Bài 5 ĐƯỜNG TIỆM CẬN

A LÝ THUYẾT VỀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1 Định nghĩa

Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$. Đường thẳng $y = y_0$ là **đường tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu **ít nhất** một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0; \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$

2 Kết luận về tiệm cận ngang của đồ thị hàm phân thức

Đặt $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ là một hàm phân thức, trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm đa thức.

1. Nếu bậc của tử thức $p(x)$ nhỏ hơn bậc của mẫu thức $q(x)$, thì $y = 0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
2. Nếu bậc của tử thức $p(x)$ bằng bậc của mẫu thức $q(x)$, thì $y = \dfrac{a}{b}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$, trong đó a, b lần lượt là hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của đa thức tử số $p(x)$ và đa thức mẫu số $q(x)$.
3. Nếu bậc của tử thức $p(x)$ lớn hơn bậc của mẫu thức $q(x)$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang.

3 Một số lưu ý về các giới hạn đặc biệt

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$;
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ (c là hằng số, k nguyên dương);
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$, nếu k là số nguyên lẻ;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$, nếu k là số nguyên chẵn.

Với bài toán cần tìm giới hạn của hàm số tại vô cực ta sẽ sử dụng chức năng CALC để tính các giá trị của $f(x)$ tại các giá trị x rất lớn.

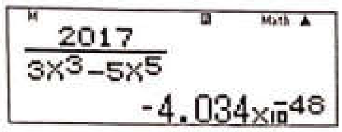
1. Để tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ thì ta nhập hàm số $f(x)$ vào màn hình và sử dụng CALC để tính giá trị của hàm số tại $x = 10^{10}$.

2. Để tính $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ thì ta nhập hàm số $f(x)$ vào màn hình và sử dụng CALC để tính giá trị của hàm số tại $x=-10^{10}$.

VÍ DỤ 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2017}{3x^3-5x^5}$ bằng:

A. $\dfrac{2017}{3}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải



Đáp án D.
Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=10^{10}$ ta được kết quả như hình bên.
Đó là một kết quả rất gần 0.

VÍ DỤ 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{5x+6}$.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định trên $\left(-\infty;-\dfrac{6}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{6}{5};+\infty\right)$.
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{5x+6}=\dfrac{2}{5};\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{5x+6}=\dfrac{2}{5}$. Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang $y=\dfrac{2}{5}$.
Với bài toán này, ta không cần thiết phải sử dụng máy tính cầm tay, mà chỉ cần nhớ tính chất.

! Đồ thị hàm phân thức có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ luôn có một tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ và một đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

VÍ DỤ 3. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=5-\dfrac{2}{x^2}$.

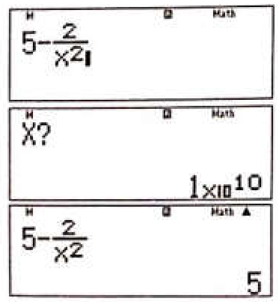
Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Cách 1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(5-\dfrac{2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}5-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x^2}=5-2.0=5$
Vậy đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận ngang là $y=5$.

Cách 2. Từ kết luận về tiệm cận ngang của hàm phân thức phía trên ta thấy $y=5-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{5x^2-2}{x^2}$. Do hàm số là hàm phân thức có bậc tử bằng bậc mẫu nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{5}{1}=5$

Cách 3. Sử dụng máy tính cầm tay.
Nhập vào màn hình hàm số và CALC$x = 10^{10}$ thì ta có màn hình hiện như hình bên. Từ đây kết luận đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 5$.



VÍ DỤ 4. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

a. $y = \dfrac{-2x+3}{3x^2+1}$ b. $y = \dfrac{-2x^2+3}{3x^2+1}$ c. $y = \dfrac{-2x^3+3}{3x^2+1}$

Hướng dẫn giải

a. Vì bậc của đa thức tử nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

b. Vì bậc của đa thức tử thức bằng bậc của đa thức mẫu số nên đường thẳng $y = \dfrac{-2}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

c. Vì bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

B LÝ THUYẾT VỀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1 Định nghĩa

Định nghĩa. Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

! Nếu c là một số thực thỏa mãn $q(c) = 0$ và $p(c) \neq 0$, thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ có tiệm cận đứng $x = c$.

2 Kỹ năng sử dụng máy tính cầm tay để tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Để tìm giới hạn của hàm số tại một điểm, ta sử dụng máy tính cầm tay như sau:

1. Để tính $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ thì ta nhập hàm số $f(x)$ vào màn hình, sử dụng lệnh CALC và gán $x = a + 10^{-9}$.

2. Để tính $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thì ta nhập hàm số $f(x)$ vào màn hình, sử dụng lệnh CALC và gán $x = a - 10^{-9}$.

VÍ DỤ 5. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Đáp án D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Nhận thấy bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 1$ (thỏa mãn không là nghiệm của đa thức tử số), do đó $x = 1; x = -1$ lần lượt là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

VÍ DỤ 6. Cho hàm số $y = \dfrac{7}{2x+5}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Đáp án A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$. Theo chú ý thì ta thấy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = \dfrac{-5}{2}$ và một tiệm cận ngang là $y = \dfrac{0}{2} = 0$.

VÍ DỤ 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2+mx+m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. Không có giá trị thực nào của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

B. $0 \le m \le 4$ hoặc $m = -\dfrac{4}{3}$.

C. $m \in \left\{0; 4; -\dfrac{4}{3}\right\}$.

D. $m \le 0$ hoặc $m \ge 4$.

Hướng dẫn giải

Đáp án C.

Ta thấy đây là hàm phân thức nên ta có thể áp dụng các chú ý đưa ra ở phần lý thuyết về tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 + mx + m = 0$

TH 1: có duy nhất một nghiệm khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m = 0 \\ 4 + 3m \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0; m = 4$.

TH 2: có một nghiệm bằng 2, một nghiệm khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m \ne 0 \\ 2^2 + 2m + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{-4}{3}$

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt.
C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 2$.
D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải

Đáp án A.
Áp dụng định nghĩa về tiệm cận ngang ta suy ra được A là đáp án đúng.

VÍ DỤ 9. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 0.

Hướng dẫn giải

Đáp án C.
Ta có $y = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16} = \dfrac{(x+1)(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \dfrac{x+1}{x+4}$. Vậy đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -4$.

VÍ DỤ 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-\sqrt{mx^2+1}}{x-1}$ có đúng hai tiệm cận ngang.

A. $m < 0$. **B**. $0 < m < 3$ hoặc $m > 3$.
C. $m > 0$. **D**. $m = 0$.

Hướng dẫn giải

Đáp án C. Để đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng thì $m \neq -\dfrac{5}{4}$ (Nếu $m = -\dfrac{5}{4}$ thì $y = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng).
Khi đó, áp dụng chú ý ! ở trên thì đồ thị hàm số đã cho luôn có một tiệm cận đứng là $x = m$. Do vậy để tiệm cận đứng nằm bên phải trục Oy thì $m > 0$ và $m \neq \dfrac{5}{4}$.

Ghi nhớ

a) Tìm nghiệm của phương trình mẫu.

b) Xem các nghiệm đó có phải là nghiệm của tử số không (bằng cách thay hoặc thử trực tiếp).

c) Kết luận.

VÍ DỤ 11. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$

A. $x = 3$ và $x = -2$. **B**. $x = -3$. **C**. $x = 3$ và $x = 2$. **D**. $x = 3$.

Hướng dẫn giải

Đáp án D.

Điều kiện xác định của hàm số là $\left[\begin{array}{l} x \neq 3 \\ x \neq 2 \end{array}\right.$

Ta có $y = \dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = \dfrac{4x^2-4x+1-x^2-x-3}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

$= \dfrac{3x^2-5x-2}{(x-2)(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)} = \dfrac{3x+1}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

Đến đây ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} y = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{3x+1}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)} = -\infty; \lim\limits_{x\to 3^+} y = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng là $x = 3$.

Phân tích sai lầm: Nhiều độc giả không thực hiện rút gọn nhân tử $x-2$ dẫn đến chọn hai tiệm cận đứng là $x = 2; x = 3$ là sai.

Đây cũng chính là ứng dụng của lý thuyết về tiệm cận đứng của đồ thị hàm số ở phía trên.

Một cách khác để nhanh chóng giải bài toán trên như sau:

a) Giải phương trình $x^2-5x+6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

b) Thử xem $x = 2; x = 3$ có phải nghiệm của đa thức tử số hay không, thử lại thấy $x = 3$ không là nghiệm (thỏa mãn).

VÍ DỤ 12. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận là các đường thẳng $x = -2, x = -3$ và$y = 0$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -2$ và $x = -3$.

C. Đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -3$ và một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

D. Đồ thị hàm số đã cho chỉ có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang..

Hướng dẫn giải

Đáp án C. Tương tự như bài toán trên.

a) Vì đây là hàm phân thức có bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

b) Giải phương trình $x^2+5x+6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -3 \end{array}\right.$. Ta thấy với $x = -2$ thì $2x+4 = 0$

Do vậy $x = -2$ không phải là phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. Do vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -3$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

C MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Phương pháp Xét hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d};(ad-bc\neq 0)$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, suy ra $M=\left(x_0;\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng: $x=\dfrac{-d}{c}$;

Tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$;

Khi đó ta có kết quả sau: $d_1.d_2=\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|.\left|\dfrac{ad-bc}{c.(cx_0+d)}\right|=\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|=p$

Chú ý
Một cách nhớ nhanh công thức này là công thức này gần giống với công thức đạo hàm của hàm số, chỉ khác là mẫu số ở đây chỉ có hệ số c bình phương.

$y'=\dfrac{ad-bc}{MS^2}$;

$d_1d_2=\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|$

VÍ DỤ 13. Cho đường cong $(C): y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ và M là một điểm nằm trên (C) . Giả sử d_1,d_2 tương ứng là các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) khi đó tích $d_1.d_2$ bằng:

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Đáp án D. Áp dụng công thức vừa chứng minh phía trên thì ta có:

$d_1.d_2=\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|=\left|\dfrac{2.(-1)-3.1}{1^2}\right|=5$.

Đến đây ta có bài toán:

Bài toán 1. Tìm điều kiện sao cho tổng khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là nhỏ nhất.

Phương pháp Từ các kết quả trên ta có tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số được tính bằng công thức:

$\sum_d = d_1+d_2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$d_1+d_2\geq 2\sqrt{d_1d_2}=2\sqrt{\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|}=2\sqrt{p}$

Dấu bằng xảy ra khi $d_1=d_2\Leftrightarrow\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|=\left|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|\Leftrightarrow(cx_0+d)^2=|ad-bc|$

VÍ DỤ 14. Tìm hoành độ của điểm M thuộc đồ thị $(C): y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ biết rằng tổng khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận của (C) đạt nhỏ nhất và M có hoành độ dương

A. $\sqrt{3}-1$. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $2-\sqrt{3}$. **D.** Đáp số khác.

Hướng dẫn giải

Đáp án A.

Áp dụng công thức trên ta có để khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận của (C) đạt nhỏ nhất thì $(cx_0+d)^2 = |ad-bc| \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}-1 \\ x = -1-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Do đề bài yêu cầu tìm hoành độ dương nên ta chọn A.

Bài toán 2. Tìm điểm $M(x_0;y_0)$ trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng bằng k lần khoảng cách từ M đến đường tiệm cận ngang.

Phương pháp Ở kết quả ban đầu ta có: $d_1 = \left|x_0 + \dfrac{d}{c}\right| = \left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|; d_2 = \left|y_0 - \dfrac{a}{c}\right| = \left|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|$

Từ đây ta có $d_1 = kd_2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right| = k.\left|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| \Rightarrow x_0 = -\dfrac{d}{c} \pm \sqrt{kp}$ với $p = \dfrac{ad-bc}{c^2}$

VÍ DỤ 15. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C) . Có tất cả bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Đáp án C. Ta chú ý đề bài này ngược so với bài toán tổng quát số 2 nên ở đây $k = \dfrac{1}{5}$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ lúc này ta áp dụng công thức tổng quát ở trên ta có:

$p = \left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right| = 5$.

Theo công thức ở bài toán 2 thì $\left[\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{d}{c} + \sqrt{kp} \Leftrightarrow x_0 = 3 + \sqrt{\dfrac{1}{5}.5} = 4 \Rightarrow y_0 = 6 \\ x_0 = -\dfrac{d}{c} - \sqrt{kp} \Leftrightarrow x_0 = 3 - \sqrt{\dfrac{1}{5}.5} = 2 \Rightarrow y_0 = -4 \end{array}\right.$

Vậy có tất cả hai điểm M thỏa mãn.

Bài toán 3. Tìm điểm $M(x_0;y_0)$ trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ sao cho khoảng cách từ M đến điểm I là ngắn nhất, biết I là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Phương pháp Ta có $M\left(x_0; \dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right), I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$

Khi đó $IM^2 = \left(x_0 + \frac{d}{c}\right)^2 + \left(\frac{ax_0+b}{cx_0+d} - \frac{a}{c}\right)^2 = d_1^2 + d_2^2 \geq 2d_1d_2$ (bất đẳng thức Cauchy)

$\Leftrightarrow IM \geq \sqrt{2p}$, dấu bằng xảy ra khi $x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{p}$

VÍ DỤ 16. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{3x+9}$ có đồ thị (C) . Điểm M trên đồ thị (C) thỏa mãn khoảng cách từ M đến giao điểm I của hai đường tiệm cận ngắn nhất có tọa độ là

A. $M\left(\frac{8}{3};\frac{14}{51}\right); M\left(-\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$.

B. $M\left(\frac{10}{3};\frac{16}{57}\right)$.

C. $M\left(\frac{8}{3};\frac{14}{51}\right)$.

D. $M\left(-\frac{9+\sqrt{3}}{3};\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right); M\left(\frac{-9+\sqrt{3}}{3};\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Đáp án D. Giả sử $M(x_0; y_0)$.

Áp dụng bài toán tổng quát số 3 ta có $x_0 = -\frac{d}{c} + \sqrt{p}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -3 + \sqrt{\left|\frac{9-6}{3^2}\right|} = \frac{-9+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ x_0 = -3 - \sqrt{\left|\frac{9-6}{3^2}\right|} = -\frac{9+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là $M\left(-\frac{9+\sqrt{3}}{3};\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right); M\left(\frac{-9+\sqrt{3}}{3};\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)$

D BÀI TẬP TỰ LUẬN

1 Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số khi biết rõ hàm số

Câu 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

a) $y = \frac{3x+2}{x-2}$ b) $y = \frac{-2x-5}{3x+1}$

Câu 2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

a) $y = x + 1 - \frac{1}{x-5}$ b) $y = \frac{2x^2-6x+1}{3x+1}$

Câu 3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

a) $y = \frac{2x+3}{x^2-4}$ b) $y = \frac{4x}{x^2+8}$

Câu 4. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{2x-4}{x^3+1}+2x-3$ b) $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-2x}$

Câu 5. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{2x^3-x+4}{x^2-4}$ b) $y=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-2x+3}$

Câu 6. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

a) $y=x+4+\sqrt{x^2-3x+2}$ b) $y=3x+\sqrt{x^2+4}$ 3. $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$

2 Tìm tiệm cận của ĐTHS biết BBT của hàm số, đồ thị của hàm số đó hoặc hàm số liên quan

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		$+\infty$
y'		+	0	-	||	+	0	-	||	-	
y	$-\infty$	↗	5	↘	2 || 1	↗	10	↘	2 || $+\infty$	↘	3

Tìm tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	+	0	−	||	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	0	↗	10	↘	2 || $+\infty$	↘	3

Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$?

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2

Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho?

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty \searrow -1$		$\Vert$	$-\infty \nearrow$	2	$\searrow -\infty$	

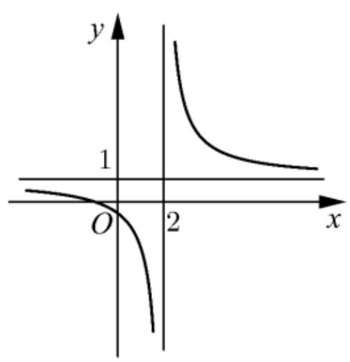
Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	-1	$\searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow$	m

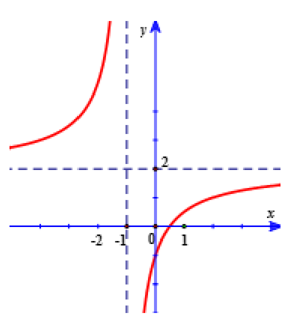
Tìm các giá trị nguyên của $m \in [0;5)$ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng và ngang?

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

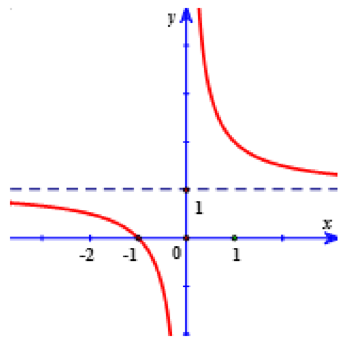


Tìm phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trên.

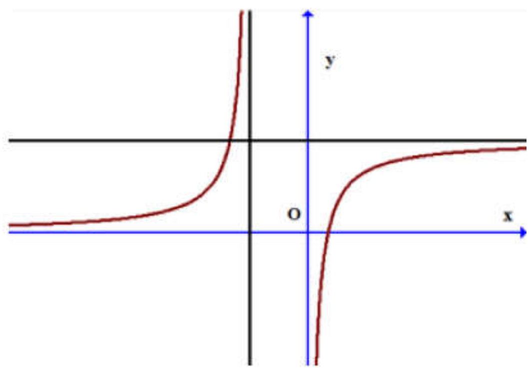
Câu 13. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Đồ thị có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?



Câu 14. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Tìm phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số?

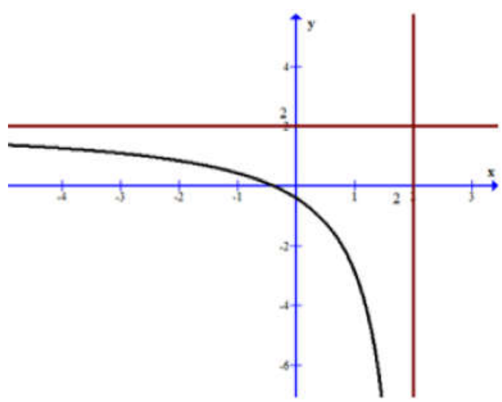


Câu 15. Cho đồ thị một hàm số là một đường cong gồm hai nhánh có hình vẽ như hình dưới đây.



Hỏi đồ thị trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

Câu 16. Biết hàm số $y = f(x)$có đồ thị là một đường cong như hình vẽ dưới. Tìm số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$?



3 Tiệm cận hàm hợp

Các dạng trong chủ đề: Cho hàm số $y = f(x)$biết bảng biến thiên hoặc đồ thị. Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị $y = g(x)$ thuộc một trong các dạng sau

1) $y = f(u(x))$

2) $y = g(f(x))$

3) $y = g(f(u(x)))$

4) $y = g(x, f(x))$

5) $y = g(x, f(u(x)))$

Phương pháp Gọi (G)là đồ thị hàm số $y = g(x)$.

1. Tìm tiệm cận ngang.
   Xét hàm số dạng $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.Một dấu hiệu thường dùng để nhận biết (G) có tiệm cận ngang:
   - Hàm số $y = g(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$ hoặc trên $(-\infty;a)$.
   - Bậc của $u(x) \le$ Bậc của $v(x)$.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = y_0 \Rightarrow$Đường thẳng$y = y_0$là tiệm cận ngang của$(G)$.
2. Tìm tiệm cận đứng.
   Xét dạng hàm số $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Một dấu hiệu thường dùng để nhận biết đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của (G):
   - $v(x_0) = 0$và $u(x_0) \neq 0$, $g(x)$xác định trên $(a;x_0)$hoặc $(x_0;b)$.
   - Ít nhất một trong hai giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$ là giới hạn vô cực.

     $\Rightarrow$Đường thẳng $x = x_0$là tiệm cận đứng của (G).
     Trong chủ đề này, các dấu hiệu nhận biết ở trên dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Câu 17. (Dạng $y = g(f(x))$)Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

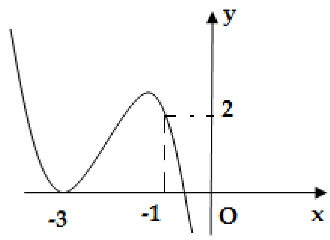
Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 1}$.

Câu 18. (Dạng $y = g(f(x))$) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên và có bảng biến thiên như sau

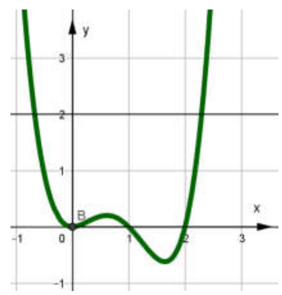
x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{1}{2f(x) - 3}$

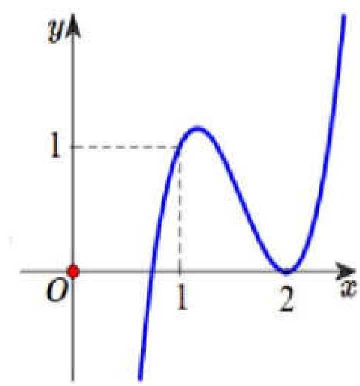
Câu 19. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in R)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{(f(x))^2-2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Câu 20. Cho đồ thị hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới . Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\dfrac{(x^6+1)(x^2-5x).\sqrt{x^2-2x}}{\left[f^2(x)-2f(x)\right](2x-10)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

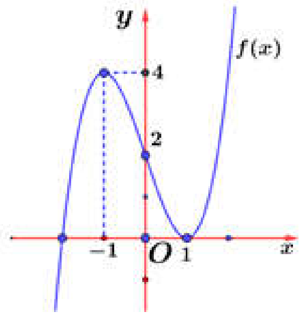


Câu 21. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là hàm số đa thức với hệ số thực, có đồ thị (C) như hình vẽ bên.

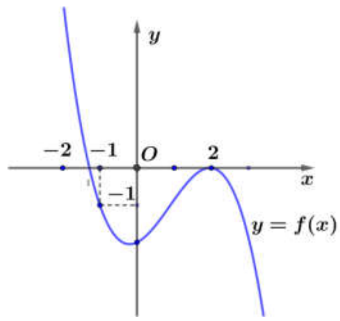


Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-1}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$.

Câu 22. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{(x+1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$.

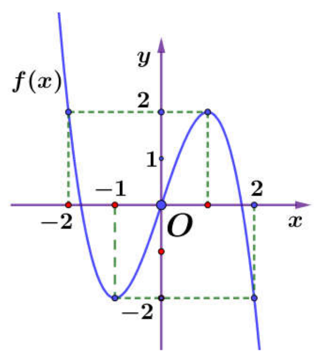


Câu 23. (Dạng $y = g(x, f(x))$) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây



Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{\left(x^2+2x-3\right)\sqrt{x}}{\left(x^2-x\right)\left[(f(x))^2+f(x)\right]}$

Câu 24. (Dạng $y = g(x, f(x))$) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{x+2}{f(x)+1}$.

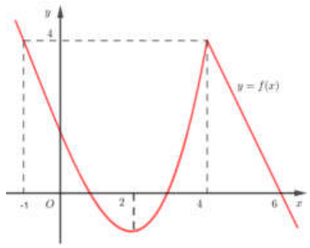


Câu 25. (Dạng $y = f(u(x))$) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

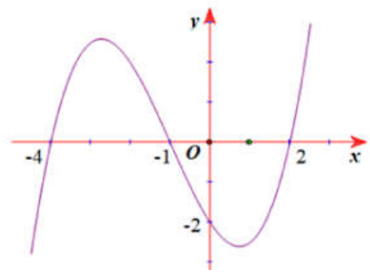
Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = f\left(x^2-2x-2\right)$
.

Câu 26. (Dạng $y = f(u(x))$) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên và có đồ thị như hình dưới đây



Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = f\left(\dfrac{2-x}{x+1}\right)$

Câu 27. (Dạng $y = g(f(x))$) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên và có đồ thị như hình dưới đây



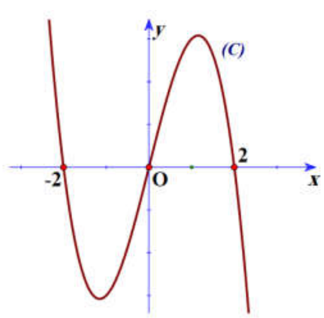
Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{f(x)-1}$

Câu 28. (Dạng $y = g(f(u(x)))$) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Tìm số tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{3}{f\left(x^3+x+1\right)-1}$.

Câu 29. (Dạng $y = g(f(x))$) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức (với hệ số thực), có đồ thị (C) như hình vẽ



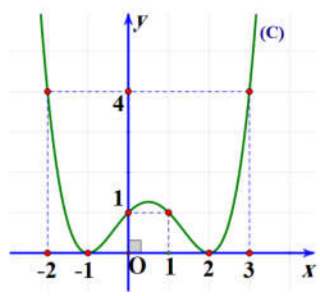
Tìm số tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{f(x)}{f(f(x))}$.

Câu 30. (Dạng $y=g(f(u(x)))$) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	4	↘	$-\infty$

Tìm số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f^2\left(x^2\right)-9}}$.

Câu 31. (Dạng $y=g(x,f(u(x)))$) Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức với hệ số thực, có đồ thị (C) như hình vẽ



Tìm số tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{(x+2)^2(x+1)}}{f(f(x)-2)}$.

4 Một số bài toán về tiệm cận chứa tham số

Câu 32. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+7}{mx-1}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $A(1;-2)$.

Câu 33. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x+m}$ có ba đường tiệm cận.

Câu 34. Tìm tham số m để đồ thì hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Câu 35. Tìm các tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+mx+4}$ có hai đường tiệm cận?

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+m}{x-1}$. Với giá trị nào của m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 8?

Câu 37. Biết đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đi qua điểm $A(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận của (C) là điểm $I(-2;3)$. Biết c là số nguyên dương và a, c là các số nguyên tố cùng nhau. Tìm các số a,b,c,d .

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x^2+3x-4}$. Giá trị nào của m để đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng?