

Mục lục

1	Mở đầu	2
2	Nội dung	3
2.1	Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$	3
2.1.1	Một số kiến thức cần nhớ	3
2.1.2	Các ví dụ	3
2.1.3	Bài tập luyện tập	7
2.2	Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và cực trị của hàm số $y = f(x)$	10
2.2.1	Một số kiến thức cần nhớ	10
2.2.2	Các ví dụ	10
2.2.3	Bài tập luyện tập	12
2.3	Một số bài tập khác	14
	Tài liệu tham khảo	19

1 Mở đầu

Trong giải tích, đạo hàm là một công cụ mạnh để giải quyết rất nhiều bài toán. Giữa hàm số $f(x)$ và đạo hàm của nó $f'(x)$ có nhiều mối liên hệ chặt chẽ. Diễn hình là sự đồng biến nghịch biến, cực trị. Đạo hàm của một hàm số ngoài việc biểu diễn dưới dạng các công thức thì nó còn được thể hiện thông qua đồ thị. Việc dựa vào đồ thị của $f'(x)$ để tìm ra được các tính chất của hàm số $f(x)$ đưa đến cho chúng ta những điều thú vị cũng như những bài toán hay.

Trong các đề thi hiện nay, xuất hiện nhiều bài toán có giả thiết là cho đồ thị của hàm số $f'(x)$ và yêu cầu chỉ ra các tính chất về sự biến thiên cũng như cực trị và một số tính chất khác của hàm số $f(x)$. Một yêu cầu mặc dù không phải mới mẻ nhưng giống như hầu hết các bài toán khác nếu học sinh không nắm vững các kiến thức liên quan và rèn luyện thường xuyên thì nó trở thành một yêu cầu khó.

2 Nội dung

2.1 Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$

2.1.1 Một số kiến thức cần nhớ

Định lý:¹

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{K}$.

- a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{K}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến (tăng) trên $\mathbb{K}$.
- b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{K}$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{K}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta nhận thấy:

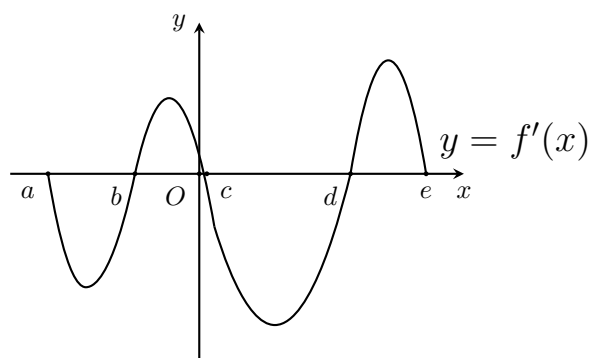
- a) $f'(x) > 0$ thì x thuộc khoảng tương ứng với phần đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.
- b) $f'(x) < 0$ thì x thuộc khoảng tương ứng với phần đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành.

Từ đó ta có kết luận:

- a) x thuộc khoảng tương ứng với phần đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành thì trong khoảng đó hàm số $f(x)$ đồng biến (tăng).
- b) x thuộc khoảng tương ứng với phần đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành thì trong khoảng đó hàm số $f(x)$ nghịch biến (giảm).

2.1.2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a; e]$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau đây



¹Trang 6, sách giáo khoa Giải tích 12 - NXB Giáo dục.

Hãy chỉ ra các khoảng đồng biến, nghịch biến và lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; e)$.

Lời giải.

Trên các khoảng $(a; b)$ và $(c; d)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành, tức là $f'(x) < 0$ nên trên hai khoảng này hàm số $y = f(x)$ nghịch biến.

Trên các khoảng $(b; c)$ và $(d; e)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên trục hoành, tức là $f'(x) > 0$ nên trên hai khoảng này hàm số $y = f(x)$ đồng biến.

Nói một cách ngắn gọn, dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có thể biết được dấu của $f'(x)$ để từ đó kết luận được sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

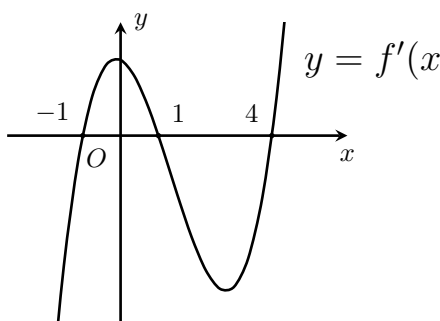
Trên đoạn $[a; e]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a, x = b, x = c, x = d, x = e$. Ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; e]$ như sau:

x	a		b		c		d		e
$f'(x)$	0	–	0	+	0	–	0	+	0
$f(x)$	$f(a)$		$f(b)$		$f(c)$		$f(d)$		$f(e)$

Nhận xét:

Khi dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có thể biết được dấu của $f'(x)$ và những điểm mà tại đó $f'(x) = 0$. Điều này giúp ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Trong nhiều trường hợp, bảng biến thiên cho ta cái nhìn trực quan hơn về hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 2 (Đề tham khảo thi THPT Quốc gia 2018 - Bộ GD và ĐT). Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau



Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

(A) $(1; 3)$.

(B) $(2; +\infty)$.

(C) $(-2; 1)$.

(D) $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$.

Đặt $g(x) = f(2 - x)$, ta có: $g'(x) = (2 - x)' \cdot f'(2 - x) = -f'(2 - x)$.

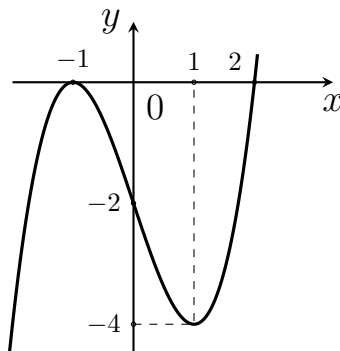
Để hàm số $g(x) = f(2 - x)$ đồng biến thì

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(2 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < -1 \\ 1 < 2 - x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

Ví dụ 3 (HK1 chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị 17 - 18). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho ở hình sau



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- (A) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.
- (B) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.
- (C) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.
- (D) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có:

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$ và $x \neq 1$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -1$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 2)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta thấy } g'(x) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 & (1) \\ x^2 - 2 < 2 & (2) \\ x^2 - 2 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \\ \text{Ta thấy } g'(x) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2 - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2 < 2 \\ x^2 - 2 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 & (3) \\ x \neq 1 \\ x < 0 & (4) \\ x^2 - 2 > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ (1) ta thấy phương án A đúng.

Từ (4) ta thấy phương án C đúng.

Từ (2) ta thấy phương án B sai.

Từ (3) ta thấy phương án D đúng vì $x = 1$ là một nghiệm của $g'(x) = 0$.

Cách giải khác:

Ta có $g'(x) = 2x.f'(x^2 - 2)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 2 \\ x^2 - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{cases}$$

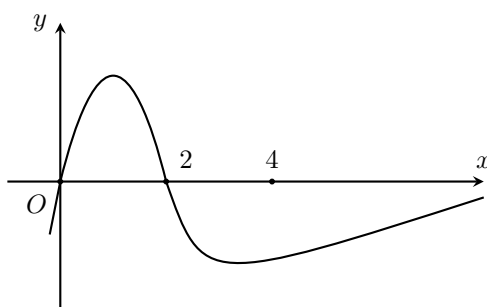
Mặt khác, $f'(x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$		
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$f'(x^2-2)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án **B**

Ví dụ 4 (HSG tỉnh 12, 2017 - 2018 - Sở GD và ĐT Hà Tĩnh). Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$; đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây và $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Hỏi trong các giá trị $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$ giá trị nào là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$?



Lời giải.

Trước hết, dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có:

- Trên khoảng $(0; 2)$ hàm số đồng biến $\Rightarrow f(0) < f(2)$ và $f(2) > f(1)$ (*).
- Trên khoảng $(2; 4)$ hàm số nghịch biến $\Rightarrow f(2) > f(4)$ và $f(2) > f(3)$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ chỉ có thể là $f(0)$ hoặc $f(4)$.

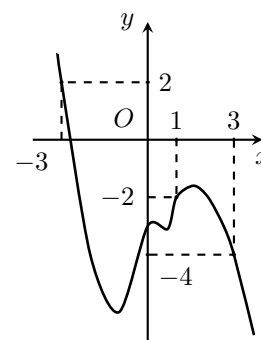
Mặt khác, từ giả thiết

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) - 2f(2) &= f(4) - f(3) \\ \Rightarrow f(0) - f(4) &= 2f(2) - f(1) - f(3) \\ &= [f(2) - f(1)] + [f(2) - f(3)] > 0 \text{ (do (*) và (**))} \\ \Rightarrow f(0) &> f(4) \end{aligned}$$

Vậy trên đoạn $[0; 4]$ thì $f(4)$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 5.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 + x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- Ⓐ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
- Ⓑ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.
- Ⓒ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.
- Ⓓ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

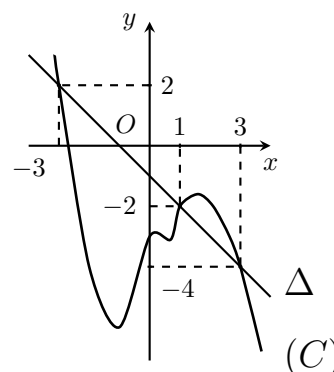
Lời giải.

Vẽ đường thẳng $\Delta : y = -x - 1$ đi qua các điểm có tọa độ $(-3; 2), (1; -2), (3; -3)$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) + x + 1 = f'(x) - (-x - 1)$.

- Trên khoảng $(-3; 1)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $y = -x - 1$ nên $f'(x) < -x - 1 \Rightarrow g'(x) < 0$. Vậy trên khoảng $(-3; 1)$ hàm số $g(x)$ nghịch biến.
- Trên khoảng $(1; 3)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = -x - 1$ nên $f'(x) > -x - 1 \Rightarrow g'(x) > 0$. Vậy trên khoảng $(1; 3)$ hàm số $g(x)$ đồng biến.

Chọn đáp án Ⓐ



2.1.3 Bài tập luyện tập

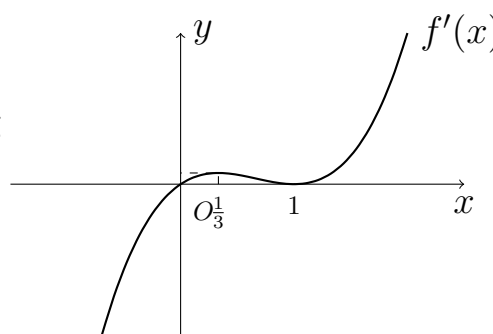
Bài 1 (Đề khảo sát kiến thức THPT, Sở Vĩnh Phúc 2018).

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $f'(x)$.

Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- Ⓐ $(0; +\infty)$.
- Ⓑ $(\frac{1}{3}; 1)$.
- Ⓒ $(-\infty; \frac{1}{3})$.
- Ⓓ $(-\infty; 0)$.



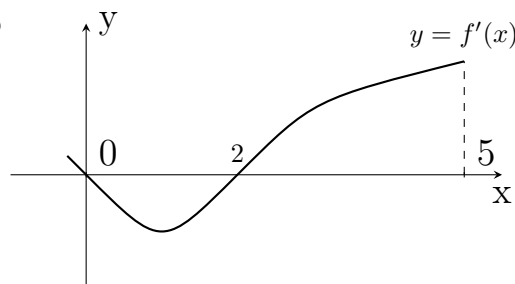
Hướng dẫn, Đáp án:

Chọn đáp án **(D)**

Bài 2 (Giữa HK1 - THPT Ba Đình - Thanh Hóa 2017 - 2018).

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $y = f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0; 5]$.

- (A) $f(1), f(5)$. (B) $f(2), f(0)$.
 (C) $f(2), f(5)$. (D) $f(0), f(5)$.



Hướng dẫn, Đáp án:

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	2	3	5
y'	—	0	+	+
y	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(5)$

Suy ra $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$.

Ta lại có

$$f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$$

mà

$$f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) > f(0).$$

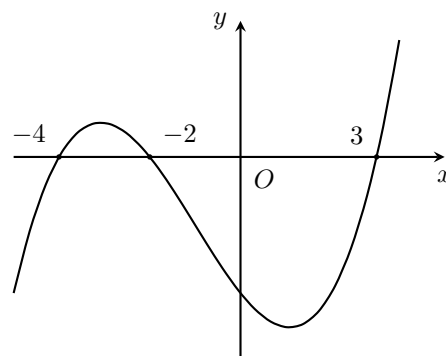
Vậy $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Chọn đáp án **(C)**

Bài 3 (Đề KT HK1 Sở GD Kiên Giang 2017).

Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của $f'(x)$ như hình sau. Chọn phát biểu **đúng** khi nói về hàm số $y = f(x)$.

- (A) Hàm số có $f(x)$ có 2 điểm cực trị.
 (B) Giá trị của $f(0)$ lớn hơn giá trị của $f(3)$.
 (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.
 (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.



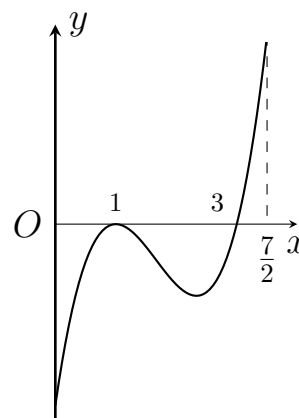
Hướng dẫn, Đáp án:

Chọn đáp án **(B)**

Bài 4 (Đề HK1, T12, Nguyễn Trãi, Hà Nội 2017).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$, biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

- (A) $x_0 = 3$. (B) $x_0 = 0$. (C) $x_0 = 1$. (D) $x_0 = 2$.



Hướng dẫn, Đáp án:

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	0	1	3	$\frac{7}{2}$		
$f'(x)$		−	0	−	0	+
$f(x)$	$f(0)$				$f(3)$	$f\left(\frac{7}{2}\right)$

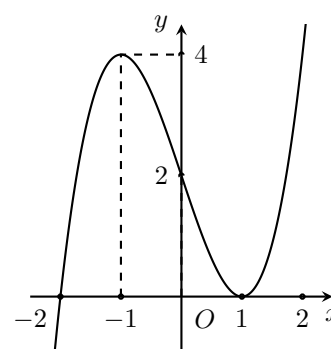
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại $x_0 = 3$.

Chọn đáp án **(A)**

Bài 5 (HK1, Sở Bến Tre, 2018).

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$ ($a \neq 0$). Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây **sai**?

- (A) Trên khoảng $(-2; 1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.
 (B) Hàm số $f(x)$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 2.
 (C) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 (D) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.



Hướng dẫn, Đáp án:

Chọn đáp án **(D)**

2.2 Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và cực trị của hàm số $y = f(x)$

2.2.1 Một số kiến thức cần nhớ

Ta nhắc lại kết quả:²

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Từ đó ta suy ra, nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 thì đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(x_0; 0)$.

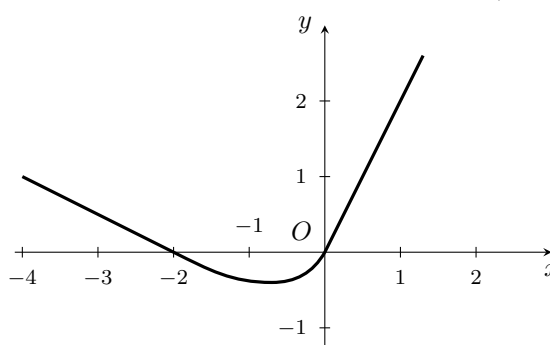
Ngược lại, nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm tại x_0 và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm $(x_0; 0)$ và đồng thời $f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Ngoài ra nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực đại và nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu.

2.2.2 Các ví dụ

Ví dụ 1 (Đề thi thử lần 1, 2017 - 2018, Lương Văn Tụy, Ninh Bình).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?



- (A) f đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- (B) f đạt cực tiểu tại $x = -2$.
- (C) f đạt cực đại tại $x = -2$.
- (D) Cực tiểu của f nhỏ hơn cực đại.

Lời giải:

Theo giả thiết $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua -2 nên $x = -2$ là điểm cực đại của hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua 0 nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$f(-2)$ $f(0)$				

Từ đó ta thấy cực tiểu của $f(x)$ nhỏ hơn cực đại của nó.

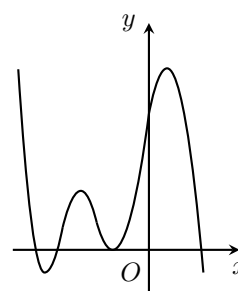
Chọn đáp án (B)

Ví dụ 2 (Thi thử lần 1, Kiến An, Hải Phòng 2018).

²Trang 14, sách giáo khoa Giải tích 12 - NXB Giáo dục.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

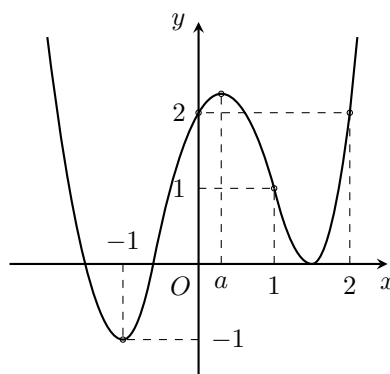


Lời giải:

Ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm nhưng chỉ có 3 điểm mà khi đi qua đó $f'(x)$ đổi dấu. Nên hàm số $y = f(x)$ có ba cực trị.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 3 (Lần 1, THPT Cẩm Xuyên, 2017 - 2018). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- (A) $x = 0$. (B) $x = 1$. (C) $x = a$. (D) $x = 2$.

Lời giải:

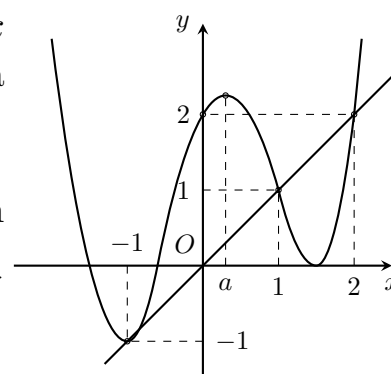
Trước hết ta có $g'(x) = f'(x) - x$. Vẽ đường thẳng $y = x$ đi qua các điểm $(-1; 1)$, $(1; 1)$, $(2; 2)$. Quan sát đồ thị ta thấy:

- Trên khoảng $(-\frac{1}{2}; 1)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = x$ nên $g'(x) = f'(x) - x > 0$.

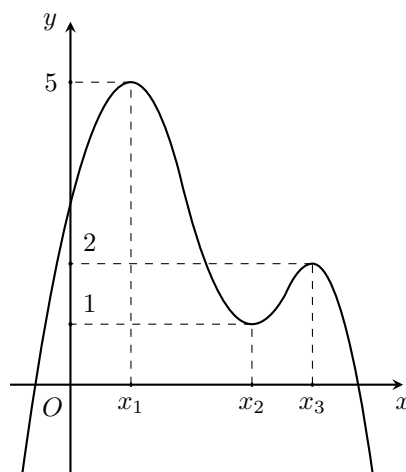
- Trên khoảng $(1; 2)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $y = x$ nên $g'(x) = f'(x) - x < 0$.

Như vậy $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua điểm $x = 1$ nên tại đó hàm số $g(x)$ đạt cực đại.

Chọn đáp án (B)



Ví dụ 4 (Đề KSCL HK1, sở Thái Bình 2017 -2018). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y = f(x) + \frac{2017 - 2018x}{2017}$ có số điểm cực trị là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải:

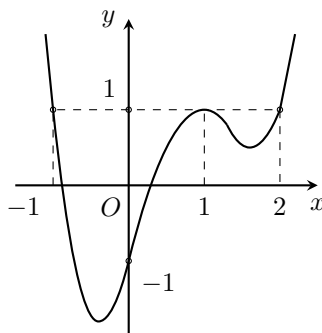
Ta có: $y' = f'(x) - \frac{2018}{2017}$. Khi đó: $y' = 0 \Rightarrow f'(x) - \frac{2018}{2017} = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2018}{2017}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y' = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A)

2.2.3 Bài tập luyện tập

Bài 1 (Lần 1, THPT Cẩm Xuyên, 2017 - 2018). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

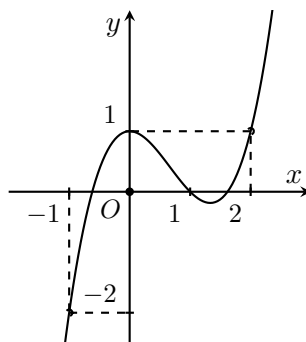
(A) $x = -1$. (B) $x = 2$. (C) $x = 0$. (D) $x = 1$.

Hướng dẫn, Đáp án:

Chọn đáp án (A)

Bài 2 (Chuyên Bắc Ninh, lần 2, 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào trong các điểm sau?

(A) $x = -1$. (B) $x = 1$. (C) $x = 0$. (D) $x = 2$.



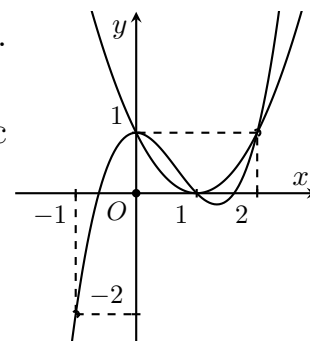
Hướng dẫn, Đáp án:

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1 = f'(x) - (x-1)^2, \forall x \in (-1; 2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x-1)^2.$$

Dựa vào đồ thị bên ta thấy tại $x = 1$ thì $f'(x) = (x-1)^2$, tức là $g'(1) = 0$; đồng thời dấu của $g'(x)$ đổi từ dương sang âm.

Vậy, hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.



Chọn đáp án **B**

Bài 3 (Đề HK1, Sở GD&ĐT An Giang, 2017-2018).

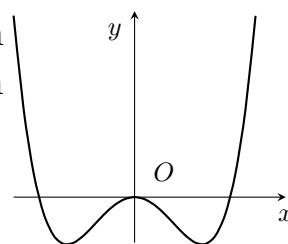
Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $\mathbb{K}$, biết đồ thị của hàm số $y' = f'(x)$ trên $\mathbb{K}$ như hình vẽ bên. Tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{K}$.

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.



Hướng dẫn, Đáp án:

Chọn đáp án **B**

Bài 4 (Đề HK1, Sở GD và ĐT Quảng Nam 2017).

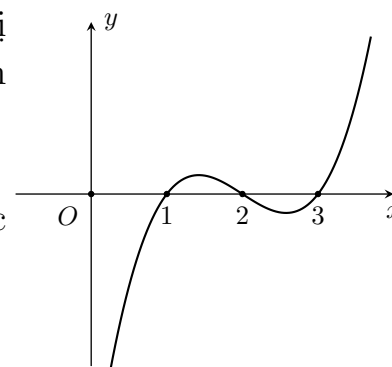
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu thuộc khoảng $(2; 3)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị.

(D) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.



Hướng dẫn, Đáp án:

Chọn đáp án **D**

Bài 5 (HK1, THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh, 2017).

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

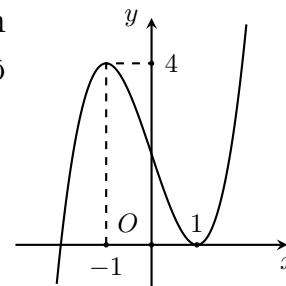
Hướng dẫn, Đáp án:

Chọn đáp án (B)

Bài 6 (Đề sát hạch lần 2, Đoàn Thượng, Hải Dương 2018).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là

- (A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.



Hướng dẫn, Đáp án:

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, suy ra phương trình $f'(x) = 2018$ có nghiệm duy nhất $x_0 > 1$.

Xét hàm số $y = f(x - 2017) - 2018x + 2019$, có $y' = f'(x - 2017) - 2018$.

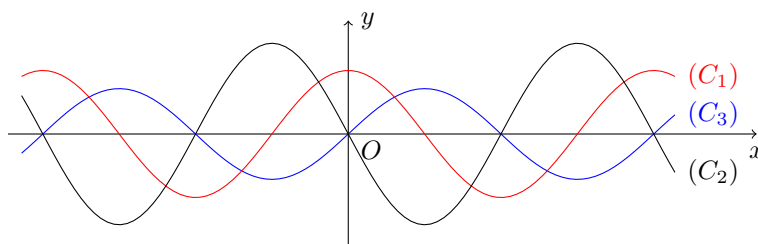
$$\begin{aligned} y' = 0 &\Rightarrow f'(x - 2017) - 2018 = 0 \\ &\Rightarrow f'(x - 2017) = 2018 \\ &\Rightarrow x - 2017 = x_0 \\ &\Rightarrow x = x_0 + 2017. \end{aligned}$$

Do $y' = 0$ có một nghiệm đơn nên $y' = f'(x - 2017) - 2018$ đổi dấu khi đi qua $x = x_0 + 2017$. Suy ra hàm số $y = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ có một điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)

2.3 Một số bài tập khác

Bài 1 (Đề khảo sát kiến thức THPT, Sở Vĩnh Phúc 2018). Cho các hàm số $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Khi đó (C_1) , (C_2) , (C_3) thứ tự là đồ thị của các hàm số

- (A) $f''(x)$, $f(x)$, $f'(x)$. (B) $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.

Ⓒ $f'(x), f(x), f''(x)$.

Ⓓ $f'(x), f''(x), f(x)$.

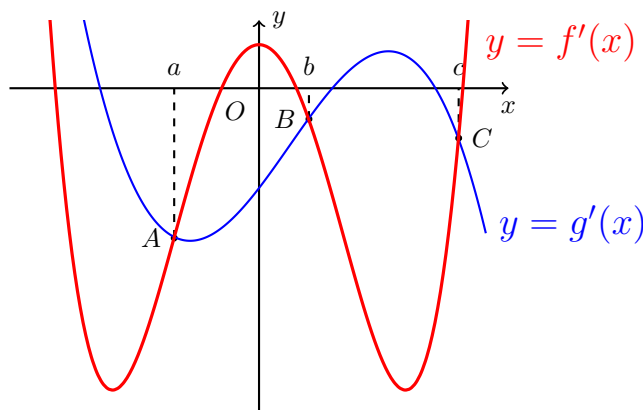
Hướng dẫn, Đáp án:

Ta nhận thấy tại các vị trí (C_1) cắt trục hoành thì (C_2) và (C_3) đạt cực trị. Tại các khoảng mà đồ thị của (C_1) nằm trên Ox thì (C_3) đồng biến và ngược lại.

Xét đường cong (C_2) ta thấy: tại các vị trí (C_2) cắt Ox thì (C_1) đạt cực trị. Tại các khoảng mà đồ thị của (C_2) nằm trên Ox thì (C_1) đồng biến và ngược lại

Chọn đáp án Ⓓ

Bài 2 (Đề TT lần 2, THPT Lương Tài 2, Bắc Ninh, năm 2017-2018). Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A, B, C của $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; c]$.



Ⓐ $\min_{[a;c]} h(x) = h(0)$.

Ⓑ $\min_{[a;c]} h(x) = h(a)$.

Ⓒ $\min_{[a;c]} h(x) = h(b)$.

Ⓓ $\min_{[a;c]} h(x) = h(c)$.

Hướng dẫn, Đáp án:

Ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \end{cases}$

Trên miền $b < x < c$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = g'(x)$ nên $f'(x) - g'(x) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0, \forall x \in (b; c)$.

Trên miền $a < x < b$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = g'(x)$ nên $f'(x) - g'(x) < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$.

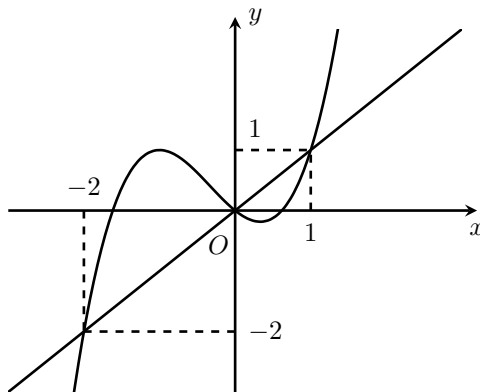
Bảng biến thiên

x	a	b	c
h'	—	0	+
h	$h(a)$	$h(b)$	$h(c)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min_{[a;c]} h(x) = h(b)$

Chọn đáp án **C**

Bài 3 (Thi thử trường Nguyễn Đăng Đạo, Bắc Ninh 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là hình vẽ sau



Đặt $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt là

- (A) $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$
 (B) $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(1) \cdot g(-2) > 0 \end{cases}$
- (C) $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) > 0 \end{cases}$
 (D) $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases}$

Hướng dẫn, Đáp án:

Từ đồ thị suy ra $g'(x) = f'(x) - x \Rightarrow g'(0) = f'(0) = 0, g'(1) = f'(1) - 1 = 0, g'(-2) = f'(-2) + 2 = 0$.

Mặt khác từ đồ thị suy ra $f'(x) < x, \forall x \in (0; 1) \cup (-\infty; -2)$ và $f'(x) > x, \forall x \in (1; +\infty) \cup (-2; 0)$.

Bảng biến thiên

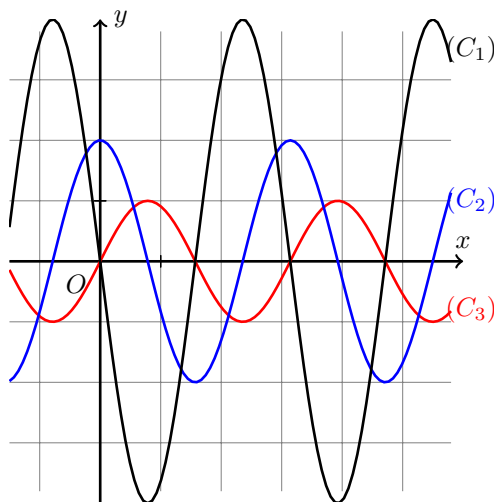
x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$g(-2)$	$g(0)$	$g(1)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt

trục hoành tại 4 điểm phân biệt là $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(1) \cdot g(-2) > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)**

Bài 4 (Lần 1, Chuyên Hạ Long, Quảng Ninh 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một $f'(x)$ và đạo hàm cấp hai $f''(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ là một trong các đường cong (C_1) , (C_2) , (C_3) ở hình vẽ sau



Hỏi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ lần lượt theo thứ tự nào dưới đây?

(A) (C_2) , (C_1) , (C_3) .

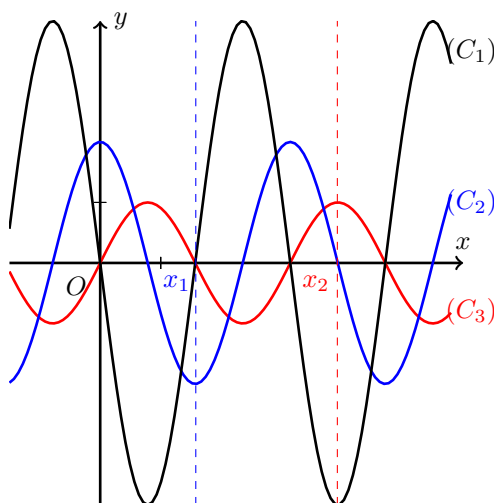
(B) (C_1) , (C_2) , (C_3) .

(C) (C_3) , (C_2) , (C_1) .

(D) (C_3) , (C_1) , (C_2) .

Hướng dẫn, Đáp án:

- Tại x_1 (C_2) đạt cực tiểu và (C_1) có giá trị bằng 0. Hơn nữa, khi qua x_1 , (C_1) đổi dấu từ âm sang dương. Nên (C_3) là đạo hàm của (C_2) .
- Tại x_2 (C_3) đạt cực đại và (C_2) có giá trị bằng 0. Hơn nữa, khi qua x_2 , (C_2) đổi dấu từ dương sang âm. Nên (C_2) là đạo hàm của (C_3) .



Chọn đáp án **(C)**

Bài 5 (Lần 1-Tỉnh Gia 3 - Thanh Hóa).

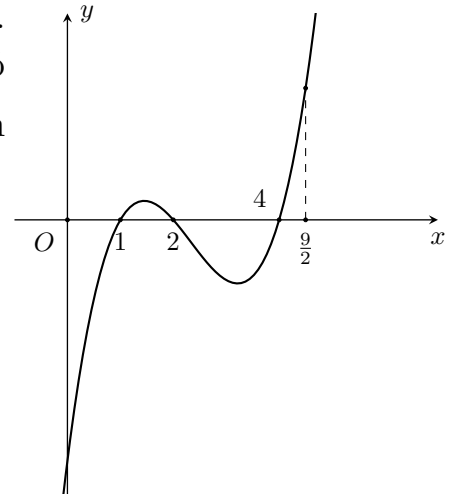
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{9}{2}\right]$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $M = f\left(\frac{9}{2}\right); m = f(4).$

Ⓑ $M = f(0); m = f(4).$

Ⓒ $M = f(2); m = f(1).$

Ⓓ $M = f\left(\frac{9}{2}\right); m = f(1).$



Hướng dẫn, Đáp án:

Chọn đáp án Ⓑ

Tài liệu

- [1] *Sách giáo khoa Giải tích 12*, Nxb Giáo dục.
- [2] *Sách bài tập Giải tích 12*, Nxb Giáo dục.
- [3] *Đề thi THPT QG năm 2017, Đề tham khảo thi THPT QG năm 2018* - Bộ GD và DT.
- [4] *Đề thi Học kì và thi thử của các trường THPT trên cả nước năm 2017, 2018*.
- [5] Một số nội dung khác tham khảo từ bạn bè, đồng nghiệp và từ Internet.