqrt{\log_3 x} = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 = 81$ (nhận)

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$ và $x = 81$.

d) Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2 - 5 > 0 \\ 2x^2 - 5 \neq 0 \end{cases}$. Đặt $t = \log_2(2x^2 - 5)$ ($t \neq 0$)

Phương trình viết lại theo t : $t + \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

♦ Với $t = 1 \Rightarrow \log_2(2x^2 - 5) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ (thỏa điều kiện)

♦ Với $t = 2 \Rightarrow \log_2(2x^2 - 5) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ và $x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$.

e) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 5 \\ \log x \neq -1 \end{cases}$. Đặt $t = \log x$ ($t \neq 5, t \neq -1$)

Phương trình viết lại theo t : $\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$

♦ Với $t = 2 \Rightarrow x = 100$

♦ Với $t = 3 \Rightarrow x = 1000$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = 100$ và $x = 1000$.

f) Phương trình có 2 nghiệm: $x = 10$ và $x = 100$.

Bài 2.9. Giải các phương trình sau:

a) $\log^2 x^3 - 20 \log \sqrt{x} + 1 = 0$

b) $\log_{9x} 27 - \log_{3x} 3 + \log_9 243 = 0$

c) $\frac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \frac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$

d) $\frac{1 + \log_3 x}{1 + \log_9 x} = \frac{1 + \log_{27} x}{1 + \log_{81} x}$

HD & Giải

a) Điều kiện $x > 0$. Ta có

$$\log^2 x^3 - 20 \log \sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (3 \log x)^2 - 20 \log x^{\frac{1}{2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow 9 \log^2 x - 10 \log x + 1 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \log x. \text{ Phương trình viết lại theo } t: 9t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = 10 \\ t = \frac{1}{9} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{9}} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 10$ và $x = 10^{\frac{1}{9}}$

b) Nghiệm của phương trình là $x = 3^{-3}$ và $x = 3^{-0.8}$.

$$\text{Gợi ý: } \log_{9x} 27 - \log_{3x} 3 + \log_9 243 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{27} 9x} - \frac{1}{\log_3 3x} + \frac{5}{2} = 0. \text{ Đặt } t = \log_3 x$$

c) Nghiệm của phương trình là $x = 2$ và $x = \frac{1}{16}$. *Gợi ý:* Đưa về lôgarit cơ số 2 rồi đặt $t = \log_2 x$

d) Nghiệm của phương trình $x = 1$ và $x = \frac{1}{243}$. *Gợi ý:* Đưa về lôgarit cơ số 3 rồi đặt $t = \log_3 x$

Bài 2.10. Giải các phương trình sau:

a) $\log_2^2 x - 9 \log_8 x = 4$

b) $\frac{1}{4 + \log_2 x} + \frac{2}{2 - \log_2 x} = 1$

c) $\log_{\sqrt{3}}(x-2) \cdot \log_5 x = 2 \cdot \log_3(x-2)$

d) $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 = 0$

HD & Giải

a) Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$. Khi đó, ta có: $t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$

❖ Với $t = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

❖ Với $t = 4 \Rightarrow x = 16$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là: $x \in \left\{ \frac{1}{2}; 16 \right\}$.

b) Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x, t \neq -4, t \neq 2$.

Ta có: $\frac{1}{4+t} + \frac{2}{2-t} = 1 \Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$

♦ Với $t = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

♦ Với $t = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là: $x \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right\}$.

c) Phương trình có nghiệm là $x = 3$ và $x = 5$.

Gợi ý: Điều kiện $x > 2$. $pt \Leftrightarrow \log_3(x-2)(\log_5 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x-2) = 0 \\ \log_5 x - 1 = 0 \end{cases}$

d) Phương trình có nghiệm là $x = 4$ và $x = 8$. *Gợi ý:* Điều kiện $x > 0$. Ta đặt $t = \log_2 x$.

Bài 2.11. Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 2$

b) $1 + 2 \log_{x+2} 5 = \log_5(x+2)$

c) $\ln^3 x - 3 \ln^2 x - 4 \ln x + 12 = 0$

d) $e^{2x} - 3e^x - 4 + 12e^{-x} = 0$

HD & Giải

a) Phương trình đã cho tương đương: $\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2[2(2^x + 1)] = 2 \Leftrightarrow \log_2(2^x + 1) \cdot [1 + \log_2(2^x + 1)] = 2$.

Đặt $t = \log_2(2^x + 1)$. Phương trình viết lại theo t : $t(1+t) = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} \log_2(2^x + 1) = 1 \\ \log_2(2^x + 1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 1 = 2 \\ 2^x + 1 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = -\frac{3}{4} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0. \text{ Vậy phương trình có nghiệm là } x = 0.$

b) Điều kiện: $x + 2 > 0, x + 2 \neq 1$. Đặt $t = \log_5(x + 2)$

Phương trình viết lại theo t : $1 + \frac{2}{t} = t \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0, (t \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$

♦ Với $t = -1 \Rightarrow \log_5(x + 2) = -1 \Leftrightarrow x + 2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5}$

♦ Với $t = 2 \Rightarrow \log_5(x + 2) = 2 \Leftrightarrow x + 2 = 25 \Leftrightarrow x = 23$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{9}{5}, x = 23$.

c) Đặt $t = \ln x, (x > 0)$. Ta có phương trình: $t^3 - 2t^2 - 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$

♦ Với $t = -2 \Rightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$

♦ Với $t = 2 \Rightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

♦ Với $t = 3 \Rightarrow \ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3$. Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là $x \in \{e^{-2}; e^2; e^3\}$.

d) Đặt $t = e^x, (t > 0)$. Ta có phương trình: $t^2 - 3t - 4 + \frac{12}{t} = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (loại)} \\ t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$

♦ Với $t = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

♦ Với $t = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là $x \in \{\ln 2; \ln 3\}$.

Vấn đề 3: Mũ hóa hai vế

Áp dụng định nghĩa lôgarit: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b \quad (0 < a \neq 1, b > 0)$

Bài 2.12. Giải phương trình sau:

a) $\log_3(3^x + 8) = 2 + x$

b) $\log_2[x(x - 1)] = 1$

c) $\log_3 x(x + 2) = 1$

d) $2 - x + 3\log_5 2 = \log_5(3^x - 5^{2-x})$

HD & Giải

a) $\log_3(3^x + 8) = 2 + x \Leftrightarrow 3^x + 8 = 3^{2+x} \Leftrightarrow 3^x + 8 = 9 \cdot 3^x \Leftrightarrow 3^x \cdot 8 = 8 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

b) Điều kiện: $x(x - 1) > 0$. $\log_2[x(x - 1)] = 1 \Leftrightarrow x(x - 1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

c) Điều kiện: $x(x + 2) > 0$. $\log_3 x(x + 2) = 1 \Leftrightarrow x(x + 2) = 3^1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$ và $x = -3$

d) $2 - x + 3\log_5 2 = \log_5(3^x - 5^{2-x}) \Leftrightarrow \log_5\left(\frac{3^x - 5^{2-x}}{8}\right) = 2 - x$

$\Leftrightarrow \frac{3^x - 5^{2-x}}{8} = 5^{2-x} \Leftrightarrow 3^x - 5^{2-x} = 8 \cdot 5^{2-x} \Leftrightarrow 3^x = 9 \cdot 5^{2-x} \Leftrightarrow 3^{x-2} = 5^{2-x} \Leftrightarrow 25^{2-x} = 1 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Bài 2.13. Giải phương trình sau:

a) $\log_4 x(x+3) = 1$

b) $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$

c) $\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$

d) $\log_2(2^{x+1} - 5) = x$

HD & Giải

a) Điều kiện $x(x-3) > 0$. Ta có $\log_4 x(x+3) = 1 \Leftrightarrow x(x+3) = 4^1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$

b) Điều kiện $x > 0$. Ta có: $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1 \Leftrightarrow \log_3 x(x+2) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

c) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 6x - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$. Ta có:

$\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2 - 3}{6x - 10} \cdot 2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, vậy phương trình có nghiệm là: $x = 2$

d) $\log_2(2^{x+1} - 5) = x \Leftrightarrow 2^{x+1} - 5 = 2^x \Leftrightarrow 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5$

Vấn đề 4: Giải bằng phương pháp đồ thị

Dạng $\log_a x = \alpha x + \beta; (a \neq 1, \alpha \neq 0)$

👉 Vẽ trên cùng hệ trục đồ thị của hai hàm số: $y = \log_a x$ và $y = \alpha x + \beta$

👉 Dựa vào đồ thị, tìm hoành độ giao điểm của hai đường, đây là nghiệm của phương trình đã cho.

👉 Thử lại bằng phép tính

Dùng tính đơn điệu

Đoán nghiệm và áp dụng tính chất của hàm số lôgarit (hoặc mũ) chứng minh nghiệm đó là duy nhất.

Chú ý:

1/ $0 < a \neq 1$: $y = \log_a x$ là hàm số giảm (nghịch biến)

2/ $a > 1$: $y = \log_a x$ là hàm số tăng (đồng biến)

Bài 2.14. Giải phương trình sau:

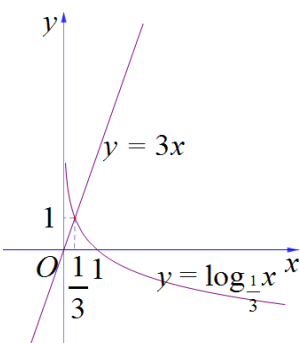
a) $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$

b) $\log_3 x = -x + 11$

c) $\log_4 x = \frac{x}{4}$

d) $16^x = \log_{\frac{1}{2}} x$

HD & Giải

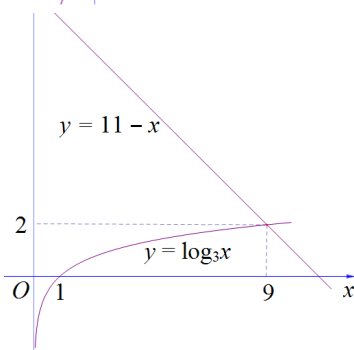


a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ và đường thẳng $y = 3x$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Căn cứ vào đồ thị, ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$

Thử lại, ta thấy $x = \frac{1}{3}$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Mặt khác, hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ luôn nghịch biến, hàm số $y = 3x$ luôn đồng

biến. Vậy $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

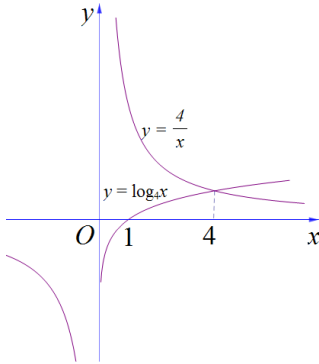


b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_3 x$ và đường thẳng $y = 11 - x$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Căn cứ vào đồ thị, ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 9$

Thử lại, ta thấy $x = 9$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Mặt khác, hàm số $y = \log_3 x$ luôn đồng biến, hàm số $y = 11 - x$ luôn nghịch biến. Vậy $x = 9$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

c) Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_4 x$ và đường thẳng $y = \frac{4}{x}$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Căn cứ vào đồ thị, ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = 4$.
Thử lại, ta thấy $x = 4$ thỏa mãn phương trình đã cho.



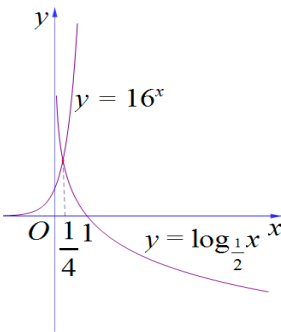
Mặt khác, hàm số $y = \log_4 x$ luôn đồng biến, hàm số $y = \frac{4}{x}$ luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

d) Vẽ đồ thị hàm số $y = 16^x$ và đường thẳng $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ trên cùng một hệ trục

tọa độ. Căn cứ vào đồ thị, ta thấy chúng cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{4}$

Thử lại, ta thấy $x = \frac{1}{4}$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Mặt khác, hàm số $y = 16^x$ luôn đồng biến, hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ luôn nghịch biến. Vậy $x = \frac{1}{4}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 2.15. Giải phương trình sau:

a) $\log_2 x - \log_4 (x - 3) = 2$

b) $\frac{\log_{\sqrt{5}} \cdot \log_{25} x}{\log_5 x} = \log_{125} 2x$

c) $\frac{1}{\log_6 (3 + x)} + \frac{\log_{\frac{1}{4}} (4 - x)}{\log_2 (3 + x)} = 1$

d) $7^{\log x} + x^{\log 7} = 98$

Bài 2.16. Giải phương trình sau:

a) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

b) $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 5 \right) = 2$

c) $4^{\log x - 1} - 6^{\log x} - 2 \cdot 3^{\log x^2 + 2} = 0$

d) $\log_3 3x = 3\sqrt{\log_3 x} - 1$

Bài 2.17. Giải phương trình sau:

a) $1 - \frac{1}{2} \log(2x - 1) = \frac{1}{2} \log(x - 9)$

b) $\frac{1}{6} \log_2 (x - 2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x - 5}$

c) $\log_3 (3^x - 1) \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6$

d) $\log_5 (5^x - 1) \log_5 (5^{x+1} - 5) = 1$

Kết quả:

Bài 2.15.

- a) Đưa về lôgarit cơ số 2, $x \in \{4; 12\}$
 b) Đưa về lôgarit cơ số 5, $x = \sqrt{2}$
 c) Điều kiện: $-3 < x < 4$ và $x \neq -2$. Đưa về lôgarit cơ số 2, $x = 3$
 d) Có $x^{\log 7} = 7^{\log x}$, $x = 100$

Bài 2.16.

- a) Đặt $t = 81^{\cos^2 x}$, ($t > 0$). Ta có phương trình: $\frac{81}{t} + t = 30, x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$
 b) Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}} x$. Ta có phương trình: $t^2 - 3t + 5 = 9, x \in \left\{ \frac{1}{16}; 2 \right\}$
 c) Viết phương trình đã cho thành: $4(2^{\log x})^2 - 2^{\log x} \cdot 3^{\log x} - 18(3^{\log x})^2 = 0$, sau đó chia cả hai vế cho $(3^{\log x})^2$
 và $t = \left(\frac{2}{3} \right)^{\log x}$; $x = 10^{-2}$
 d) Đặt $t = \sqrt{\log_3 x}$, ($t \geq 0$). $x \in \{3; 81\}$

Bài 2.17.

- a) $x = 13$
 b) Điều kiện: $x > 2$,
 Biến đổi phương trình thành: $\frac{1}{6} \log_2 (x-2) + \frac{1}{6} \log_2 (3x-5) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_2 (x-2)(3x-5) = 2 \Rightarrow x = 3$
 c) Ta có: $\log_3 (3^{x+1} - 3) = \log_3 3(3^x - 1) = 1 + \log_3 (3^x - 1)$. Đặt $t = \log_3 (3^x - 1)$.
 Ta được phương trình: $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \Rightarrow x = -3 + \log_3 28 \\ t = 2 \Rightarrow x = \log_3 10 \end{cases}$
 d) $x = \log_5 6, x = -2 + \log_5 26$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa:

Hệ phương trình mũ, lôgarit là hệ phương trình có chứa ít nhất một phương trình mũ hoặc phương trình lôgarit.

2. Cách giải:

Khi giải hệ phương trình mũ và lôgarit, ta cũng dùng các phương pháp giải hệ phương trình đã học như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ, ...

B. BÀI TẬP

Bài 3.1. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases}$$

HD & Giải

$$a) \begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ 2^x - 2^y = 2 & (2) \end{cases} \text{ . Từ } (1) \Leftrightarrow y = 1 - x, \text{ thế vào } (2), \text{ ta được: } 2^x - 2^{1-x} = 2 \Leftrightarrow 4^x - 2 \cdot 2^x - 2 = 0 (*) .$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0. \text{ Phương trình } (*) \text{ trở thành: } t^2 - 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \sqrt{3} \\ t = 1 - \sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow 2^x = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \log_2(1 + \sqrt{3}) \Rightarrow y = 1 - \log_2(1 + \sqrt{3})$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ phương trình: } (x; y) = \left(\log_2(1 + \sqrt{3}); 1 - \log_2(1 + \sqrt{3}) \right)$$

$$b) \begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 & (2) \end{cases} \text{ . Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Từ } (2) \Leftrightarrow \log_4 xy = \log_4 36 \Leftrightarrow xy = 36$$

$$\text{Hệ phương trình đã cho tương đương: } \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 36 \end{cases} \Rightarrow x, y \text{ là nghiệm của}$$

$$\text{phương trình: } X^2 - 20X + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ X = 18 \end{cases} \text{ (thỏa *)}$$

$$\text{Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm } (x; y) = (2; 18) \text{ và } (x; y) = (18; 2)$$

Bài 3.2. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2^{x+y} + 3^y = 5 \\ 2^{x+y} \cdot 3^{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^y = 19 \\ 2^x - 3^y = 2 \end{cases}$$

HD & Giải

$$a) \begin{cases} 2^{x+y} + 3^y = 5 \\ 2^{x+y} \cdot 3^{y-1} = 2 \end{cases} \text{ . Đặt } \begin{cases} u = 2^{x+y} \quad (u > 0) \\ v = 3^y \quad (v > 0) \end{cases}$$

$$\text{Hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} u + v = 5 \\ u \cdot v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$$

✎ Với $\begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+y}=2 \\ 3^y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

✎ Với $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+y}=3 \\ 3^y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\log_2 3 \\ y=\log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\log_2 3 - \log_3 2 \\ y=\log_3 2 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (0; 1)$ và $(x; y) = (\log_2 3 - \log_3 2; \log_3 2)$

b) $\begin{cases} 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^y = 19 \\ 2^x - 3^y = 2 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u=2^x & (u > 0) \\ v=3^y & (v > 0) \end{cases} (*)$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 2u + 3v = 19 \\ u - v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=3 \end{cases}$ (thỏa $(*)$)

Với $\begin{cases} u=5 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x=5 \\ 3^y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\log_2 5 \\ y=1 \end{cases}$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (\log_2 5; 1)$

Bài 3.3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2^{2x-y} + 2^x = 2^{1+y} \\ \log_2 x \cdot (\log_4 y - 1) = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = 1 \\ \log^2 x + \log^2 y = 2 \end{cases}$

HD & Giải

a) $\begin{cases} 2^{2x-y} + 2^x = 2^{1+y} & (1) \\ \log_2 x \cdot (\log_4 y - 1) = 4 & (2) \end{cases}$. Ta nhân hai vế của (1) cho 2^{-y} , ta được: $2^{2(x-y)} + 2^{x-y} = 2 (*)$.

Đặt $t = 2^{x-y} (t > 0)$, phương trình (*), trở thành: $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2(\text{loại}) \end{cases}$

Với $t=1 \Rightarrow 2^{x-y} = 1 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

Thay $x=y$ vào phương trình (2), ta được:

$\log_2 x \cdot \left(\frac{1}{2} \log_2 x - 1\right) = 4 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2^{-2} \\ x=2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ x=16 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ và $(x; y) = (16; 16)$

b) $\begin{cases} xy = 1 \\ \log^2 x + \log^2 y = 2 \end{cases}$. Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} (*)$.

Hệ đã cho tương đương: $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ \log^2 x + \log^2 y = 2 \end{cases}$. Đặt: $\begin{cases} u = \log x \\ v = \log y \end{cases}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=-1 \\ v=1 \end{cases}$

✎ Với $\begin{cases} u=1 \\ v=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = 1 \\ \log y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=\frac{1}{10} \end{cases}$ (thỏa $(*)$)

✎ Với $\begin{cases} u=-1 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = -1 \\ \log y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{10} \\ y=10 \end{cases}$ (thỏa $(*)$)

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = \left(10; \frac{1}{10}\right)$ và $(x; y) = \left(\frac{1}{10}; 10\right)$

Bài 3.4. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \log_2(3y-1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 9x^2 - y^2 = 5 \\ \log_5(3x+y) - \log_5(3x-y) = 1 \end{cases}$$

HD & Giải

$$a) \begin{cases} \log_2(3y-1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases} \text{ . Điều kiện: } y > \frac{1}{3} (*)$$

$$\text{Hệ đã cho tương đương: } \begin{cases} 3y-1=2^x \\ (2^x)^2 + 2^x = 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-1=2^x \\ (3y-1)^2 + 3y-1 = 3y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-1=2^x \\ 6y^2-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-1=2^x \\ y=\frac{1}{2} \text{ hoặc } y=0 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với } (*), \text{ hệ đã cho có nghiệm } (x; y) = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$$

$$b) \begin{cases} 9x^2 - y^2 = 5 \\ \log_5(3x+y) - \log_5(3x-y) = 1 \end{cases} \text{ . Điều kiện: } \begin{cases} 3x+y > 0 \\ 3x-y > 0 \end{cases} (**)$$

$$\text{Hệ đã cho tương đương: } \begin{cases} (3x-y)(3x+y) = 5 \\ \log_5(3x+y) = 1 + \log_5(3x-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-y)(3x+y) = 5 \\ 3x+y = 5(3x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(3x-y)^2 = 5 \\ 3x+y = 5(3x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=1 \\ 3x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ (vì } 3x+y > 0, 3x-y > 0)$$

$$\text{Kết hợp với } (**), \text{ hệ đã cho có nghiệm } (x; y) = (1; 2)$$

Bài 3.5. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2\log_2(x-2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases}$$

HD & Giải

$$a) \text{ Điều kiện: } xy > 0 (*)$$

$$\text{Hệ đã cho tương đương: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với } (*), \text{ hệ đã cho có nghiệm: } (x; y) = (2; 2) \text{ và } (x; y) = (-2; -2)$$

$$b) \text{ Điều kiện: } x > 2, y > 0 (**). \text{ Hệ đã cho tương đương: } \begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2\log_2(x-2) = 2\log_2 y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ x-2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x-2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với } (**), \text{ hệ đã cho có nghiệm: } (x; y) = (3; 1)$$

Bài 3.6. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ \log_3(x+y) - \log_5(x-y) = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_5 x + \log_5 7 \cdot \log_7 y = 1 + \log_5 2 \\ 3 + \log_2 y = \log_2 5(1 + 3\log_5 x) \end{cases}$$

HD & Giải

a) Điều kiện: $x + y > 0, x - y > 0 (*)$

$$\text{Hệ đã cho tương đương: } \begin{cases} (x+y)(x-y) = 3 \\ \log_3(x+y) - \frac{\log_3(x-y)}{\log_3 5} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+y) + \log_3(x-y) = 1 \\ \log_3(x+y) - \frac{\log_3(x-y)}{\log_3 5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+y) = 1 \\ \log_3(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Kết hợp với (*), hệ đã cho có nghiệm: $(x; y) = (2; 1)$

b) Điều kiện: $x > 0, y > 0 (**)$. Hệ đã cho tương đương: $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 1 + \log_5 2 \\ 3 + \log_2 y = \log_2 5 + 3 \log_2 x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 xy = \log_5 10 \\ \log_2 8y = \log_2 5x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ 8y = 5x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Kết hợp với (**), hệ đã cho có nghiệm: $(x; y) = (2; 5)$

Bài 3.7. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} \log^2 x = \log^2 y + \log^2(xy) \\ \log^2(x-y) + \log x \cdot \log y = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4^{\log_3 xy} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12 \end{cases}$$

HD & Giải

a) Điều kiện: $x > 0, y > 0, x > y (*)$

Biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ: $\log^2 x = \log^2 y + \log^2(xy) \Leftrightarrow \log^2 x = \log^2 y + (\log x + \log y)^2$

$$\Leftrightarrow 2 \log^2 y + 2 \log x \log y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log y = 0 \\ \log x + \log y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

♦ Với $y = 1$ thế vào phương trình thứ hai, ta được: $\log^2(x-1) + \log x \cdot \log 1 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa (*))

♦ Với $y = \frac{1}{x}$ thế vào phương trình thứ hai, ta được: $\log^2\left(x - \frac{1}{x}\right) + \log x \cdot \log \frac{1}{x} = 0$

$$\Leftrightarrow \log^2\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + \log^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log \frac{x^2-1}{x} = \log x \\ \log \frac{x^2-1}{x} = -\log x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 = x^2 \text{ (loại)} \\ \frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \text{ (loại)} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Khi $x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (thỏa (*))

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$ và $(x; y) = \left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) Điều kiện: $xy > 0 (**)$. **Lưu ý:** $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Từ phương trình thứ nhất: $4^{\log_3 xy} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \Leftrightarrow 2^{2(\log_3 xy)} = 2 + 2^{\log_3 xy}$

$$\Leftrightarrow 2^{2(\log_3 xy)} - 2^{\log_3 xy} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\log_3 xy} = -1 \text{ (loại)} \\ 2^{\log_3 xy} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 xy = 1 \Leftrightarrow xy = 3$$

Từ phương trình thứ hai:

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy - 3(x+y) - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 3(x+y) - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 6 \\ x+y = -3 \end{cases}$$

Khi đó: $\begin{cases} 4^{\log_3 xy} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} xy = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$

♦ Với $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{6} \\ y = 3 - \sqrt{6} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 - \sqrt{6} \\ y = 3 + \sqrt{6} \end{cases} \text{ (thỏa (**))}$

♦ Với $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$: hệ vô nghiệm

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (3 + \sqrt{6}; 3 - \sqrt{6})$ và $(x; y) = (3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6})$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3.8. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases}$

Bài 3.9. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(x + y) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(x + y) - \log_3(x - y) = 1 \end{cases}$

Bài 3.10. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \log_2(x - y) = 5 - \log_2(x + y) \\ \frac{\log x - \log 4}{\log y - \log 3} = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y \cdot \log_2 x = 2 \log_2 x + 3^{y+1} \end{cases}$

Bài 3.11. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 + \log_2 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 1 + \log 8 \\ \log(x + y) - \log(x - y) = \log 3 \end{cases}$

Bài 3.12. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 25 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$

Bài 3.13. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^{-x} + 3^{-y} = \frac{4}{9} \\ x + y = 3 \end{cases}$

Bài 3.14. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5 \end{cases}$

Bài 3.15. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5^{\ln x} = 6^{\ln y} \\ ((6x)^{\ln 6}) = (5y)^{\ln 5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 5^{x+y} = 7 \\ 2^{x-1} \cdot 5^{x+y} = 5 \end{cases}$

Bài 3.16. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y - x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3 \log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$

Kết quả

Bài 3.8.

a) $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Gợi ý: Cách 1. Rút y từ phương trình đầu, thế vào phương trình thứ hai thì ta được: $4^{-2x} + 4^{-2(1-x)} = 0,5$. Sau đó đặt $t = 4^{-2x} (t > 0)$

cách 2. Viết phương trình đầu thành $4^{x+y} = 4$ hay $4^x \cdot 4^y = 4$. Sau đó đặt $u = 4^x, v = 4^y (u > 0, v > 0)$

b) $(x; y) = (-2; 0)$. Gợi ý: Đặt $u = 2^x (u > 0), v = 3^y (v > 0)$

Bài 3.9.

a) $(x; y) = (-2; 7)$. Gợi ý: Tính y từ phương trình thứ hai rồi thế vào phương trình đầu.

b) $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Gợi ý: ĐKXD của phương trình: $x \pm y > 0$. Khi đó:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 1 \\ \log_2(x+y) - \frac{\log_2(x-y)}{\log_2 3} = 1 \end{cases}$$

Sau đó, đặt $u = \log_2(x+y), v = \log_2(x-y)$

Bài 3.10.

a) $(x; y) = (6; 2)$. Gợi ý: Quy về giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ xy = 12 \end{cases} (x > y > 0)$.

b) $(x; y) = (512; 1)$. Gợi ý: Đặt $u = \log_2 x (x > 0), v = 3^y (v > 0)$

Bài 3.11.

a) $(x; y) = (5; 6)$ và $(x; y) = (6; 5)$. Gợi ý: Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. Biến đổi phương trình thứ hai trong hệ như

sau: $\log_2 x + \log_2 y = 1 + \log_2 15 \Leftrightarrow \log_2 xy = \log_2 30 \Leftrightarrow xy = 30$

b) $(x; y) = (8; 4)$. Gợi ý: Điều kiện: $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình tương đương: $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) = \log 80 \\ \log \frac{x+y}{x-y} = \log 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 80 \\ \frac{x+y}{x-y} = 3 \end{cases}$

Bài 3.12.

a) $(x; y) = (5; 2)$. Gợi ý: Điều kiện: $x - y > 0$.

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 3^{y+3} \cdot 2^y = 972 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 6^y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

b) $(x; y) = (20; 5)$. Gợi ý: Điều kiện: $x > 0, y > 0$. Biến đổi phương trình thứ hai trong hệ thành: $\frac{x}{y} = 4$

Bài 3.13.

a) $(x; y) = (1; 0)$ và $(x; y) = (0; 1)$. Gợi ý: Cách 1. Rút y từ phương trình thứ hai, thế vào phương trình thứ đầu thì ta được: $3^x + 3^{1-x} = 4$. Sau đó đặt $t = 3^x (t > 0)$

Cách 2. Viết phương trình đầu thành $3^{x+y} = 3$ hay $3^x \cdot 3^y = 3$.

Sau đó đặt $u = 3^x, v = 3^y (u > 0, v > 0)$ dẫn đến hệ: $\begin{cases} u + v = 4 \\ u \cdot v = 3 \end{cases}$

b) $(x; y) = (1; 2)$ và $(x; y) = (2; 1)$.

Bài 3.14.

a) $(x; y) = \{(2; 18); (18; 2)\}$. *Gợi ý:* Điều kiện: $x > 0, y > 0$, biến đổi phương trình thứ hai trong hệ như sau:

$$\log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \Leftrightarrow \log_4 xy = \log_4 36 \Leftrightarrow xy = 36.$$

b) $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. *Gợi ý:* Cách 1 :Rút y từ phương trình đầu, thế vào phương trình thứ hai ta được:

$$4^{-2x} + 4^{-2(1-x)} = 0,5, \text{ sau đó đặt } t = 4^{2x}$$

Cách 2: Viết phương trình đầu thành $4^{x+y} = 4 \Leftrightarrow 4^x \cdot 4^y = 4$, sau đó đặt $u = 4^x, v = 4^y$

Bài 3.15.

a) $(x; y) = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{5}\right)$. *Gợi ý:* Điều kiện: $x > 0, y > 0$, lấy lôgarit cơ số e của cả hai phương trình của hệ dẫn đến

$$\text{hệ: } \begin{cases} \ln 5 \cdot \ln x = \ln y \cdot \ln 6 \\ \ln 6 (\ln 6 + \ln x) = \ln 5 (\ln 5 + \ln y) \end{cases}$$

b) $(x; y) = (\log_2 5; \log_5 2 - \log_2 5); (x; y) = (1; 0)$. *Gợi ý:* Đặt: $\begin{cases} u = 2^x, (u > 0) \\ v = 5^{x+y}, (v > 0) \end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 7 \\ u \cdot v = 10 \end{cases}$

Bài 3.16.

a) $(x; y) = (3; 4)$. *Gợi ý:* Điều kiện: $x > 0, y > 0$. Biến đổi hệ: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} \frac{y}{y-x} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 4x = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

b) $(x; y) = \{(1; 1); (2; 2)\}$. *Gợi ý:* Biến đổi hệ: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ \log_3 \left(\frac{3x}{y}\right)^3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ \left(\frac{3x}{y}\right)^3 = 27 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1}\sqrt{2-x} = 0 \\ x = y \end{cases}$$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Bất phương trình mũ cơ bản

Dạng 1. $a^x > b, (a > 0, a \neq 1)$

$a^x > b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$(\log_a b; +\infty)$	$(-\infty; \log_a b)$

Dạng 2. $a^x \geq b, (a > 0, a \neq 1)$

$a^x \geq b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$[\log_a b; +\infty)$	$(-\infty; \log_a b]$

Dạng 3. $a^x < b, (a > 0, a \neq 1)$

$a^x < b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\emptyset$	$\emptyset$
$b > 0$	$(-\infty; \log_a b)$	$(\log_a b; +\infty)$

Dạng 4. $a^x \leq b, (a > 0, a \neq 1)$

$a^x < b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\emptyset$	$\emptyset$
$b > 0$	$(-\infty; \log_a b]$	$[\log_a b; +\infty)$

Lưu ý:

Để giải các bất phương trình mũ, ta có thể biến đổi đưa về bất phương trình mũ cơ bản hoặc bất phương trình đại số

Khi giải bất phương trình mũ, có thể áp dụng tính chất đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số mũ:

$$\begin{aligned} \uparrow \begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ a > 1 \end{cases} & \uparrow \begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Bất phương trình $f(a^x) \geq 0$

Cách giải: Đặt ẩn phụ $t = a^x$, đưa bất phương trình về hệ $\begin{cases} t > 0 \\ f(t) \geq 0 \end{cases}$

Bất phương trình $a^{f(x)} \geq b$ có thể giải bằng phương pháp lấy logarit cả hai vế.

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Giải bất phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số

Lưu ý:

$$\textcircled{1} \ a > 1: a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \textcircled{2} \ 0 < a < 1: a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Bài 4.1. Giải các bất phương trình sau:

a) $3^{x^2-x} < 9$

b) $2^{-x^2+3x} < 4$

c) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}$

HD & Giải

a) $3^{x^2-x} < 9 \Leftrightarrow 3^{x^2-x} < 3^2 \Leftrightarrow x^2 - x < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 2$ (do cơ số $a = 3$ lớn hơn 1).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-1; 2)$

b) $2^{-x^2+3x} < 4 \Leftrightarrow 2^{-x^2+3x} < 2^2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x < 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình : $S = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

c) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \left(\frac{7}{9}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x \leq -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình : $S = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Bài 4.2. Giải các bất phương trình sau:

a) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$

b) $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$

c) $(\sqrt{2}+1)^{x+1} \geq (\sqrt{2}-1)^{\frac{x}{x-1}}$

d) $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

HD & Giải

a) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} + \frac{1}{4} \cdot 2^{2x} + \frac{1}{8} \cdot 2^{2x} \geq 448$
 $\Leftrightarrow \frac{7}{8} \cdot 2^{2x} \geq 448 \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 512 = 2^9 \Leftrightarrow 2x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{2}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left[\frac{9}{2}; +\infty\right)$

b) $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|} \Leftrightarrow 2^{|x-2|} > 2^{2|x+1|} \Leftrightarrow |x-2| > 2|x+1|$
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 4(x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow 3x^2 + 12x < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-4; 0)$

c) $(\sqrt{2}+1)^{x+1} \geq (\sqrt{2}-1)^{\frac{x}{x-1}}$ (1). Điều kiện: $x \neq 1$. Ta có: $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1 \Rightarrow (\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}+1)^{-1}$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^{x+1} \geq (\sqrt{2}+1)^{-\frac{x}{x-1}} \Leftrightarrow x+1 \geq -\frac{x}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2+x-1}{x-1} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{x} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x > 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup (1; +\infty)$

d) Điều kiện: $x \neq -1$. $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}+2)^{-\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow x-1 \geq -\frac{x-1}{x+1}$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x < -1$ hoặc $x \geq 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = [-2; -1) \cup [1; +\infty)$

Bài 4.3. Giải các bất phương trình sau:

$$a) \frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{x-1}$$

$$b) (\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}}$$

$$c) \left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2-x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

$$d) (8,4)^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1$$

HD & Giải

$$a) \frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-2x}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq 1-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ x^2-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2. \text{ Vậy tập nghiệm của bất phương trình : } S = [2; +\infty)$$

$$b) (\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow (\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+1}{x+3}} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5}{(x-1)(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -\sqrt{5} \\ 1 < x < \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình : } S = (-3; -\sqrt{5}) \cup (1; \sqrt{5})$$

$$c) \left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2-x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^x \Leftrightarrow \sqrt{2-x} < x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x > 0 \\ 2-x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x < -2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 2$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình : } S = (1; 2]$$

$$d) (8,4)^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1 \Leftrightarrow (8,4)^{\frac{x-3}{x^2+1}} < (8,4)^0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow x < 3$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình: } S = (-\infty; 3)$$

Dạng 2. Giải bất phương trình mũ bằng cách đặt ẩn phụ

Bài 4.4. Giải các bất phương trình sau:

$$a) 4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x$$

$$b) 2^x + 2^{-x} - 3 < 0$$

$$c) 3^{x+2} + 3^{x-1} \leq 28$$

$$d) 4^x + 3 \cdot 2^x + 2 > 0$$

HD & Giải

$$a) 4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x \text{ chia hai vế của bất phương trình cho } 10^x,$$

$$\text{ta được: } \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x < 1. \text{ Đặt } t = \left(\frac{2}{5}\right)^x, (t > 0). \text{ Ta có: } \begin{cases} t - \frac{2}{t} < 1 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2-t-2}{t} < 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 2$$

$$\text{Do đó: } 0 < \left(\frac{2}{5}\right)^x < 2 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{2}{5}} 2 \text{ (do } \frac{2}{5} < 1). \text{ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: } S = \left(\log_{\frac{2}{5}} 2; +\infty\right)$$

$$b) 2^x + 2^{-x} - 3 < 0. \text{ Đặt } t = 2^x, (t > 0),$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} t + \frac{1}{t} - 3 < 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2-3t+1}{t} < 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < t < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Do đó: $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 2^x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ hay $\log_2 (3-\sqrt{5}) - 1 < x < \log_2 (3+\sqrt{5}) - 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (\log_2 (3-\sqrt{5}) - 1; \log_2 (3+\sqrt{5}) - 1)$

c) $3^{x+2} + 3^{x-1} \leq 28 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^x + \frac{1}{3} \cdot 3^x \leq 28 \Leftrightarrow 3^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; 1]$

d) $4^x + 3 \cdot 2^x + 2 > 0$. Đặt $t = 2^x, (t > 0)$, ta có: $\begin{cases} t^2 - 3t + 2 > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ t > 2 \end{cases}$

Do đó: $\begin{cases} 2^x < 1 \\ 2^x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

Bài 4.5. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$

b) $(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5$

c) $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$

d) $\frac{1}{3^x + 5} \leq \frac{1}{3^{x+1} - 1}$

HD & Giải

a) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4 \Leftrightarrow \frac{4^x - 4 \cdot 4^x + 4 \cdot 3^x}{4^x - 3^x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3 \cdot 4^x + 4 \cdot 3^x}{4^x - 3^x} < 0$

Chia tử và mẫu cho $4^x (4^x > 0)$, ta được: $\frac{-3 + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x} < 0$

Đặt $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x (t > 0)$, ta có: $\begin{cases} t > 0 \\ \frac{4t-3}{t-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < \frac{3}{4} \\ t > 1 \end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases} 0 < \left(\frac{3}{4}\right)^x < \frac{3}{4} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

b) $(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5$. Đặt $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x, t > 0$

Ta được bất phương trình: $t - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t} > 1,5 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 5 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{5}{2}$ (do $t > 0$)

♦ Với $t > \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x < -1$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; -1)$

c) $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 8 < 2^{3x} \cdot 2^{1-x} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8 > 0$

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Ta có: $t^2 + 2t - 8 > 0 \Leftrightarrow t < -4$ hoặc $t > 2$

♦ Với $t > 2 \Rightarrow 2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (1; +\infty)$

d) $\frac{1}{3^x + 5} \leq \frac{1}{3^{x+1} - 1}$. Đặt $t = 3^x, t > 0$

Ta có bất phương trình: $\frac{1}{t+5} \leq \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-1 \leq t+5 \\ 3t-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t \leq 3$. Do đó: $\frac{1}{3} < 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -1 < x \leq 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-1; 1]$

Bài 4.6. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2^x}{3^x - 2^x} \leq 2$

b) $9^x < 3^{x+1} + 4$

c) $3^x - 3^{-x+2} + 8 > 0$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log x} < 5 \cdot 2^{-\log x} - 4$

HD & Giải

a) $\frac{2^x}{3^x - 2^x} \leq 2 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1} \geq 0$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ ($t > 0$), ta có: $\begin{cases} t > 0 \\ \frac{2t-3}{t-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ t \geq \frac{3}{2} \end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases} 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$

b) $9^x < 3^{x+1} + 4 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 4 < 0$. Đặt $t = 3^x$, ($t > 0$)

Ta có: $\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 3t - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 4$. Suy ra: $3^x < 4 \Leftrightarrow x < \log_3 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; \log_3 4)$

c) $3^x - 3^{-x+2} + 8 > 0 \Leftrightarrow 3^x - 9 \cdot 3^{-x} + 8 > 0$. Đặt $t = 3^x$, ($t > 0$)

Ta có: $\begin{cases} t > 0 \\ t^2 + 8t - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 1$. Suy ra: $3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (0; +\infty)$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log x} < 5 \cdot 2^{-\log x} - 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2\log x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log x} + 4 < 0$.

Đặt $t = 3^x$, ($t > 0$). Ta có: $\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 5t + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < t < 4$.

Suy ra: $1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\log x} < 4 \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\log x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow -2 < \log x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{100} < x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(\frac{1}{100}; 1\right)$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4.7. Giải các bất phương trình sau:

a) $5^{x^2+x} \leq 25^{x+1}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-5x+3} > 125$

c) $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x+1}$

d) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$

Bài 4.8. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$

b) $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$

$$\text{c) } (\sqrt{5}+1)^{-x^2+x} + 2^{-x^2+x+1} < 3 \cdot (\sqrt{5}-1)^{-x^2+x} \quad \text{d) } 9^{x^2-2x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3$$

Bài 4.9. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 9^x - 5 \cdot 3^x + 6 < 0 & \text{b) } 2^{-x^2} > 2^{-|x|} \\ \text{c) } \frac{2^{x+1} - 5 \cdot 3^x}{2^x - 3^{x+1}} < 1 & \text{d) } \frac{4 - 7 \cdot 5^x}{5^{2x+1} - 12 \cdot 5^x + 4} \leq \frac{2}{3} \end{array}$$

Bài 4.10. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (7+4\sqrt{3})^{\frac{x-1}{x+2}} \leq (7-4\sqrt{3})^5 & \text{b) } 25^x - 30 \cdot 5^x + 125 > 0 \\ \text{c) } \frac{3^x + 7^x}{3^{x+1} - 7^{x+1}} \geq -\frac{1}{4} & \text{d) } \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1 \end{array}$$

Kết quả

Bài 4.7.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } -1 \leq x \leq 2 & \text{b) } x > 0 & \text{c) } x \geq 2 & \text{d) } x > 0. \end{array}$$

Bài 4.8.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } -1 < x < 0 & \text{b) } 2 < x < 3 \\ \text{c) } \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases} & \text{d) } 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}. \end{array}$$

Bài 4.9.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log_3 2 < x < 1 & \text{b) } x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \\ \text{c) } x \in \left(\log_{\frac{2}{3}} 3; \log_{\frac{2}{3}} 2 \right) & \text{d) } \begin{cases} \log_5 0,4 < x < \log_5 0,8 \\ x > \log_5 2 \end{cases} \end{array}$$

Bài 4.10.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x \in \left(-2; -\frac{3}{2} \right] & \text{b) } x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \\ \text{c) } x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) & \text{d) } x \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}). \end{array}$$

§5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Bất phương trình lôgarit cơ bản

Dạng 1. $\log_a x > b$ ($a > 0, a \neq 1$)

$\log_a x > b$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Nghiệm	$(a^b; +\infty)$	$(0; a^b)$

Dạng 2. $\log_a x \geq b$ ($a > 0, a \neq 1$)

$\log_a x \geq b$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Nghiệm	$[a^b; +\infty)$	$(0; a^b]$

Dạng 3. $\log_a x < b$ ($a > 0, a \neq 1$)

$\log_a x < b$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Nghiệm	$(0; a^b)$	$(a^b; +\infty)$

Dạng 4. $\log_a x \leq b$ ($a > 0, a \neq 1$)

$\log_a x \leq b$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Nghiệm	$(0; a^b]$	$[a^b; +\infty)$

Lưu ý:

Để giải các bất phương trình lôgarit, ta có thể biến đổi để đưa về bất phương trình lôgarit cơ bản hoặc bất phương trình đại số.

Khi giải bất phương trình lôgarit, có thể áp dụng các tính chất đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số lôgarit:

$$\begin{aligned} \uparrow \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ a > 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} & \uparrow \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{aligned}$$

$f(\log_a x) \geq 0$, trong đó f là một hàm số nào đó. Có thể giải bằng phương pháp: Đặt $t = \log_a x$, giải bất phương trình $f(t) \geq 0$, sau đó giải bất phương trình lôgarit tương ứng.

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Giải bất phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng cơ số

Lưu ý:

$$\textcircled{1} \ a > 1 : \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \textcircled{2} \ 0 < a < 1 : \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Bài 5.1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{0,5}(5x+10) < \log_{0,5}(x^2+6x+8)$

b) $\log_8(4-2x) \geq 2$

c) $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \leq 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$

HD & Giải

a) $\log_{0,5}(5x+10) < \log_{0,5}(x^2+6x+8)$

Điều kiện của bất phương trình: $\begin{cases} 5x+10 > 0 \\ x^2+6x+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < -4 \text{ hoặc } x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2 (*)$

Ta có: $\log_{0,5}(5x+10) < \log_{0,5}(x^2+6x+8) \Leftrightarrow 5x+10 > x^2+6x+8 \Leftrightarrow x^2+x-2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$

Kết hợp với (*), Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-2; 1)$

b) $\log_8(4-2x) \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x > 0 \\ 4-2x \geq 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \leq -30 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -30$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; -30]$

c) $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ \log_2[(x-3)(x-2)] \leq \log_2 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-3)(x-2) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 4$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (3; 4]$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 2x+3 < 3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (2; +\infty)$

Bài 5.2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$

b) $\log_{0,2} x - \log_5(x-2) < \log_{0,2} 3$

c) $\log_x 4 \cdot \log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \geq 2$

d) $\log_3 \left[\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) \right] < 1$

HD & Giải

a) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 > 0 \\ 3x-5 < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < x < 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(\frac{5}{3}; 3 \right)$

b) Ta có: $\log_5(x-2) = -\log_{\frac{1}{5}}(x-2) = -\log_{0,2}(x-2)$

$\log_{0,2} x - \log_5(x-2) < \log_{0,2} 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \log_{0,2} x + \log_{0,2}(x-2) < \log_{0,2} 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \log_{0,2}[x(x-2)] < \log_{0,2} 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x(x-2) > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2-2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \text{ hoặc } x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (3; +\infty)$

c) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ \frac{5-12x}{12-8} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{12} < x < \frac{2}{3} (*)$

Ta có: $\log_x 4 \cdot \log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\log_2 x} \cdot \log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \geq 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \leq \log_2 x$

$$(\text{vì khi } x \in \left(\frac{5}{12}; \frac{2}{3}\right) \text{ thì } \log_2 x < 0) \Leftrightarrow \frac{5-12x}{12x-8} - x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(6x+5)(1-2x)}{12x-8} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Kết hợp với (*), vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(\frac{5}{12}; \frac{1}{2}\right]$

$$\text{d) } \log_3 \left[\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) \right] < 1 \Leftrightarrow \log_3 \left[\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) \right] < \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) < 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \Leftrightarrow 1 > x^2 - 2 > \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2 > x^2 > \frac{9}{8} \Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{2}} < |x| < \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy nghiệm của bất phương trình: } \frac{3}{2\sqrt{2}} < x < \sqrt{2} \text{ hoặc } -\sqrt{2} < x < -\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Bài 5.3. Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a) } \log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3)$$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + 2\log_3(2 - x) \geq 0$$

$$\text{c) } \log(x^2 - x - 2) < 2\log(3 - x)$$

$$\text{d) } \ln|x - 2| + \ln|x + 4| \leq 3\ln 2$$

HD & Giải

$$\text{a) } \log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ x^2 + x - 2 < x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ x^2 - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ hoặc } x > 1 \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < x < -2 \\ 1 < x < \sqrt{5} \end{cases}. \text{ Vậy tập nghiệm bất phương trình là } S = (-\sqrt{5}; -2) \cup (1; \sqrt{5})$$

b) Điều kiện: $2 - x > 0$ và $x^2 - 6x + 5 > 0$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + 2\log_3(2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) \geq -\log_3(2 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) \geq \log_{\frac{1}{3}}(2 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq (2 - x)^2 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0$$

$$\text{Do đó bất phương trình đã cho tương đương với: } \begin{cases} 2 - x > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < 1 \text{ hoặc } x > 5 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$\text{Vậy tập nghiệm bất phương trình là } S = \left[\frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\text{c) } \log(x^2 - x - 2) < 2\log(3 - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ x^2 - x - 2 < (3 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hoặc } x > 2 \\ x < 3 \\ x < \frac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 2 < x < \frac{11}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm bất phương trình là } S = (-\infty; -1) \cup \left(2; \frac{11}{5}\right)$$

$$\text{d) } \ln|x - 2| + \ln|x + 4| \leq 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln|(x - 2)(x + 4)| \leq \ln 8 \Leftrightarrow |(x - 2)(x + 4)| \leq 8$$

$$\Leftrightarrow -8 \leq x^2 + 2x - 8 \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 0 \\ -1 - \sqrt{17} \leq x \leq -1 + \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{17} \leq x \leq -2 \\ 0 \leq x \leq -1 + \sqrt{17} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = (-1 - \sqrt{17}; -2) \cup (0; -1 + \sqrt{17})$

Bài 5.4. Giải các bất phương trình sau:

a) $(2x - 7)\ln(x + 1) > 0$

b) $(x - 5)(\log x + 1) < 0$

c) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 18) + 2\log_5(x - 4) < 0$

d) $\ln(3e^x - 2) \leq 2x$

HD & Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x - 7)\ln(x + 1) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 > 0 \\ \ln(x + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{7}{2} \\ x + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{7}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 < 0 \\ \ln(x + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{2} \\ 0 < x + 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{2} \\ -1 < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-1; 0) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x - 5)(\log x + 1) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 > 0 \\ \log x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ \log x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{10} < x < 5 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 < 0 \\ \log x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ \log x > -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(\frac{1}{10}; 5\right)$

c) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 18) + 2\log_5(x - 4) < 0$. Điều kiện: $x - 4 > 0$ và $x^2 - 6x + 18 > 0$

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 18) + 2\log_5(x - 4) < 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 18) < -\log_5(x - 4)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 18) < \log_{\frac{1}{5}}(x - 4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 18 > (x - 4)^2 \Leftrightarrow 2x + 2 > 0$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x - 4 > 0 \\ x^2 - 6x + 18 > 0 \\ 2x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (4; +\infty)$

$$\text{d) } \ln(3e^x - 2) \leq 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3e^x - 2 > 0 \\ \ln(3e^x - 2) \leq \ln e^{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x > \frac{2}{3} \\ e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x > \frac{2}{3} \\ e^x \leq 1 \text{ hoặc } e^x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \geq 2 \\ \frac{2}{3} < e^x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \ln 2 \\ \ln \frac{2}{3} < x \leq 0 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left[\ln \frac{2}{3}; 0\right] \cup [\ln 2; +\infty)$

Dạng 2. Giải bất phương trình lôgarit bằng cách đặt ẩn phụ

Bài 5.5. Giải các bất phương trình sau:

a) $3 \log_x 4 + 2 \log_{4x} 4 + 3 \log_{16x} 4 \leq 0$

b) $\frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}$

c) $2 \log_2^3 x + 5 \log_2^2 x + \log_2 x - 2 \geq 0$

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) \geq -2$

HD\&Giải

a) Điều kiện: $x > 0$. $3 \log_x 4 + 2 \log_{4x} 4 + 3 \log_{16x} 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 x + 1} + \frac{3}{\log_4 x + 2} \leq 0$

Đặt $t = \log_4 x$, ($x > 0, t \neq 0, t \neq -1, t \neq -2$), ta có: $\frac{3}{t} + \frac{2}{t+1} + \frac{3}{t+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8t^2 + 16t + 6}{t(t+1)(t+2)} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < -2 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{16} \\ -\frac{3}{2} \leq t < -1 \Rightarrow \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \leq t < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$
 Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(0; \frac{1}{6}\right) \cup \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right)$

b) Đặt $t = \log_4 x$, ($x > 0$), ta có bất phương trình: $\frac{1-t}{1+2t} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -\frac{1}{2} \\ t \geq \frac{1}{4} \end{cases}$

♦ Với $t < -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_4 x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$ ♦ Với $t \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \log_4 x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$

c) $2 \log_2^3 x + 5 \log_2^2 x + \log_2 x - 2 \geq 0$. Đặt $t = \log_2 x$, ($x > 0$),

Ta có: $2t^3 + 5t^2 + t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t+2)(2t^2 + t - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq -1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) \geq -2$. Điều kiện: $6^{x+1} - 36^x > 0$

Đặt $t = 6^x$, ($t > 0$), ta có: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6t - t^2) \geq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6t - t^2 > 0 \\ 6t - t^2 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ 5 \leq t < 6 \end{cases}$

♦ Với $t \leq 1 \Rightarrow 6^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ ♦ Với $5 \leq t < 6 \Rightarrow 5 \leq 6^x < 6 \Leftrightarrow \log_6 5 \leq x < 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; 0) \cup [\log_6 5; 1)$

Bài 5.6. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$

b) $\log_{0,2}^2 x - 5 \log_{0,2} x < -6$

c) $\log_3^2 x - 5 \log_3 x + 6 \leq 0$

d) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$

HD\&Giải

a) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$. Đặt $t = \log_{0,5} x$, ($x > 0$). Bất phương trình trở thành: $t^2 + t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 1$

♦ Với $-2 \leq t \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \log_{0,5} x \leq 1 \Leftrightarrow \log_{0,5} (0,5)^{-2} \leq \log_{0,5} x \leq \log_{0,5} 0,5 \Leftrightarrow 0,5 \leq x \leq 4$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = [0, 5; 4]$

b) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$. Đặt $t = \log_{0,2} x$, ($x > 0$). Bất phương trình trở thành: $t^2 - 5t + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 3$

♦ Với $2 < t < 3 \Rightarrow 2 < \log_{0,2} x < 3 \Leftrightarrow 0,008 < x < 0,04$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = [0,008; 0,04]$

c) $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \leq 0$. Đặt $t = \log_3 x$, ($x > 0$). Bất phương trình trở thành: $t^2 - 5t + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 3$

Với $2 \leq t \leq 3 \Rightarrow 2 \leq \log_3 x \leq 3 \Leftrightarrow 9 \leq x \leq 27$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = [9; 27]$

d) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. Ta có: $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2 4x}{\log_2 x \cdot \log_2 2x} > 1 \Leftrightarrow \frac{2 + \log_2 x}{\log_2 x (1 + \log_2 x)} > 1$

Đặt $t = \log_2 x$, ($t \neq 0, t \neq -1$). Khi đó: $\frac{2+t}{t(1+t)} > 1 \Leftrightarrow \frac{-t^2+2}{t^2+t} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < t < -1 \\ 0 < t < \sqrt{2} \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} -\sqrt{2} < \log_2 x < -1 \\ 0 < \log_2 x < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < 2^{\sqrt{2}} \end{cases}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2^{\sqrt{2}})$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5.7. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_2 (x^2 - 16) \geq \log_2 (4x - 11)$

b) $\log_{\frac{1}{2}} [\log_2 (3^x + 1)] > \log_2 \frac{1}{2}$

c) $\log_x (3x - 1) > \log_x (x^2 + 1)$

d) $\log_x (5x^2 - 8x + 3) > 2$

Bài 5.8. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} < 0$

b) $\log_2 (x + 4)(x + 2) \leq 6$

c) $\log_2 x + \log_2 \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$

d) $\log_{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 \right] < \log_{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{1}{4} \right)^x - 3 \right]$

Bài 5.9. Giải các bất phương trình sau:

a) $x^{(\log_3 x + 4)} < 243$

b) $\log_{0,2} (x^2 - 4) \geq -1$

c) $\log_2 \log_{0,5} \left(2^x - \frac{15}{16} \right) \leq 2$

d) $\log_3 (16^x - 2 \cdot 12^x) \leq 2x + 1$

Kết quả

Bài 5.7.

a) $x \in [5; +\infty)$ b) $x \in (-\infty; 1)$ c) $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right) \setminus \{1\}$ d) $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Bài 5.8.

a) $x \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$ b) $x \in [-3 - \sqrt{65}; -4) \cup (-2; -3 + \sqrt{65}]$ c) $x \in (1; +\infty)$ d) $x \in (-1; +\infty)$.

Bài 5.9.

a) $x \in \left(\frac{1}{243}; 3\right]$ b) $x \in [-3; 3]$ c) $x \in [0; \log_2 31 - 4)$ d) $x \in \left(\log_{\frac{4}{3}} 2; \log_{\frac{4}{3}} 3\right]$.

ÔN TẬP

PHƯƠNG TRÌNH

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $25^x - 6.5^x + 5 = 0$

b) $2\log_2^2 x - 14\log_4 x + 3 = 0$

c) $7^{2x+1} - 8.7^x + 1 = 0$

d) $\log_2(x-3) + 2\log_4 3.\log_3 x = 2$

e) $3^{1-x} - 3^x + 2 = 0$

f) $\log_2^2 x + 3\log_2(2x) - 1 = 0$

HD & Giải

a) Đặt $t = 5^x, t > 0$. Phương trình viết lại theo t : $t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases}$

♦ Với $t = 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

♦ Với $t = 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x \in \{0; 1\}$

b) Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $2\log_2^2 x - 14\log_4 x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\log_2^2 x - 7\log_2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x \in \{\sqrt{2}; 8\}$

c) Đặt $t = 7^x, t > 0$. Phương trình viết lại theo t : $7t^2 - 8t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{7} \end{cases}$

♦ Với $t = 1 \Rightarrow 7^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

♦ Với $t = \frac{1}{7} \Rightarrow 7^x = \frac{1}{7} \Leftrightarrow x = -1$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x \in \{-1; 0\}$

d) Điều kiện: $x > 3$

Ta có: $\log_2(x-3) + 2\log_4 3.\log_3 x = 2 \Leftrightarrow \log_2(x-3) + 2\log_4 x = 2 \Leftrightarrow \log_2[(x-3)x] = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 4 \end{cases}$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 4$

e) $3^{1-x} - 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{3^x} - 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 2.3^x - 3 = 0$

Đặt $t = 3^x, t > 0$. Phương trình viết lại theo t : $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3 \end{cases}$

♦ Với $t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$

f) Điều kiện: $x > 0$. Ta có: $\log_2^2 x + 3\log_2(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 3\log_2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x \in \{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(x-1) - 2\log_4(3x-2) + 2 = 0$

b) $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$

c) $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$

d) $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$

HD & Giải

a) Điều kiện: $x > 1$ (*)

Ta có: $\log_2(x-1) - 2\log_4(3x-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x-1}{3x-2} = -2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3x-2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x-4 = 3x-2 \Leftrightarrow x = 2$

Kết hợp với (*), vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$

b) Đặt $t = 3^x, t > 0$. Phương trình viết lại theo t : $3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$

♦ Với $t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

♦ Với $t = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x \in \{-1; 0\}$

c) $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$. Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x, t > 0$

Khi đó ta được: $3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2(3t-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$

♦ Với $t = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.

d) $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{x^2-x}(2^{2x} - 4) - (2^{2x} - 4) = 0 \Leftrightarrow (2^{2x} - 4)(2^{x^2-x} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 4 = 0 \\ 2^{x^2-x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$. Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \{0; 1\}$.

Bài 3.

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 \\ 2\log_3(x-1) - \log_{\sqrt{3}}(y+1) = 0 \end{cases}$

b) Giải phương trình: $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1-\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x-2\sqrt{x}+2)$

HD & Giải

a) Điều kiện: $x > 1; y > -1$ (*)

Ta có: $\begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 \\ 2\log_3(x-1) - \log_{\sqrt{3}}(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 \\ \log_3(x-1) = \log_3(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 \\ x-1 = y+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Kết hợp với (*), vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (3; 1)$

b) Điều kiện: $0 < x < 1$ (*)

Ta có: $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1-\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x-2\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-\sqrt{x}} = x + 2(1-\sqrt{x})$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{x}{1-\sqrt{x}} + 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(1-\sqrt{x})^2} - \frac{x}{1-\sqrt{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{1-\sqrt{x}} + 1 \right) \left(\frac{x}{1-\sqrt{x}} - 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1-\sqrt{x}} - 2 = 0 \left(\text{do } \frac{x}{1-\sqrt{x}} > 0 \text{ nên } \frac{x}{1-\sqrt{x}} + 1 > 0 \right) \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x}, (t \geq 0). \text{ Khi đó: } t^2 + 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + \sqrt{3} \\ t = -1 - \sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow x = 4 - 2\sqrt{3} \text{ (thỏa (*))}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 4 - 2\sqrt{3}$

Bài 4. Giải các bất phương trình

a) $\log_2(2x) \cdot \log_3(3x) > 1$

b) $4^x - 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}} > 0$

HD\&Giải

a) Điều kiện: $x > 0$ (*)

$$\text{Ta có: } \log_2(2x) \cdot \log_3(3x) > 1 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)(1 + \log_3 x) > 1 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)(1 + \log_3 2 \cdot \log_2 x) > 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_3 2 \cdot \log_2 x + \log_2 x + \log_2 x \cdot \log_3 2 \cdot \log_2 x > 1 \Leftrightarrow \log_2 x \left[(\log_3 2) \log_2 x + \log_3 6 \right] > 0$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x. \text{ Khi đó: } t \left[t \log_3 2 + \log_3 6 \right] > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < -\log_2 6 \end{cases}$$

♦ Với $t > 0 \Rightarrow \log_2 x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

♦ Với $t < -\log_2 6 \Rightarrow \log_2 x < -\log_2 6 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{6}$

Kết hợp với (*). Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \left(0; \frac{1}{6} \right) \cup (1; +\infty)$

b) Điều kiện: $x \leq -1$ hoặc $x \geq 3$ (**)

$$\text{Ta có: } 4^x - 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}} > 0 \Leftrightarrow 4^{x-\sqrt{x^2-2x-3}} - 3 \cdot 2^{x-\sqrt{x^2-2x-3}} - 4 > 0. \text{ Đặt } t = 2^{x-\sqrt{x^2-2x-3}}, (t > 0)$$

$$\text{Khi đó: } t^2 - 3t - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t > 4 \end{cases} \Leftrightarrow t > 4$$

♦ Với $t > 4 \Rightarrow 2^{x-\sqrt{x^2-2x-3}} > 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3} < x-2 \Leftrightarrow 2 < x < \frac{7}{2}$

Kết hợp với (**). Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \left[3; \frac{7}{2} \right)$

Bài 5. Giải các phương trình

a) $4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}$

b) $\log_2(8-x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0$

HD\&Giải

a) Điều kiện: $x \geq -2$ (*)

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với: } (2^{4x} - 2^4) \left(2^{2\sqrt{x+2}} - 2^{x^3-4} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{4x} - 2^4 = 0 \quad (1) \\ 2^{2\sqrt{x+2}} - 2^{x^3-4} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } 2^{4x} - 2^4 = 0 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^4 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Giải (2): } 2^{2\sqrt{x+2}} - 2^{x^3-4} = 0 \Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x+2}} = 2^{x^3-4} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = x^3 - 4$$

Nhận xét: $x \geq \sqrt[3]{4}$. Xét hàm số $f(x) = 2\sqrt{x+2} - x^3 + 4$ trên $\left[\sqrt[3]{4}; +\infty \right)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - 3x^2 < 0, \text{ suy ra } f(x) \text{ nghịch biến trên } \left[\sqrt[3]{4}; +\infty \right)$$

Do đó phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất. Ta nhận thấy $f(2) = 0$, nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Kết hợp (*), vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x \in \{1; 2\}$.

b) Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$ (**)

$$\text{Ta có: } \log_2(8-x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0 \Leftrightarrow 8-x^2 = 4(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$$

$$\Leftrightarrow (8-x^2)^2 = 16(2+2\sqrt{1-x^2}) \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}; t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành:

$$(7+t^2)^2 = 32(1+t) \Leftrightarrow t^4 + 14t^2 - 32t + 17 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2 + 2t + 17) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

♦ Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$, thỏa mãn (**)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 0$.

Cách khác:

☞ Ta có thể giải phương trình $8-x^2 = 4(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$ bằng cách đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$. Giải ra $t = 2$.

☞ Ta có thể giải phương trình $8-x^2 = 4(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$ bằng cách đặt $u = \sqrt{1+x}$,

$v = \sqrt{1-x} \Rightarrow u^2v^2 = 1-x^2$. Giải ra $u.v = 1$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$

b) $(3+\sqrt{5})^x + 16.(3-\sqrt{5})^x = 2^{x+3}$

HD & Giải

a) $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$. Đặt $t = (\sqrt{2}-1)^x, t > 0$,

Phương trình viết lại theo t : $t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}-1$ hoặc $t = \sqrt{2}+1$

♦ Với $t = \sqrt{2}-1 \Rightarrow x = 1$

♦ Với $t = \sqrt{2}+1 \Rightarrow x = -1$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = -1$ và $x = 1$.

b) $(3+\sqrt{5})^x + 16.(3-\sqrt{5})^x = 2^{x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + 16.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8$.

Đặt $t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}, (t > 0)$.

Phương trình viết lại theo t : $t + \frac{16}{t} - 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 4$

♦ Với $t = 4 \Rightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) $(2+x-x^2)^{\sin x} = (2+x-x^2)^{2-\sqrt{3}\cos x}$

b) $\sqrt{1+\sqrt{1-2^{2x}}} = (1+2\sqrt{1-2^{2x}}).2^x$

HD & Giải

a) Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} 2+x-x^2 > 0 \\ (2+x-x^2-1)(\sin x - 2 + \sqrt{3}\cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \quad (*) \\ \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \quad (1) \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \quad (2) \end{cases} \end{cases}$$

Giải (1) ta được $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn điều kiện (*)

Giải (2): $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Để nghiệm thỏa mãn điều kiện (*) ta phải có:

$$-1 < \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left(-1 - \frac{\pi}{6} \right) < k < \frac{1}{2\pi} \left(2 - \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow k = 0, k \in \mathbb{Z} \text{ khi đó ta nhận được } x = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{\pi}{6}$.

b) Điều kiện $1 - 2^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

Như vậy $0 < 2^x \leq 1$, đặt $2^x = \sin t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$

Khi đó phương trình có dạng: $\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \sin t \left(1 + 2\sqrt{1 - \sin^2 t} \right) \Leftrightarrow \sqrt{1 + \cos t} = (1 + 2 \cos t) \sin t$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} = 2 \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} \left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{3t}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{t}{2} = 0 & (1) \\ \sin \frac{3t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{1}{2} \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1$ và $x = 0$

Bài 8. Giải các phương trình sau:

a) $2^{2x^2+1} - 9 \cdot 2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0$

b) $2^{3x} - 6 \cdot 2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1$

HD & Giải

Chia cả 2 vế phương trình cho $2^{2x+2} \neq 0$ ta được:

$$2^{2x^2-2x-1} - 9 \cdot 2^{x^2-2x-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^{2x^2-2x} - \frac{9}{4} \cdot 2^{x^2-x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x^2-2x} - 9 \cdot 2^{x^2-x} + 4 = 0$$

Đặt $t = 2^{x^2-x}$ điều kiện $t > 0$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x} = 2^2 \\ 2^{x^2-x} = 2^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 2 \\ x^2 - x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

b) $2^{3x} - 6 \cdot 2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1 \Leftrightarrow \left(2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}} \right) - 6 \left(2^x - \frac{2}{2^x} \right) = 1 \quad (1)$

Đặt $t = 2^x - \frac{2}{2^x} \Rightarrow 2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}} = \left(2^x - \frac{2}{2^x} \right)^3 + 3 \cdot 2^x \left(2^x - \frac{2}{2^x} \right) = t^3 + 6t$

Khi đó phương trình (1) có dạng: $t^3 + 6t - 6t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} = 1$

Đặt $u = 2^x, u > 0$ khi đó phương trình (2) có dạng:

$$u - \frac{u}{2} = 1 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1(1) \\ u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow u = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

Bài 9. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } 4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1 \quad \text{b) } \frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{2^x}{2^x+2} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$$

HD\>Giải

$$\text{a) } 4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1 \Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2} + 4^{2x^2+6x+5} = 4^{x^2-3x+2} \cdot 4^{2x^2+6x+5} + 1$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 4^{x^2-3x+2} \\ v = 4^{2x^2+6x+5} \end{cases}, u, v > 0$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } u + v = uv + 1 \Leftrightarrow (u-1)(1-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-3x+2} = 1 \\ 4^{2x^2+6x+5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 = 0 \\ 2x^2+6x+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = -1, x = 1, x = 2$ và $x = -5$

$$\text{b) } \frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{2^x}{2^x+2} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2} \Leftrightarrow \frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{1}{2^{1-x}+1} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = 2^{x-1}+1 \\ v = 2^{1-x}+1 \end{cases}, u, v > 1. \text{ Nhận xét rằng: } u \cdot v = (2^{x-1}+1) \cdot (2^{1-x}+1) = 2^{x-1} + 2^{1-x} + 2 = u + v$$

$$\text{Phương trình tương đương với hệ: } \begin{cases} \frac{8}{u} + \frac{1}{v} = \frac{18}{u+v} \\ u+v = uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+8v = 18 \\ u+v = uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 2 \\ u = 9; v = \frac{9}{8} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge \text{ Với } u = v = 2, \text{ ta được: } \begin{cases} 2^{x-1}+1 = 2 \\ 2^{1-x}+1 = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 1 & \blacklozenge \text{ Với } u = 9 \text{ và } v = \frac{9}{8}, \text{ ta được: } \begin{cases} 2^{x-1}+1 = 9 \\ 2^{1-x}+1 = \frac{9}{8} \end{cases} &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = 4$

Bài 10. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } 2^{2x} - \sqrt{2^x+6} = 6 \quad \text{b) } \log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$$

HD\>Giải

$$\text{a) } 2^{2x} - \sqrt{2^x+6} = 6. \text{ Đặt } u = 2^x, \text{ điều kiện } u > 0. \text{ Khi đó phương trình thành: } u^2 - \sqrt{u+6} = 6$$

$$\text{Đặt } v = \sqrt{u+6}, \text{ điều kiện } v \geq \sqrt{6} \Rightarrow v^2 = u+6$$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^2 = v+6 \\ v^2 = u+6 \end{cases} \Leftrightarrow u^2 - v^2 = -(u-v) \Leftrightarrow (u-v)(u+v+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u-v = 0 \\ u+v+1 = 0 \end{cases}$$

$$\blacklozenge \text{ Với } u = v, \text{ ta có: } u^2 - u - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ u = -2(\text{loại}) \end{cases} \Rightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$$

$$\blacklozenge \text{ Với } u + v + 1 = 0, \text{ ta có: } u^2 + u - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ u = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}(\text{loại}) \end{cases} \Rightarrow 2^x = \frac{\sqrt{21}-1}{2} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{\sqrt{21}-1}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 8$ và $x = \log_2 \frac{\sqrt{21}-1}{2}$.

b) $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$ (1). Đặt $u = \log_2 x$. Khi đó phương trình thành: $u^2 + \sqrt{u+1} = 1$ (2)

Điều kiện: $\begin{cases} u+1 \geq 0 \\ 1-u^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq u \leq 1$. Đặt $v = \sqrt{u+1}$ điều kiện $0 \leq v \leq \sqrt{2} \Rightarrow v^2 = u+1$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^2 = 1-v \\ v^2 = 1+u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = -(u+v) \Leftrightarrow (u+v)(u-v+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 0 \\ u-v+1 = 0 \end{cases}$$

♦ Với $v = -u$ ta được: $u^2 - u - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ (1)

♦ Với $u - v + 1 = 0$ ta được: $u^2 + u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $x = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$, $x = 1$ và $x = \frac{1}{2}$

Bài 11. Giải các phương trình sau:

a) $\lg^2 x - \lg x \cdot \log_2(4x) + 2 \log_2 x = 0$

b) $2 \log_4(x^2 - x) + 3\sqrt{\log_4(x+1)^2} - 2 \log_4 x = 4$

HD & Giải

a) Điều kiện: $x > 0$

Biến đổi phương trình về dạng: $\lg^2 x - (2 + \log_2 x) \lg x + 2 \log_2 x = 0$

Đặt $t = \lg x$, khi đó phương trình trở thành: $t^2 - (2 + \log_2 x) \cdot t + 2 \log_2 x = 0$

Ta có: $\Delta = (2 + \log_2 x)^2 - 8 \log_2 x = (2 - \log_2 x)^2$. Suy ra phương trình có nghiệm: $\begin{cases} t = 2 \\ t = \log_2 x \end{cases}$.

♦ Với $t = 2 \Rightarrow \lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$

♦ Với $t = \log_2 x \Rightarrow \lg x = \frac{\lg x}{\lg 2} \Leftrightarrow \lg x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 100$ và $x = 1$.

b) Điều kiện: $x \geq 2$

$$2 \log_4(x^2 - x) + 3\sqrt{\log_4(x+1)^2} - 2 \log_4 x = 4 \Leftrightarrow 2 \log_4[x(x-1)] + 3\sqrt{2 \log_4(x+1)} - 2 \log_4 x = 4$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_4(x-1) + 3\sqrt{2 \log_4(x+1)} - 4 = 0. \text{ Đặt } t = \sqrt{2 \log_4(x-1)}, t \geq 0.$$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases}$

♦ Với $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 \log_4(x-1)} = 1 \Leftrightarrow \log_4(x-1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

Bài 12. Giải các phương trình sau:

a) $\log_2[x(x-1)^2] + \log_2 x \cdot \log_2(x^2 - x) - 2 = 0$

b) $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 3 \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 2$

HD & Giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x(x-1)^2 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_2 \frac{(x^2 - x)^2}{x} + \log_2 x \cdot \log_2 (x^2 - x) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \log_2 (x^2 - x) + \log_2 x \cdot \log_2 (x^2 - x) - 2 = 0$$

Đặt $\begin{cases} u = \log_2 (x^2 - x) \\ v = \log_2 x \end{cases}$. Khi đó phương trình trở thành: $2u + v - uv - 2 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(v-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 (x^2 - x) = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 2$ và $x = 4$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = \log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ v = \log_2 (x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{cases}$

Nhận xét rằng: $u + v = \log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_2 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_2 (x^2 - (x^2 - 1)) = \log_2 1 = 0$

Khi đó phương trình được chuyển thành:

$$\begin{cases} u + v = 0 \\ u + 3v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -v \\ 2v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 (x - \sqrt{x^2 - 1}) = -1 \\ \log_2 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{5}{4}$

Bài 13. Giải các phương trình sau:

a) $\log_2 (x^2 - 4) + x = \log_2 [8(x+2)]$

b) $2 \log_6 (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 x$

HD & Giải

a) $\log_2 (x^2 - 4) + x = \log_2 [8(x+2)]$. Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_2 (x^2 - 4) - \log_2 (x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 3 - x \Leftrightarrow \log_2 (x - 2) = 3 - x$$

Nhận xét rằng:

- ♦ Hàm số $y = \log_2 (x - 2)$ là hàm đồng biến
- ♦ Hàm số $y = 3 - x$ là hàm nghịch biến
- ♦ Vậy phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất
- ♦ Nhận xét rằng $x = 3$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

b) Điều kiện $x > 0$.

Ta có: $2 \log_6 (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 x \Leftrightarrow \log_6 (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \frac{1}{2} \log_4 x \Leftrightarrow \log_6 (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$

Đặt $t = \log_6 (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 6^t \\ \sqrt{x} = 4^t \end{cases} \Rightarrow 4^t + \sqrt{4^t} = 6^t \Leftrightarrow 4^t + 2^t = 6^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1 \quad (1)$

Xét hàm số: $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t$. Ta có: $f'(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t \ln \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^t \ln \frac{1}{3} < 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta lại có: $f(1) = 1$ suy ra phương (1) có nghiệm duy nhất $t = 1$.

♦ Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 16$.

Bài 14. Giải phương trình: $\log_{\sqrt[5]{5}}(x^2 - 2x - 3) = 2 \log_2(x^2 - 2x - 4)$

HD & Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 2x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 - \sqrt{5} \\ x > 1 + \sqrt{5} \end{cases}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_{\sqrt[5]{5}}(x^2 - 2x - 3) = \log_2(x^2 - 2x - 4) \Leftrightarrow \log_5(x^2 - 2x - 3) = \log_4(x^2 - 2x - 4) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 2x - 4 \text{ khi đó } (1) \Leftrightarrow \log_5(t + 1) = \log_4 t \quad (2)$$

Đặt $y = \log_4 t \Rightarrow t = 4^y$ phương trình (2) được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} t = 4^y \\ t + 1 = 5^y \end{cases} \Rightarrow 4^y + 1 = 5^y \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y = 1 \quad (3). \text{ Hàm số } f(y) = \left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y \text{ là hàm nghịch biến}$$

Ta có:

♦ Với $y = 1, f(1) = 1$ do đó $y = 1$ là nghiệm của phương trình (3)

♦ Với $y > 1, f(y) < f(1) = 1$ do đó phương trình (3) vô nghiệm.

♦ Với $y < 1, f(y) > f(1) = 1$ do đó phương trình (3) vô nghiệm

Vậy $y = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3)

$$\text{♦ Với } y = 1 \Rightarrow t = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$ và $x = -2$

Bài 15. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + 3^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}$

b) $3^{\log_2 x} + x = 2$

HD & Giải

a) $x^2 + 3^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}$. Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$. Điều kiện: $x > 0$

Khi đó phương trình có dạng: $(2^t)^2 + 3^t = (2^t)^{\log_2 5} \Leftrightarrow 4^t + 3^t = 5^t$

Chia cả hai vế cho $5^t \neq 0$ ta được: $\left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t = 1$

♦ Xét hàm số: $f(t) = \left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t$. Ta có: $f'(t) = \left(\frac{4}{5}\right)^t \ln \frac{4}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^t \ln \frac{3}{5} < 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

♦ Vế phải của phương trình là một hàm hằng

♦ Do vậy nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

♦ Nhận xét rằng $t = 2$ là nghiệm của phương trình (2) vì $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$

♦ Với $t = 2 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình

b) $3^{\log_2 x} + x = 2$. Điều kiện: $x > 0$, đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$

Khi đó ta được: $3^t + 2^t = 2$

- ♦ Xét hàm số: $f(t) = 3^t + 2^t$. Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + 2^t \ln 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- ♦ Vế phải của phương trình là một hàm hằng
- ♦ Do vậy nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất
- ♦ Nhận xét rằng $t = 0$ là nghiệm của phương trình (2) vì $3^0 + 2^0 = 2$
- ♦ Với $t = 0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Bài 16. Giải phương trình: $\log_3 \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2 \right) + \left(\frac{1}{5} \right)^{3x - x^2 - 1} = 2$ (1)

HD & Giải

Điều kiện: $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2}; u \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = u^2 \Leftrightarrow 3x - x^2 - 1 = 1 - u^2$

Khi đó (1) có dạng: $\log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5} \right)^{1 - u^2} = 2$ (2)

♦ Xét hàm số $f(u) = \log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5} \right)^{1 - u^2} = \log_3(u + 2) + \frac{1}{5} \cdot 5^{u^2}$. Tập xác định $D = [0; +\infty)$

Đạo hàm: $f'(u) = \frac{1}{(u + 2)\ln 3} + \frac{1}{5} \cdot 2u \cdot 5^{u^2} \cdot \ln 5 > 0, \forall u \in D$. Suy ra hàm số đồng biến trên D

- ♦ Vế phải của phương trình là một hàm hằng
- ♦ Do vậy nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

Mặt khác $f(1) = \log_3(1 + 2) + \frac{1}{5} \cdot 5 = 2$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 17. Giải các phương trình sau:

a) $1 - 4^x + 2^{x+1} = 2^x + 2^{-x}$

b) $\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2$

HD & Giải

a) $1 - 4^x + 2^{x+1} = 2^x + 2^{-x} \Leftrightarrow 2 - (4^x - 2 \cdot 2^x + 1) = 2^x + 2^{-x} \Leftrightarrow 2 - (2^x - 1)^2 = 2^x + 2^{-x}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$

Mặt khác, ta có: $2 - (2^x - 1)^2 \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó: $2 - (2^x - 1)^2 = 2^x + 2^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - (2^x - 1)^2 = 2 \\ 2^x + 2^{-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 = 0 \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$

b) Điều kiện: $x > 0$. Ta có: $\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2 \Leftrightarrow \log_3 \left(1 + x + \frac{1}{x} \right) = 1 - (x - 1)^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\log_3 \left(1 + x + \frac{1}{x} \right) \geq \log_3 \left(1 + 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \right) = \log_3 3 = 1$

Mặt khác, ta có: $1 - (x - 1)^2 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Do đó: } \log_3 \left(1 + x + \frac{1}{x} \right) = 1 - (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \left(1 + x + \frac{1}{x} \right) = 1 \\ 1 - (x-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x + \frac{1}{x} = 3 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

Lưu ý: Giải phương trình bằng phương pháp đánh giá:

Giải phương trình mũ và lôgarit dạng $f(x) = g(x)$, ta có thể sử dụng bất đẳng thức để đánh giá:

$$f(x) \leq c \leq g(x), \text{ với } c \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó: } f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = c \\ g(x) = c \end{cases}$$

Bài 18. Giải phương trình sau: $2^{x^2-x} + 9^{3-2x} + x^2 + 6 = 4^{2x-3} + 3^{x-x^2} + 5x$

HD & Giải

$$\text{Ta có: } 2^{x^2-x} + 9^{3-2x} + x^2 + 6 = 4^{2x-3} + 3^{x-x^2} + 5x \Leftrightarrow 2^{x^2-x} + x^2 - x - 3^{x-x^2} = 2^{4x-6} + 4x - 6 - 3^{6-4x}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = 2^t + t - 3^{-t}$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 2^t + t - 3^{-t} = 2^t \ln 2 + 1 + 3^{-t} \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ là hàm số đồng biến.}$$

$$\text{Khi đó: } f(x^2 - x) = f(4x - 6) \Leftrightarrow x^2 - x = 4x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{2; 3\}$

Lưu ý: Phương trình được đưa về phương trình dạng $f(u) = g(v)$

Giải phương trình mũ và lôgarit dạng $f(u) = g(v)$, ta có thể sử dụng tính đơn điệu của hàm số:

Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên D . Khi đó: $f(u) = g(v) \Leftrightarrow u = v, \forall u, v \in D$

Bài 19. Giải các hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} \log_2 (3y-1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 1 + \log_2 (xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases}$$

HD & Giải

$$\text{a) } \begin{cases} \log_2 (3y-1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases}. \text{ Điều kiện: } y > \frac{1}{3} (*)$$

$$\text{Hệ đã cho tương đương: } \begin{cases} 3y-1 = 2^x \\ (2^x)^2 + 2^x = 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-1 = 2^x \\ (3y-1)^2 + 3y-1 = 3y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-1 = 2^x \\ 6y^2 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-1 = 2^x \\ y = \frac{1}{2} \text{ hoặc } y = 0 (\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với } (*), \text{ hệ đã cho có nghiệm } (x; y) = \left(-1; \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 1 + \log_2 (xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases}. \text{ Điều kiện: } xy > 0 (**)$$

$$\text{Hệ đã cho tương đương: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với } (**), \text{ hệ đã cho có nghiệm: } (x; y) = (2; 2) \text{ và } (x; y) = (-2; -2)$$

Bài 20. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 5(\log_x y + \log_y x) = 26 \\ xy = 64 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + \log_3 y = 3 \\ (2y^2 - y + 12) \cdot 3^x = 81y \end{cases}$$

HD & Giải

$$a) \begin{cases} 5(\log_x y + \log_y x) = 26 & (1) \\ xy = 64 & (2) \end{cases} \cdot \text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Đặt } t = \log_x y \Rightarrow \log_y x = \frac{1}{t}. (1) \Leftrightarrow 5\left(t + \frac{1}{t}\right) = 26 \Leftrightarrow 5t^2 - 26t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } t = 5 \Rightarrow \log_x y = 5 \Leftrightarrow y = x^5. \text{ Do đó, ta có: } \begin{cases} y = x^5 \\ xy = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 32 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } t = \frac{1}{5} \Rightarrow \log_x y = \frac{1}{5} \Leftrightarrow y = \sqrt[5]{x}. \text{ Do đó, ta có: } \begin{cases} y = \sqrt[5]{x} \\ xy = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ y = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với (*), hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (2; 32)$ và $(x; y) = (32; 2)$

$$b) \begin{cases} x + \log_3 y = 3 & (1) \\ (2y^2 - y + 12) \cdot 3^x = 81y & (2) \end{cases} \cdot \text{Điều kiện: } y > 0 (*)$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow x = 3 - \log_3 y \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{27}{y} \Leftrightarrow 3^x = \frac{27}{y}. \text{ Thế vào (2), ta được:}$$

$$(2) \Leftrightarrow (2y^2 - y + 12) \cdot \frac{27}{y} = 81y \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 (\text{loại}) \\ y = 3 \end{cases}$$

Với $y = 3 \Rightarrow x = 2$. Vậy hệ đã cho có 1 nghiệm $(x; y) = (2; 3)$.

Bài 21. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \log^2 x = \log^2 y + \log^2 xy \\ \log^2 (x - y) + \log x \log y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3^{\log x} = 4^{\log y} \\ (4x)^{\log 4} = (3y)^{\log 3} \end{cases}$$

HD & Giải

$$a) \begin{cases} \log^2 x = \log^2 y + \log^2 xy & (1) \\ \log^2 (x - y) + \log x \log y = 0 & (2) \end{cases} \cdot \text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases} (*)$$

$$(1) \Leftrightarrow \log^2 x = \log^2 y + (\log x + \log y)^2 \Leftrightarrow 2 \log^2 y + 2 \log x \cdot \log y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log y = 0 \\ \log x + \log y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\odot \text{ Với } y = 1, \text{ thế vào (2), ta được: } \log^2 (x - 1) + \log x \log 1 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (nhận)}$$

$$\odot \text{ Với } y = \frac{1}{x}, \text{ thế vào (2), ta được: } \log^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) + \log x \log \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \log^2 \frac{x^2 - 1}{x} - \log^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log \frac{x^2 - 1}{x} = \log x \\ \log \frac{x^2 - 1}{x} = -\log x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x^2 \text{ (vô nghiệm)} \\ \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

So với (*), nhận $x = \sqrt{2}$ và suy ra $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (2; 1)$ và $(x; y) = \left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) Điều kiện: $x > 0, y > 0$ (*)

Khi đó, lấy lôgarit cơ số 10 hai vế, ta được:

$$\begin{cases} \log x \cdot \log 3 = \log y \cdot \log 4 \\ \log 4 \cdot \log 4x = \log 3 \cdot \log 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x \cdot \log 3 = \log y \cdot \log 4 \\ \log 4 \cdot (\log 4 + \log x) = \log 3 \cdot (\log 3 + \log y) \end{cases}$$

Đặt $u = \log x, v = \log y$, ta có hệ:
$$\begin{cases} u \cdot \log 3 = v \cdot \log 4 \\ \log 4 \cdot (\log 4 + u) = \log 3 \cdot (\log 3 + v) \end{cases}$$

Giải hệ, ta được:
$$\begin{cases} u = -\log 4 \\ v = -\log 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$
. So với (*), hệ đã cho có 1 nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$

Bài 22. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \log_2 x + 3\sqrt{5 - \log_3 y} = 5 \\ 3\sqrt{\log_2 x - 1} - \log_3 y = -1 \end{cases}$$

HD & Giải

a)
$$\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 & (1) \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 & (2) \end{cases}$$
. Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 1$ (*)

$(2) \Leftrightarrow \log_4 x = \log_2 y \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 x = \log_2 y \Leftrightarrow x = y^2$

Do $y \geq 1$, nên: $(1) \Leftrightarrow x - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 (x = 1) \\ y = 3 (x = 9) \end{cases}$

Vậy, hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (1; 1)$ và $(x; y) = (9; 3)$

b)
$$\begin{cases} \log_2 x + 3\sqrt{5 - \log_3 y} = 5 \\ 3\sqrt{\log_2 x - 1} - \log_3 y = -1 \end{cases}$$
. Điều kiện: $x \geq 2, 0 < y \leq 3^5$ (*)

Đặt:
$$\begin{cases} u = \sqrt{\log_2 x - 1} \\ v = \sqrt{5 - \log_3 y} \end{cases} (u, v \geq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 1 = \log_2 x \\ 5 - v^2 = \log_3 y \end{cases}$$

Hệ đã cho trở thành:
$$\begin{cases} u^2 + 1 + 3v = 5 \\ 3u - (5 - v^2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 3v = 4 \\ v^2 + 3u = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u - v)(u + v - 3) = 0 \\ u^2 + 3v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + 3v - 4 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u + v - 3 = 0 \\ u^2 + 3v - 4 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -4 \\ v = -4 \end{cases} \text{ (loại)}. \text{ Với } \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_3 y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 81 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy, hệ đã cho có 1 nghiệm $(x; y) = (4; 81)$.

Bài 23. Giải các bất phương trình sau:

a)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_1(x^2 - 3x + 1)} < 1$$

b)
$$4x^2 + 3.3^{\sqrt{x}} + x.3^{\sqrt{x}} < 2x^2.3^{\sqrt{3}} + 2x + 6$$

c)
$$\log_x 4 \cdot \log_2 \frac{5 - 12x}{12x - 8} \geq 2$$

d)
$$\log_2 \log_{0.5} \left(2^x - \frac{15}{16}\right) \leq 2$$

HD & Giải

a) Điều kiện: $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Vì $0 < \frac{1}{2} < 1$ và $1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+1)} < 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+1) > 0 \Leftrightarrow x^2-3x+1 > 1 \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

Kết hợp điều kiện, nghiệm của bất phương trình đã cho là: $0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3$

b) $4x^2 + 3 \cdot 3^{\sqrt{x}} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{3}} + 2x + 6 \Leftrightarrow (3+x-2x^2)3^{\sqrt{x}} - 2(x-2x^2+3) < 0$

$$\Leftrightarrow (-2x^2+x+3)(3^{\sqrt{x}}-2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+x+3 > 0 \\ 3^{\sqrt{x}}-2 < 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad (1) \text{ hoặc } \begin{cases} -2x^2+x+3 < 0 \\ 3^{\sqrt{x}}-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\bullet (1) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{3}{2} \\ x < \log_3^2 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < \log_3^2 2 \left(\text{vì } \log_3^2 2 < 1 < \frac{3}{2} \right) \\ x > 0 \end{cases} \quad \bullet (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hoặc } x > \frac{3}{2} \\ x > \log_3^2 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $0 \leq x < \log_3^2 2$ hoặc $x > \frac{3}{2}$

c) Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ \frac{5-12x}{12x-8} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{12} < x < \frac{2}{3}$. Ta có: $\log_x 4 \cdot \log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \geq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\log_2 x} \cdot \log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \geq 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{5-12x}{12x-8} \geq 2 \log_2 x \left(\text{vì khi } x \in \left(\frac{5}{12}; \frac{2}{3}\right) \text{ thì } \log_2 x < 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-12x}{12x-8} - x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(6x+5)(1-2x)}{12x-8} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, vậy nghiệm của bất phương trình là $\frac{5}{12} < x \leq \frac{1}{2}$

d) $\log_2 \log_{0,5} \left(2^x - \frac{15}{16}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 0 < \log_{0,5} \left(2^x - \frac{15}{16}\right) \leq 4 \Leftrightarrow 1 > 2^x - \frac{15}{16} \geq (0,5)^4 \Leftrightarrow \frac{31}{16} > 2^x \geq 1$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{31}{16} > x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \log_2 31 - 4. \text{ Vậy nghiệm của bất phương trình là } 0 \leq x < \log_2 31 - 4.$$

Bài 24. Giải các bất phương trình sau:

a) $(0,5)^{\frac{1}{x}} \geq 0,0625$

b) $\log_{0,2}(x^2-4) \geq -1$

c) $\log_3(16^x - 2 \cdot 12^x) \leq 2x+1$

d) $0,3^{\log_{\frac{1}{5}} \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2}} > 1$

HD & Giải

a) Ta có: $(0,5)^{\frac{1}{x}} \geq 0,0625 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1-4x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x < 0 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$

b) Điều kiện: $x > 2$ hoặc $x < -2$

Ta có: $\log_{0,2}(x^2 - 4) \geq -1 \Leftrightarrow \log_{0,2}(x^2 - 4) \geq \log_{0,2}(0,2)^{-1} \Leftrightarrow \log_{0,2}(x^2 - 4) \geq \log_{0,2} 5$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3.$$

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-3; -2) \cup (2; 3]$

$$\text{c) } \log_3(16^x - 2 \cdot 12^x) \leq 2x + 1 \Leftrightarrow 0 < 16^x - 2 \cdot 12^x \leq 3^{2x+1} \Leftrightarrow 0 < 4^{2x} - 2 \cdot 4^x \cdot 3^x \leq 3^{2x} \cdot 3 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^x \leq 3$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{4}{3}\right)^x, t > 0, \text{ ta có hệ bất phương trình: } \begin{cases} t^2 - 2t \leq 3 \\ t^2 - 2t > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq 3 \\ t < 0 \text{ hoặc } t > 2 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < t \leq 3$$

$$\text{♦ Với } 2 < t \leq 3 \Rightarrow 2 < \left(\frac{4}{3}\right)^x \leq 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{4}{3}} 2 < x \leq \log_{\frac{4}{3}} 3.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(\log_{\frac{4}{3}} 2; \log_{\frac{4}{3}} 3\right]$

$$\text{d) } 0,3^{\frac{\log_1 \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2}}{5}} > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2} < 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2} > 1 \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x^2+2} > 2 \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x}{x^2+2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(0; \frac{3}{2}\right)$

Bài 25. Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a) } \log_5(4^x + 144) - 4 \log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1) \quad \text{b) } 2 \log_3(4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) \leq 2$$

HD & Giải

$$\text{a) } \log_5(4^x + 144) - 4 \log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1) \Leftrightarrow \log_5 \frac{4^x + 144}{2^{x-2} + 1} < \log_5(5 \cdot 2^4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^x + 144}{2^{x-2} + 1} < 80 \Leftrightarrow 4^x + 144 = 80 \cdot 2^{x-2} + 80. \text{ Đặt } t = 2^x > 0$$

Khi đó, ta có: $t^2 - 20t + 64 < 0 \Leftrightarrow 4 < t < 16$

$$\text{♦ Với } 4 < t < 16 \Rightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4. \text{ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: } S = (2; 4)$$

$$\text{b) Điều kiện: } x > \frac{3}{4}. \quad 2 \log_3(4x - 3) - \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(4x - 3)^2}{2x + 3} \leq 9 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3$$

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(\frac{3}{4}; 3\right]$

CHƯƠNG II

HÀM SỐ LŨY THỪA – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LÔGARIT

---o0o---

§1. LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. LŨY THỪA

♦ $a^n = \underbrace{a.a...a}_n$ thừa số ♦ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^0 = 1$ ♦ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$ ♦ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$	♦ $a^\alpha > 0$ ♦ $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ ♦ $(a.b)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha$ ♦ $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$	①. $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ ②. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, (b > 0)$ ③. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ ④. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$ ⑤. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ a , & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$ ⑥. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
--	---	---

II. HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Định nghĩa

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α :

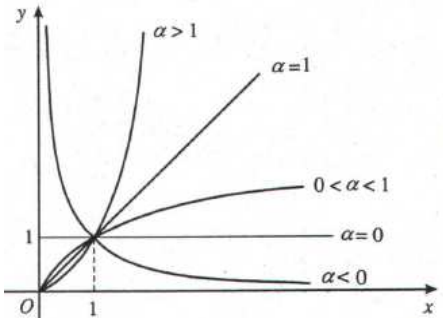
- ♦ Với α nguyên dương, tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- ♦ Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ♦ Với α không nguyên, tập xác định là $D = (0; +\infty)$. **Lưu ý:** $y = x^\alpha, \alpha = \frac{1}{n}, n$ là số chẵn. $D = [0; +\infty)$.

3. Đạo hàm

Hàm số $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Công thức tính đạo hàm của hàm hợp đối với hàm số lũy thừa có dạng: $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} . u'$

4. Tính chất của hàm số lũy thừa trên khoảng $(0; +\infty)$

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Đạo hàm	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
Chiều biến thiên	Hàm số luôn đồng biến	Hàm số luôn nghịch biến
Tiệm cận	Không có	Tiệm cận ngang là trục Ox , tiệm cận đứng là trục Oy
Đồ thị	Đồ thị luôn đi qua điểm $(1;1)$ Hình dạng đồ thị ứng với các giá trị khác nhau của α 	

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho a, b là những số thực dương. Tính $J = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

A. $J = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$.

B. $J = 1$.

C. $J = \sqrt[3]{ab}$.

D. $J = ab$.

Câu 2: Với $a \neq 0, b \neq 0$. Tính $H = (a^2 + b^2)(a^{-2} + b^{-2})^{-1}$.

A. $H = a^2b^2$.

B. $H = ab$.

C. $H = a^2 + b^2$.

D. $H = a^2 - b^2$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{1}{4}}$.

A. $D = (-\infty; 0) \cup (1; 2)$.

B. $D = (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = (1; 2)$.

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt[8]{x}$.

A. $D = [0; +\infty)$.

B. $D = (0; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D. $D = (-\infty; 0]$.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = (5 - x)^{\sqrt{3}}$.

A. $y' = \sqrt{3}(5 - x)^{\sqrt{3}+1}$.

B. $y' = -\sqrt{3}(5 - x)^{\sqrt{3}+1}$.

C. $y' = -\sqrt{3}(5 - x)^{\sqrt{3}-1}$.

D. $y' = \sqrt{3}(5 - x)^{\sqrt{3}}$.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[n]{x^m}$.

A. $y' = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}}$.

B. $y' = \frac{n}{m} \sqrt[n]{x^{m-n}}$.

C. $y' = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{n-m}}$.

D. $y' = \frac{m}{n} \sqrt[m]{x^{m-n}}$.

Câu 7: Cho a, b là những số thực dương. Tính $P = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$.

A. $P = \sqrt[4]{b}$.

B. $P = \sqrt[4]{a}$.

C. $P = a$.

D. $P = b$.

Câu 8: Tính $K = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5}$.

A. $K = -25$.

B. $K = 8$.

C. $K = 12$.

D. $K = 10$.

Câu 9: Tính $J = 0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}} + (9^0)^2$.

A. $J = 10$.

B. $J = \frac{211}{16}$.

C. $J = \frac{1}{16}$.

D. $J = \frac{111}{16}$.

Câu 10: Xét hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ trên khoảng $(0; +\infty)$, với $\alpha > 0$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số luôn đồng biến.

B. Hàm số luôn nghịch biến.

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$.

D. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

Câu 11: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-2}$.

A. $D = (1; +\infty)$.

B. $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $D = (-1; 1)$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Câu 12: Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$

B. $\sqrt[3]{10} > \sqrt[5]{20}$.

C. $\sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{7}$

D. $\sqrt[4]{13} > \sqrt[5]{23}$

Câu 13: Cho b là số thực dương. Tính $H = \frac{b^{\frac{1}{5}} \left(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}} \right)}{b^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}} \right)}$.

- A. $H = b$. B. $H = 1$. C. $H = b + 1$. D. $H = b - 1$.

Câu 14: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

- A. $D = (-2; 2)$. B. $D = [-2; 2]$.
C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Câu 15: Cho a là số thực dương. Tính $M = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2} \right)^{\sqrt{2}+2}}$.

- A. $M = a$. B. $M = a^5$. C. $M = 1$. D. $M = a^3$.

Câu 16: Cho a, b là những số thực dương. Tính $L = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)^2$.

- A. $L = \frac{1}{b}$. B. $L = \frac{1}{a}$. C. $L = a + b$. D. $L = a - b$.

Câu 17: Cho a là số thực dương. Tính $N = \frac{\left(a^{\sqrt{3}-1} \right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}}$.

- A. $N = \frac{1}{a}$. B. $N = a^2$. C. $N = a$. D. $N = 1$.

Câu 18: Cho a, b là những số thực dương. Tính $P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 b^2} \right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$.

- A. $P = a$. B. $P = ab$. C. $P = \frac{a}{b}$. D. $P = b$.

Câu 19: Tính $L = (-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}$.

- A. $L = 0$. B. $L = 1$. C. $L = 100$. D. $L = 10$.

Câu 20: Tính $P = \left(\frac{1}{3} \right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + 128^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-9}$.

- A. $P = 1$. B. $P = 12$. C. $P = 8$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 21: Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α .

Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. Với α không nguyên, tập xác định là $\mathbb{R}$.
B. Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.
C. Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
D. Với α không nguyên, tập xác định là $(0; +\infty)$.

Câu 22: Tìm tập xác định D của hàm số $y = x^{\frac{1}{4}}$.

- A. $D = (-\infty; 0]$. B. $D = [0; +\infty)$. C. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $D = (0; +\infty)$.

Câu 23: Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2\sqrt[3]{7}$. B. $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$.
C. $\sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > \sqrt[3]{64}$ D. $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}} < \sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$.

Câu 24: Tính $H = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

- A. $H = \frac{1}{3}$. B. $H = 4$. C. $H = 12$. D. $H = 18$.

Câu 25: Cho a là số thực dương. Tính $Q = \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}}$.

- A. $Q = 0$. B. $Q = \frac{1}{a}$. C. $Q = 2a$. D. $Q = 2$.

Câu 26: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi} < \left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$. B. $7^{30} > 4^{40}$. C. $3^{600} > 5^{400}$. D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}} < \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}}$.

Câu 27: Cho n là số thực dương. Tính $H = \frac{2n^{\frac{1}{3}} \left(3n^{\frac{1}{3}} - 4n^{\frac{4}{3}} \right)}{2n^{\frac{1}{3}}}$.

- A. $H = 4n - 3n^2$. B. $H = 3n - 4n^2$. C. $H = 2n$. D. $H = 3n - 4n^4$.

Câu 28: Cho a, b là những số thực dương. Tính $N = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \right) \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab} \right)$.

- A. $N = 1$. B. $N = \frac{a}{b}$. C. $N = a + b$. D. $N = a - b$.

Câu 29: Xét hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, với $\alpha < 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số luôn nghịch biến. B. Hàm số luôn đồng biến.
C. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận. D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha} = +\infty$.

Câu 30: Cho a là số thực dương. Tính $K = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$.

- A. $K = a^2$. B. $K = a + 1$. C. $K = 1$. D. $K = a$.

Câu 31: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$.

- A. $D = (-\infty; 1)$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. C. $D = (1; +\infty)$. D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 32: Tính $M = 4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}}$.

- A. $M = 2$. B. $M = 16$. C. $M = 32$. D. $M = 8$.

Câu 33: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{\sqrt{2}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

B. $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = (-1; 2)$.

Câu 34: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

A. $D = (-4; 1)$.

B. $D = (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

C. $D = [-4; 1]$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

Câu 35: Tính $N = (25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$.

A. $N = \frac{4}{5}$.

B. $N = \frac{2}{5}$.

C. $N = \frac{24}{5}$.

D. $N = \frac{1}{5}$.

Câu 36: Cho $a > 0$. Tính $I = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$.

A. $I = a + 1$.

B. $I = \frac{1}{a}$.

C. $I = 1$.

D. $I = a$.

Câu 37: Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn đồng biến trên toàn tập xác định của nó?

A. $y = x^{\frac{2}{3}}$.

B. $y = x^2$.

C. $y = x^{-3}$.

D. $y = \sqrt[5]{x}$.

Câu 38: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt[3]{5x + 4}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = [0; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{5} \right\}$.

D. $D = \left[-\frac{4}{5}; +\infty \right)$.

Câu 39: Cho a, b là những số thực dương. Tính $Q = \left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab} \right) : \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \right)^2$.

A. $Q = a + b$.

B. $P = \sqrt[3]{ab}$.

C. $P = 0$.

D. $Q = 1$.

Câu 40: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 + x - 2)^{-2}$.

A. $D = (-2; 1)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

C. $D = [-2; 1]$.

D. $D = (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

Câu 41: Tính $I = 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125} \right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32} \right)^{-\frac{3}{5}}$.

A. $I = 27$.

B. $I = -\frac{80}{27}$.

C. $I = -\frac{8}{7}$.

D. $I = -\frac{1}{5}$.

Câu 42: Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $y' = \frac{1}{3} (4x - 1) (2x^2 - x + 1)^{-\frac{2}{3}}$.

B. $y' = (4x - 1) (2x^2 - x + 1)^{-\frac{2}{3}}$.

C. $y' = \frac{1}{3} (2x^2 - x + 1)^{-\frac{2}{3}}$.

D. $y' = \frac{1}{3} (4x - 1) (2x^2 - x + 1)^{\frac{2}{3}}$.

Câu 43: Cho a, b là những số thực dương. Tính $M = \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$.

- A. $M = ab$. B. $M = a + b$. C. $M = \frac{1}{a+b}$. D. $M = a - b$.

Câu 44: Tính đạo hàm của hàm số $y = (4 - x - x^2)^{\frac{1}{4}}$.

- A. $y' = -\frac{1}{4}(1+2x)(4-x-x^2)^{-\frac{1}{4}}$. B. $y' = -(1+2x)(4-x-x^2)^{-\frac{3}{4}}$.
C. $y' = -\frac{1}{4}(1+2x)(4-x-x^2)^{-\frac{3}{4}}$. D. $y' = \frac{1}{4}(1+2x)(4-x-x^2)^{-\frac{3}{4}}$.

Câu 45: Cho a, b là những số thực dương. Tính $I = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$.

- A. $I = \frac{1}{ab}$. B. $I = 1$. C. $I = \sqrt[3]{ab}$. D. $I = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$.

Câu 46: Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $P = x^{\frac{1}{2}}$. B. $P = x^{\frac{2}{3}}$. C. $P = x^{\frac{13}{24}}$. D. $P = x^{\frac{1}{4}}$.

Câu 47: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[n]{x-1}$.

- A. $y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{(x-1)^{n+1}}}$. B. $y' = \frac{1}{\sqrt[n]{(x-1)^{n-1}}}$. C. $y' = n\sqrt[n]{(x-1)^{n-1}}$. D. $y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{(x-1)^{n-1}}}$.

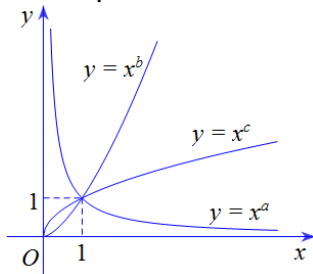
Câu 48: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[5]{x}$.

- A. $y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$. B. $y' = -\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$. C. $y' = \frac{1}{4x\sqrt[5]{x^4}}$. D. $y' = \frac{1}{5x\sqrt[5]{x^5}}$.

Câu 49: Tính đạo hàm của hàm số $y = (3x+1)^{\frac{\pi}{2}}$.

- A. $y' = \frac{3\pi}{2}(3x+1)^{\frac{\pi}{2}}$. B. $y' = (3x+1)^{\frac{\pi}{2}-1}$. C. $y' = \frac{3\pi}{2}(3x+1)^{\frac{\pi}{2}-1}$. D. $y' = \frac{3}{2}(3x+1)^{\frac{\pi}{2}-1}$.

Câu 50: Cho ba số thực a, b, c khác 0. Đồ thị các hàm số $y = x^a, y = x^b, y = x^c$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



- A. $a < b < c$. B. $b > a > c$.
C. $a < c < b$. D. $c < a < b$.

Câu 51: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (2 - x^2)^{\frac{3}{5}}$.

- A. $D = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$. C. $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 52: Cho x, y là những số thực dương. Tính $K = \left(2x + \frac{y}{2}\right)^{-1} \left[(2x)^{-1} + \left(\frac{y}{2}\right)^{-1} \right]$.

- A. $K = \frac{1}{xy}$. B. $K = xy$. C. $K = 1$. D. $K = \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

§2. LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NĂM

1. Định nghĩa

Với hai số dương a, b ($a \neq 1$). Số α nghiệm đúng đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Như vậy: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$

Chú ý: Không có lôgarit của số âm và số 0.

2. Các công thức

$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$ ($0 < a \neq 1, b > 0$) $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$ $a^{\log_a b} = b$ $\log_a (a^\alpha) = \alpha$ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$ $\log_{a^\beta} b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a b$	$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$ $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$ $a^{\log b} = b^{\log a}$ $a^{\ln b} = b^{\ln a}$	Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$. Ta có: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, b \neq 1$ $\log_{10} b = \lg b$ $\log_e b = \ln b$
---	---	---

3. Kí hiệu lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên

a) Lôgarit thập phân

Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. $\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$

b) Lôgarit tự nhiên

Lôgarit tự nhiên (lôgarit Nê – pe) là lôgarit cơ số e . $\log_e b$ được viết là $\ln b$

Lưu ý: $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ và một giá trị gần đúng của e là: $e \approx 2,718281828459045$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm x để biểu thức $\log_x \frac{7}{3x-2}$ có nghĩa.

- A. $\frac{2}{3} < x \neq 1$. B. $x < \frac{2}{3}$ hoặc $x > 0$. C. $0 < x \neq \frac{2}{3}$. D. $x > \frac{2}{3}$.

Câu 2: Tìm x để biểu thức $\log_{\frac{1}{3}} (x^3 + x^2 - 2x)$ có nghĩa.

- A. $-2 < x < 0$ hoặc $x > 1$. B. $-2 < x < 1$. C. $-2 < x < 0$. D. $x > 1$.

Câu 3: Tìm x để biểu thức $\log_{x-3} (x^2 - 4)$ có nghĩa.

- A. $x > 3$. B. $4 < x \neq 3$. C. $3 < x \neq 4$. D. $x < -2$ hoặc $x > 2$.

Câu 4: Biểu thức $\log_a b$ có nghĩa khi và chỉ khi.

- A. $\begin{cases} b \geq 0 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} b > 0 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ 0 < b \neq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \end{cases}$.

Câu 5: Tính $\log_9 20$ biết $a = \log 2, b = \log 3$.

- A. $\log_9 20 = \frac{1+b}{2a}$. B. $\log_9 20 = \frac{1+a}{2b}$. C. $\log_9 20 = \frac{1+a}{b}$. D. $\log_9 20 = \frac{a+b}{2}$.

Câu 6: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $4^{\log_8 27} = 9$. B. $27^{\log_9 2} = 2\sqrt{2}$. C. $9^{\log_{\sqrt{3}} 2} = 16$. D. $4^{\log_2 3} = 3$.

Câu 7: Tính $H = \log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 15$.

A. $H = \frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $H = -15\sqrt{3}$. C. $H = \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $H = \log_5 \sqrt{5}$.

Câu 8: Biết $\log_6 2 = a, \log_6 5 = b$. Tính $\log_3 5$ theo a và b .

A. $\log_3 5 = \frac{b}{1-a}$. B. $\log_3 5 = \frac{a}{1-b}$. C. $\log_3 5 = \frac{b}{a}$. D. $\log_3 5 = a + b - 1$.

Câu 9: Biết rằng $\log_5 2 = a$ và $\log_5 3 = b$. Hãy tính $\log_5 72$ theo a và b .

A. $\log_5 72 = a + b$. B. $\log_5 72 = 2a + 3b$. C. $\log_5 72 = 3a + 2b$. D. $\log_5 72 = a + 2b + 2$.

Câu 10: Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$. B. $4^{\log_2 \frac{1}{7}} = \frac{1}{7}$. C. $3^{5\log_3 2} = 64$. D. $3^{\log_{\frac{1}{27}} 2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 11: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$. B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.
C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$. D. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$.

Câu 12: Biết rằng $\log_5 2 = a$ và $\log_5 3 = b$. Hãy tính $\log_5 30$ theo a và b .

A. $\log_5 30 = a + b + 1$. B. $\log_5 30 = 2a + b + 1$. C. $\log_5 30 = 2a + 2b$. D. $\log_5 30 = a - 2b - 1$.

Câu 13: Tìm x để biểu thức $\log_{\frac{1}{2}}(x^4 + 5x^2 - 6)$ có nghĩa.

A. $-1 < x < 1$. B. $x < -\sqrt{6}$ hoặc $x > \sqrt{6}$.
C. $5 < x < 6$. D. $x < -1$ hoặc $x > 1$.

Câu 14: Biết rằng $\log 2 = a, \log 3 = b$. Tính $\log \sqrt[3]{0,18}$ theo a và b .

A. $\log \sqrt[3]{0,18} = \frac{2a+b-2}{3}$. B. $\log \sqrt[3]{0,18} = \frac{b+2a-2}{3}$.
C. $\log \sqrt[3]{0,18} = \frac{2b-a+2}{3}$. D. $\log \sqrt[3]{0,18} = \frac{2b+a-2}{3}$.

Câu 15: Tính $S = \frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$.

A. $S = \log_2 \frac{1}{4}$. B. $S = \log_7 49$. C. $S = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$. D. $S = \log_7 3$.

Câu 16: Tính $M = \log_{\frac{1}{2}} 2 + 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8}$.

A. $M = \frac{1}{12}$. B. $M = \log_2 3$. C. $M = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{12}$. D. $M = 4$.

Câu 17: Tính $P = \log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 \cdot \log_2 3)$.

A. $P = 2$. B. $P = -2$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{1}{2}$.

Câu 18: Biết $72 \left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4} \right) = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tính $F = \log_{45} a + \log_2 b$.

A. $F = 3$. B. $F = 47$. C. $F = \frac{45}{2}$. D. $F = 2$.

Câu 19: Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}} \neq \sqrt[3]{3^{-1}} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.

B. $\log_{0,2} 0,3 > \log_{0,5} 0,4$.

C. $\log_3 10 < \log_8 57$.

D. $\log_{0,3} \frac{1}{2} > \log_{\pi} 0,7$.

Câu 20: Biết $a = \ln 2, b = \ln 5$. Tính $S = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$ theo a và b .

A. $S = -a - b$.

B. $S = 2a + 2b$.

C. $S = a + b$.

D. $S = -2a - 2b$.

Câu 21: Cho $a = \ln 2$. Tính $S = \frac{1}{16} \ln \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \ln \frac{1}{16}$ theo a .

A. $S = \frac{11a}{8}$.

B. $S = \frac{a}{8}$.

C. $S = \frac{a}{16}$.

D. $S = \frac{5a}{16}$.

Câu 22: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $\frac{1}{2} + \log 3 > \log 19 - \log 2$.

B. $\log \frac{5 + \sqrt{7}}{2} > \frac{\log 5 + \log \sqrt{7}}{2}$.

C. $\log_{0,3} 2 < \log_5 3$.

D. $\log_{0,2} 0,3 < \log_{0,5} 0,4$.

Câu 23: Biết $\log_6 x = 3 \log_6 2 + 0,5 \log_6 25 - 2 \log_6 3$. Tìm x .

A. $x = \frac{10}{9}$.

B. $x = 216$.

C. $x = \frac{40}{9}$.

D. $x = 36$.

Câu 24: Tính $I = \log_{10} (\tan 4) + \log_{10} (\cot 4)$.

A. $I = 1$.

B. $I = 0$.

C. $I = \log 4$.

D. $I = \log 16$.

Câu 25: Biết $\log_3 x = 4 \log_3 a + 7 \log_3 b$. Tìm x .

A. $x = 28ab$.

B. $x = a^7 b^4$.

C. $x = ab$.

D. $x = a^4 b^7$.

Câu 26: Tính $K = \log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50$.

A. $K = \log_2 1$.

B. $K = -2$.

C. $K = \log_5 25$.

D. $K = \frac{1}{2}$.

Câu 27: Tìm x để biểu thức $\log_{\pi} (x^2 + 3x - 4)$ có nghĩa.

A. $-4 \leq x \leq 1$.

B. $x < -4$ hoặc $x > 1$.

C. $-4 < x < 1$.

D. $x \neq -4$ và $x \neq 1$.

Câu 28: Biết $\log 72 - 2 \log \frac{27}{256} + \log \sqrt{108} = a \log 2 + \frac{b}{c} \log 3$ ($a, b, c \in \mathbb{N}, c \neq 0$). Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 13$.

B. $S = 17$.

C. $S = 23$.

D. $S = \frac{35}{2}$.

Câu 29: Tính $N = 2 \log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 400 + 3 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

A. $N = 4$.

B. $N = \log_2 \frac{1}{32}$.

C. $N = \log_2 \frac{1}{16}$.

D. $N = \frac{1}{16}$.

Câu 30: Tìm x để biểu thức $\log_2 (1 - x^2)$ có nghĩa.

A. $-1 \leq x \leq 1$.

B. $-1 < x < 1$.

C. $x < -1$ hoặc $x > 1$.

D. $x \neq \pm 1$.

Câu 31: Tính $S = \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \dots + \log \frac{98}{99} + \log \frac{99}{100}$.

A. $S = 100$.

B. $S = 10$.

C. $S = -2$.

D. $S = 0$.

Câu 32: Tính $T = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8^{\log_2 3}$.

- A. $T = 2^3$. B. $T = 25$. C. $T = 3^{\log_3 3}$. D. $T = 27$.

Câu 33: Biết $\log \frac{1}{8} - \log 0,375 + 2 \log \sqrt{0,5625} = \log \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Tính $G = a^{\sqrt{b}} + (\sqrt{b})^a$.

- A. $G = 145$. B. $G = 64$. C. $G = 15$. D. $G = 81$.

Câu 34: Cho $a = \log_2 5, b = \log_2 3$. Tính $H = \log_3 675$ theo a, b .

- A. $H = \frac{2a+3b}{b}$. B. $H = \frac{3a+b}{a}$. C. $H = \frac{2a}{b} + 5$. D. $H = \frac{2a+b}{3}$.

Câu 35: Cho $\log_3 15 = a, b = \log_3 10$. Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a, b .

- A. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 3a + 2b - 1$. B. $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2a + 2b - 2$.
C. $\log_{\sqrt{3}} 50 = a + b - 1$. D. $\log_{\sqrt{3}} 50 = a - b - 4$.

Câu 36: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $\log_3 \frac{1}{27} = -3$. B. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = 2$. C. $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$. D. $3^{2\log_3 5} = 25$.

Câu 37: Tính $P = \log_7 49 - \log_7 343$.

- A. $P = \log_7 7$. B. $P = \log_7 \frac{1}{49}$. C. $P = \log_5 \frac{1}{5}$. D. $P = -294$.

Câu 38: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $3 \log(\sqrt{2} + 1) + \log(5\sqrt{2} - 7) = 0$. B. $\log(2 + \sqrt{3})^{20} + \log(2 - \sqrt{3})^{20} = 1$.
C. $\ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{2}$. D. $5 \ln e^{-1} + 4 \ln(e^2 \sqrt{e}) = 5$.

Câu 39: Tìm x để biểu thức $\log_{\frac{1}{3}}(x^3 + x^2 - 2x)$ có nghĩa.

- A. $-2 < x < 1$. B. $-2 < x < 0$ hoặc $x > 1$.
C. $-2 < x < 0$. D. $x > 1$.

Câu 40: Cho $\log_a b = 5, \log_a c = -2$. Tính $P = \log_a \frac{a^4 b^3}{c^3}$.

- A. $P = \frac{35}{3}$. B. $P = 35$. C. $P = 1$. D. $P = \frac{1}{3}$.

Câu 41: Biết $\log_a b = 2$. Tính $E = \log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$.

- A. $E = 1$. B. $E = 2$. C. $E = 4$. D. $E = 8$.

Câu 42: Biết $\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{3} \log_3 125 - \log_3 4 + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 2$. Tìm x .

- A. $x = 10$. B. $x = \frac{2}{5}$. C. $x = 3$. D. $x = 5$.

Câu 43: Cho $a = \log 2$ và $b = \log 3$. Tính $H = \log 72 - 2 \log \frac{27}{256} + \log \sqrt{108}$ theo a và b .

- A. $H = 20a - \frac{5}{2}b$. B. $H = 10a - 5b$. C. $H = 2a - \frac{5}{2}b$. D. $H = 3a - 2b$.

Câu 44: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. B. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$. C. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$. D. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$.

§3. HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Hàm số mũ

1. Định nghĩa

Cho $a > 0, a \neq 1$. Hàm số $y = a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a .

2. Đạo hàm của hàm số mũ

Giới hạn: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$

3. Khảo sát hàm số mũ $y = a^x, (0 < a \neq 1)$

$a > 1$	$0 < a < 1$																														
① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ ② Sự biến thiên: $y' = a^x \cdot \ln a > 0, \forall x$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ - TCN: trục Ox ③ Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr></table> ④ Đồ thị	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'		+	+	+	y		0	1	$+\infty$	① Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ ② Sự biến thiên: $y' = a^x \cdot \ln a < 0, \forall x$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ - TCN: trục Ox ③ Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>a</td><td>0</td></tr></table> ④ Đồ thị	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'		-	-	-	y	$+\infty$	1	a	0
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'		+	+	+																											
y		0	1	$+\infty$																											
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'		-	-	-																											
y	$+\infty$	1	a	0																											

Bảng tóm tắt các tính chất hàm số mũ $y = a^x, (0 < a \neq 1)$

Tập xác định	$D = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$
Đạo hàm	$y' = a^x \cdot \ln a$
Chiều biến thiên	$a > 0$: Hàm số đồng biến $0 < a < 1$: Hàm số nghịch biến
Tiệm cận	Trục Ox là tiệm cận ngang
Đồ thị	Đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$, nằm phía trên trục hoành $(y = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R})$

II. Hàm số lôgarit

1. Định nghĩa

Cho $a > 0, a \neq 1$. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số lôgarit** cơ số a .

2. Đạo hàm của hàm số lôgarit

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

3. Khảo sát hàm số lôgarit $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$

$a > 1$	$0 < a < 1$																														
① Tập xác định: $D = (0; +\infty)$ ② Sự biến thiên: $y' = \frac{1}{x \ln a} > 0, \forall x > 0$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ - TCD: trục Oy ③ Bảng biến thiên <table><tr><th>x</th><td>0</td><td>1</td><td>a</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><th>y'</th><td></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><th>y</th><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr></table> ④ Đồ thị	x	0	1	a	$+\infty$	y'		+	+	+	y	$-\infty$	0	1	$+\infty$	① Tập xác định: $D = (0; +\infty)$ ② Sự biến thiên: $y' = \frac{1}{x \ln a} < 0, \forall x > 0$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ - TCD: trục Oy ③ Bảng biến thiên <table><tr><th>x</th><td>0</td><td>a</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><th>y'</th><td></td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><th>y</th><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>0</td><td>$-\infty$</td></tr></table> ④ Đồ thị	x	0	a	1	$+\infty$	y'		-	-	-	y	$+\infty$	1	0	$-\infty$
x	0	1	a	$+\infty$																											
y'		+	+	+																											
y	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
x	0	a	1	$+\infty$																											
y'		-	-	-																											
y	$+\infty$	1	0	$-\infty$																											

Bảng tóm tắt các tính chất hàm số mũ $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$

Tập xác định	$D = (0; +\infty)$
Đạo hàm	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
Chiều biến thiên	$a > 0$: Hàm số đồng biến $0 < a < 1$: Hàm số nghịch biến
Tiệm cận	Trục Oy là tiệm cận đứng
Đồ thị	Đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$, nằm phía bên phải trục tung

Bảng đạo hàm của các hàm số lũy thừa, mũ, logarit

Hàm sơ cấp	Hàm hợp ($u = u(x)$)
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(x^u)' = ux^{u-1}.u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^u)' = u'.e^u$ $(a^u)' = a^u \ln a.u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(u+v)' = u' + v'$ $(u.v)' = u'.v + u.v'$	$(u-v)' = u' - v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

III. ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài toán 1. Tiền lãi

Dạng 1. “Lãi đơn” là tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra.

Công thức tính: $T = M(1 + r.n)$

Trong đó: T : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn

M : Tiền gửi ban đầu

n : Số kì hạn tính lãi

r : Lãi suất định kì theo %

Dạng 2: “Lãi kép” là số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc sinh ra thay đổi theo định kì.

1. Lãi kép gửi một lần: Công thức $T = M(1 + r)^n$

Trong đó: T : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn

M : Tiền gửi ban đầu

n : Số kì hạn tính lãi

r : Lãi suất định kì theo %

VD1. Bạn Bình gửi vào ngân hàng với số tiền là 1 triệu đồng không kì hạn với lãi suất là 0,65%. Tính số tiền bạn Bình nhận được sau 2 năm.

Giải:

Ta có:

$$\begin{cases} M = 1000000 \\ r = 0,65\% = 0,0065 \Rightarrow T = 1000000(1 + 0,0065)^{24} = 1168236,313 \text{ (đồng)} \\ n = 2 \text{ năm} = 24 \text{ tháng} \end{cases}$$

VD2. Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ?

Giải:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M = 4.10^5 \\ r = 4\% = 0,04 \Rightarrow T = 4.10^5 (1 + 0,05)^5 \approx 4,8666.10^5 (m^3) \\ n = 5 \text{ năm} \end{cases}$$

2. Lãi kép gửi định kì

Trường hợp 1. Tiền được gửi vào cuối tháng: $T_n = \frac{M}{r} [(1+r)^n - 1]$

Trường hợp 2. Tiền được gửi vào đầu mỗi tháng: $T_n = \frac{M}{r} [(1+r)^n - 1](1+r)$

VD3. Một anh sinh viên được gia đình gửi vào sổ tiết kiệm ngân hàng là 80 000 000 với lãi suất 0,9% tháng. a) Hỏi sau đúng 5 năm số tiền trong sổ là bao nhiêu, biết rằng trong suốt thời gian đó anh sinh viên không rút một đồng nào cả vốn lẫn lãi.

Giải:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M = 80000000 \\ r = 0,9\% = 0,009 \Rightarrow T = 80000000(1 + 0,009)^{60} = 136949345,6 \\ n = 5 \text{ năm} = 60 \text{ tháng} \end{cases}$$

b) Nếu mỗi tháng anh sinh viên đó đều rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng trả lãi thì hàng tháng anh ta rút bao nhiêu tiền (làm tròn 1000 đồng) để sau đúng 5 năm sẽ vừa hết số tiền cả vốn lẫn lãi.

Giải:

Sau n tháng, số tiền anh ta rút ra hàng tháng tổng cộng là $T_n = \frac{a}{r} [(1+r)^n - 1]$ (áp CT lãi kép gửi hàng tháng)

Số tiền ban đầu sau n tháng: $T_n = M(1+r)^n$

$$\text{Vậy tháng thứ } n, \text{ số tiền anh ta vừa rút hết là: } M(1+r)^n - \frac{a}{r} [(1+r)^n - 1] = 0 \Rightarrow a = \frac{Mr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \quad (1)$$

Công thức (1) gọi công thức trả hết nợ sau n tháng.

Trong đó: M : Tiền gửi ban đầu; r : lãi suất theo %; a : Tiền nợ cần phải trả

Vậy anh sinh viên rút số tiền là:

$$a = \frac{Mr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{80000000.0,9\%(1+0,9\%)^{60}}{(1+0,9\%)^{60} - 1} = 1731425,144 \approx 1.731.000$$

VD4. Anh A mua nhà trị giá ba trăm triệu đồng và vay ngân hàng theo phương án trả góp.

a) Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh A trả 5.500.000 đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,5% mỗi tháng thì sau bao lâu anh A trả hết số tiền trên

b) Nếu anh A muốn trả hết nợ trong vòng 5 năm và trả lãi với mức 6%/năm thì mỗi tháng anh phải trả bao nhiêu tiền (làm tròn đến nghìn đồng).

Giải:

Số tiền nợ ban đầu là $M = 300000000$, lãi suất $r = 0,5\%$, số tiền trả là: $a = 5500000$. Tìm n .

$$\text{Áp dụng Công thức: } a = \frac{Mr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \Leftrightarrow 5,5.10^6 = \frac{300.10^6.0,5\%(1+0,5\%)^n}{(1+0,5\%)^n - 1} \Rightarrow n \approx 63,85$$

Vậy sau 64 tháng thì anh A trả hết số tiền trên.

$$\text{b) } a = \frac{Mr(1+r)^n}{12[(1+r)^n - 1]} \Rightarrow a = \frac{300.10^6.0,5\%(1+0,5\%)^5}{12[(1+0,5\%)^5 - 1]} = 5934910,011$$

Vậy theo YC BT, anh A phải trả với số tiền là: 5.935.000 đồng

VD5. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

$$\text{A. } m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1} \text{ (triệu đồng)}$$

$$\text{B. } m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3} \text{ (triệu đồng)}$$

$$\text{C. } m = \frac{100 \cdot 1,03}{3} \text{ (triệu đồng)}$$

$$\text{D. } m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1} \text{ (triệu đồng)}$$

Giải:

Số tiền nợ ban đầu là $M = 100000000$, lãi suất $r = 12\%$ /năm hay $r = 1\%$ /tháng, $n = 3$

$$\text{Áp dụng Công thức: } a = \frac{Mr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \Rightarrow a = \frac{100 \cdot 0,01(1+0,01)^3}{(1+0,01)^3 - 1} = \frac{1,01^3}{1,01^3 - 1}$$

Bài toán 2. Bài toán “Dân số”

Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$ (1), trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm.

Công thức (1) gọi là *công thức lãi kép liên tục* hay *công thức tăng trưởng mũ*

VD1. Cho biết năm 2003. Việt Nam có 80 902 400 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi năm 2020 Việt Nam sẽ có bao nhiêu người, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

Giải

Vào năm 2010, tức là sau 17 năm.

Dân số của Việt Nam là $S = Ae^{ni} = 80902400 \cdot e^{17 \cdot 0,0147} \approx 103870350$ (người)

VD2. Với số vốn 100 triệu đồng gửi vào ngân hàng theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất 8% năm thì sau 2 năm số tiền thu về cả vốn lẫn lãi sẽ là: $S = Ae^{ni} = 100 \cdot e^{2 \cdot 0,08} \approx 117,351087$ (triệu đồng)

VD3. Cho biết năm 2010. Việt Nam có 89 000 000 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,05%. Hỏi năm 2050 Việt Nam sẽ có bao nhiêu người, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

Giải

Vào năm 2050, tức là sau 40 năm. Dân số của Việt Nam là

$$S = Ae^{ni} = 89000000 \cdot e^{40 \cdot 0,0105} \approx 135454578,5 \text{ (người)}$$

VD4. Năm 2008, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là $\frac{385,2}{10^6}$. Biết rằng tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí tăng 0,52% hàng năm. Hỏi 2020, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là bao nhiêu?

Giải:

$$\text{Vào năm 2020, tức là sau 12 năm. Thể tích khí } CO_2: V_{CO_2} = Ae^{ni} = \frac{385,2}{10^6} \cdot e^{12 \cdot 0,0052} = 4,100022633 \cdot 10^{-4}$$

Bài toán 3. Ứng dụng trong Vật lí

Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$.

Trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kỳ bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác).

VD1. Cho biết chu kỳ bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Hỏi 250 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu sau:

- a) 1,5 ngày đêm. b) 3,5 ngày đêm.

Giải:

$$\text{Áp dụng công thức } m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}. \text{ Ta có: } T = 24 \text{ giờ} = 1 \text{ ngày đêm, } m_0 = 250 \text{ gam}$$

$$\text{a) Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau 1,5 ngày đêm là } m(1,5) = 250 \left(\frac{1}{2} \right)^{1,5} \approx 88,388 \text{ gam.}$$

b) Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau 1,5 ngày đêm là $m(3,5) = 250 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3,5}{1}} \approx 22,097$ gam

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2xe^x + 3\sin 2x$.

A. $y' = 2e^x(x+1) + 3\cos 2x$.

B. $y' = 2(x+1) + 6\cos 2x$.

C. $y' = 2e^x(x+1) + 6\cos 2x$.

D. $y' = 2e^x + 6\cos 2x$.

Câu 2: Biết $(3x^2 - \ln x + 4\sin x)' = ax + \frac{b}{x} + c\cos x$, $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tính $S = 2a + 3b - 4c$.

A. $S = -1$.

B. $S = 25$.

C. $S = -7$.

D. $S = 31$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y = a^x$, $(0 < a \neq 1)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm phía dưới trục hoành.

B. Đi qua các điểm $(1;0)$ và $(a;1)$, nằm phía trên trục hoành.

C. Đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm phía trên trục hoành.

D. Đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm phía bên phải trục tung.

Câu 4: Biết $(3^x + \log_2 |x| + e^{3x})' = 3^x \ln a + \frac{1}{x \ln b} + ce^{3x}$, $(a, b, c \in \mathbb{N}^*)$. Tính $S = a^b + b^c + c^a$.

A. $S = 44$.

B. $S = 40$.

C. $S = 20$.

D. $S = 18$.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{3^x}$.

A. $y' = \frac{x \ln 3}{3^x}$.

B. $y' = \frac{1-x \ln 3}{3^x}$.

C. $y' = \frac{1-(x+1)\ln 3}{3^x}$.

D. $y' = \frac{1+(x+1)\ln 3}{3^x}$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$.

A. $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.

C. $D = (0; 2)$.

D. $D = (2; +\infty)$.

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 \ln x$ trên đoạn $[1; e]$.

A. $\max_{[1;e]} f(x) = 1$ và $\min_{[1;e]} f(x) = 0$.

B. $\max_{[1;e]} f(x) = e^2$ và $\min_{[1;e]} f(x) = 0$.

C. $\max_{[1;e]} f(x) = e^2$ và $\min_{[1;e]} f(x) = 1$.

D. $\max_{[1;e]} f(x) = e$ và $\min_{[1;e]} f(x) = 1$.

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

A. $y' = x^2 e^x$.

B. $y' = (2x - 2)e^x$.

C. $y' = 2x^2 e^x$.

D. $y' = (x^2 - 2x)e^x$.

Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

B. $y = \log_{\frac{1}{5(\sqrt{6}-\sqrt{5})}} x$.

C. $y = \log_{\sqrt{3}} x$.

D. $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$.

Câu 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(5 - 2x)$.

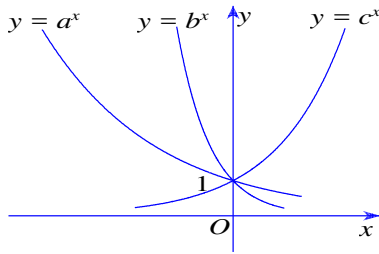
A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

C. $D = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

D. $D = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 11: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong các hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



A. $a < b < c$.

B. $c > a > b$.

C. $b > c > a$.

D. $a > b > c$.

Câu 12: Cho đồ thị hàm số $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

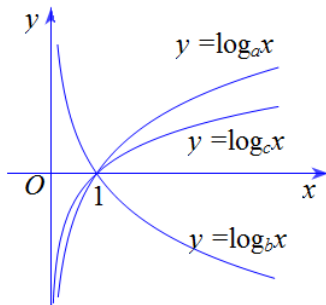
A. Đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(1; a)$, nằm phía bên phải trục tung.

B. Đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$, nằm phía bên phải trục tung.

C. Đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$, nằm phía bên trái trục tung.

D. Đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$, nằm phía bên phải trục tung.

Câu 13: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ được cho trong các hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



A. $c > a > b$.

B. $a > b > c$.

C. $b > c > a$.

D. $a < b < c$.

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x \ln 3x$ trên đoạn $\left[\frac{e}{3}; \frac{e^2}{3}\right]$.

A. $\text{Max } f(x) = 2e^2$ và $\text{Min } f(x) = e$.

B. $\text{Max } f(x) = \frac{2e^2}{3}$ và $\text{Min } f(x) = \frac{e}{3}$.

C. $\text{Max } f(x) = 3$ và $\text{Min } f(x) = \frac{2}{3}$.

D. $\text{Max } f(x) = \frac{e^2}{3}$ và $\text{Min } f(x) = \frac{2e}{3}$.

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $y = (\sin x - \cos x)e^{2x}$.

A. $y' = (3 \cos x + \sin x)e^{2x}$.

B. $y' = (3 \cos x - \sin x)e^{2x}$.

C. $y' = (\sin x - \cos x)e^{2x}$.

D. $y' = (3 \sin x - \cos x)e^{2x}$.

Câu 16: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}; e^2\right]$.

A. $\text{Max } f(x) = 2e^4$ và $\text{Min } f(x) = -\frac{1}{e^2}$.

B. $\text{Max } f(x) = 2e^4$ và $\text{Min } f(x) = \frac{1}{e^2}$.

C. $\text{Max } f(x) = e^4$ và $\text{Min } f(x) = e^2$.

D. $\text{Max } f(x) = 2e^2$ và $\text{Min } f(x) = -\frac{1}{e^4}$.

Câu 17: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{0,4} \frac{3x+2}{1-x}$.

- A. $D = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$. B. $D = (-\infty; 1)$. C. $D = \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 18: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^x - \sqrt{e^x}$.

- A. $y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{2} \sqrt{e^x}$. B. $y' = 2^x \ln 2 - \frac{1}{2} \sqrt{e^x}$. C. $y' = 2^x - \frac{1}{2} \sqrt{e^x}$. D. $y' = 2^x \ln 2 + \sqrt{e^x}$.

Câu 19: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x - 2} \cdot \log_3(9 - x^2)$.

- A. $D = (-3; 3)$. B. $D = [-3; -2] \cup [1; 3]$.
C. $D = [-3; 3]$. D. $D = (-3; -2] \cup [1; 3]$.

Câu 20: Cho hàm số $y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. $xy' + e^y = e^y$. B. $xy' + y = e^y$. C. $y' + y'' = y''$. D. $xy' + 1 = e^y$.

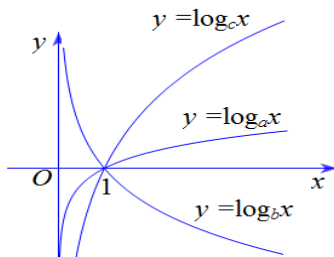
Câu 21: Cho đồ thị hàm số $y = a^x$, ($0 < a \neq 1$). Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. Đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$, nằm phía bên phải trục tung.
B. Đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$, nằm phía trên trục hoành.
C. Đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$, nằm phía dưới trục hoành.
D. Đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$, nằm phía trên trục hoành.

Câu 22: Cho hàm số $y = e^{-x} \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. $y'' + 2y' + 2y = 0$. B. $y'' + 2y' - 2y = 0$. C. $y'' + 2y' = y^2$. D. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Câu 23: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong các hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?



- A. $c > a > b$. B. $a < b < c$.
C. $c > b > a$. D. $b < c < a$.

Câu 24: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5(4 - x)^2$. là:

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = (-\infty; 4]$. C. $D = (4; +\infty)$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Câu 25: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + \sqrt{x+1})$.

- A. $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$. B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.
C. $y' = \frac{2}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$. D. $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 + \ln x) \ln x$.

- A. $y' = x(1 + 2 \ln x)$. B. $y' = \frac{1 + 2 \ln x}{x}$. C. $y' = \frac{x + \ln x}{x}$. D. $y' = \frac{1 + \ln x}{x}$.

Câu 27: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

- A. $\max_{[1; e^3]} f(x) = \frac{4}{e}$ và $\min_{[1; e^3]} f(x) = 0$.
 B. $\max_{[1; e^3]} f(x) = \frac{4}{e^2}$ và $\min_{[1; e^3]} f(x) = 0$.
 C. $\max_{[1; e^3]} f(x) = e^2$ và $\min_{[1; e^3]} f(x) = 4$.
 D. $\max_{[1; e^3]} f(x) = e^2$ và $\min_{[1; e^3]} f(x) = 0$.

Câu 28: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln \frac{x-1}{-2x-3}$.

- A. $D = \left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.
 B. $D = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.
 C. $D = \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 29: Xét hàm số $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
 D. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 30: Tính đạo hàm của hàm số $y = 5x^2 - 2^x \cos x$.

- A. $y' = 10x + 2^x \sin x - \ln 2 \cdot \cos x$.
 B. $y' = 10 + 2^x (\sin x - \cos x)$.
 C. $y' = 5x^2 + 2^x (\sin x - \ln 2 \cdot \cos x)$.
 D. $y' = 10x + 2^x (\sin x - \ln 2 \cdot \cos x)$.

Câu 31: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$.

- A. $y' = \frac{1 + \ln x}{x^2}$.
 B. $y' = \frac{1 - x}{x^2}$.
 C. $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
 D. $y' = \frac{\ln x}{x^2}$.

Câu 32: Cho đồ thị hàm số $y = \log_a x, (0 < a \neq 1)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$, nằm phía bên trái trục tung.
 B. Đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(1; a)$, nằm phía bên phải trục tung.
 C. Đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$, nằm phía bên phải trục tung.
 D. Đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$, nằm phía bên phải trục tung.

Câu 33: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - \ln(1 - 2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$.

- A. $\max_{[-2; 0]} f(x) = \ln 5$ và $\min_{[-2; 0]} f(x) = \ln 2$.
 B. $\max_{[-2; 0]} f(x) = 4$ và $\min_{[-2; 0]} f(x) = \frac{1}{4}$.
 C. $\max_{[-2; 0]} f(x) = 4 - \ln 5$ và $\min_{[-2; 0]} f(x) = \frac{1}{4} - \ln 2$.
 D. $\max_{[-2; 0]} f(x) = -2$ và $\min_{[-2; 0]} f(x) = 0$.

Câu 34: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = xe^{-x}$ trên đoạn $[0; +\infty)$.

- A. $\max_{[0; +\infty)} f(x) = \frac{1}{e}$ và $\min_{[0; +\infty)} f(x) = 0$.
 B. $\max_{[0; +\infty)} f(x) = e$ và $\min_{[0; +\infty)} f(x) = 0$.
 C. $\max_{[0; +\infty)} f(x) = 1$ và $\min_{[0; +\infty)} f(x) = 0$.
 D. $\max_{[0; +\infty)} f(x) = e$ và $\min_{[0; +\infty)} f(x) = 1$.

Câu 35: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 3)$.

- A. $D = (-\infty; 1)$.
 B. $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

C. $D = (3; +\infty)$.

D. $D = (1; 3)$.

Câu 36: Biết $(3x^2 - \ln 2x + 5 \cos x)' = ax + \frac{b}{x} + c \sin x$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $A = x_1^2 + x_2^2$, biết rằng x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

A. $A = \frac{61}{36}$.

B. $A = \frac{25}{36}$.

C. $A = \frac{11}{36}$.

D. $A = \frac{91}{36}$.

Câu 37: Cho hàm số $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $y + xy' + x^2 y'' = 0$.

B. $y + y' + y'' = 0$.

C. $xy + y' + x^2 y'' = 0$.

D. $y' + xy'' + x^2 y''' = 0$.

Câu 38: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \ln \sqrt{x^2 + 1}$.

A. $y' = 2x \ln(x^2 + 1) + \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

B. $y' = x \ln(x^2 + 1) + \frac{3x}{x^2 + 1}$.

C. $y' = x \ln(x^2 + 1) + \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

D. $y' = x \ln \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

Câu 39: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$ trên đoạn $[0; \ln 4]$.

A. $\max_{[0; \ln 4]} f(x) = 1$ và $\min_{[0; \ln 4]} f(x) = -3$.

B. $\max_{[0; \ln 4]} f(x) = 3$ và $\min_{[0; \ln 4]} f(x) = 1$.

C. $\max_{[0; \ln 4]} f(x) = \ln 4$ và $\min_{[0; \ln 4]} f(x) = \ln 2$.

D. $\max_{[0; \ln 4]} f(x) = 3$ và $\min_{[0; \ln 4]} f(x) = -1$.

Câu 40: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln \sqrt{x^2 - 4x - 12}$.

A. $D = (-2; 6)$.

B. $D = (-\infty; -2] \cup (6; +\infty)$.

C. $D = [-2; 6]$.

D. $D = (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

Câu 41: Biết $(\log_3(x^2 + 4x + 5))' = \frac{ax + b}{(x^2 + 4x + 5) \ln c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $P = abc(a + b + c)$.

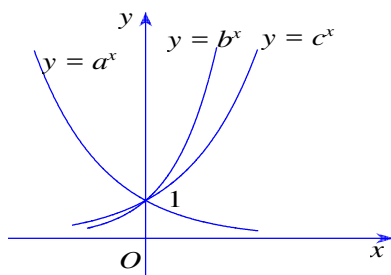
A. $P = 9^3$.

B. $P = 7^3$.

C. $P = 6^3$.

D. $P = 5^3$.

Câu 42: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong các hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $b < c < a$.

B. $a < c < b$.

C. $a < b < c$.

D. $c < a < b$.

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

A. $y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

B. $y' = \frac{e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$.

C. $y' = \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$.

D. $y' = \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$.

Câu 44: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(x^2 + 1)$.

A. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

B. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

C. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

D. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Câu 45: Biết $(3x^2e^x + 3\cos 4x)' = (ax^2 + bx)e^x + c\sin 4x$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $P = ab + bc + ca$.

A. $P = 100$.

B. $P = -120$.

C. $P = 48$.

D. $P = -90$.

Câu 46: Xét hàm số $y = 3^x(x - \sqrt{x^2 + 1})$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Câu 47: Tính đạo hàm của hàm số $y = 8^{x^2+x+1}$.

A. $y' = 8^{x^2+x+1} \ln 8$.

B. $y' = 8^{x^2+x+1}(2x+1)\ln 8$.

C. $y' = (2x+1)\ln 8$.

D. $y' = (2x+1)\ln 8$.

Câu 48: Cho hàm số $y = e^{4x} + 2e^{-x}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $y''' - 13y' - 12y = 0$.

B. $y'' - 13y' - 12y = 0$.

C. $y''' - 13y'' - 12y' = 0$.

D. $y''' + 13y' + 12y = 0$.

Câu 49: Biết $(x^3 + \ln(2x+1) + e^{-x})' = ax^2 + \frac{b}{2x+1} + ce^{-x}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $S = (ab)^c + 1$.

A. $S = \frac{7}{6}$.

B. $S = \frac{1}{6}$.

C. $S = 6$.

D. $S = \frac{5}{6}$.

Câu 50: Một người tham gia chương trình bảo hiểm An sinh xã hội của công ty Bảo Việt với thể lệ như sau: Cứ đến tháng 9 hàng năm người đó đóng vào công ty là 12 triệu đồng với lãi suất hàng năm không đổi là 6%/năm. Hỏi sau đúng 18 năm kể từ ngày đóng, người đó thu về được tất cả bao nhiêu tiền? Kết quả làm tròn đến hai chữ số phần thập phân.

A. 393,12 (triệu đồng).

B. 403,32 (triệu đồng).

C. 412,23 (triệu đồng).

D. 293,32 (triệu đồng).

Câu 51: Một người mỗi đầu tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết đến cuối tháng thứ 15 thì người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

A. 635.000.

B. 535.000.

C. 613.000.

D. 643.000.

Câu 52: Ông A vay ngân hàng 300 triệu đồng để mua nhà theo phương thức trả góp với lãi suất 0,5% mỗi tháng. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, ông hoàn nợ cho ngân hàng số tiền cố định 5,6 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả. Hỏi sau khoảng bao nhiêu tháng ông A sẽ trả hết số tiền đã vay?

A. 63 tháng.

B. 36 tháng.

C. 64 tháng.

D. 60 tháng.

Câu 53: Số lượng vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = S(0) \cdot 2^t$, trong đó $S(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con ?

A. 19 phút.

B. 7 phút.

C. 48 phút.

D. 12 phút.

Câu 54: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng, bao gồm gốc và lãi ? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền.

A. 14 năm.

B. 11 năm.

C. 12 năm.

D. 13 năm.

§4. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NĂM

I. Phương trình

§1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ	§2. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT
1. Phương trình mũ cơ bản Phương trình mũ có dạng: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$) Nếu $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm Nếu $b > 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$	1. Phương trình lôgarit cơ bản Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b, (0 < a \neq 1)$ Theo định nghĩa lôgarit, phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$, với mọi b .
2. Phương trình mũ đơn giản Phương trình có thể đưa về phương trình mũ cơ bản bằng cách áp dụng các phương pháp: Phương pháp 1. Đưa về cùng cơ số Biến đổi phương trình đưa về dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ♦ Với $0 < a \neq 1$. Ta có: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ♦ Đặc biệt: $a^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$ Phương pháp 2: Đặt ẩn số phụ Dạng 1. Phương trình có dạng: $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0, Aa^{3x} + Ba^{2x} + Ca^x + D = 0$, ta đặt $t = a^x, (t > 0)$ Dạng 2. Phương trình có dạng: $A.a^{2x} + B(a.b)^x + C.b^{2x} = 0$ Biến đổi phương trình đưa về dạng: $A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B\left(\frac{a}{b}\right)^x + C = 0$. Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x (t > 0)$ Dạng 3. Phương trình có dạng: $A.a^x + B.b^x + C = 0$ Với $a.b = 1$ hoặc $a^x.b^x = 1$. Đặt $t = a^x, (t > 0)$, khi đó $b^x = \frac{1}{t}$	2. Phương trình lôgarit đơn giản Phương trình có thể đưa về phương trình lôgarit cơ bản bằng cách áp dụng các phương pháp: Phương pháp 1: Đưa về cùng cơ số Biến đổi phương trình về dạng: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0, g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ Chú ý: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$ Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ Đặt $t = \log_a f(x)$, với a và $f(x)$ thích hợp để đưa phương trình lôgarit về phương trình đại số đối với t Dạng 1. $A(\log_a x)^2 + B \log_a x + C = 0 \quad (0 < a \neq 1, x > 0)$. Đặt $t = \log_a x$ Dạng 2. $A \log_a x + B \log_x a + C = 0 \quad (0 < a \neq 1)$. Đặt $t = \log_a x \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{t} \quad (0 < x \neq 1)$
Phương pháp 3. Lấy lôgarit hai vế (lôgarit hóa) Với $M, N > 0$ và $0 < a \neq 1$. Ta có: ♦ $M = N \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N$ ♦ $a^{f(x)} = M \Leftrightarrow f(x) = \log_a M$ ♦ $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \log_a b$ hay $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow g(x) = f(x) \log_b a$	Phương pháp 3: Mũ hóa hai vế Áp dụng định nghĩa lôgarit: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = a^{\log_a b} = b \quad (0 < a \neq 1, b > 0)$

II. Bất phương trình

Bất phương trình mũ	Bất phương trình lôgarit
✎ Khi giải bất phương trình mũ, có thể áp dụng tính chất đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số mũ: ☞ $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ a > 1 \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$ ✎ Để giải các bất phương trình mũ, ta có thể biến đổi đưa về bất phương trình mũ cơ bản hoặc bất phương trình đại số	✎ Khi giải bất phương trình lôgarit, có thể áp dụng các tính chất đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số lôgarit: ☞ $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$ ✎ Để giải các bất phương trình lôgarit, ta có thể biến đổi đưa về bất phương trình lôgarit cơ bản hoặc bất phương trình đại số.

III. Hệ phương trình

1. Định nghĩa:

Hệ phương trình mũ, lôgarit là hệ phương trình có chứa ít nhất một phương trình mũ hoặc phương trình lôgarit.

2. Cách giải:

Khi giải hệ phương trình mũ và lôgarit, ta cũng dùng các phương pháp giải hệ phương trình đã học như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ, ...

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Biết phương trình $\log_3(x+2)^2 + \log_3 \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 9$ có hai nghiệm. Tìm tổng S của hai nghiệm đó.

- A. $S = -29$. B. $S = -24$. C. $S = -4$. D. $S = 25$.

Câu 2: Số nghiệm của phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Nhiều hơn 2.

Câu 3: Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

- A. $x < 0$. B. $x < 0$ hoặc $x > \frac{1}{4}$. C. $x > \frac{1}{4}$. D. $x < 0$ hoặc $x \geq \frac{1}{4}$.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $-8^x + 2 \cdot 4^x + 2^x - 2 = 0$.

- A. 3. B. 1. C. Nhiều hơn 3. D. 2.

Câu 5: Biết phương trình $\log_2(x-1) - 2 \log_4(3x-2) + 2 = 0$ có một nghiệm là a . Tính $P = a^{\log_a a} + 7$.

- A. $P = 8$. B. $P = 9$. C. $P = 2$. D. $P = 11$.

Câu 6: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(2^{x+1} - 5) = x$.

- A. $x = \log_5 2$. B. $x = \log_2 5$. C. $x = 5$. D. $x = \frac{2}{5}$.

Câu 7: Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$.

A. $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

B. $x \in (1; \sqrt{2})$.

C. $x \in (-\sqrt{2}; -1)$.

D. $x \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

Câu 8: Giải bất phương trình $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$.

A. $-\frac{3}{8} \leq x \leq 3$.

B. $\frac{1}{4} < x \leq 3$.

C. $\frac{3}{4} \leq x \leq 3$.

D. $\frac{3}{4} < x \leq 3$.

Câu 9: Tìm nghiệm của phương trình $5^{x^2-5x-6} = 1$.

A. $x = -5$ và $x = -6$.

B. $x = 2$ và $x = 3$.

C. $x = 1$ và $x = -6$.

D. $x = -1$ và $x = 6$.

Câu 10: Giải bất phương trình $\frac{2^x}{3^x - 2^x} \leq 2$.

A. $x < -2$.

B. $x \geq 3$.

C. $x < 0$ hoặc $x \geq 1$.

D. $0 < x \leq 1$.

Câu 11: Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$.

A. $-1 < x < 0$.

B. $x > 0$.

C. $x < -1$ hoặc $x > 0$.

D. $x < -1$.

Câu 12: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$.

A. $x = 3$ và $x = 8$.

B. $x = 4$ và $x = 8$.

C. $x = 2$ và $x = 3$.

D. $x = 2$ và $x = 4$.

Câu 13: Biết x là một nghiệm của phương trình $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$. Tính $P = 3^{x+2} + 2^{x+3}$.

A. $P = 72$.

B. $P = 9$.

C. $P = 8$.

D. $P = 17$.

Câu 14: Tìm nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x} = \frac{3}{2}$.

A. $x = 1 \pm \sqrt{\log_2 3}$.

B. $x = 1 + \sqrt{\log_3 2}$.

C. $x = 1 - \sqrt{\log_2 3}; x = 2$

D. $x = 1 \pm \sqrt{\log_3 2}$.

Câu 15: Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} \cdot 2^{x^2} = 8 \cdot 4^{x-2}$.

A. $x = 1; x = 1 + 2\log_2 3$.

B. $x = 1; x = 1 - \log_3 2$.

C. $x = 2; x = 2 - \log_2 3$.

D. $x = 1; x = 1 - \log_2 3$.

Câu 16: Biết phương trình $(2 + \sqrt{3})^{2x} = 2 - \sqrt{3}$ có một nghiệm là x_1 và biết phương trình $(3 - 2\sqrt{2})^{3x} = 3 + 2\sqrt{2}$ có một nghiệm là x_2 . Tính $P = x_1 \cdot x_2$.

A. $P = \frac{1}{6}$.

B. $P = -\frac{1}{2}$.

C. $P = -\frac{1}{3}$.

D. $P = -\frac{5}{6}$.

Câu 17: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 9x^2 - y^2 = 5 \\ \log_5(3x+y) - \log_5(3x-y) = 1 \end{cases}$

A. $(x; y) = (1; 2)$.

B. $(x; y) = (2; 2)$.

C. $(x; y) = (1; 1)$.

D. $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 18: Biết phương trình $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $K = (x_1 + x_2)^3 - 2x_1x_2 + 3$.

A. $K = 5$.

B. $K = 1$.

C. $K = -1$.

D. $K = 21$.

Câu 19: Phương trình $\log_3 x = -x + 11$ có nghiệm thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-3; 7)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(0; 10)$.

D. $(11; +\infty)$.

Câu 20: Tìm nghiệm của phương trình $5^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)} = 1$.

- A. $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pi + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 21: Giải bất phương trình $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$.

- A. $0 < x < 5$. B. $x > 2$. C. $x < 3$. D. $x > 1$.

Câu 22: Giải bất phương trình $3^x - 3^{-x+2} + 8 > 0$.

- A. $x > 1$. B. $x < 0$. C. $x > 0$. D. $0 < x < 1$.

Câu 23: Tìm nghiệm của phương trình $\log_3 3x = 3\sqrt{\log_3 x - 1}$.

- A. $x = 3$ và $x = 81$. B. $x = 1$ và $x = 4$. C. $x = 3$ và $x = 27$. D. $x = 1$ và $x = 9$.

Câu 24: Tìm nghiệm của phương trình $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{x-1})^5$.

- A. $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\log 2; x = 2$ B. $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\log 2$.
C. $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\log 2$. D. $x = 1; x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log 2$.

Câu 25: Tìm nghiệm của phương trình $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.

- A. $x = 3; x = -\frac{1}{\log_2 5}$. B. $x = 3; x = -\frac{1}{\log_5 2}$. C. $x = 2; x = -\frac{1}{\log_2 5}$. D. $x = 1; x = 3$.

Câu 26: Giải bất phương trình $0,3^{\frac{\log_1 \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2}}}{5} > 1$.

- A. $0 < x < \frac{3}{2}$. B. $x < 0$. C. $x > \frac{3}{2}$. D. $1 < x < \frac{3}{2}$.

Câu 27: Phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$ có nghiệm thuộc khoảng nào dưới đây ?

- A. $(0;1)$. B. $(2;+\infty)$. C. $(-\infty;0)$. D. $(2;3)$.

Câu 28: Giải bất phương trình $\frac{3^x + 7^x}{3^{x+1} - 7^{x+1}} \geq -\frac{1}{4}$.

- A. $x \in [1;+\infty)$. B. $x \in [-1;1]$.
C. $x \in (-\infty;-1]$. D. $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$.

Câu 29: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 18) + 2\log_5(x - 4) < 0$.

- A. $x > 6$. B. $x > 4$. C. $x > 2$. D. $x < 4$.

Câu 30: Giải bất phương trình $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$.

- A. $x < -3$. B. $x > 2$. C. $x < 0$ hoặc $x > 1$. D. $0 < x < 2$.

Câu 31: Giải bất phương trình $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$.

- A. $x \geq \frac{2}{9}$. B. $x \geq \frac{9}{2}$. C. $\frac{9}{2} \leq x < 5$. D. $x \geq 4$.

Câu 32: Tìm nghiệm của phương trình $9^{x+1} = 27^{2x+1}$.

- A. $x = -2$. B. $x = 0$. C. $x = -\frac{1}{4}$. D. $x = 4$.

Câu 33: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases}$$

- A. $(x; y) = (2; 2)$ và $(x; y) = (-2; -2)$.
 B. $(x; y) = (2; 2)$.
 C. $(x; y) = (2; -2)$ và $(x; y) = (-2; 2)$.
 D. $(x; y) = (-2; -2)$.

Câu 34: Giải bất phương trình $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$.

- A. $4 < x < 16$.
 B. $2 < x < 4$.
 C. $3 < x < 9$.
 D. $1 < x < 4$.

Câu 35: Tìm nghiệm của phương trình $2^{x^2 - 3x + 2} = 4$.

- A. $x = 0$ và $x = -3$.
 B. $x = 2$ và $x = 1$.
 C. $x = 0$ và $x = 3$.
 D. $x = -1$ và $x = 3$.

Câu 36: Phương trình nào dưới đây có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 5$.

- A. $3^{x^2 - 3x + 2} = 1$.
 B. $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2$.
 C. $x^2 + 7x + 10 = 0$.
 D. $\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x-3)$.

Câu 37: Tìm nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2 - 2x - 3} = 7^{x+1}$.

- A. $x = 3$ và $x = -2$.
 B. $x = -1$ và $x = 2$.
 C. $x = -1$ và $x = 3$.
 D. $x = 2$ và $x = 3$.

Câu 38: Tìm nghiệm của phương trình $\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$.

- A. $x = 10$.
 B. $x = 0$.
 C. $x = 1$.
 D. $x = 100$.

Câu 39: Giải bất phương trình $4^x + 3 \cdot 2^x + 2 > 0$.

- A. $x < 0$ hoặc $x > 1$.
 B. $x > 1$.
 C. $x < 0$.
 D. $0 < x < 1$.

Câu 40: Tìm nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$.

- A. $x = 8; x = 4$.
 B. $x = 16; x = 4$.
 C. $x = 16$.
 D. $x = 4$.

Câu 41: Giải bất phương trình $(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5$.

- A. $x < -1$.
 B. $x < -3$.
 C. $x > -4$.
 D. $-4 < x < 0$.

Câu 42: Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log x} < 5 \cdot 2^{-\log x} - 4$.

- A. $\frac{1}{100} < x < \frac{1}{10}$.
 B. $\frac{1}{100} < x < 1$.
 C. $\frac{1}{10} < x < 1$.
 D. $0 < x < 1$.

Câu 43: Giải bất phương trình $\frac{1}{3^x + 5} \leq \frac{1}{3^{x+1} - 1}$.

- A. $x \leq 1$.
 B. $-1 < x \leq 1$.
 C. $x > -1$.
 D. $-1 < x < 1$.

Câu 44: Giải bất phương trình $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \leq 0$.

- A. $x \leq 9$ hoặc $x \geq 29$.
 B. $2 \leq x \leq 3$.
 C. $5 < x < 21$.
 D. $9 \leq x \leq 27$.

Câu 45: Giải bất phương trình $4^x + 2^{x+1} - 8 > 0$.

- A. $x > 1$.
 B. $x < 2$.
 C. $x > 3$.
 D. $1 \leq x < 2$.

Câu 46: Giải bất phương trình $9^{x^2 - 2x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x - x^2} \leq 3$.

- A. $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.
 B. $x \geq 1 - \sqrt{2}$.
 C. $x \leq 1 + \sqrt{2}$.
 D. $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$.

Câu 47: Biết x là một nghiệm của phương trình $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2$. Tính $P = 2^{\log_5 5^x} + 5^x$.

- A. $P = 459$.
 B. $P = 29$.
 C. $P = 3129$.
 D. $P = 2329$.

Câu 48: Phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x = 16^x$ có nghiệm thuộc khoảng nào dưới đây ?

- A. $[2;5]$. B. $(-2;4)$. C. $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. D. $(3;+\infty)$.

Câu 49: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases}$

- A. $(x;y)=(2;3)$ và $(x;y)=(3;2)$. B. $(x;y)=(2;1)$ và $(x;y)=(1;2)$.
C. $(x;y)=(4;1)$ và $(x;y)=(1;2)$. D. $(x;y)=(2;18)$ và $(x;y)=(18;2)$.

Câu 50: Số nghiệm của phương trình $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$.

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 51: Giải bất phương trình $3^{x+2} + 3^{x-1} \leq 28$.

- A. $x > 1$. B. $0 \leq x \leq 1$. C. $x < 0$. D. $x \leq 1$.

Câu 52: Phương trình $\log_4 x = \frac{4}{x}$ có nghiệm thuộc khoảng nào dưới đây ?

- A. $(4;7]$. B. $(5;+\infty)$. C. $(2;5)$. D. $(-\infty;1)$.

Câu 53: Giải bất phương trình $\log_8(4-2x) \geq 2$.

- A. $-30 \leq x < 2$. B. $x \leq -30$. C. $x \geq 30$. D. $x < 2$.

Câu 54: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + 2\log_3(2-x) \geq 0$.

- A. $-1 \leq x < 1$. B. $\frac{1}{2} \leq x < 1$. C. $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. D. $-1 < x < 1$.

Câu 55: Tìm nghiệm của phương trình $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$.

- A. $x = 1$. B. $x = 1$ và $x = 2$. C. $x = 0$ và $x = -1$. D. $x = 1$ và $x = 0$.

Câu 56: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2\log_2(x-2) - \log_{\sqrt{2}} y = 0 \end{cases}$

- A. $(x;y)=(3;1)$. B. $(x;y)=(1;2)$. C. $(x;y)=(2;1)$. D. $(x;y)=(1;3)$.

Câu 57: Biết phương trình $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $H = x_1^3 + x_2^3 + 1$.

- A. $H = 2$. B. $H = -1$. C. $H = 1$. D. $H = 0$.

Câu 58: Giải bất phương trình $(x-5)(\log x + 1) < 0$.

- A. $-1 < x < 5$. B. $x < \frac{1}{10}$. C. $\frac{1}{10} < x < 5$. D. $x > 5$.

Câu 59: Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$.

- A. $x = 7$. B. $x = 5$. C. $x = 3$. D. $x = 4$.

Câu 60: Biết phương trình $\log_2^2 x + 3\log_2(2x) - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $K = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1 x_2$.

- A. $K = \frac{5}{2}$. B. $K = \frac{34}{5}$. C. $K = \frac{47}{8}$. D. $K = \frac{2}{3}$.

Câu 61: Giải bất phương trình $0,3^{\log_{\frac{1}{5}} \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2}} > 1$.

- A. $x > 2$. B. $-3 < x < 3$. C. $0 < x < \frac{3}{2}$. D. $0 < x < 1$.

Câu 62: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_2(3y-1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2 \end{cases}$.

- A. $(x; y) = (1; 2)$. B. $(x; y) = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. C. $(x; y) = (-1; 1)$. D. $(x; y) = \left(2; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 63: Giải bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

- A. $x > 3$. B. $x < 3$. C. $\frac{1}{3} < x < 3$. D. $x > \frac{10}{3}$.

Câu 64: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 \\ 2\log_3(x-1) - \log_{\sqrt{3}}(y+1) = 0 \end{cases}$.

- A. $(x; y) = (3; 1)$. B. $(x; y) = (-1; -3)$. C. $(x; y) = (2; 6)$. D. $(x; y) = (1; 3)$.

Câu 65: Tìm nghiệm của phương trình $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$.

- A. $x = 3$. B. $x = \frac{1}{2}$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Câu 66: Giải bất phương trình $2^{-x^2} > 2^{-|x|}$.

- A. $x \in (-1; 0)$. B. $x \in (-1; 1)$. C. $x \in (0; 1)$. D. $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Câu 67: Số nghiệm của phương trình $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$ là.

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 68: Tìm nghiệm của phương trình $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

- A. $x = 2; x = 3$. B. $x = 10$. C. $x = 10; x = 5$. D. $x = 1; x = 10$.

Câu 69: Giải bất phương trình $9^x < 3^{x+1} + 4$.

- A. $0 < x < \log_3 4$. B. $x > 1$. C. $x < \log_3 4$. D. $x > \log_3 4$.

Câu 70: Tìm nghiệm của phương trình $3^{4x+8} - 4 \cdot 3^{2x+5} + 28 = 2 \log_2 \sqrt{2}$.

- A. $x = -\frac{3}{2}; x = -1$. B. $x = -\frac{3}{2}; x = 1$. C. $x = -1; x = \frac{3}{2}$. D. $x = \frac{3}{2}; x = 1$.

Câu 71: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2$.

- A. $x = 5$. B. $x = \frac{1}{3}; x = 5$. C. $x = -\frac{1}{3}; x = 5$. D. $x = 3; x = 5$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

HÀM SỐ LŨY THỪA – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LÔGARIT

-----000-----

Câu 1: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x - 6) \geq -3$.

- A. $x \in (-1; 6)$.
 B. $x \in (-2; -1) \cup (6; 7)$.
 C. $x \in [-2; -1) \cup (6; 7]$.
 D. $x \in [-2; 7]$.

Câu 2: Giải phương trình $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$.

- A. $x = 216$.
 B. $x = 729$.
 C. $x = 18$.
 D. $x = 24$.

Câu 3: Tính $P = \log_4(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}) + \log_4(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})$.

- A. $P = 2$.
 B. $P = 3$.
 C. $P = 4$.
 D. $P = 1$.

Câu 4: Ông B gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thẻ thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 7,65%/năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi số tiền m mà ông B gửi thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 5 năm là bao nhiêu triệu đồng ?

- A. $m = 15 \cdot (1 + 0,0765)^5$ (triệu đồng).
 B. $m = 15 \cdot (0,0765)^5$ (triệu đồng).
 C. $m = 15 \cdot (1 + 2 \cdot (0,0765))^5$ (triệu đồng).
 D. $m = 15 \cdot (1 + 0,765)^5$ (triệu đồng).

Câu 5: Tính $H = \log_{a^3} a$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

- A. $H = -3$.
 B. $H = -\frac{1}{3}$.
 C. $H = 3$.
 D. $H = \frac{1}{3}$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log x + \log(x+2)}$.

- A. $D = (0; +\infty)$.
 B. $D = [-1 + \sqrt{2}; +\infty)$.
 C. $D = [-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}]$.
 D. $D = (\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 7: Xét hàm số $y = 3^x(x - \sqrt{x^2 + 1})$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 D. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 8: Tìm nghiệm của phương trình $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$.

- A. $x = 1$.
 B. $x = 1; x = 3$.
 C. $x = 2; x = 4$.
 D. $x = 5$.

Câu 9: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,2}(x^2 - 4) \geq -1$.

- A. $S = [-3; 3]$.
 B. $S = [-3; -2) \cup (2; 3]$.
 C. $S = (-2; 2)$.
 D. $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log_5(x^2 - mx + m + 2)$ xác định với mọi x .

- A. $m \leq 2 - 2\sqrt{3}$.
 B. $m \in (2 - 2\sqrt{3}; 2 + 2\sqrt{3})$.
 C. $m \in (1; 3)$.
 D. $m \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số chẵn. D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

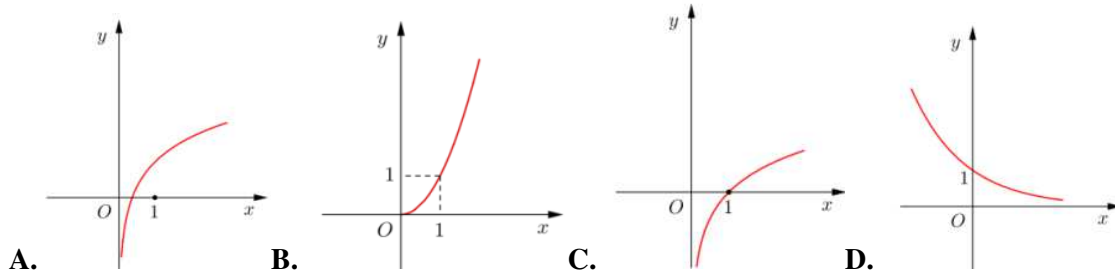
Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{5x - 2x^2 - 2} + \ln \frac{1}{x^2 - 1}$.

- A. $D = (1; 3)$. B. $D = (1; 2)$. C. $D = [1; 3)$. D. $D = (1; 2]$.

Câu 13: Biết $\log 3 = a$. Tính $\frac{1}{\log_{81} 100}$ theo a .

- A. $\frac{1}{\log_{81} 100} = \frac{a}{8}$. B. $\frac{1}{\log_{81} 100} = 16a$. C. $\frac{1}{\log_{81} 100} = 2a$. D. $\frac{1}{\log_{81} 100} = a^4$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x \ln x$. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.



Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)e^{4x}$.

- A. $y' = 2x.e^{4x}$. B. $y' = 2e^{4x} \cdot (2x^2 + x + 2)$.
C. $y' = \frac{1}{4}e^{4x} \cdot (x^2 + 1)$. D. $y' = 8x.e^{4x}$.

Câu 16: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2$.

- A. $x = 5$. B. $x = \frac{1}{3}; x = 5$. C. $x = \frac{1}{3}; x = 3$. D. $x = 3$.

Câu 17: Tìm nghiệm của phương trình $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$.

- A. $x = 0; x = -1$. B. $x = 2; x = 1$. C. $x = 3; x = 0$. D. $x = -1; x = 1$.

Câu 18: Tính $P = \log_2 36 - \log_2 144$.

- A. $P = 4$. B. $P = -4$. C. $P = -2$. D. $P = 2$.

Câu 19: Với $a > 0$. Tính $K = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$.

- A. $K = a^5$. B. $K = a$. C. $K = a^4$. D. $K = a^3$.

Câu 20: Biết $\log_6 15 = a, b = \log_{12} 18$. Tính $\log_{25} 24$ theo a, b .

- A. $\log_{25} 24 = \frac{5-b}{2a+ab-2b+1}$. B. $\log_{25} 24 = \frac{5-a}{2b+2ab-4a+2}$.
C. $\log_{25} 24 = \frac{5-b}{2a+2ab-4b+2}$. D. $\log_{25} 24 = \frac{5+b}{2a+2ab+4b+2}$.

Câu 21: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{1-x}$.

- A. $S = (-\infty; 0)$. B. $S = (1; 2)$. C. $S = (2; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 0]$.

Câu 22: Tìm giá trị của của biểu thức $M = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right)$.

- A. $M = \frac{173}{60}$. B. $M = \frac{60}{173}$. C. $M = \frac{175}{60}$. D. $M = 12$.

Câu 23: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{2} \log_2 (4+x) + \log_{\frac{1}{2}} (4 - \sqrt{16-x})$.

- A. $D = (-\infty; -4) \cup [16; +\infty)$. B. $D = [-4; 16]$
C. $D = (-4; +\infty)$. D. $D = (-4; 16]$.

Câu 24: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

- A. $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng). B. $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).
C. $m = \frac{100 \cdot 1,03}{3}$ (triệu đồng) D. $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Câu 25: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{2}$.

- A. $x = 2$. B. $x = 4$. C. $x = 8$. D. $x = 16$.

Câu 26: Cho $\log_{30} 3 = a, \log_{30} 5 = b$. Hãy tính $\log_{30} 1350$ theo a, b .

- A. $\log_{30} 1350 = a + b + 2$. B. $\log_{30} 1350 = a + b + 1$.
C. $\log_{30} 1350 = 2a + b$. D. $\log_{30} 1350 = 2a + b + 1$.

Câu 27: Tìm giá trị của của biểu thức $I = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

- A. $I = 2$. B. $I = 3$. C. $I = 5$. D. $I = 6$.

Câu 28: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. B. $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$. C. $y = \log_{\sqrt{3}} x$. D. $y = \log_{\frac{1}{5(\sqrt{6}-\sqrt{5})}} x$.

Câu 29: Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a = b > 0$. B. $\log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
C. $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$. D. $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b > 0$.

Câu 30: Giải bất phương trình $\log_2 (3^x - 2) < 0$.

- A. $0 < x < 1$. B. $\log_3 2 < x < 1$. C. $x > 1$. D. $x > \log_3 2$.

Câu 31: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 (8 - x^2) + \log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0$.

- A. $x = 4$. B. $x = 2$. C. $x = 0$. D. $x = 3$.

Câu 32: Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 33: Cho hai số dương a và b , $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $\log_a 1 = 0$. B. $a^{\log_a b} = b$. C. $\log_a (a^\alpha) = \alpha$. D. $\log_a 0 = 1$.

Câu 34: Cho $\log_2 5 = a$. Hãy tính $\log_4 1250$ theo a .

- A. $\log_4 1250 = \frac{1}{2}(1-4a)$. B. $\log_4 1250 = \frac{1}{2}(1+4a)$.
C. $\log_4 1250 = 1+4a$. D. $\log_4 1250 = \frac{1}{2}(1+2a)$.

Câu 35: Cho các số thực dương a, b với $a \neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log_{a^2}(ab) = 2 + \frac{1}{2}\log_a b$. B. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$.
C. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$. D. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$.

Câu 36: Tìm nghiệm của phương trình $2\log_2^2 x - 14\log_4 x + 3 = 0$.

- A. $x = 8; x = \sqrt{2}$. B. $x = 4; x = 2\sqrt{2}$. C. $x = \sqrt{2}; x = \sqrt{3}$. D. $x = 8; x = 4$.

Câu 37: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log \frac{x-2}{1-x}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $D = [1; 2)$.
C. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. D. $D = (1; 2)$.

Câu 38: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+1}$.

- A. $D = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. B. $D = (-\infty; 2)$.
C. $D = (2; 4]$. D. $D = [2; 4)$.

Câu 39: Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\lg(x^2 + x - 5) = \lg 5x + \lg \frac{1}{5x}$ là.

- A. 0. B. 1. C. Nhiều hơn 2. D. 2.

Câu 40: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$.

- A. $y' = x \ln 3$. B. $y' = \frac{1}{x}$. C. $y' = \frac{1}{x \log 3}$. D. $y' = \frac{1}{x \ln 3}$.

Câu 41: Số nghiệm của phương trình $25^x - 6.5^x + 5 = 0$.

- A. 3 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. Vô nghiệm. D. 1 nghiệm.

Câu 42: Tìm giá trị của của biểu thức $M = \log_5 \log_5 \left(\underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\dots \sqrt[n]{5}}}}}_{n \text{ dấu căn}} \right)$.

- A. $M = -n$. B. $M = \frac{n}{5}$. C. $M = \frac{n}{5^n}$. D. $M = n$.

Câu 43: Tính $P = \left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} \right) . 49^{\log_7 2}$.

- A. $P = 219$. B. $P = 16$. C. $P = 216$. D. $P = 19$.

Câu 44: Tính $H = \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \log_4 9 + \log_{\frac{1}{2}} 6$.

- A. $H = -2$. B. $H = 2$. C. $H = 4$. D. $H = 3$.

Câu 45: Tìm giá trị của của biểu thức $M = \sqrt{16^{\frac{1}{\log_7 4}} + 81^{\frac{1}{\log_6 9}} + 15}$.

- A. $M = 39$. B. $M = 36$. C. $M = 10$. D. $M = 65$.

Câu 46: Tìm nghiệm của phương trình $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{x} + 2)$.

- A. $x = 2\sqrt{3}$. B. $x = 2 - 2\sqrt{3}$. C. $x = 4 - 2\sqrt{3}$. D. $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

Câu 47: Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$.

- A. $y' = 13^{x-1}$. B. $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$. C. $y' = 13^{x-1} \cdot \ln 13$. D. $y' = 13^x \cdot \ln 13$.

Câu 48: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó ?

- A. $y = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x$. B. $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$. C. $y = \left(\frac{4}{\pi}\right)^x$. D. $y = 3^x$.

Câu 49: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng, bao gồm gốc và lãi ? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền.

- A. 11 năm. B. 12 năm. C. 14 năm. D. 13 năm.

Câu 50: Biết $\log_2 14 = a$. Tính $A = \log_{49} 32$ theo a .

- A. $A = \frac{5}{2(a-1)}$. B. $A = \frac{2}{5(a-1)}$. C. $A = a - 1$. D. $A = \frac{1}{a-1}$.

Câu 51: Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $P = 27 \log_a b$. B. $P = 15 \log_a b$. C. $P = 6 \log_a b$. D. $P = 9 \log_a b$.

Câu 52: Cho $\log_2 5 = a, \log_2 3 = b$. Tính $H = \log_3 675$ theo a, b .

- A. $H = \frac{2a}{b} + 3$. B. $H = \frac{a}{b} + 3$. C. $H = \frac{2a}{b+3}$. D. $H = \frac{3a}{b} + 2$.

Câu 53: Cho $f(x) = \log_2 \sqrt{x^2 - 1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của x để $f'(x) < 0$.

- A. $x > 1$. B. $x < -1$. C. $x > 0$. D. $-1 < x < 0$.

Câu 54: Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy tính $\log_6 45$ theo a và b .

- A. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}$. B. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab + b}$.
C. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab}$. D. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$.

Câu 55: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log_2 \log_3 [(m-2)x^2 + 2(m-3)x + m]$ xác định với mọi x .

- A. $m \in \left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$. B. $m \in \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$. C. $m \in \left[\frac{7}{3}; 7\right)$. D. $m \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x) = \ln(4x - x^2)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $f'(2) = 1$. B. $f'(2) = 0$. C. $f'(-1) = -1, 2$. D. $f'(5) = 1, 2$.

Câu 57: Trong các phát biểu dưới đây, có bao nhiêu phát biểu đúng ?

- ① Hàm số $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi $a > 1$.
② Đồ thị hàm số $y = x^a$ không có đường tiệm cận.
③ Với $a, b > 0, a \neq 1$, ta có: $a^a = b \Leftrightarrow a = \log_a b$.
④ Phương trình $a^x = b, (a, b > 0, a \neq 1)$ luôn có nghiệm.

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 58: Xét hàm số $f(x) = e^{\cos 2x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}e$. B. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}e$. C. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. D. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}e$.

Câu 59: Tìm giá trị của của biểu thức $H = \log_2 \log_5 \sqrt[4]{5}$.

- A. $H = 3$. B. $H = 5$. C. $H = -3$. D. $H = -5$.

Câu 60: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$.

- A. $D = (2; 3)$. B. $D = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.
C. $D = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. D. $D = [2; 3]$.

Câu 61: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x - 5) = 4$.

- A. $x = 11$. B. $x = 3$. C. $x = 21$. D. $x = 13$.

Câu 62: Số nghiệm của phương trình $9^x + 2(x - 2) \cdot 3^x + 2x - 5 = 0$ là.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 63: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $3^{x^2 - 3x + 2} = 9$. Tính $S = x_1 + x_2$.

- A. $S = 3$. B. $S = 1$. C. $S = 2$. D. $S = \frac{1}{2}$.

Câu 64: Cho hàm số $y = \ln \frac{1}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $xy' + 1 = e^y$. B. $xy' - 1 = e^y$. C. $xy' - 1 = -e^y$. D. $xy' + 1 = -e^y$.

Câu 65: Tập xác định D của hàm số $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 4x + 5)$ là:

- A. $D = \mathbb{R}$ B. $D = (-1; 5)$
C. $D = (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ D. $D = [-1; 5]$

Câu 66: Xét các số nguyên dương a, b sao cho $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

- A. $S_{\min} = 30$. B. $S_{\min} = 33$. C. $S_{\min} = 25$. D. $S_{\min} = 17$.

Câu 67: Cho $\log_2 20 = \alpha$. Tính $K = \log_{20} 5$ theo α .

- A. $K = \frac{\alpha + 2}{\alpha}$. B. $K = \frac{\alpha - 2}{\alpha}$. C. $K = \frac{\alpha - 2}{2}$. D. $K = \alpha + 2$.

Câu 68: Tính $I = a^{\log_{a^2} 4}$ với $0 < a \neq 1$.

- A. $I = 8$. B. $I = 4$. C. $I = 2$. D. $I = 16$.

Câu 69: Biết rằng $a^{\log_{0.5} 7} > 1$ và $\log_b \frac{1}{\sqrt{2}-1} > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $0 < b < 1$ và $a > 1$. B. $0 < a < 1$ và $b > 1$.
C. $a > 1$ và $b > 1$. D. $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$.

Câu 70: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2(4^x + 2m^3) = x$ có hai nghiệm phân biệt.

- A. $0 < m < \frac{1}{2}$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $m > 0$. D. $m > \frac{1}{2}$.

Câu 71: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{1}{4}$. C. $M = \frac{1}{2}$. D. $M = \frac{1}{3}$.

Câu 72: Tính giá trị của $A = \log \sqrt[n]{10^m}$ ($m, n \in \mathbb{N}, n > 2$) là :

- A. $A = \frac{m}{n}$. B. $A = mn$. C. $A = \frac{n}{m}$. D. $A = n\sqrt{m}$.

Câu 73: Xét hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số có một cực đại. B. Hàm số có một cực tiểu.
C. Hàm số không có cực trị. D. Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

Câu 74: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ trên đoạn $[3; 6]$.

- A. $\max_{[3;6]} f(x) = \ln 6$ và $\min_{[3;6]} f(x) = \ln 3$. B. $\max_{[3;6]} f(x) = \ln 40$ và $\min_{[3;6]} f(x) = \ln 10$.
C. $\max_{[3;6]} f(x) = \ln 40$ và $\min_{[3;6]} f(x) = \ln 12$. D. $\max_{[3;6]} f(x) = \ln 36$ và $\min_{[3;6]} f(x) = \ln 10$.

Câu 75: Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. B. $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$.
C. $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$. D. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$.

Câu 76: Xét hàm số $y = e^{-x} \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $y'' + 2y' + 2y = 0$. B. $y''' + 2y' + 2y = 0$. C. $y''' - 2y' + 2y = 0$. D. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Câu 77: Giải bất phương trình $4^{\frac{1}{x}-1} > 2^{\frac{1}{x}-2} + 3$.

- A. $0 < x < \frac{1}{2}$. B. $0 < x < 2$. C. $\frac{1}{2} < x < 1$. D. $\frac{1}{2} < x < 2$.

Câu 78: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $-2 < m < 2$. B. $m = 2$. C. $m < 2$. D. $m > 2$ hoặc $m < -2$.

Câu 79: Đặt $\log_{12} 6 = a$ và $\log_{12} 7 = b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log_2 7 = \frac{a}{1-b}$. B. $\log_2 7 = \frac{a}{1+b}$. C. $\log_2 7 = \frac{b}{1-a}$. D. $\log_2 7 = \frac{b}{1+a}$.

Câu 80: Cho $c = \log_{15} 3$. Giá trị của $\log_{25} 15$ theo c là.

- A. $\log_{25} 15 = \frac{2}{c+1}$. B. $\log_{25} 15 = \frac{1}{1-c}$. C. $\log_{25} 15 = \frac{2}{1-c}$. D. $\log_{25} 15 = \frac{1}{2(1-c)}$.

Câu 81: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = e^{2x+1} \sin 2x$.

- A. $f'(x) = 2e^{2x+1} \cos 2x$. B. $f'(x) = e^{2x+1} (\sin 2x + \cos 2x)$.
C. $f'(x) = 2e^{2x+1} \sin 2x$. D. $f'(x) = 2e^{2x+1} (\sin 2x + \cos 2x)$.

Câu 82: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{(3x-2)^2}$.

- A. $y' = 2(3x-2)^{\frac{1}{3}}$. B. $y' = (3x-2)^{\frac{1}{3}}$. C. $y' = 2(3x-2)^{-\frac{1}{3}}$. D. $y' = 2(3x-2)^{\frac{1}{3}}$.

Câu 83: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+5}}$.

- A. $D = [-5; 4]$. B. $D = (-\infty; -4) \setminus \{-5\}$. C. $D = (-\infty; -5)$. D. $D = (-\infty; -4)$.

Câu 84: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$.

- A. $S = \left\{ \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right\}$.
 B. $S = \{3\}$.
 C. $S = \{2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}\}$.
 D. $S = \{2+\sqrt{5}\}$.

Câu 85: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $(0,5)^{\frac{1}{x}} \geq 0,0625$.

- A. $S = (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty \right)$.
 B. $S = \left(0; \frac{1}{4} \right]$.
 C. $S = (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty \right)$.
 D. $S = \left(0; \frac{1}{4} \right) \cup (2; +\infty)$.

Câu 86: Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Biểu diễn $P = \log_6 45$ theo a, b .

- A. $P = \frac{a+2ab}{ab}$.
 B. $P = \frac{a+2ab}{ab+b}$.
 C. $P = \frac{a+2ab}{ab-b}$.
 D. $P = \frac{a-2ab}{ab+b}$.

Câu 87: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(\log_4 x) = 1$.

- A. $x = 16$.
 B. $x = 8$.
 C. $x = 4$.
 D. $x = 2$.

Câu 88: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1}$.

- A. $D = [2; 4]$.
 B. $D = (2; 4)$.
 C. $D = (2; 4]$.
 D. $D = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Câu 89: Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x \geq 5 - 2x$ là.

- A. $S = [1; +\infty)$.
 B. $S = (-\infty; 1]$.
 C. $S = (1; +\infty)$.
 D. $S = \emptyset$.

Câu 90: Tìm giá trị của của biểu thức $P = 25^{\log_5 6} + 10^{1+\log 2} - 2^{\log_4 9}$.

- A. $P = 35$.
 B. $P = 53$.
 C. $P = 56$.
 D. $P = 65$.

Câu 91: Tìm nghiệm của phương trình $3^{1-x} - 3^x + 2 = 0$.

- A. $x = 0$.
 B. $x = 2$.
 C. $x = 3$.
 D. $x = 1$.

Câu 92: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 + x + 2) = 3$.

- A. $x = 1; x = 2$.
 B. $x = 2; x = -3$.
 C. $x = -3; x = 0$.
 D. $x = 2; x = 3$.

Câu 93: Tính $P = a^{4\log_{a^2} 5}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

- A. $P = 5^8$.
 B. $P = 5$.
 C. $P = 5^4$.
 D. $P = 5^2$.

Câu 94: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2 \frac{x-1}{x-2}$.

- A. $D = (2; +\infty)$.
 B. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
 C. $D = (1; 2)$.
 D. $D = (-\infty; 1)$.

Câu 95: Đặt $\log 3 = a$. Tính $\log 9000$.

- A. $\log 9000 = 3 + a$.
 B. $\log 9000 = a^2 + 3$.
 C. $\log 9000 = 3a^2$.
 D. $\log 9000 = 3 + 2a$.

Câu 96: Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(x+2) = 1 - \log_3 x$.

- A. $x = 1; x = -3$.
 B. $x = 0; x = 2$.
 C. $x = 1$.
 D. $x = 2$.

Câu 97: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $\max_{[0;2]} f(x) = e^5$ và $\min_{[0;2]} f(x) = e$.

B. $\max_{[0;2]} f(x) = e$ và $\min_{[0;2]} f(x) = \frac{e}{5}$.

C. $\max_{[0;2]} f(x) = 5e$ và $\min_{[0;2]} f(x) = e$.

D. $\max_{[0;2]} f(x) = 5$ và $\min_{[0;2]} f(x) = 1$.

Câu 98: Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao

cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Câu 99: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $\max_{[0;2]} y = \sqrt{2}$; $\min_{[0;2]} y = 0$.

B. $\max_{[0;2]} y = (2 + 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$; $\min_{[0;2]} y = 0$.

C. $\max_{[0;2]} y = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$; $\min_{[0;2]} y = 0$.

D. $\max_{[0;2]} y = 2 + 2\sqrt{2}$; $\min_{[0;2]} y = 1$.

Câu 100: Cho hai số $a = 2^{\frac{1}{10}} + 3^{\frac{1}{10}} - 2$ và $b = \log_2 \left(\sin \frac{\pi}{7} \right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a > 0$ và $b > 0$.

B. $a < 0$ và $b > 0$.

C. $a < 0$ và $b < 0$.

D. $a > 0$ và $b < 0$.

Câu 101: Xét hàm số $y = e^{4x} + 2e^{-x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $y''' - 13y' = 12y$.

B. $y''' + 13y' = 12y$.

C. $y'' + 13y' = 12y$.

D. $y'' - 13y' = 12y$.

Câu 102: Hàm số nào dưới đây có đạo hàm là $y' = 3^x \ln 3 + 7x^6$?

A. $y = 3^x + x^7$.

B. $y = 3^x + 7^x$.

C. $y = \log_3 x + x^7$.

D. $y = 3^x \cdot x^7$.

Câu 103: Biểu diễn trực tiếp y theo x , biết $\ln y = \frac{1}{3} \ln x + \ln 4$.

A. $y = 4x^{\frac{1}{3}}$.

B. $y = x^{\frac{4}{3}}$.

C. $y = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{4}$.

D. $y = 4 + x^{\frac{1}{3}}$.

Câu 104: Biểu diễn trực tiếp y theo x , biết $\log y + \frac{1}{2} \log x = \log 3$.

A. $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$.

B. $y = 3\sqrt{x}$.

C. $y = \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

D. $y = 3 + \sqrt{x}$.

Câu 105: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$.

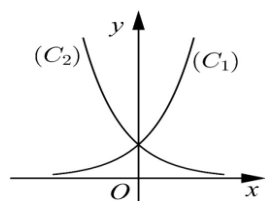
A. $y' = \frac{x(e^x + e^{-x}) + e^x - e^{-x}}{x^2}$.

B. $y' = \frac{x(e^x - e^{-x}) - e^x + e^{-x}}{x^2}$.

C. $y' = \frac{x(e^x + e^{-x}) - e^x + e^{-x}}{x^2}$.

D. $y' = \frac{2(e^x + e^{-x})}{x^2}$.

Câu 106: Cho hai hàm số $y = a^x, y = b^x$ với a, b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $0 < a < 1 < b$.

B. $0 < b < 1 < a$.

C. $0 < a < b < 1$.

D. $0 < b < a < 1$.

Câu 107: Tìm nghiệm của phương trình $7^{2x+1} - 8 \cdot 7^x + 1 = 0$.

- A. $x = 1; x = -1$. B. $x = 7; x = \frac{1}{7}$. C. $x = 0; x = -1$. D. $x = 2, x = 1$.

Câu 108: Bất phương trình $\log(2x^2 - 11x + 15) \leq 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

- A. 5. B. 3. C. 4. D. Vô số.

Câu 109: Cho $\log_2 5 = a; \log_2 3 = b$. Biểu diễn $\log_3 135$ theo a, b .

- A. $\log_3 135 = \frac{3a+b}{b}$. B. $\log_3 135 = \frac{a+3b}{a}$. C. $\log_3 135 = \frac{a+3b}{b}$. D. $\log_3 135 = \frac{3a+b}{a}$.

Câu 110: Biết hàm số $y = 2^x$ có giá trị bằng 1024. Tìm x .

- A. $x = 9$. B. $x = 11$. C. $x = -10$. D. $x = 10$.

Câu 111: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log_{0,8} \frac{2x+1}{x+5}} - 2$.

- A. $D = \left(-5; \frac{55}{34}\right]$. B. $D = \left[-\frac{1}{2}; \frac{55}{34}\right]$. C. $D = \left(-\frac{1}{2}; \frac{55}{34}\right]$. D. $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 112: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} - 4 \ln(3-x)$ trên đoạn $[-2; 1]$.

- A. $\max_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} - \ln 2$ và $\min_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} - 4 \ln 2$.
 B. $\max_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} - 4 \ln 2$ và $\min_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} - 8 \ln 2$.
 C. $\max_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} + 8 \ln 2$ và $\min_{[-2;1]} f(x) = \frac{1}{2} + 4 \ln 2$.
 D. $\max_{[-2;1]} f(x) = 8 \ln 2$ và $\min_{[-2;1]} f(x) = 4 \ln 2$.

Câu 113: Với $x > 0, y > 0$. Tính $H = \frac{x^{\frac{5}{4}}y + xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$.

- A. $H = 1$. B. $H = xy$. C. $H = \frac{x}{y}$. D. $H = x^2 y^2$.

Câu 114: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) - 2 \log_4(3x-2) + 2 = 0$.

- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = 0$.

Câu 115: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15)}$.

- A. $D = (3; 5)$. B. $D = [4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2}) \cup [5; +\infty)$.
 C. $D = [4 - \sqrt{2}; 3) \cup [4 + \sqrt{2}; +\infty)$. D. $D = [4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2}]$.

Câu 116: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{25^x - 5^x}$.

- A. $D = (2; +\infty)$. B. $D = [5; +\infty)$. C. $D = [0; +\infty)$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 117: Tìm giá trị của của biểu thức $L = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

- A. $L = \frac{49}{2}$. B. $L = \frac{25}{2}$. C. $L = \frac{25}{49}$. D. $L = \frac{25}{4}$.

Câu 118: Tính đạo hàm của hàm số $y = e^x \sin x$.

A. $y' = \sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

B. $y' = \sqrt{2}e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

C. $y' = -\sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

D. $y' = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

Câu 119: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}}.$

A. $D = (2; +\infty).$

B. $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty).$

C. $D = (-1; +\infty).$

D. $D = (-\infty; -1).$

Câu 120: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log(x-1) + \log(x+1)}.$

A. $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$

B. $D = [\sqrt{2}; +\infty).$

C. $D = [-1; 1].$

D. $D = [0; \sqrt{2}].$

Câu 121: Tập các số x thỏa mãn $\log_{0,4}(x-4) + 1 \geq 0.$

A. $x \in (4; +\infty).$

B. $x \in \left[\frac{13}{2}; +\infty\right).$

C. $x \in \left(-\infty; \frac{13}{2}\right).$

D. $x \in \left(3; \frac{13}{2}\right).$

Câu 122: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Đồ thị của hàm số $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$ có tiệm cận đứng là trục Oy .

B. Hàm số $y = \log_a x, (a > 1)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty).$

C. Hàm số $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$ Có tập xác định là $(0; +\infty).$

D. Đồ thị của hàm số $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$ luôn nằm phía trên trục hoành.

Câu 123: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+5}} - \log_2 \sqrt{x^2-x-6}.$

A. $D = (3; +\infty).$

B. $D = (-\infty; 3).$

C. $D = (-2; 3).$

D. $D = (-4; 3).$

Câu 124: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (0; 1).$

B. $m \in (-\infty; 1).$

C. $m \in (0; +\infty).$

D. $m \in (0; 1].$

Câu 125: Đặt $\log 2 = a$ và $b = \log 3$. Tính $\log_9 20$.

A. $\log_9 20 = \frac{1+b}{a}.$

B. $\log_9 20 = \frac{1+a}{b}.$

C. $\log_9 20 = \frac{1+a}{2b}.$

D. $\log_9 20 = \frac{1+b}{2a}.$

Câu 126: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(\cos x).$

A. $y' = \tan x.$

B. $y' = -\cot x.$

C. $y' = \frac{1}{\cos x}.$

D. $y' = -\tan x.$

Câu 127: Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2\log_3 [\log_3(3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2.$

A. $I = \frac{5}{4}.$

B. $I = \frac{3}{2}.$

C. $I = 4.$

D. $I = 0.$

Câu 128: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2 x^2 < \log_2(x+6)$ là.

A. $S = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty).$

B. $S = (-2; 3).$

C. $S = (-3; 2) \setminus \{0\}.$

D. $S = (-2; 3) \setminus \{0\}.$

Câu 129: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0.$

A. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty).$

B. $S = (-\infty; 2] \cup [16; +\infty).$

C. $S = [2; 16]$.

D. $S = [-\infty; 1) \cup [4; +\infty)$.

Câu 130: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln \sqrt{x^3 - 1}$.

A. $y' = \frac{3x^2}{2(x^3 - 1)}$.

B. $y' = \frac{x^2}{x^3 - 1}$.

C. $y' = \frac{2x^2}{3(x^3 - 1)}$.

D. $y' = \frac{3x}{2(x^3 - 1)}$.

Câu 131: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x^2 + e^x)$.

A. $y' = \frac{2x + e^x}{(x^2 + e^x) \ln 2}$.

B. $y' = \frac{x + e^x}{(x^2 + e^x) \ln 2}$.

C. $y' = \frac{2 + e^x}{(x^2 + e^x) \ln 2}$.

D. $y' = \frac{(2x + e^x) \ln 2}{x^2 + e^x}$.

Câu 132: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

A. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$.

B. $y' = \frac{1}{x}$.

C. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.

D. $y' = \frac{\ln 10}{x}$.

Câu 133: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$ là:

A. $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

B. $f'(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$.

C. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

D. $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

Câu 134: Tìm nghiệm của phương trình $2^{x-1} = \frac{1}{8}$.

A. $x = -1$.

B. $x = 4$.

C. $x = -2$.

D. $x = 3$.

Câu 135: Cho số a dương khác 1 và các số dương b, c . Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định **Đúng**?

① Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.

② Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

③ $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

④ $\log_a \sqrt[n]{b} = n \log_a b$.

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 136: Cho a, b là những số thực dương. Tính $P = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

A. $P = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$.

B. $P = \sqrt[3]{ab}$.

C. $P = \frac{1}{(ab)^3}$.

D. $P = (ab)^3$.

Câu 137: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{\pi} \left(3^{x^2-4x} - \frac{1}{27} \right)$.

A. $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

B. $D = (1; 3)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

D. $D = [1; 3]$.

Câu 138: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = (x-1) \cdot \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}; e^2 \right]$. Tìm M .

A. $M = 3(e^2 - 1)$.

B. $M = \frac{1}{e}(e^2 - 1)$.

C. $M = \frac{1}{e} - 1$.

D. $M = 2(e^2 - 1)$.

Câu 139: Cho hàm số $f(x) = 2^x \cdot 7^{x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x \log_2 7 < 0$.

B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$.

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \log_7 2 + x^2 < 0$.

D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$.

Câu 140: Cho hàm số $f(x) = e^{\cos 2x}$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{3}{2}}$. B. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}e$. C. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -e^{\frac{3}{2}}$. D. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}e$.

Câu 141: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $\ln a < \ln b \Leftrightarrow 0 < a < b$. B. $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b > 0$.
C. $\log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. D. $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Câu 142: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{3^x - 3}$.

A. $D = (3; +\infty)$. B. $D = (1; +\infty)$. C. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 143: Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với số thực dương x, y ?

A. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$. B. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$. D. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a (x - y)$.

Câu 144: Biết $\log_7 12 = a, b = \log_7 24$. Tính $\log_{54} 168$ theo a, b .

A. $\log_{54} 168 = \frac{ab+1}{b(8-5b)}$. B. $\log_{54} 168 = \frac{ab+1}{a(5-8b)}$.
C. $\log_{54} 168 = \frac{ab-1}{a(8+5b)}$. D. $\log_{54} 168 = \frac{ab+1}{a(8-5b)}$.

Câu 145: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $16^x - 17.4^x + 16 = 0$. Tính $P = x_1.x_2$.

A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 3$. D. $P = -1$.

Câu 146: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. B. $D = (-1; 1)$.
C. $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $D = [-1; 1]$.

Câu 147: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} < \frac{1}{27}$.

A. $S = (-1; +\infty)$. B. $S = (5; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 5)$. D. $S = (-\infty; -1)$.

Câu 148: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 9 \log_8 x = 4$.

A. $x = \frac{1}{2}; x = 6$. B. $x = 2; x = 6$. C. $x = \frac{1}{2}; x = 2$. D. $x = 1; x = 6$.

Câu 149: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2 (x^2 - 2x - 3)$.

A. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. B. $D = [-1; 3]$.
C. $D = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. D. $D = (-1; 3)$.

Câu 150: Trong các hàm số $f(x) = \ln \frac{1}{\sin x}, g(x) = \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}, h(x) = \ln \frac{1}{\cos x}$, hàm số nào có đạo hàm là $\frac{1}{\cos x}$?

A. $g(x)$ và $f(x)$. B. $h(x)$. C. $g(x)$. D. $f(x)$.

Câu 151: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} (-x^2 + 4x + 5)$.

A. $D = [-1; 5]$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}$.

C. $D = (-1; 5)$.

D. $D = (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Câu 152: Giải bất phương trình $\frac{2^{1-x} - 2x + 1}{x^2 - 4x + 3} \leq 0$.

A. $x > 3$.

B. $x < 3$.

C. $x > 4$.

D. $x < 4$.

Câu 153: Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$. Tính $P = a^{3-2\log_a b}$ theo a, b .

A. $P = a^2 b^3$.

B. $P = ab^2$.

C. $P = a^3 b^{-2}$.

D. $P = a^3 b$.

Câu 154: Cho hàm số $f(x) = 2^x \cdot 7^{x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x \log_2 7 < 0$.

B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \log_7 2 + x^2 < 0$.

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$.

D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$.

Câu 155: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (2x + 1)$.

A. $y' = \frac{1}{(2x+1) \ln 2}$.

B. $y' = \frac{2}{2x+1}$.

C. $y' = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$.

D. $y' = \frac{1}{2x+1}$.

Câu 156: Anh A mua nhà trị giá ba trăm triệu đồng và vay ngân hàng theo phương án trả góp. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh A trả 5.500.000 đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,5% mỗi tháng thì sau bao lâu anh A trả hết số tiền trên.

A. 64 tháng.

B. 65 tháng.

C. 60 tháng.

D. 52 tháng.

Câu 157: Tập các số x thỏa mãn $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{2-x}$.

A. $x \in (-\infty; +\infty)$.

B. $x \in [1; +\infty)$.

C. $x \in [3; +\infty)$.

D. $x \in (-\infty; 1]$.

Câu 158: Biết hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ có giá trị bằng 27. Tìm x .

A. $x = 3$.

B. $x = -\frac{1}{3}$.

C. $x = -3$.

D. $x = \frac{1}{3}$.

Câu 159: Năm 2008, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là $\frac{385,2}{10^6}$. Biết rằng tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí tăng 0,52% hàng năm. Hỏi 2020, tỉ lệ thể tích V khí CO_2 trong không khí là bao nhiêu?

A. $V = \frac{385,2}{10^6} \cdot 0,52\%$.

B. $V = \frac{385,2}{10^6} \cdot e^{0,52\%} \cdot 12$.

C. $V = \frac{385,2}{10^6} \cdot e^{0,52\%}$.

D. $V = \frac{385,2}{10^6} \cdot e^{12 \cdot 0,52\%}$.

Câu 160: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

B. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$.

C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

D. $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{21}$.

Câu 161: Giải bất phương trình $\log_4 (2x-1) \geq \frac{1}{2}$.

A. $x > 1$.

B. $x > 2$.

C. $x \geq \frac{3}{2}$.

D. $x < 1$.

Câu 162: Tập các số x thỏa mãn $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$.

A. $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

B. $x \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

C. $x \in \left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$.

D. $x \in \left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

Câu 163: Tìm nghiệm của phương trình $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$.

- A. $x=1; x=-1$. B. $x=2; x=-2$. C. $x=2; x=3$. D. $x=0; x=4$.

Câu 164: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(7 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x) > 2x+1$.

- A. $S=[-1;0]$. B. $S=[-1;0)$. C. $S=(-1;0)$. D. $S=(-1;0]$.

Câu 165: Cho a, b là những số thực dương. Tính $P = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$.

- A. $P = \frac{1}{ab}$. B. $P = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$. C. $P = \sqrt[3]{ab}$. D. $P = ab$.

Câu 166: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x+1} - 2^{x+2} + m = 0$ có nghiệm.

- A. $m \geq 1$. B. $m \leq -1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq 1$.

Câu 167: Tìm nghiệm của phương trình $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$.

- A. $x=0; x=2$. B. $x=2; x=4$. C. $x=0; x=3$. D. $x=1; x=4$.

Câu 168: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) > 0$.

- A. $x > 3$. B. $1 < x < 2$. C. $2 < x < 3$. D. $x < 2$ hoặc $x > 3$.

Câu 169: Một khu rừng có trữ lượng gỗ $4 \cdot 10^5$ mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ?

- A. $4 \cdot 10^5 (1+0,05)^{60} (m^3)$. B. $4 \cdot 10^5 (10+0,05)^5 (m^3)$.
C. $4 \cdot 10^5 (1+0,5)^5 (m^3)$. D. $4 \cdot 10^5 (1+0,05)^5 (m^3)$.

Câu 170: Hàm số $y = x^2 e^{-x}$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 171: Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$. Tính $P = x_1 \cdot x_2$.

- A. $P = \frac{1}{3}$. B. $P = 3$. C. $P = 9$. D. $P = 1$.

Câu 172: Tập nghiệm S của bất phương trình $2^x + 2^{x+1} < 6$.

- A. $S = (-\infty; 1)$. B. $S = (-\infty; 0)$. C. $S = (-\infty; 2)$. D. $S = (-\infty; 3)$.

Câu 173: Giải bất phương trình $\log_4 \left(\log_3 \frac{x-1}{x+1} \right) < \log_{\frac{1}{4}} \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1} \right)$.

- A. $x \in (-\infty; -1)$. B. $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.
C. $x \in (-\infty; -2)$. D. $x \in (-2; -1)$.

Câu 174: Tìm tập nghiệm S bất phương trình $2^{2x+1} - 32 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2x+3} + 2 \leq 0$.

- A. $S = [2; 4]$. B. $S = [0; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 0]$.

Câu 175: Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x+1) = \frac{1}{2}$.

- A. $x = 6$. B. $x = 4$. C. $x = \frac{23}{2}$. D. $x = -6$.

Câu 176: Tính giá trị của biểu thức $L = \log_2 \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \left(\cos \frac{\pi}{12} \right)$.

- A. $L = -2$. B. $L = 2$. C. $L = -1$. D. $L = 1$.

Câu 177: Đặt $a = \log_{12} 27$. Hãy tính $\log_6 16$ theo a .

- A. $\log_6 16 = 12 + 3a$. B. $\log_6 16 = \frac{a-15}{2a-1}$. C. $\log_6 16 = \frac{12+4a}{3-a}$. D. $\log_6 16 = \frac{12-4a}{3+a}$.

Câu 178: Đặt $a = \log 5$. Tính $\log \frac{1}{64}$ theo a .

- A. $\log \frac{1}{64} = 2 + 5a$. B. $\log \frac{1}{64} = 4 - 3a$. C. $\log \frac{1}{64} = 1 - 6a$. D. $\log \frac{1}{64} = 6(a-1)$.

Câu 179: Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$. B. $\log_2 a = \log_a 2$. C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. D. $\log_2 a = -\log_a 2$.

Câu 180: Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{\sqrt{x^2+1}} + 2|x| = 3^{x+1}$.

- A. $S = \{0; 10\}$. B. $S = \{0; 3\}$. C. $S = \{0; 1\}$. D. $S = \{0\}$.

Câu 181: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $y = \log_{\frac{2}{3}} x$. B. $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x$. C. $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$. D. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Câu 182: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{1}{2} \log_2 (4+x) + \log_{\frac{1}{2}} (4 - \sqrt[4]{16-x}) \leq 0$.

- A. $S = (-4; 16]$. B. $S = [0; +\infty)$. C. $S = (-4; 0]$. D. $S = (-4; 2)$.

Câu 183: Tìm nghiệm của phương trình $2^{\sqrt{x+2}} - 2^{\sqrt{x+1}} = 12 + 2^{\sqrt{x-1}}$.

- A. $x = 7$. B. $x = 1; x = 9$. C. $x = 9$. D. $x = 2$.

Câu 184: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_6 \frac{3x+2}{1-x}$.

- A. $D = \left[-\frac{2}{3}; 1 \right]$. B. $D = \left(-\frac{2}{3}; +\infty \right)$. C. $D = \left(-\frac{2}{3}; 1 \right)$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 185: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{\sqrt{1+\sin x}}$ tại $x = \frac{\pi}{2}$.

- A. $y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2 \ln 2$. B. $y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2^{\sqrt{2}}$. C. $y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2^{\sqrt{2}} \ln 2$. D. $y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$.

Câu 186: Đặt $a = \log_4 12$. Biểu diễn $\log_6 16$ theo a .

- A. $\log_6 16 = \frac{4}{a-2}$. B. $\log_6 16 = \frac{4}{2a-1}$. C. $\log_6 16 = \frac{8}{1+a}$. D. $\log_6 16 = \frac{1}{4(2a-1)}$.

Câu 187: Xét hàm số $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Câu 188: Tính giá trị của biểu thức $M = 3 \log_{0,1} 10^{2,4}$.

- A. $M = -72$. B. $M = 0,8$. C. $M = 7,2$. D. $M = -7,2$.

Câu 189: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 81$.

A. $m = 81$.

B. $m = -4$.

C. $m = 4$.

D. $m = 44$.

Câu 190: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3} - x \ln x$ trên đoạn $[1; 2]$.

A. $M = \sqrt{7}; m = 2$.

B. $M = 2; m = \sqrt{7} - 2 \ln 2$.

C. $M = 2; m = -2 \ln 2$.

D. $M = \sqrt{7} + 2 \ln 2; m = 2$.

Câu 191: Tính $H = 4^{3 \log_8 3 + 2 \log_{16} 5}$.

A. $H = 45$.

B. $H = 16$.

C. $H = 8$.

D. $H = 25$.

Câu 192: Một người đầu tư 100 triệu đồng vào một công ty theo thể thức lãi kép với lãi suất 13%/năm. Hỏi sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được bao nhiêu tiền lãi L ? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi.

A. $L = 100 \cdot (1 + 0,013)^5 - 100$ (triệu đồng).

B. $L = 100 \cdot (1 + 0,13)^5$ (triệu đồng).

C. $L = (1 + 0,13)^5 + 100$ (triệu đồng).

D. $L = 100 \cdot (1 + 0,13)^5 - 100$ (triệu đồng).

Câu 193: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$.

A. $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

B. $D = (-2; 3)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

D. $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 194: Cho biểu thức $A = \sqrt[5]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{3}}$. Tính $\log A$.

A. $\log A = \frac{1}{6} \log \frac{3}{2}$.

B. $\log A = 6 \log \frac{2}{3}$.

C. $\log A = \frac{1}{6} \log \frac{2}{3}$.

D. $\log A = \frac{1}{6} \log 2$.

Câu 195: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 0$.

B. $m < 0$.

C. $m \leq 2$.

D. $m > 2$.

Câu 196: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + 3 \log_2 (2x) - 1 = 0$.

A. $x = -\frac{1}{2}; x = -\frac{1}{4}$.

B. $x = 2; x = 4$.

C. $x = -2; x = -4$.

D. $x = \frac{1}{2}; x = \frac{1}{4}$.

Câu 197: Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{13}{24}}$.

B. $P = x^{\frac{1}{4}}$.

C. $P = x^{\frac{2}{3}}$.

D. $P = x^{\frac{1}{2}}$.

Câu 198: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3} \right)^x$.

B. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right)^x$.

C. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 2} \right)^x$.

D. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right)^x$.

Câu 199: Cho $f(x) = \ln^2 x$. Tính $f'(e)$.

A. $f'(e) = \frac{1}{e}$.

B. $f'(e) = \frac{2}{e}$.

C. $f'(e) = \frac{3}{e}$.

D. $f'(e) = \frac{4}{e}$.

Câu 200: Cho $a > 1$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\log_a x < 0$ khi $0 < x < 1$.

B. $\log_a x > 0$ khi $x > 1$.

C. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ có tiệm cận ngang là trục hoành.

D. Nếu $x_1 < x_2$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Câu 201: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{2} \log_2 (2 + x) + \log_{\frac{1}{2}} (4 - \sqrt[4]{18 - x})$.

A. $D = (-\infty; -2) \cup [18; +\infty)$.

B. $D = [-2; 18]$

C. $D = (-2; +\infty)$.

D. $D = (-2; 18]$.

Câu 202: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

A. $S = (-\infty; 3)$.

B. $S = (3; +\infty)$.

C. $S = \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$.

D. $S = \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Câu 203: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2 x^2 < \log_2(x+6)$.

A. $S = (-2; 3) \setminus \{0\}$.

B. $S = (-2; 3)$.

C. $S = (-3; 2) \setminus \{0\}$.

D. $S = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Câu 204: Biết $\log_6 \sqrt{a} = 2$. Tính $K = \log_6 a$.

A. $K = 4$.

B. $K = 36$.

C. $K = 6$.

D. $K = 12$.

Câu 205: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$.

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

B. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

D. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Câu 206: Cho bất phương trình $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 1 < 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây ?

A. $t^2 - t + 1 < 0$.

B. $5t^2 - 3t + 1 < 0$.

C. $t^2 - t < 0$.

D. $3t^2 - 5t + 1 < 0$.

Câu 207: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Hàm số $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi điểm x và $(a^x)' = a^x \ln a$.

B. Đồ thị hàm số $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$ đi qua điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$, nằm phía trên trục hoành.

C. Hàm số $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$ luôn đồng biến trên tập xác định của nó.

D. Hàm số $y = x^x$ có đạo hàm tại mọi điểm x và $(e^x)' = e^x$.

Câu 208: Xét hàm số $y = e^{2x} \sin 5x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $y''' - 4y' + 29y = 0$.

B. $y'' - 4y' + 29y = 0$.

C. $y''' + 4y' + 29y = 0$.

D. $y'' + 4y' + 29y = 0$.

Câu 209: Giải phương trình $\log_2 x + \log_2(x-6) = \log_2 7$.

A. $x = -1$.

B. $x = 7$.

C. $x = 1$.

D. $x = -7$.

Câu 210: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$.

A. $S = \left(-\infty; \frac{5}{8}\right)$.

B. $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{8}\right)$.

C. $S = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{8}\right)$.

D. $S = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$.

Câu 211: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $0,3^{\log_{\frac{1}{5}} \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2}} > 1$.

A. $S = \left(0; \frac{2}{3}\right)$.

B. $S = \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

C. $S = \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

D. $S = (2; 3)$.

Câu 212: Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2 \log(x+1)$ có nghiệm duy nhất ?

A. 2018.

B. 4015.

C. 4014.

D. 2017.

Câu 213: Giải phương trình $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$.

- A. $x = 2$. B. $x = 8$. C. $x = 4$. D. $x = 16$.

Câu 214: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{x+1} \leq 4$.

- A. $S = (-\infty; 1)$. B. $S = [1; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 1]$. D. $S = (1; +\infty)$.

Câu 215: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

- A. $S = \{3\}$. B. $S = \{4\}$. C. $S = \{-3; 3\}$. D. $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Câu 216: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$ xác định với mọi x .

- A. $m > \frac{2}{3}$. B. $m < \frac{2}{3}$. C. $m \geq \frac{2}{3}$. D. $m \in \left(\frac{2}{3}; 5\right)$.

Câu 217: Tìm tập nghiệm S bất phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) > \log_3(2x-1)$.

- A. $S = (1; 5)$. B. $S = (5; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$. D. $S = [5; +\infty)$.

Câu 218: Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. B. $y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. C. $y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. D. $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$.

Câu 219: Phương trình $\log_2 4x - \log_{\frac{x}{2}} 2 = 3$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 3 nghiệm. B. vô nghiệm. C. 2 nghiệm. D. 1 nghiệm.

Câu 220: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$.

- A. $y' = \frac{1}{8\sqrt{x^7}}$. B. $y' = \frac{\sqrt[16]{x^{15}}}{16}$. C. $y' = \frac{1}{32\sqrt[32]{x^{31}}}$. D. $y' = \frac{1}{16\sqrt[16]{x^{15}}}$.

Câu 221: Với $a \neq 0, a \neq \pm 1$. Tính $P = \left[\frac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}} - \frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}} \right] \cdot \frac{a^{-3}}{1-a^{-2}}$.

- A. $P = 2$. B. $P = a\sqrt{2}$. C. $P = a$. D. $P = \sqrt{2}$.

Câu 222: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2^{|x|}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

- A. $M = 1; m = -2$. B. $M = 1; m = -1$. C. $M = 2; m = 1$. D. $M = 2; m = -2$.

Câu 223: Biết rằng tỉ lệ lạm phát hàng năm của một quốc gia trong 10 năm qua là 5%. Hỏi nếu năm 2010, giá của một loại hàng hóa của quốc gia đó là T (USD) thì sau n năm ($0 \leq n \leq 10$) giá của loại hàng hóa đó là bao nhiêu?

- A. $(1+0,05)^n$ (USD). B. $T(1+0,05)^n$ (USD).
C. $T(1+0,05)^n + n$ (USD). D. $0,05.T$ (USD).

Câu 224: Cho ba số $\ln a, \ln b, \ln c$ (a, b, c là các số dương và khác 1) lập thành cấp số nhân. Ta có:

- ① $\ln^2 b = \ln a \cdot \ln c$. ② $\log_a x \cdot \log_c x = \log_b^2 x, (x > 0)$.
③ $b^2 = a \cdot c$. ④ $\log^2 b = \log a \cdot \log c$.

Hãy chọn đáp án **Đúng**.

A. chỉ có ① đúng.

B. chỉ có ① và ④ đúng.

C. chỉ có ① và ② đúng.

D. chỉ có ③ đúng.

Câu 225: Cho biết năm 2010. Việt Nam có 89 000 000 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,05% . Hỏi năm 2050 Việt Nam sẽ có bao nhiêu người, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi. (kết quả làm tròn số).

A. 125454579 (người). B. 135454589 (người). C. 235454579 (người). D. 135454579 (người).

Câu 226: Bạn Bình gửi vào ngân hàng với số tiền là 1 triệu đồng không kì hạn với lãi suất là 0,65%. Tính số tiền bạn Bình nhận được sau 2 năm.

A. 1168236,313 (đồng).

B. 2168236,313 (đồng).

C. 1368236,313 (đồng).

D. 2268236,313 (đồng).

Câu 227: Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm lớn hơn 2 tỷ đồng ?

A. Năm 2023.

B. Năm 2020.

C. Năm 2021.

D. Năm 2022.

Câu 228: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

A. $m \geq 0$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \neq 0$.

D. $m > 0$.

Câu 229: Anh A mua nhà trị giá ba trăm triệu đồng và vay ngân hàng theo phương án trả góp. Nếu anh A muốn trả hết nợ trong vòng 5 năm và trả lãi với mức 6%/năm thì mỗi tháng anh phải trả bao nhiêu tiền (làm tròn đến nghìn đồng).

A. 3.935.000 đồng.

B. 6.935.000 đồng.

C. 5.935.000 đồng.

D. 4.935.000 đồng.

Câu 230: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x = 2$.

A. $x = 2$.

B. $x = 4$.

C. $x = 0$.

D. $x = -1$.

Câu 231: Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$.

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 232: Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

A. $I = -2$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = 0$.

Câu 233: Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây ?

A. $t^2 + t - 3 = 0$.

B. $2t^2 - 3 = 0$.

C. $t^2 + 2t - 3 = 0$.

D. $4t - 3 = 0$.

Câu 234: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) - 2\log_4(3x-2) + 2 = 0$.

A. $x = 3$.

B. $x = 2$.

C. $x = 4$.

D. $x = 1$.

Câu 235: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$.

A. $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

B. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

C. $f'(x) = \frac{x}{2(x^2 + 1)}$.

D. $f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Câu 236: Biết $p = 7^{\log_2 3}$ và $q = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\sqrt{2}-1} 12}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $p > 1$ và $q > 1$.

B. $p < 1$ và $q > 1$.

C. $p > 1$ và $q < 1$.

D. $p < 1$ và $q < 1$.

Câu 237: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ tại $x = 0$.

A. $y'(0) = 2$.

B. $y'(0) = 1$.

C. $y'(0) = 4$.

D. $y'(0) = \frac{1}{2}$.

Câu 238: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

A. $m = 3$.

B. $m = 6$.

C. $m = -3$.

D. $m = 1$.

Câu 239: Cho $\log_a x = 3, \log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

- A. $P = \frac{1}{12}$. B. $P = 12$. C. $P = \frac{12}{7}$. D. $P = \frac{7}{12}$.

Câu 240: Giá trị của biểu thức $H = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}}, a > 0$.

- A. $H = a^{\frac{3}{4}}$. B. $H = a^{\frac{1}{2}}$. C. $H = a$. D. $H = a^{\frac{1}{4}}$.

Câu 241: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

- A. $S = \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. B. $S = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$.
C. $S = (-\infty; 1) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. D. $S = \left(1; \frac{5}{4}\right)$.

Câu 242: Giải bất phương trình $\log_3(x-3) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5) \leq 1$.

- A. $5 < x < 6$. B. $6 \leq x < 7$. C. $5 \leq x < 6$. D. $5 < x \leq 6$.

Câu 243: Tìm nghiệm của phương trình $\log_4(x-1) = 3$.

- A. $x = 64$. B. $x = 65$. C. $x = 63$. D. $x = 80$.

Câu 244: Giá trị của biểu thức $a^{1+\log_{\frac{1}{3}}(a\sqrt{a})}, (a > 0, a \neq 1)$ bằng.

- A. $\frac{1}{2}$. B. a . C. $a^{\frac{3}{2}}$. D. $a^{\frac{11}{2}}$.

Câu 245: Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a(b^2 c^3)$.

- A. $P = 30$. B. $P = 31$. C. $P = 13$. D. $P = 108$.

Câu 246: Biết rằng $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} > a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_b \frac{3}{4} < \log_b \frac{4}{5}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $a > 1$ và $b > 1$. B. $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$.
C. $0 < a < 1$ và $b > 1$. D. $0 < b < 1$ và $a > 1$.

Câu 247: Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{3x+1} \cos 2x$.

- A. $y' = e^{3x+1} (3 \cos 2x + 2 \sin 2x)$. B. $y' = e^{3x+1} (3 \cos 2x - 2 \sin 2x)$.
C. $y' = 3e^{3x+1} (\cos 2x - \sin 2x)$. D. $y' = e^{3x+1} (2 \cos 2x - 3 \sin 2x)$.

Câu 248: Số lượng vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = S(0) \cdot 2^t$, trong đó $S(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con ?

- A. 48 phút. B. 12 phút. C. 19 phút. D. 7 phút.

Câu 249: Giải phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$.

- A. $x = \pm\sqrt{2}$. B. $x = \pm 1$. C. $x = \pm 2$. D. $x = \pm\sqrt{3}$.

Câu 250: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2 \log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$.

- A. $S = \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. B. $S = \left[\frac{3}{4}; 3\right]$. C. $S = \left[-\frac{8}{3}; \frac{3}{4}\right]$. D. $S = \left[-\frac{8}{3}; 3\right]$.

Câu 251: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log(x^2 - 3x + 2)$.

A. $D = (1; 2)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

C. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 252: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Hàm số $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$ luôn nghịch biến trên tập xác định của nó.

B. Hàm số $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

C. Hàm số $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

D. Đồ thị hàm số $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$ đi qua điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$, nằm phía bên phải trục tung.

Câu 253: Đặt $a = \log 5$. Tính $\log \frac{1}{64}$ theo a .

A. $\log \frac{1}{64} = 1 - 6a$.

B. $\log \frac{1}{64} = 6(a - 1)$.

C. $\log \frac{1}{64} = 4 - 3a$.

D. $\log \frac{1}{64} = 2 + 5a$.

Câu 254: Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{27}$.

A. $x > 3$.

B. $x > -3$.

C. $x < 3$.

D. $x < -3$.

Câu 255: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

A. $S = \{-2\}$.

B. $S = \{3\}$.

C. $S = \{1\}$.

D. $S = \{4\}$.

Câu 256: Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

A. $Q = b^{\frac{5}{9}}$.

B. $Q = b^2$.

C. $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

D. $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

Câu 257: Cho a là số thực dương. Tính $P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$.

A. $P = 2a$.

B. $P = a$.

C. $P = a^2$.

D. $P = 1$.

Câu 258: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2 \log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

A. $m < 1$.

B. $m < \frac{2}{3}$.

C. $m < 0$.

D. $m \leq 1$.

Câu 259: Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $3^{2x} - (2^x + 9)3^x + 9 \cdot 2^x = 0$. Tính $S = x_1 + x_2$.

A. $S = \frac{1}{2}$.

B. $S = 2$.

C. $S = -2$.

D. $S = 3$.

Câu 260: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1-x) = 2$.

A. $x = 3$.

B. $x = 5$.

C. $x = -3$.

D. $x = -4$.

Câu 261: Tính $Q = a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

A. $Q = \frac{1}{16}$.

B. $Q = \frac{1}{2}$.

C. $Q = 2$.

D. $Q = 16$.

Câu 262: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $9^x - 3^x - 6 < 0$.

A. $S = (-2; 3)$.

B. $S = (-\infty; 1)$.

C. $S = (-3; 2)$.

D. $S = (1; +\infty)$.

Câu 263: Với $0 < a \neq 1$. Tính $K = \log_a \left(\frac{a^2 \sqrt[3]{a^2} \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right)$.

- A. $K = 3$. B. $K = 2$. C. $K = \frac{12}{5}$. D. $K = \frac{9}{5}$.

Câu 264: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $D = (1; +\infty)$. C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = (-\infty; 1)$.

Câu 265: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$.

- A. $D = (2 - \sqrt{2}; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{2})$. B. $D = (1; 3)$.
C. $D = (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$. D. $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 266: Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b$, mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $x = 3a + 5b$. B. $x = a^5 b^3$. C. $x = 5a + 3b$. D. $x = a^5 + b^3$.

Câu 267: Tính đạo hàm của hàm số $y = x(\ln x - 1)$.

- A. $y' = \ln x$. B. $y' = x \ln x$. C. $y' = \ln x - 1$. D. $y' = \frac{1}{x} - 1$.

Câu 268: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $m > 0$. B. $0 < m < 3$. C. $m = 0$. D. $m < -1$ hoặc $m > 0$.

Câu 269: Với số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_3 x = \alpha, \log_3 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)$. B. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} + \beta$.
C. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} - \beta$. D. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)$.

Câu 270: Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\log_2 240}{\log_{3,75} 2} - \frac{\log_2 15}{\log_{60} 2} + \log_2 1$.

- A. $P = 3$. B. $P = -8$. C. $P = 4$. D. $P = 1$.

Câu 271: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

- A. $S = (-\infty; 2)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = (-2; +\infty)$. D. $S = (-\infty; -2)$.

Câu 272: Tính $S = (0,001)^{\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$.

- A. $S = \frac{95}{4}$. B. $S = \frac{95}{16}$. C. $S = \frac{16}{95}$. D. $S = \frac{95}{2}$.

Câu 273: Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$.

- A. $P = 7 + 4\sqrt{3}$. B. $P = 7 - 4\sqrt{3}$. C. $P = 1$. D. $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2016}$.

Câu 274: Cho a là số thực dương khác 1 và $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $P = 1$. B. $P = 3$. C. $P = 9$. D. $P = \frac{1}{3}$.

Câu 275: Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

- A. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}$. B. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. D. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{11}-7}{2}$.

Câu 276: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

- A. $I = -2$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = -\frac{1}{2}$. D. $I = 2$.

Câu 277: Tìm tập xác định D của hàm số: $y = (x^2 - 4x + 3)^{-2}$.

- A. $D = (1; 3)$. B. $D = \mathbb{R}$.
C. $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

Câu 278: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

- A. $m \in [3; 4]$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in (3; 4)$. D. $m \in [2; 4]$.

Câu 279: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2 (x^2 - 2x - 3)$.

- A. $D = [-1; 3]$. B. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$. D. $D = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Câu 280: Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- A. $P = x^{\frac{1}{8}}$. B. $P = x^2$. C. $P = x^{\frac{2}{9}}$. D. $P = \sqrt{x}$.

Câu 281: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. B. $\ln(ab) = \ln a \ln b$. C. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$. D. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$.

Câu 282: Cho $\log_2 a = 3, (a > 0)$. Tính tổng $S = \log_{\sqrt{2}} a + \log_2 a^2 + \log_{\frac{1}{2}} a - 2 \log_2 \sqrt{a}$.

- A. $S = 5$. B. $S = 2$. C. $S = 6$. D. $S = 3$.

Câu 283: Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a \neq 1, a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$.

- A. $P = -5 - 3\sqrt{3}$. B. $P = -1 - \sqrt{3}$. C. $P = -1 + \sqrt{3}$. D. $P = -5 + 3\sqrt{3}$.

Câu 284: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a - \log_2 b$. B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3 \log_2 a - \log_2 b$.
C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3 \log_2 a + \log_2 b$. D. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_2 a + \log_2 b$.

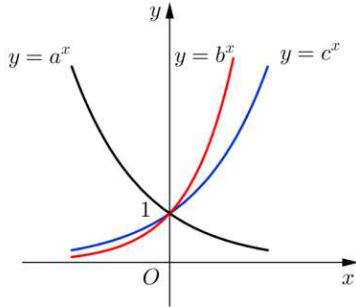
Câu 285: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} (x+1) < \log_{\frac{1}{2}} (2x-1)$.

- A. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $S = (2; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 2)$. D. $S = (-1; 2)$.

Câu 286: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + \sqrt{x+1})$.

- A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$. B. $y' = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$.
C. $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$. D. $y' = \frac{2}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$.

Câu 287: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



- A. $b < c < a$. B. $a < b < c$.
C. $a < c < b$. D. $c < a < b$.

Câu 288: Tính giá trị của biểu thức $M = (0,5)\log_2 25 + \log_2 (1,6)$.

- A. $M = 2$. B. $M = 1$. C. $M = 5$. D. $M = 3$.

Câu 289: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right).$$

- A. $P_{\min} = 19$. B. $P_{\min} = 15$. C. $P_{\min} = 13$. D. $P_{\min} = 14$.

Câu 290: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 4 - x)}$.

- A. $D = [1; 2]$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.
C. $D = (1; 2)$. D. $D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Câu 291: Giải bất phương trình $4^x - 2.5^{2x} < 10^x$.

- A. $x > \log_5 \frac{1}{2}$. B. $x < \log_5 \frac{1}{2}$. C. $x < \log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}$. D. $x > \log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}$.

Câu 292: Cho các số thực dương a, b và $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$. B. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$.
C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$. D. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.

Câu 293: Tìm nghiệm của phương trình $10^{\log 9} = 8x + 5$.

- A. $x = \frac{5}{8}$. B. $x = \frac{1}{2}$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $x = \frac{7}{4}$.

Câu 294: Tìm tất cả các giá trị của x để $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a 9 - \log_a 5 + \log_a 2$, ($a > 0, a \neq 1$).

- A. $x = \frac{3}{5}$. B. $x = \frac{6}{5}$. C. $x = \frac{2}{5}$. D. $x = 3$.

Câu 295: Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log_a b < 1 < \log_b a$. B. $1 < \log_a b < \log_b a$. C. $\log_b a < 1 < \log_a b$. D. $\log_b a < \log_a b < 1$.

Câu 296: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

- A. $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng). B. $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).
C. $m = \frac{100 \cdot 1,03}{3}$ (triệu đồng). D. $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Câu 297: Tính đạo hàm của hàm số $y = 5^{\cos x + \sin x}$.

- A. $y' = (\cos x - \sin x) \ln 5$. B. $y' = 5^{\cos x + \sin x} (\sin x - \cos x) \ln 5$.
C. $y' = 5^{\cos x + \sin x} (\cos x - \sin x) \ln 5$. D. $y' = 5^{\cos x + \sin x} (\cos x + \sin x) \ln 5$.

Câu 298: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $32.4^x - 18.2^x + 1 < 0$.

- A. $S = (1; 6)$. B. $S = (-5; -2)$. C. $S = (-4; 0)$. D. $S = (-4; 1)$.

Câu 299: Tìm giá trị của của biểu thức $K = \log_5 \sqrt[5]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}}}$.

- A. $K = \log \frac{2}{3}$. B. $K = \frac{1}{6} \log \frac{2}{3}$. C. $K = \frac{1}{6}$. D. $K = 6$.

Câu 300: Cho $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$. Tìm tất cả các giá trị của x để $f'(x) = 0$.

- A. $x \in \emptyset$. B. $x = -1$. C. $x = 3$ hoặc $x = 1$. D. $x = 1$.

Câu 301: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{e^x - e^{10}}}$.

- A. $D = (0; +\infty)$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $D = [\ln 10; +\infty)$. D. $D = (10; +\infty)$.

Câu 302: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_x \left(3^{x^2 - 4x} - \frac{1}{27} \right)$.

- A. $D = (1; +\infty)$. B. $D = [1; 3]$.
C. $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. D. $D = (1; 3)$.

Câu 303: Cho hàm số $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $f'(\ln 2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $f'(\ln 2) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $f'(\ln 2) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $f'(\ln 2) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 304: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.

- A. $D = (0; +\infty)$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.
C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 305: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{15}}(x - 2) + \log_{\frac{1}{15}}(10 - x) \geq -1$.

- A. $x \in (2; 10)$. B. $x \in [2; 10]$. C. $x \in [5; 7]$. D. $x \in (2; 5] \cup [7; 10)$.

Câu 306: Biết $\log_b a = \sqrt{3}$ ($b > 0, b \neq 1, a > 0$). Tìm giá trị của $P = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

- A. $P = -\sqrt{3}$. B. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $P = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $P = -\frac{1}{3}$.

Câu 307: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

- A. $m = 4$. B. $m = \frac{9}{2}$. C. $m = 3$. D. $m = \frac{3}{2}$.

Câu 308: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{5}}$.

- A. $D = [-2; 2]$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.
C. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. D. $D = (-2; 2)$.

Câu 309: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\sqrt{1-3x}}{\log_2(x+1)}$.

- A. $D = (-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$. B. $D = \left(-1; \frac{1}{3}\right]$.
C. $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \setminus \{-1\}$. D. $D = (0; +\infty)$.

Câu 310: Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log_b a < 1 < \log_a b$. B. $\log_a b < 1 < \log_b a$. C. $\log_b a < \log_a b < 1$. D. $1 < \log_a b < \log_b a$.

Câu 311: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{1}{2} \log_2(2+x) + \log_{\frac{1}{2}}(4 - \sqrt[4]{18-x}) \leq 0$.

- A. $S = (-2; 2]$. B. $S = (-2; 18]$. C. $S = (-2; 4)$. D. $S = [-2; 3]$.

Câu 312: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2}{\sqrt{4^x - 2}}$.

- A. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. B. $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = (2; +\infty)$.

Câu 313: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$.

- A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$. B. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.
C. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. D. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

Câu 314: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln\left(\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 - x + 1} - \frac{2}{3}\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

- A. $1 \leq m < 3$. B. $2 \leq m < 10$. C. $0 < m < \frac{4}{3}$. D. $m > 1$.

Câu 315: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log \sqrt{x^2 - x - 12}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus (4; +\infty)$.
C. $D = (-3; 4)$. D. $D = (-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$.

MỘT SỐ CÂU TRONG KÌ THI THPT

Câu 1: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x^2 - 1) = 3$.

- A. $S = \{-3; 3\}$ B. $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$ C. $S = \{3\}$ D. $S = \{-3\}$.

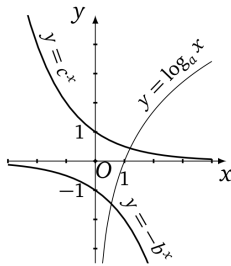
Câu 2: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. $y = x^{\sqrt{5}}$ B. $y = \log_3 x$ C. $y = 5^x$ D. $y = \log_{0,5} x$.

Câu 3: Cho $n > 1$ là một số nguyên. $H = \frac{1}{\log_2 n!} + \frac{1}{\log_3 n!} + \dots + \frac{1}{\log_n n!}$.

- A. $H = n!$ B. $H = 1$ C. $H = 0$ D. $H = n$.

Câu 4: Xét các hàm số $y = \log_a x$, $y = -b^x$, $y = c^x$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó a, b, c là các số thực dương khác 1. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $\log_c(a+b) > 1 + \log_c 2$ B. $\log_{ab} c > 0$
C. $\log_a \frac{b}{c} > 0$ D. $\log_b \frac{a}{c} < 0$.

Câu 5: Tìm m để phương trình $4^x - 2m \cdot 2^x - 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. $1 < m < \frac{3}{2}$ B. $m < -3$ hoặc $m > 1$ C. $m > 0$ D. $m > 1$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $0 < m < 6$ B. $3 < m < 6$ C. $2 < m < 6$ D. $m < 6$.

Câu 7: Tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x \cdot \log_3(81x) + \log_{\sqrt{3}} x^2 = 0$ bằng

- A. 16. B. 18. C. -21. D. 20.

Câu 8: Cho phương trình $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$. Khi đặt $t = 3^{x+1}$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

- A. $3t^2 - t - 2 = 0$ B. $81t^2 - 3t - 2 = 0$ C. $27t^2 + 3t - 2 = 0$ D. $27t^2 - 3t - 2 = 0$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \log_3(-x^2 + mx + 2m + 1)$ xác định với mọi $x \in (1; 2)$

- A. $m > \frac{3}{4}$ B. $m \geq \frac{3}{4}$ C. $m \geq -\frac{1}{3}$ D. $m < -\frac{1}{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = (e^x + 1)^3$. Giải phương trình $y' = 144$.

- A. $x = \ln 2$ B. $x = \ln 3$ C. $x = \ln 47$ D. $x = \ln(4\sqrt{3} - 1)$.

Câu 11: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 4. B. 3. C. 6. D. 13.

Câu 12: Cho phương trình $2^x + m = \log_2(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-18; 18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 17. B. 19. C. 18. D. 9.

Câu 13: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(x^2 - 7) = 2$.

- A. $S = \{4\}$. B. $S = \{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\}$. C. $S = \{-4; 4\}$. D. $S = \{-4\}$.

Câu 14: Cho a và b là các số thực dương bất kì. Chọn khẳng định sai.

- A. $\ln ab = \ln a + \ln b$. B. $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$.
C. $\ln a^2 + \ln \sqrt[3]{b} = 2 \ln a + \frac{1}{3} \ln b$. D. $\log(10ab)^2 = 2 + \log a + \log b$.

Câu 15: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.

- A. $S = [3; 7]$. B. $S = (3; 7]$. C. $S = (-\infty; 7]$. D. $S = [7; +\infty)$.

Câu 16: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Tính $S = a + 2b$.

- A. $S = 6$. B. $S = \frac{27}{4}$. C. $S = 9$. D. $S = \frac{20}{3}$.

Câu 17: Cường độ một trận động đất M (độ Richtre) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ chấn động tối đa và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số không đổi đối với mọi trận động đất). Vào tháng 2 năm 2010, một trận động đất ở Chile có cường độ 8,8 độ Richtre. Biết rằng, trận động đất năm 2004 gây ra sóng thần tại Châu Á có biên độ rung chấn tối đa mạnh gấp 3,16 lần so với biên độ rung chấn tối đa của trận động đất ở Chile, hỏi cường độ của trận động đất ở Châu Á là bao nhiêu? (kết quả làm tròn số đến hàng phần chục).

- A. 9,1 độ Richtre. B. 9,2 độ Richtre. C. 9,3 độ Richtre. D. 9,4 độ Richtre.

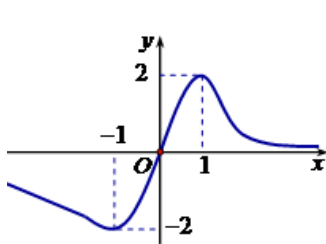
Câu 18: Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_2^2 x^2 - \log_4(4x^2) - 5 = 0$.

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 19: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_5^2 x - m \log_5 x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 625$.

- A. $m = 3$. B. $m = -1$.
C. $m = 4$. D. Không có giá trị nào của m .

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới. Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = 4^{m+2 \log_4 \sqrt{2}}$ có hai nghiệm phân biệt dương.



- A. $0 < m < 1$. B. $m < 0$.
C. $m > 1$. D. $0 < m < 2$.

Câu 21: Theo thống kê của tổng cục dân số Việt Nam vào đầu năm 2003 dân số nước ta là 80902400 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Biết rằng tỉ lệ tăng dân số là không thay đổi. Nếu tính từ năm 2003 thì thời điểm gần nhất để dân số nước ta vượt 100 triệu là

- A. năm 2018. B. năm 2019. C. năm 2017. D. năm 2020.

Câu 22: Giải phương trình $2^{2x+1} = 32$.

- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = \frac{5}{2}$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 23: Cho phương trình $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Tính $P = x_1 \cdot x_2$.

- A. $P = \log_2 3$. B. $P = 6$. C. $P = 2 \log_2 3$. D. $P = \log_2 6$.

Câu 24: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra ?

- A. 10 năm. B. 11 năm. C. 12 năm. D. 13 năm.

Câu 25: Giải phương trình $7^x = 5$.

- A. $x = \log_5 7$. B. $x = \frac{5}{7}$. C. $x = \frac{7}{5}$. D. $x = \log_7 5$.

Câu 26: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1) = 2$.

- A. $S = \{4\}$. B. $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$. C. $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$. D. $S = \emptyset$.

Câu 27: Giải phương trình $5^{2x+1} = 125$.

- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = 3$. C. $x = \frac{5}{2}$. D. $x = 1$.

Câu 28: Cho các số thực a, b thỏa mãn $\log_{0,2} a > \log_{0,2} b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $a > b > 0$. B. $b > a > 0$. C. $a > b > 1$. D. $b > a > 1$.

Câu 29: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log^2 x - 1009 \cdot \log x^2 + 2017 = 0$.

- A. $S = \{10; 10^{2017}\}$. B. $S = \{10\}$. C. $S = \{10; 2017^{10}\}$. D. $S = \{10; 20170\}$.

Câu 30: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử ?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 1.

Câu 31: Tính đạo hàm của hàm số $y = x \cdot 2^x$.

- A. $y' = 2^x(1+x)$. B. $y' = 2^x + x^2 \cdot 2^{x-1}$. C. $y' = 2^x(1+x \ln 2)$. D. $y' = 2^x \ln 2$.

Câu 32: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-5y} \geq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{6y-2x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $\frac{x}{y}$.

- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Câu 33: Với a là số thực dương tùy ý, Tính $H = \log_3(3a)$.

- A. $H = 3 + \log_3 a$. B. $H = 1 - \log_3 a$. C. $H = 3 \log_3 a$. D. $H = 1 + \log_3 a$.

Câu 34: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\log_a 2 = b, \log_a 3 = c$. Tính $H = (b+c) \log_a 6$.

- A. $H = 1$. B. $H = 6$. C. $H = 7$. D. $H = 5$.

Câu 35: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Tính $H = a + 2b$.

- A. $H = \frac{5}{2}$. B. $H = 9$. C. $H = 6$. D. $H = \frac{7}{2}$.

Câu 36: Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 9. B. 14. C. 15. D. 16.

Câu 37: Cho $a, b, c > 0$ và $a \neq 1$. Khẳng định nào dưới đây sai ?

- A. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$. B. $\log_a(b+c) = \log_a b + \log_a c$.
C. $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$. D. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m \ln x - 2}{\ln x - m - 1}$ nghịch biến trên $(e^2; +\infty)$.

- A. $m \leq -2$ hoặc $m = 1$. B. $m < -2$ hoặc $m = 1$. C. $m < -2$. D. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

Câu 39: Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2$. Tính $S = a + 2b$.

- A. $S = \frac{5}{2}$. B. $S = 22$. C. $S = 6$. D. $S = \frac{11}{2}$.

Câu 40: Với a là số thực dương tùy ý. Tính $K = \log_3\left(\frac{3}{a}\right)$.

- A. $K = \frac{1}{\log_3 a}$. B. $K = 1 + \log_3 a$. C. $K = 1 - \log_3 a$. D. $K = 3 - \log_3 a$.

Câu 41: Cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2 = 0$, m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho phương trình trên có hai nghiệm dương phân biệt. Biết S là một khoảng có dạng $(a; b)$, tính $b - a$.

- A. $b - a = 4$. B. $b - a = 3$. C. $b - a = 1$. D. $b - a = 2$.

Câu 42: Với a là số thực dương tùy ý, $H = \ln(7a) - \ln(3a)$.

- A. $H = \frac{\ln 7}{\ln 3}$. B. $H = \frac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$. C. $H = \ln(4a)$. D. $H = \ln \frac{7}{3}$.

Câu 43: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 4$. D. $m = 1$.

Câu 44: Gọi S là tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > 3^{2-x}$. Tìm số phần tử của S .

- A. 3. B. 1. C. 7. D. 9.

Câu 45: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 7. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 46: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $4\log_2 \sqrt{x} - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực?

- A. 1. B. Vô số. C. 0. D. 2.

Câu 47: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2)9^x = 0$ có nghiệm dương?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 48: Xét a, b là các số thực thỏa mãn $ab > 0$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\sqrt[3]{\sqrt{ab}} = \sqrt[6]{ab}$. B. $\sqrt[5]{ab} = (ab)^{\frac{1}{5}}$. C. $\sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b}$. D. $\sqrt[8]{(ab)^8} = ab$.

Câu 49: Biết $S = [a; b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$. Tìm $T = b - a$.

- A. $T = 2$. B. $T = 1$. C. $T = \frac{10}{3}$. D. $T = \frac{8}{3}$.

Câu 50: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 5. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 51: Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất 7,5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền?

- A. 11 năm. B. 9 năm. C. 10 năm. D. 12 năm.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có nghiệm trên đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$.

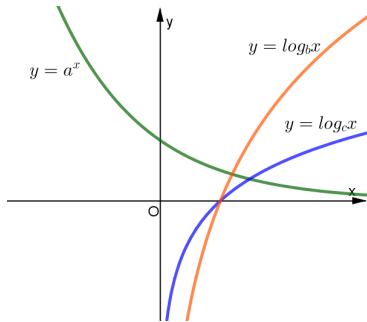
A. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

B. $m \in [0; 2]$.

C. $m \in (0; 2)$.

D. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Câu 53: Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.



Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $b > c > a$.

B. $b > a > c$.

C. $a > b > c$.

D. $c > b > a$.

Câu 54: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $[-1; 1]$.

D. $(-\infty; -1]$.

Câu 55: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$.

A. $m = \frac{9}{2}$.

B. $m = \frac{61}{2}$.

C. $m = \pm \frac{1}{2}$.

D. $m = 3$.

Câu 56: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m > 0$.

B. $m > \frac{1}{4}$.

C. $m \geq \frac{1}{4}$.

D. $m < \frac{1}{4}$.

Câu 57: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $7,2\%$ / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 12 năm.

B. 10 năm.

C. 9 năm.

D. 11 năm.

Câu 58: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 27$.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = -2$.

D. $m = 2$.

Câu 59: Số giá trị nguyên của m để phương trình $4^x - 2^{x+3} + 1 = m$ có hai nghiệm phân biệt là.

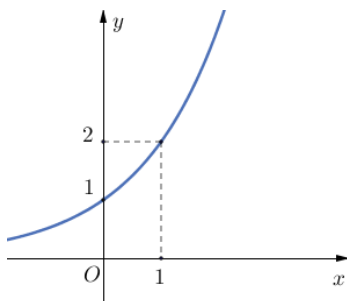
A. 17.

B. 16.

C. 14.

D. 15.

Câu 60: Đường cong trong hình sau là đồ thị của hàm số nào



A. $y = (\sqrt{2})^x$.

B. $y = \log_2(2x)$.

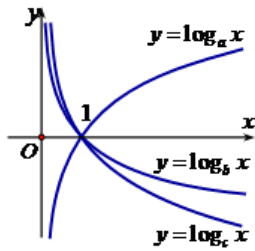
C. $y = 2^x$.

D. $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Câu 61: Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 9. B. 24. C. 26. D. 25.

Câu 62: Cho a, b, c dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > b > c$. B. $c > b > a$.
C. $a > c > b$. D. $b > c > a$.

Câu 63: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$. Tính $S = x_1 + x_2$.

- A. $S = \log_2 15$. B. $S = \log_3 2 + \log_5 2$. C. $S = \log_2 \frac{3}{5}$. D. $S = 3$.

Câu 64: Với a là số thực dương tùy ý. Tính $P = \ln(5a) - \ln(3a)$.

- A. $P = \ln(2a)$. B. $P = \frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. C. $P = \frac{\ln 5}{\ln 3}$. D. $P = \ln \frac{5}{3}$.

Câu 65: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 8. B. 5. C. 19. D. 4.

Câu 66: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3 - 2m \leq 0$ có nghiệm thực.

- A. $m \leq 3$. B. $m \geq 1$. C. $m \leq 5$. D. $m \geq 2$.

Câu 67: Một khu rừng ban đầu có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5$ mét khối gỗ. Gọi tốc độ sinh trưởng mỗi năm của khu rừng đó là $a\%$. Biết sau năm năm thì sản lượng gỗ là xấp xỉ $4,8666 \cdot 10^5$ mét khối. Giá trị của a xấp xỉ:

- A. 4%. B. 3,5%. C. 4,5%. D. 5%.

Câu 68: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

- A. $m = 4$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 69: Cho $a \geq b > 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \log_a \left(\frac{a^2}{b} \right) + \log_b \left(\frac{b^3}{a} \right)$.

- A. 0. B. -2. C. 2. D. 3.

Câu 70: Cho hàm số $y = \log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $xy' = 1$. B. $xy' = \ln 2$. C. $xy' = 0$. D. $xy' = \log_2 e$.

Câu 71: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}$, với $x \geq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\max_{[0; +\infty)} f(x) = \frac{1}{e}$. B. $\max_{[0; +\infty)} f(x) = -\frac{1}{e}$. C. $\max_{[0; +\infty)} f(x) = \frac{1}{2e}$. D. $\max_{[0; +\infty)} f(x) = -\frac{1}{2e}$.

Câu 72: Cho hàm số $f(x) = (2x^2 + 3x - 2)^{\frac{3}{2}}$. Tính $f(1)$.

- A. $f(1) = \sqrt[3]{9}$. B. $f(1) = 3\sqrt{3}$. C. $f(1) = \frac{2}{3}$. D. $f(1) = 6\sqrt{6}$.

Câu 73: Sự tăng dân số được tính theo công thức $P_n = P_0 \cdot e^{n \cdot r}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy mốc

tính, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2016, dân số Việt Nam đạt khoảng 92695100 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,07% (theo tổng cục thống kê). Nếu tỉ lệ tăng dân số không thay đổi thì đến năm nào dân số nước ta đạt khoảng 103163500 người?

- A. 2018. B. 2024. C. 2036. D. 2026.

Câu 74: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log^2 x - 2019 \log x + 2018 \leq 0$.

- A. $S = (10; 10^{2018})$. B. $S = [1; 2018]$. C. $S = [10; 10^{2018}]$. D. $S = [10; 10^{2018})$.

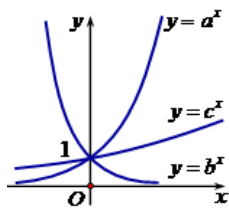
Câu 75: Cho phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_4(2 \cdot 5^x - 2) = m$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[1; \log_5 9]$?

- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 76: Cho hai số thực dương a, b và $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log_a a^b = a^b$. B. $a^{\log_a b} = b$. C. $\log_a(ab) = \log_a b$. D. $\log a = -\log_a 10$.

Câu 77: Hình vẽ dưới đây vẽ đồ thị của 3 hàm số mũ.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a > b > c$. B. $a > c > 1 > b$.
C. $b > c > 1 > a$. D. $b > a > c$.

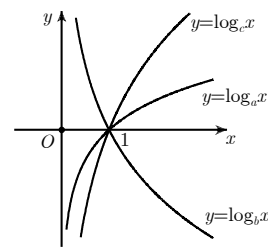
Câu 78: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng theo kì hạn 3 tháng với lãi suất 1,5% một quý (mỗi quý là 3 tháng). Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi quý số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho quý tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu quý người đó nhận được số tiền nhiều hơn 130 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

- A. 18 quý. B. 16 quý. C. 19 quý. D. 17 quý.

Câu 79: Biết phương trình $\log_2^2 x - m \log_2 x + 2m - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 16$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $-2 < m \leq 3$. B. $m \leq -1$. C. $m \geq 4$. D. $0 \leq m < 3$.

Câu 80: Cho a, b, c là các số thực dương và khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $b < c < a$. B. $c < a < b$.
C. $a < b < c$. D. $b < a < c$.

Câu 81: Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$ và $\log_a b > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 0 < a < 1 < b \end{cases}$. B. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 1 < a, b \end{cases}$. C. $\begin{cases} 0 < b < 1 < a \\ 1 < a, b \end{cases}$. D. $\begin{cases} 0 < a, b < 1 \\ 0 < b < 1 < a \end{cases}$.

Câu 82: Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}(4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1}(2a + 2b + 1) = 2$. Tính $S = a + 2b$.

- A. $S = 5$. B. $S = \frac{15}{4}$. C. $S = \frac{3}{2}$. D. $S = 4$.

Câu 83: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \ln(x^2 - x + 1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

- A. $y = x - 1$. B. $y = x + 1$. C. $y = x + 1 - \ln 3$. D. $y = x - 1 + \ln 3$.

Câu 84: Xét bất phương trình $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 < 0$. Nếu đặt $t = 5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

- A. $t^2 - 3t + 32 < 0$. B. $t^2 - 16t + 32 < 0$. C. $t^2 - 6t + 32 < 0$. D. $t^2 - 75t + 32 < 0$.

Câu 85: Cho a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3} \log a$. B. $\log \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{\log a}$.
C. $\log \sqrt[3]{a} = \log \frac{1}{3} \cdot \log a$. D. $\log \sqrt[3]{a} = a \log \frac{1}{3}$.

Câu 86: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(m-5)9^x + (2m-2)6^x + (1-m)4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 87: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x \cdot \log_2(x-1) + m = m \cdot \log_2(x-1) + x$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m > 1$ và $m \neq 3$. B. $m \leq -1$. C. $1 < m < 3$. D. $m > 1$ và $m \neq 2$.

Câu 88: Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 21. B. 9. C. 19. D. 20.

Câu 89: Cho hai đường cong $(C_1): y = 3^x(3^x - m + 2) + m^2 - 3m$ và $(C_2): y = 3^x + 1$. Tìm giá trị của tham số m để (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

- A. $m = \frac{5-2\sqrt{10}}{3}$. B. $m = \frac{5-3\sqrt{2}}{3}$. C. $m = \frac{5+2\sqrt{10}}{3}$. D. $m = \frac{5+3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 90: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-1) < 3$ là.

- A. $S = (1; 10)$. B. $S = (1; 9)$. C. $S = (-\infty; 10)$. D. $S = (-\infty; 9)$.

Câu 91: Cho a là số thực dương bất kỳ khác 1. Tính $S = \log_a(a^3 \cdot \sqrt[4]{a})$.

- A. $S = \frac{13}{4}$. B. $S = 7$. C. $S = 12$. D. $S = \frac{3}{4}$.

Câu 92: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 93: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- A. 13 năm. B. 12 năm. C. 10 năm. D. 11 năm.

Câu 94: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

- A. $m \in (3; 4)$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in [3; 4]$. D. $m \in [2; 4]$.

Câu 95: Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2 \log_3 [\log_3(3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

- A. $I = \frac{3}{2}$. B. $I = 4$. C. $I = \frac{5}{4}$. D. $I = 0$.

Câu 96: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

- A. $S = (1; +\infty)$. B. $S = (-2; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 2)$. D. $S = (-\infty; -2)$.

Câu 97: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$.

- A. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$. B. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$. D. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

Câu 98: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

- A. $m < 1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 0$. D. $m < \frac{2}{3}$.

Câu 99: Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm lớn hơn 2 tỷ đồng ?

- A. Năm 2022. B. Năm 2020. C. Năm 2023. D. Năm 2021.

Câu 100: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2\log u_{10}} = 2\log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với $n \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$.

- A. 248. B. 249. C. 229. D. 290.

Câu 101: Cho hàm số $f(x) = 2^x \cdot 7^{x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$. B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x \log_2 7 < 0$.
C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$. D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \log_7 2 + x^2 < 0$.

Câu 102: Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$. B. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$.
C. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. D. $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$.

Câu 103: Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. B. $\log_2 a = \log_a 2$. C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$. D. $\log_2 a = -\log_a 2$.

Câu 104: Tìm nghiệm của phương trình $2^{x-1} = \frac{1}{8}$.

- A. $x = -1$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 4$.

Câu 105: Cho a là số thực dương khác 1 và $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $P = \frac{1}{3}$. B. $P = 3$. C. $P = 1$. D. $P = 9$.

Câu 106: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{1}{2}\log_2(2+x) + \log_{\frac{1}{2}}(4 - \sqrt[4]{18-x}) \leq 0$.

- A. $S = [-2; 3]$. B. $S = (-2; 4)$. C. $S = (-2; 18]$. D. $S = (-2; 2]$.

Câu 107: Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây ?

- A. $4t - 3 = 0$. B. $t^2 + t - 3 = 0$. C. $2t^2 - 3 = 0$. D. $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Câu 108: Cho $\log_a x = 3, \log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

A. $P = 12$.

B. $P = \frac{12}{7}$.

C. $P = \frac{1}{12}$.

D. $P = \frac{7}{12}$.

Câu 109: Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{11}-7}{2}$.

B. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}$.

Câu 110: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-5) = 4$.

A. $x = 3$.

B. $x = 21$.

C. $x = 13$.

D. $x = 11$.

Câu 111: Đặt $a = \log_{12} 27$. Hãy tính $\log_6 16$ theo a .

A. $\log_6 16 = 12 + 3a$.

B. $\log_6 16 = \frac{a-15}{2a-1}$.

C. $\log_6 16 = \frac{12+4a}{3-a}$.

D. $\log_6 16 = \frac{12-4a}{3+a}$.

Câu 112: Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 2$.

C. $I = 0$.

D. $I = -2$.

Câu 113: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $32.4^x - 18.2^x + 1 < 0$.

A. $S = (-5; -2)$.

B. $S = (-4; 1)$.

C. $S = (-4; 0)$.

D. $S = (1; 6)$.

Câu 114: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

A. $m \geq 0$.

B. $m > 0$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \neq 0$.

Câu 115: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + \sqrt{x+1})$.

A. $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$.

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.

C. $y' = \frac{2}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.

D. $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.

Câu 116: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

A. $I = -2$.

B. $I = -\frac{1}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Câu 117: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

B. $D = (-2; 3)$.

C. $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

D. $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 118: Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

A. $Q = b^{-\frac{4}{3}}$.

B. $Q = b^2$.

C. $Q = b^{\frac{5}{9}}$.

D. $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

Câu 119: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m < 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \leq 2$.

D. $m > 2$.

Câu 120: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

A. $S = \{-2\}$.

B. $S = \{1\}$.

C. $S = \{3\}$.

D. $S = \{4\}$.

Câu 121: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = (1; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; 1)$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 122: Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao

cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

A. Vô số.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Câu 123: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

B. $\ln(ab) = \ln a \ln b$.

C. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

D. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$.

Câu 124: Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a \neq 1, a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$.

A. $P = -1 + \sqrt{3}$.

B. $P = -5 + 3\sqrt{3}$.

C. $P = -1 - \sqrt{3}$.

D. $P = -5 - 3\sqrt{3}$.

Câu 125: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\sqrt{1-3x}}{\log_2(x+1)}$.

A. $D = (-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

B. $D = \left(-1; \frac{1}{3}\right]$.

C. $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \setminus \{-1\}$.

D. $D = (0; +\infty)$.

Câu 126: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

A. $m = 1$.

B. $m = -3$.

C. $m = 6$.

D. $m = 3$.

Câu 127: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$.

A. $D = (1; 3)$.

B. $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

D. $D = (2 - \sqrt{2}; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{2})$.

Câu 128: Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với số thực dương x, y ?

A. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.

B. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

C. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

D. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x - y)$.

Câu 129: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$.

A. $D = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

B. $D = (2; 3)$.

C. $D = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

D. $D = [2; 3]$.

Câu 130: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m < -1$ hoặc $m > 0$.

B. $0 < m < 3$.

C. $m = 0$.

D. $m > 0$.

Câu 131: Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a(b^2 c^3)$.

A. $P = 13$.

B. $P = 108$.

C. $P = 31$.

D. $P = 30$.

Câu 132: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{5}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

B. $D = [-2; 2]$.

C. $D = (-2; 2)$.

D. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Câu 133: Với số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_3 x = \alpha, \log_3 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)$.

B. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} + \beta$.

C. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} - \beta$.

D. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)$.

Câu 134: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

A. $y' = \frac{1}{x}$.

B. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.

C. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$.

D. $y' = \frac{\ln 10}{x}$.

Câu 135: Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x+1) = \frac{1}{2}$.

A. $x = -6$.

B. $x = \frac{23}{2}$.

C. $x = 6$.

D. $x = 4$.

Câu 136: Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1-x) = 2$.

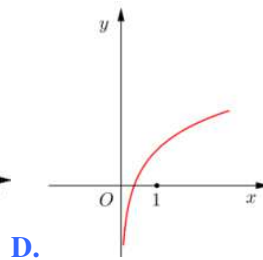
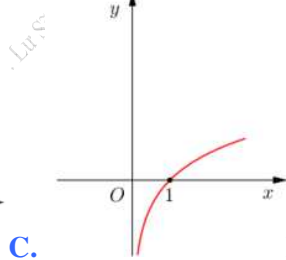
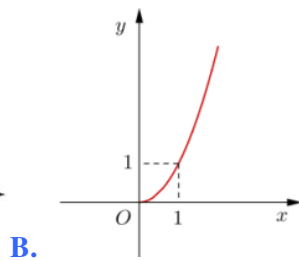
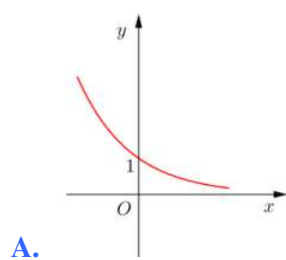
A. $x = 3$.

B. $x = 5$.

C. $x = -3$.

D. $x = -4$.

Câu 137: Cho hàm số $f(x) = x \ln x$. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.



Câu 138: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

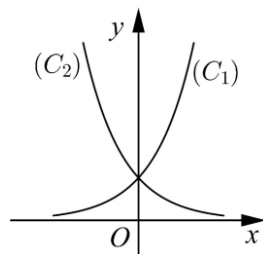
A. $S = \{3\}$.

B. $S = \{4\}$.

C. $S = \{-3; 3\}$.

D. $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Câu 139: Cho hai hàm số $y = a^x, y = b^x$ với a, b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $0 < a < 1 < b$.

B. $0 < b < 1 < a$.

C. $0 < a < b < 1$.

D. $0 < b < a < 1$.

Câu 140: Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

D. $D = (0; +\infty)$.

Câu 141: Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất ?

- A. 2018. B. 2017. C. 4014. D. 4015.

Câu 142: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 81$.

- A. $m = 4$. B. $m = 81$. C. $m = -4$. D. $m = 44$.

Câu 143: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$. B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.
C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$. D. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

Câu 144: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

- A. $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng). B. $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).
C. $m = \frac{100 \cdot 1,03}{3}$ (triệu đồng). D. $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Câu 145: Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $P = x^{\frac{1}{4}}$. B. $P = x^{\frac{1}{2}}$. C. $P = x^{\frac{13}{24}}$. D. $P = x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 146: Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$.

- A. $P = 7 + 4\sqrt{3}$. B. $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2016}$. C. $P = 1$. D. $P = 7 - 4\sqrt{3}$.

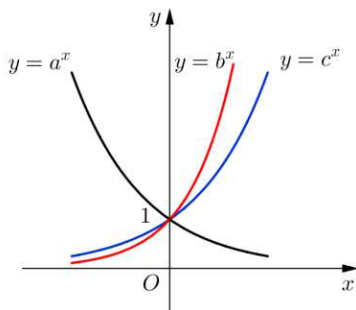
Câu 147: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

- A. $S = \left(\frac{1}{2}; 2 \right)$. B. $S = (2; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 2)$. D. $S = (-1; 2)$.

Câu 148: Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt ?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 149: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



- A. $b < c < a$. B. $a < b < c$.
C. $a < c < b$. D. $c < a < b$.

Câu 150: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

A. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

B. $S = [-\infty; 1) \cup [4; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$.

D. $S = [2; 16]$.

Câu 151: Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $P = 15\log_a b$.

B. $P = 27\log_a b$.

C. $P = 6\log_a b$.

D. $P = 9\log_a b$.

Câu 152: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$.

A. $y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 2}$.

B. $y' = \frac{1}{2x+1}$.

C. $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

D. $y' = \frac{2}{2x+1}$.

Câu 153: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{1}{2}\log_2(4+x) + \log_{\frac{1}{2}}(4 - \sqrt[4]{16-x}) \leq 0$.

A. $S = (-4; 2)$.

B. $S = (-4; 16]$.

C. $S = (-4; 0]$.

D. $S = [0; +\infty)$.

Câu 154: Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $1 < \log_a b < \log_b a$.

B. $\log_b a < \log_a b < 1$.

C. $\log_b a < 1 < \log_a b$.

D. $\log_a b < 1 < \log_b a$.

Câu 155: Cho các số thực dương a, b và $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.

B. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$.

D. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$.

Câu 156: Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy tính $\log_6 45$ theo a và b .

A. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$.

B. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$.

C. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$.

D. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Câu 157: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{e^x - e^{10}}}$.

A. $D = (0; +\infty)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = [\ln 10; +\infty)$.

D. $D = (10; +\infty)$.

Câu 158: Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

A. $P = \sqrt{x}$.

B. $P = x^2$.

C. $P = x^{\frac{1}{8}}$.

D. $P = x^{\frac{2}{9}}$.

Câu 159: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

A. $m = 3$.

B. $m = \frac{9}{2}$.

C. $m = 4$.

D. $m = \frac{3}{2}$.

Câu 160: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$.

A. $S = \{2 + \sqrt{5}\}$.

B. $S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$.

C. $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$.

D. $S = \{3\}$.

Câu 161: Cho bất phương trình $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 1 < 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây ?

- A. $3t^2 - 5t + 1 < 0$. B. $t^2 - t + 1 < 0$. C. $5t^2 - 3t + 1 < 0$. D. $t^2 - t < 0$.

Câu 162: Hàm số nào dưới đây có đạo hàm là $y' = 3^x \ln 3 + 7x^6$?

- A. $y = 3^x + x^7$. B. $y = 3^x + 7^x$. C. $y = \log_3 x + x^7$. D. $y = 3^x \cdot x^7$.

Câu 163: Xét các số nguyên dương a, b sao cho $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

- A. $S_{\min} = 30$. B. $S_{\min} = 17$. C. $S_{\min} = 25$. D. $S_{\min} = 33$.

Câu 164: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

- A. $P_{\min} = 13$. B. $P_{\min} = 19$. C. $P_{\min} = 14$. D. $P_{\min} = 15$.

Câu 165: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$.

- A. $y' = x \ln 3$. B. $y' = \frac{1}{x \log 3}$. C. $y' = \frac{1}{x}$. D. $y' = \frac{1}{x \ln 3}$.

Câu 166: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \in (0; 1]$. B. $m \in (-\infty; 1)$. C. $m \in (0; +\infty)$. D. $m \in (0; 1)$.

Câu 167: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$.

- A. $M = \frac{1}{2}$. B. $M = 1$. C. $M = \frac{1}{3}$. D. $M = \frac{1}{4}$.

Câu 168: Bất phương trình $\log(2x^2 - 11x + 15) \leq 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Câu 169: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} < \frac{1}{27}$.

- A. $S = (-1; +\infty)$. B. $S = (-\infty; -1)$. C. $S = (5; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 5)$.

Câu 170: Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. B. $y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. C. $y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. D. $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$.

Câu 171: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$.

- A. $S = (0; 6)$. B. $S = (6; +\infty)$. C. $S = (0; 64)$. D. $S = (-\infty; 6)$.

Câu 172: Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log(3a) = \frac{1}{3} \log a$. B. $\log(3a) = 3 \log a$. C. $\log a^3 = \frac{1}{3} \log a$. D. $\log a^3 = 3 \log a$.

Câu 173: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$.

- A. $D = [-1; 3]$. B. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
C. $D = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. D. $D = (-1; 3)$.

Câu 174: Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{\sqrt{x^2+1}} + 2|x| = 3^{x+1}$.

A. $S = \{0\}$.

B. $S = \{0; 1\}$.

C. $S = \{0; 3\}$.

D. $S = \{0; 10\}$.

Câu 175: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{2} \log_2 (4+x) + \log_{\frac{1}{2}} (4 - \sqrt[4]{16-x})$.

A. $D = (-4; +\infty)$.

B. $D = [-4; 16]$

C. $D = (-4; 16]$.

D. $D = (-\infty; -4) \cup [16; +\infty)$.

Câu 176: Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$, mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $x = 5a + 3b$.

B. $x = 3a + 5b$.

C. $x = a^5 b^3$.

D. $x = a^5 + b^3$.

Câu 177: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{2} \log_2 (2+x) + \log_{\frac{1}{2}} (4 - \sqrt[4]{18-x})$.

A. $D = [-2; 18]$

B. $D = (-2; +\infty)$.

C. $D = (-2; 18]$.

D. $D = (-\infty; -2) \cup [18; +\infty)$.

Câu 178: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$.

B. $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{21}$.

C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

D. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

Câu 179: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi ?

A. 102,016,000 đồng.

B. 102,423,000 đồng.

C. 102,424,000 đồng.

D. 102,017,000 đồng.

Câu 180: Tìm tổng S giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$.

A. $S = \frac{82}{9}$.

B. $S = \frac{80}{9}$.

C. $S = 9$.

D. $S = 0$.

Câu 181: Số lượng vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = S(0) \cdot 2^t$, trong đó $S(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con ?

A. 19 phút.

B. 7 phút.

C. 48 phút.

D. 12 phút.

Câu 182: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng, bao gồm gốc và lãi ? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền.

A. 14 năm.

B. 11 năm.

C. 12 năm.

D. 13 năm.

ĐÁP ÁN CHƯƠNG II
HÀM SỐ LŨY THỪA – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT
PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH
HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LÔGARIT

-----000-----

§1. LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
A												
B												
C												
D												

§2. LÔGARIT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44
A				
B				
C				
D				

§3. HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LÔGARIT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49
A									
B									
C									
D									

§4. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH
HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LÔGARIT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
A											
B											
C											
D											

ÔN TẬP CHƯƠNG II

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A																				
B																				
C																				
D																				

	10 1	10 2	10 3	10 4	10 5	10 6	10 7	10 8	10 9	11 0	11 1	11 2	11 3	11 4	11 5	11 6	11 7	11 8	11 9	12 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	12 1	12 2	12 3	12 4	12 5	12 6	12 7	12 8	12 9	13 0	13 1	13 2	13 3	13 4	13 5	13 6	13 7	13 8	13 9	14 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	14 1	14 2	14 3	14 4	14 5	14 6	14 7	14 8	14 9	15 0	15 1	15 2	15 3	15 4	15 5	15 6	15 7	15 8	15 9	16 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	16 1	16 2	16 3	16 4	16 5	16 6	16 7	16 8	16 9	17 0	17 1	17 2	17 3	17 4	17 5	17 6	17 7	17 8	17 9	18 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	18 1	18 2	18 3	18 4	18 5	18 6	18 7	18 8	18 9	19 0	19 1	19 2	19 3	19 4	19 5	19 6	19 7	19 8	19 9	20 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	20 1	20 2	20 3	20 4	20 5	20 6	20 7	20 8	20 9	21 0	21 1	21 2	21 3	21 4	21 5	21 6	21 7	21 8	21 9	22 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	22 1	22 2	22 3	22 4	22 5	22 6	22 7	22 8	22 9	23 0	23 1	23 2	23 3	23 4	23 5	23 6	23 7	23 8	23 9	24 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	24 1	24 2	24 3	24 4	24 5	24 6	24 7	24 8	24 9	25 0	25 1	25 2	25 3	25 4	25 5	25 6	25 7	25 8	25 9	26 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	26 1	26 2	26 3	26 4	26 5	26 6	26 7	26 8	26 9	27 0	27 1	27 2	27 3	27 4	27 5	27 6	27 7	27 8	27 9	28 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	28 1	28 2	28 3	28 4	28 5	28 6	28 7	28 8	28 9	29 0	29 1	29 2	29 3	29 4	29 5	29 6	29 7	29 8	29 9	30 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315
A															
B															
C															
D															

MỘT SỐ CÂU TRONG KÌ THI THPT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
A													
B													
C													
D													

	9 4	9 5	9 6	9 7	9 8	9 9	10 0	10 1	10 2	10 3	10 4	10 5	10 6	10 7	10 8	10 9	11 0	11 1	11 2	11 3
A																				
B																				
C																				
D																				

	11 4	11 5	11 6	11 7	11 8	11 9	12 0	12 1	12 2	12 3	12 4	12 5	12 6	12 7	12 8	12 9	13 0	13 1	13 2	13 3
A																				
B																				
C																				
D																				

	13 4	13 5	13 6	13 7	13 8	13 9	14 0	14 1	14 2	14 3	14 4	14 5	14 6	14 7	14 8	14 9	15 0	15 1	15 2	15 3
A																				
B																				
C																				
D																				

	15 4	15 5	15 6	15 7	15 8	15 9	16 0	16 1	16 2	16 3	16 4	16 5	16 6	16 7	16 8	16 9	17 0	17 1	17 2	17 3
A																				
B																				
C																				
D																				

	174	175	176	177	178	179	180	181	182
A									
B									
C									
D									