SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2023-2024
ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (4,0 điểm).

a) Cho hai dãy số $(x_n),(y_n)$, $n=1,2,...$ được xác định như sau:

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_{n+2}=(n+1)(x_{n+1}+x_n),\ y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k},\ n=1,2,...$$

Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Cho $a>2$ là một số thực cho trước và dãy số (u_n), $n=1,2,...$ được xác định như sau:

$$u_1=a,\ u_{n+1}=4-\frac{4}{u_n},\ n=1,2,...$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (4,0 điểm). Cho a,b,c,d là các số không âm thoả mãn $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=3$ (*).

a) Chứng minh rằng $a+b+c+d\ge\frac{4}{3}$.

b) Tìm số thực m nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức $3(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+\frac{4}{a+b+c+d}\le m$ đúng với mọi bộ số không âm (a,b,c,d) thoả mãn điều kiện (*).

Bài 3 (3,0 điểm). Cho n là số nguyên dương lớn hơn 1. Kí hiệu $G(n)$ là ước nguyên tố lớn nhất của n.

a) Chứng minh rằng nếu $n+1$ là lũy thừa của 2, và n chia hết cho 11 thì $G(n)>11$.

b) Hai số nguyên tố phân biệt p,q được gọi là ***xa lạ*** nếu không tồn tại số nguyên dương n lớn hơn 1 để hai tập hợp $\{p,q\}$ và $\{G(n),G(n+1)\}$ trùng nhau. Chứng minh rằng nếu $p<q$ là hai số nguyên tố lẻ sao cho $ord_p2=ord_q2$ thì 2, p là hai số ***xa lạ*** và có vô hạn cặp số nguyên tố (p,q) sao cho $p<q$ và hai số p,q là ***xa lạ***.

Bài 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn và cân tại đỉnh A. Gọi D và E lần lượt là trung điểm của CB và CA, M là trung điểm của DE. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt cạnh AB tại điểm N. Tiếp tuyến tại M và N của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt nhau tại P.

a) Đường thẳng AM cắt tiếp tuyến tại E của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM ở điểm Q. Chứng minh rằng P,D,Q thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng điểm P nằm trên đường thẳng BC.

Bài 5 (3,0 điểm). Cho số nguyên dương $n>1$, số nguyên dương k được gọi là $n-good$ nếu với mọi cách tô màu mỗi số nguyên dương $1,2,...,k$ bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ thì ta luôn chọn được n số cùng màu (không nhất thiết phân biệt) sao cho tổng của n số này cũng nằm trong tập hợp $\{1,2,...,k\}$ và cùng màu với n số vừa chọn.

a) Tìm số $2-good$ nhỏ nhất.

b) Tìm số $2024-good$ nhỏ nhất.

---------- **Hết** ----------