

CHỦ ĐỀ 03 : GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

LÍ THUYẾT

❖ Định nghĩa.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:
$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$$
- Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$.
- Số m gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:
$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$$
- Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$.

❖ Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

○ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

- **Bước 1:** Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
- **Bước 2:** Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.
 - Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn
- **Bước 1:**

Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

- **Bước 2:** Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.
- **Bước 3:** Khi đó:
$$\max_{[a,b]} f(x) = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

$$\min_{[a,b]} f(x) = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}.$$

○ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng

- **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a; b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Tính $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- **Bước 4:** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a;b)} f(x)$, $m = \min_{(a;b)} f(x)$.
- Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\begin{cases} \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$.
- Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.
- ❖ Bất đẳng thức trị tuyệt đối:
 - Cho hai số thực a, b khi đó ta có: $|a| + |b| \geq |a + b| \geq |a| - |b|$.
 - Dấu “=” về trái xảy ra khi a, b cùng dấu. Dấu “=” về phải xảy ra khi a, b trái dấu.
 - Tính chất của hàm trị tuyệt đối: $\max\{|a|, |b|\} = \frac{|a - b| + |a + b|}{2}$.
- ❖ Phương pháp chung để giải các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.
 - **Bước 1:** Xét hàm số $y = f(x)$ trên $[a, b]$.
 Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
 Giải phương trình $f'(x) = 0$ và tìm các nghiệm a_i thuộc $[a, b]$.
 - **Bước 2:** Giải phương trình $f(x) = 0$ và tìm các nghiệm b_j thuộc $[a, b]$.
 - **Bước 3:** Tính các giá trị $|f(a)|; |f(b)|; |f(a_i)|; |f(b_j)|$. So sánh và kết luận.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị $m_1 + m_2$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. 10.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Với mọi $x \in [2;5]$ có $f'(x) = \frac{m}{2\sqrt{x-1}}$. Ta thấy dấu của $f'(x)$ phụ thuộc vào dấu của m

$\forall m \neq 0$ thì $f(x)$ đơn điệu trên $[2;5] \Rightarrow \min_{[2;5]} f(x) + \max_{[2;5]} f(x) = f(2) + f(5) = m + 2m$

Từ giả thiết ta được $m^2 - 10 = m + 2m \Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -2 \end{cases}$. Vậy $m_1 + m_2 = 3$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m + 1)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

A. -2.

B. 4.

C. -4.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y = f(x) = (x^3 - 3x + m + 1)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y' = f'(x) = 2(x^3 - 3x + m + 1)(3x^2 - 3)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ m = -x^3 + 3x - 1 = g(x) \end{cases}$

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$. Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$			1			$-\infty$

Nếu $m \in [-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0 \in [-1;1]$ sao cho $m = g(x_0)$ hay $f(x_0) = 0$. Suy ra $\min_{[-1;1]} y = 0$

, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m \notin [-3;1]$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-1;1]$.

Ta có: $\min_{[-1;1]} f(x) = \min\{f(1); f(-1)\} = \min\{(m-1)^2; (m+3)^2\}$

Trường hợp 1: $m > 1$ tức là $m+3 > m-1 > 0 \Rightarrow \min_{[-1;1]} f(x) = (m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ (TM)} \\ m = 0 \text{ (KTM)} \end{cases}$

Trường hợp 2: $m < -3$ tức là $m-1 < m+3 < 0 \Rightarrow \min_{[-1;1]} f(x) = (m+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \text{ (TM)} \\ m = -2 \text{ (KTM)} \end{cases}$

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m = 2; m = -4$, từ đó tổng tất cả các giá trị của m là -2 .

VÍ DỤ 3: Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 20 (với m là tham số). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < m \leq 2$.

B. $4 < m \leq 8$.

C. $2 < m \leq 4$.

D. $m > 8$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$\text{Ta có: } \min_{[0;3]} y = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} mx + \frac{36}{x+1} \geq 20, \forall x \in [0;3] \\ \exists x_0 \in [0;3]: mx_0 + \frac{36}{x_0+1} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{20x-16}{x(x+1)}, \forall x \in (0;3] \\ \exists x_0 \in (0;3]: m = \frac{20x_0-16}{x_0(x_0+1)} \end{cases} (*)$$

(vì $y(0) = 36 > 20$).

Xét hàm số $g(x) = \frac{20x-16}{x(x+1)}$ trên $(0;3]$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{-20x^2 + 32x + 16}{[x(x+1)]^2}; g'(x) = 0 \Rightarrow -20x^2 + 32x + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & (tm) \\ x = -\frac{2}{5} & (l) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	3
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	$-\infty$	4	$\frac{11}{3}$

Do đó, từ (*) suy ra $m = 4$. Vậy $2 < m \leq 4$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } y(0) = 36, y(3) = 3m + 9; y' = m - \frac{36}{(x+1)^2}, \forall x \in [0;3]. y'(0) = m - 36, y'(3) = m - \frac{9}{4}.$$

$$\text{Mà } y'' = \frac{72}{(x+1)^3} > 0, \forall x \in [0;3]. \text{ Bảng biến thiên}$$

x	0	3
y''		+
y'	$m - 36$	$m - \frac{9}{4}$

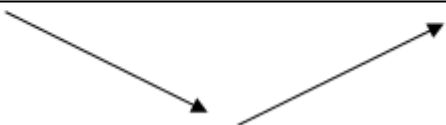
Trường hợp 1: $m \leq \frac{9}{4}$. Khi đó $y' \leq 0, \forall x \in [0; 3]$. Suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn $[0; 3]$.

Do đó, ta có $\min_{[0;3]} y = 20 \Leftrightarrow y(3) = 20 \Leftrightarrow 3m + 9 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m \geq 36$. Khi đó $y' \geq 0, \forall x \in [0; 3]$. Suy ra hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 3]$.

Do đó, ta có $\min_{[0;3]} y = y(0) = 36$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: $\frac{9}{4} < m < 36$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \frac{6}{\sqrt{m}} \in (0; 3)$.

x	0	$-1 + \frac{6}{\sqrt{m}}$	3
y'	-	0	+
y			

Do đó, ta có $\min_{[0;3]} y = 20 \Leftrightarrow y\left(-1 + \frac{6}{\sqrt{m}}\right) = 20 \Leftrightarrow -m + 12\sqrt{m} = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 & (tm) \\ m = 100 & (l) \end{cases}$.

Do đó $m = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $2 < m \leq 4$.

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y = f(x) = x^6 + ax^2 + bx + 2a + b$ với a, b là các số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu?

A. 128.

B. 243.

C. 81.

D. 696.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 6x^5 + 2ax + b$. Do hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$ nên $f'(1) = 0 \Rightarrow b = -2a - 6$

Do hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$ nên $f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^6 + ax^2 + bx + 2a + b \geq 1 + 3a + 2b, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^6 + ax^2 + (-2a - 6)x + 2a - 2a - 6 \geq 1 + 3a + 2b, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (do } b = -2a - 6)$$

$$\Leftrightarrow a(x^2 - 2x + 1) \geq -x^6 + 6x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a(x-1)^2 \geq (x-1)^2(-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5), \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Mà $\max(-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5) = -3 \Leftrightarrow x = -1$ nên $(*)$ xảy ra khi $a \geq -3$.

$$f(3) = 3a + 705 \Rightarrow \min f(3) = 696.$$

VÍ DỤ 5: Cho $y = f(x) = |x^2 - 5x + 4| + mx$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ lớn hơn 1. Tính số phần tử của S .

A. 7.

B. 8.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Vì $\min_{\mathbb{R}} f(x) > 1$ nên $f(x) = |x^2 - 5x + 4| + mx > 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Với $x \in [4; +\infty)$, ta có $f(x) = mx + x^2 - 5x + 4 > 1 \Leftrightarrow m > -x - \frac{3}{x} + 5, \forall x \geq 4$

Đặt $g(x) = -x - \frac{3}{x} + 5, \forall x \geq 4$. Ta có $g'(x) = -1 + \frac{3}{x^2} < 0, \forall x \in [4; +\infty), g(4) = \frac{1}{4}$.

Do đó $g(x) \leq g(4) = \frac{1}{4}$. Vì $m > g(x) \forall x \in [4; +\infty) \Leftrightarrow m > g(4) \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$. (1)

Tương tự, với $x \in [1; 4)$. Ta có $f(x) = -x^2 + 5x - 4 + mx > 1 \forall x \in [1; 4) \Leftrightarrow m > 1$. (2)

Với $x \in (0; 1)$. Ta có $f(x) = x^2 - 5x + 4 + mx > 1 \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m > -x - \frac{3}{x} + 5 \Leftrightarrow m \geq 1$ (3)

Với $x \in (-\infty; 0)$. Ta có $f(x) = x^2 - 5x + 4 + mx > 1 \forall x \in (-\infty; 0)$

$\Leftrightarrow m < -x - \frac{3}{x} + 5 \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m < 5 + 2\sqrt{3}$ (4)

Với $x = 0$ luôn đúng.

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có $1 < m < 5 + 2\sqrt{3}$

Vậy $S = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thỏa mãn.

VÍ DỤ 6: Tìm tất cả các giá trị thực của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{4^{\sin x} + m \cdot 6^{\sin x}}{9^{\sin x} + 4^{1+\sin x}}$ không nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

A. $m > \frac{2}{3}$.

B. $m \geq \frac{2}{3}$.

C. $m \geq \frac{13}{18}$.

D. $\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{13}{18}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \frac{4^{\sin x} + m \cdot 6^{\sin x}}{9^{\sin x} + 4^{1+\sin x}} = \frac{1 + m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\sin x}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2\sin x} + 4}$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\sin x}$ với $t \in \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$ khi đó $y = f(t) = \frac{mt + 1}{t^2 + 4}$

Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tồn tại $\max_{t \in \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]} f(t)$ (điều này luôn đúng) và $f(t) \geq \frac{1}{3}$ có nghiệm $t \in \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$.

Xét $f(t) \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow mt + 1 \geq \frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3m \geq \frac{t^2 + 1}{t}$ (1).

Đặt $g(t) = \frac{t^2 + 1}{t}$, $g'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên của hàm $g(t)$:

t	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$
g'	-	0	+
g			

Yêu cầu bài toán tương đương (1) có nghiệm hay $3m \geq g(t)$ có nghiệm $t \in \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow 3m \geq g(1) \Leftrightarrow 3m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}.$$

VÍ DỤ 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	2	4	0	$-\infty$

Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{820}{27}$.

C. $\frac{730}{27}$.

D. 198.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$

$$g'(x) = 3[f^2(x) - 1] \cdot f'(x), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f^2(x) = 1 & (2) \end{cases}.$$

Từ bảng biến thiên, ta có: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-1; 2] \\ x = 2 \in [-1; 2] \end{cases}$

Và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [-1; 2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[-1; 2] \Rightarrow f(x) \geq f(-1) = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow f^2(x) > 1, \forall x \in [-1; 2]$ nên (2) vô nghiệm.

Do đó, $g'(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

$$\text{Ta có } g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{730}{27}.$$

$$g(2) = f^3(2) - 3f(2) = (6)^3 - 3(6) = 198. \text{ Vậy } \min_{[-1; 2]} g(x) = g(-1) = \frac{730}{27}.$$

VÍ DỤ 8: Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Biết rằng hàm số $y = f(x)$ và thỏa mãn $(f(x) - x)f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $3M - m$ bằng

- A. 4. B. -28. C. -3. D. 33.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } (f(x) - x)f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - xf(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) = 4x^6 + 12x^4 + 8x^2 \Leftrightarrow 4f^2(x) - 4xf(x) + x^2 = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2$$

$$\Leftrightarrow [2f(x) - x]^2 = (2x^3 + 3x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) - x = 2x^3 + 3x \\ 2f(x) - x = -2x^3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 + 2x \\ f(x) = -x^3 - x \end{cases}$$

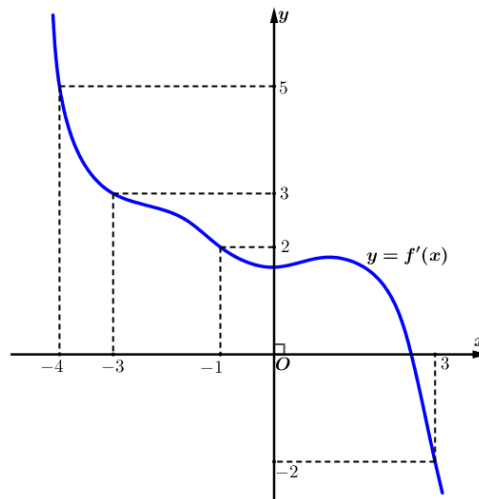
Với $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $f(x) = -x^3 - x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $f(x) = -x^3 - x$. Vì $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $M = \max_{[1;2]} f(x) = f(1) = -2$

và $m = \min_{[1;2]} f(x) = f(2) = -10$. Từ đây, ta suy ra: $3M - m = 3 \cdot (-2) + 10 = 4$.

VÍ DỤ 9: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm?



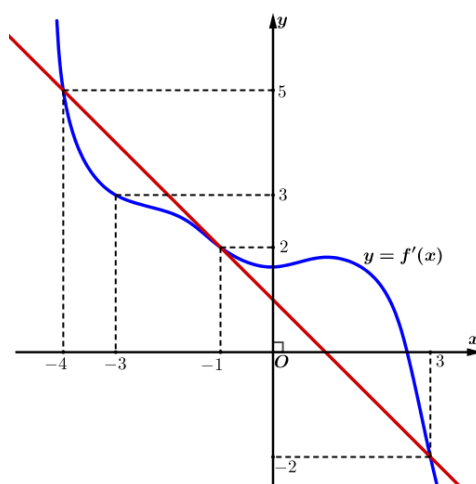
- A. $x = -3$. B. $x = -4$. C. $x = 3$. D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x).$$

$$\text{Giải phương trình: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2(1-x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in [-4; 3] \\ x = -1 \in [-4; 3] \\ x = -4 \in [-4; 3] \end{cases}$$



Bảng biến thiên:

x	-4		-1		3
$g'(x)$	0	-	0	+	0
$g(x)$					

Vậy trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -1$.

ĐỀ VDC SỐ 1**Cơ bản về GTLN-GTNN của hàm số**

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ trên khoảng $(0;3)$ là:

- A. 4. B. 2. C. 0. D. -2.

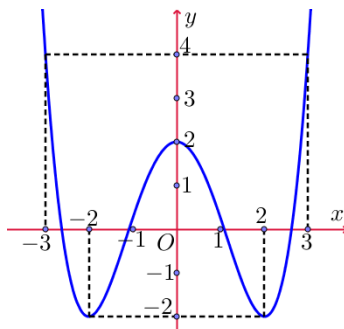
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.
 B. Hàm số có đúng một cực trị.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.
 D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$ bằng

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019$ là

- A. 2017. B. 2020. C. 2018. D. 2019.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7]$ như sau:

x	$-\infty$	-5	1	7	$+\infty$
y'			-	0	+
y			6	2	9

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\min_{[-5;7]} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7]$.
 B. $\max_{[-5;7]} f(x) = 6$ và $\min_{[-5;7]} f(x) = 2$.

C. $\max_{[-5;7]} f(x) = 9$ và $\min_{[-5;7]} f(x) = 2$.

D. $\max_{[-5;7]} f(x) = 9$ và $\min_{[-5;7]} f(x) = 6$.

Câu 6: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m

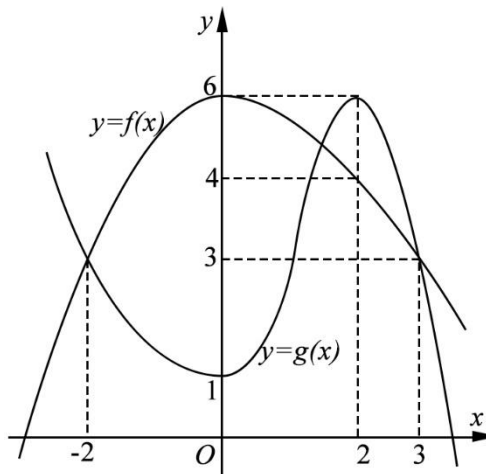
A. $m = 4$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 3$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = g(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} = m$ có nghiệm thuộc $[-2; 3]$?

A. 4.

B. 5.

C. 7.

D. 6.

Câu 8: Cho hàm số có bảng biến thiên như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		0		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$

A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập số thực bằng $-\frac{1}{6}$.

B. Giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số trên tập số thực bằng 0.

D. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 0.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1;2]} f(x) = 3$. Xét $g(x) = f(3x-1) + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. 13.

B. -7.

C. -13.

D. -1.

Câu 10: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

A. 1.

B. 3.

C. -1.

D. 7.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

- A. $M = \frac{3}{2}m$. B. $M = m + \frac{3}{2}$. C. $M = m + \frac{2}{3}$. D. $M = m + 1$.

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2x-2}$ trên khoảng $(0;1)$

- A. $\min_{(0;1)} f(x) = \frac{54+25\sqrt{5}}{20}$. B. $\min_{(0;1)} f(x) = \frac{11+5\sqrt{5}}{4}$.
C. $\min_{(0;1)} f(x) = \frac{10+5\sqrt{5}}{4}$. D. $\min_{(0;1)} f(x) = \frac{56+25\sqrt{5}}{20}$.

Câu 13: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập

$$D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Tính giá trị T của $m.M$.

- A. $T = \frac{3}{2}$. B. $T = 0$. C. $T = -\frac{3}{2}$. D. $T = \frac{1}{9}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25; \frac{11}{10}\right)$. Tìm M .

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{129}{250}$. C. $M = 0$. D. $M = \frac{1}{2}$.

Câu 15: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng:

- A. 3. B. 1. C. -1. D. 5.

Câu 16: Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

- A. Có giá trị lớn nhất là $\text{Max } y = -1$. B. Có giá trị nhỏ nhất là $\text{Min } y = -1$.
C. Có giá trị lớn nhất là $\text{Max } y = 3$. D. Có giá trị nhỏ nhất là $\text{Min } y = 3$.

Câu 17: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất.
C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

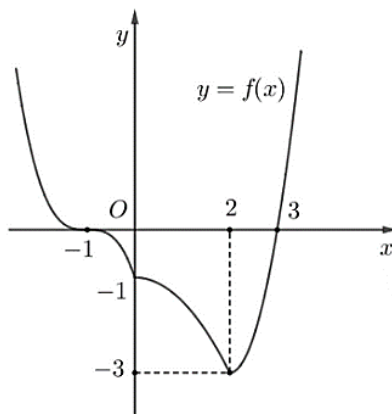
A. $(-\infty; -2017)$.

B. $(2017; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-2017; 0)$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi



A. $m < -10$.

B. $m < -5$.

C. $m < -3$.

D. $m < -2$.

Câu 20: Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5 .

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.B	4.C	5.A	6.A	7.D	8.B	9.C	10.A
11.D	12.B	13.B	14.A	15.A	16.C	17.C	18.A	19.B	20.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn B**

Tập xác định $D = [0; 4]$. Xét hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ trên khoảng $(0; 3)$

Ta có: $y' = \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}}$ có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên

x	0	2	3
y'	+	0	-
y	0	2	$\sqrt{3}$

Trên khoảng $(0; 3)$ giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 2$.

Câu 2: Chọn C

Từ bảng biến thiên, ta dễ dàng thấy được **A, B, D** sai, **C** đúng.

Câu 3: Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta thấy rằng hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ và ta có $f(x) \in [-2; 4]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nên ta có $\max_{[-2; 3]} f(x) = f(3) = 4$.

Câu 4: Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Biến đổi: $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 2019$.

Đặt $t = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow t = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow t \geq -\frac{9}{4} \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho trở thành $f(t) = t^2 + 2t + 2019 = (t+1)^2 + 2018 \geq 2018 \forall t \geq -\frac{9}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 2018 tại $t = -1 \in \left[-\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

Câu 5: Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên dễ dàng ta thấy $\min_{[-5; 7)} f(x) = 2$ khi $x = 1$.

$\max_{[-5; 7)} f(x) = 6$ là sai vì $f(x)$ sẽ nhận các giá trị $7; 8$ lớn hơn 6 khi $x \rightarrow 7$.

$\max_{[-5; 7)} f(x) = 9$ là sai vì $f(x)$ không bằng 9 mà chỉ tiến đến 9 khi $x \rightarrow 7$, ($x \neq 7$).

Câu 6: Chọn A

Ta có: $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$; $x = 2 \in (0; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
y'		0	+
y	$+\infty$	4	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(2) = 4 \Rightarrow m = 4$.

Câu 7: Chọn D

Xét hàm số $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Dựa vào đồ thị, ta thấy các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[-2; 3]$, do đó $h(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[-2; 3]$.

Ngoài ra với $x \in [-2; 3]$, dễ thấy $f(x) \leq 6$, $g(x) \geq 1$ nên $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \leq 6$, mà

$$h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{6}{1} = 6 \text{ nên } \max_{[-2; 3]} h(x) = 6.$$

Lại có $h(x) > 0$ với mọi $x \in [-2; 3]$ và $h(-2) = 1$ nên $0 < \min_{[-2; 3]} h(x) \leq 1$.

Phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} = m$ có nghiệm trên $[-2; 3]$ khi và chỉ khi $\min_{[-2; 3]} h(x) \leq m \leq \max_{[-2; 3]} h(x)$.

Từ (1), (2) và (3), kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, ta có $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. **Chọn D**

Câu 8: Chọn B

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy đạo hàm của hàm số đổi dấu từ dương sang âm qua nghiệm 0 nên hàm số đạt cực đại tại 0 và giá trị cực đại của hàm số bằng 0.

Câu 9: Chọn C

Ta có: $\max_{[0; 1]} g(x) = \max_{[0; 1]} [f(3x-1) + m] = m + \max_{[0; 1]} f(3x-1)$.

Đặt $t = 3x - 1$. Ta có hàm số $t(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [-1; 2]$.

Suy ra: $\max_{[0; 1]} f(3x-1) = \max_{[-1; 2]} f(t) = 3$. Suy ra $\max_{[0; 1]} g(x) = m + 3$.

Do đó $\max_{[0; 1]} g(x) = -10 \Leftrightarrow m + 3 = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 10: Chọn A

Đặt $\sin x = t \Rightarrow t \in (-1; 1)$ Khi đó $f'(t) = -12t^2 + 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{2}$. So sánh $f\left(\frac{1}{2}\right)$ và

$f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ta thấy GTLN là $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Câu 11: Chọn D

Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1 \Rightarrow y = f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}, f'(t) = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-1; 1] \\ t = -2 \notin [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow f(0) = 1, f(-1) = 0, f(1) = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } M = 1, m = 0$

Câu 12: Chọn B

Hàm số xác định và liên tục trên $(0; 1)$ và có $f'(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{1}{2(x-1)^2}$.

Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 6x + 4) = 0$

$\Rightarrow x = 3 - \sqrt{5}$.

Lập bảng biến thiên

x	0	$3 - \sqrt{5}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{11+5\sqrt{5}}{4}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{(0;1)} f(x) = \frac{11+5\sqrt{5}}{4}$.

Câu 13: Chọn B

$y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$. Tập xác định $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \setminus \{2\}$.

$y' = \frac{x(x-2) - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2} = \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-1}(x-2)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	+	0		0	-
$f(x)$	-1	0		0	$-\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $M = 0; m = -\sqrt{5}$. Vậy $M.m = 0$

Câu 14: Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	-25	0	1	$\frac{11}{10}$		
y'		+	0	-	0	+
y	$-\frac{33123}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{129}{250}$		

Từ bảng biến thiên ta có $M = 1$.

Câu 15: Chọn A

Ta có: $y' = -3x^2 + 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1(l) \end{cases}$.

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng 3.

Câu 16: Chọn C

Ta có $y' = -3x^2 + 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên $\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất là $\text{Max } y = 3$.

Câu 17: Chọn C

Ta có: TXĐ: $D = \mathbb{R} \quad y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			5				$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$		
		4			4			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

Câu 18: Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f''(x)$		+	0	-	0	-
$f'(x)$			3		-2018	

Đặt $t = x + 2017$.

Ta có $y = f(x + 2017) + 2018x = f(t) + 2018t - 2017 \cdot 2018 = g(t)$.

$g'(t) = f'(t) + 2018$.

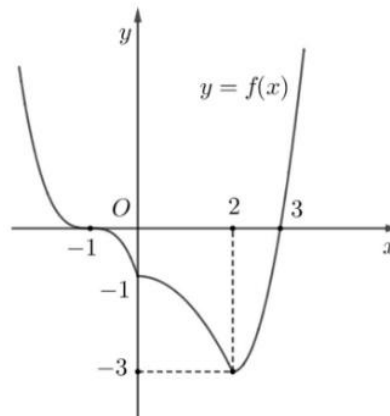
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty; 0)$ và một nghiệm kép $t = 2$.

Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty; 0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà $x_0 + 2017 \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty; -2017)$.

Câu 19: Chọn B



$2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$

$$\Leftrightarrow f(x) + \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} > m, \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m < \min_{(-1; 3)} g(x)$$

Quan sát đồ thị, ta thấy $\min_{(-1; 3)} f(x) = f(2) = -3$

Xét hàm $h(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2}, \forall x \in (-1; 3)$. Ta có: $h'(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x; h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	-1	0	2	3	
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$		0		0	
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		-2		-2	

Theo bảng biến thiên trên, ta suy ra $\min_{(-1; 3)} h(x) = h(2) = -2$

Từ và suy ra $\min_{(-1; 3)} g(x) = g(2) = -5$. Vậy $m < -5$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20: Chọn D

Xét $f(x) = x^2 - 4x + m + 3$ có $\Delta' = 1 - m$.

▪ Trường hợp 1. $m \geq 1$: $f(x) \geq 0 \forall x \Leftrightarrow y = x^2 - 8x + m + 3$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	$m-13$	$+\infty$

$\min y = -5 \Leftrightarrow m = 8.$

▪ **Trường hợp 2.** $m < 1$: $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{1 - m}$; $x_2 = 2 + \sqrt{1 - m}$.

- Nếu $x \in (x_1; x_2)$: $y = -x^2 - 3 - m$ và $\begin{cases} y(x_1) = -8 + 4\sqrt{1 - m} \\ y(x_2) = -8 - 4\sqrt{1 - m} \end{cases}$.

$\Rightarrow y(x_1) < y(x_2) \Rightarrow \min_{(x_1; x_2)} y = -8 - 4\sqrt{1 - m} < -8.$

- Nếu $x \notin (x_1; x_2)$: $y = x^2 - 8x + 3 + m$.

+) $x_2 < 4 \Leftrightarrow 1 > m > -3$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	4	$+\infty$
y	$+\infty$			$m-13$	$+\infty$

$\Rightarrow \min y = m - 13 = -5 \Leftrightarrow m = 8.$

+) $x_2 \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -3$:

x	$-\infty$	x_1	4	x_2	$+\infty$
y	$+\infty$	$-8 + 4\sqrt{1 - m}$		$-8 - 4\sqrt{1 - m}$	$+\infty$

$\Rightarrow \min y = -8 - 4\sqrt{1 - m} < -8$. Vậy có 1 giá trị của m .

DẠNG 2**Tìm max của hàm đa thức và BPT**

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x) = x^{20-m} - x^7 + 2$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.
A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 10.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x) = x^{30-m} - x^6 + 1$, với m là tham số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.
A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 3.
- Câu 3:** Cho hàm số $f(x) = (m^2 - 3m)x^{11} - mx^6 + x^3 - 3$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.
A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = (m^3 - m)x^{13} - mx^6 + x^4 + 1$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 5:** Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - (m-1)x^2 + 2mx + 1$. Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 0$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?
A. $(-3; -1)$. **B.** $(1; 3)$. **C.** $(3; 4)$. **D.** $(-1; 1)$.
- Câu 6:** Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21; 21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^3 + 4mx^2 - (2m+2)x - 2021$ đạt tại $x_0 = 2$. Số phần tử của tập S là
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 12.
- Câu 7:** Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = -x^4 - 2m.x^3 + 3m.x^2 - 2mx - 2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 = 1$. Số phần tử của tập S là:
A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0
- Câu 8:** Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-21; 21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2 - 11)x^4 + 2021$ đạt tại $x_0 = 0$. Số phần tử của tập S là:
A. 34 **B.** 42 **C.** 35 **D.** 37
- Câu 9:** Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - ax + b) + 2021$. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2021. Giá trị của biểu thức $S = 4a + b$ tương ứng bằng:
A. 5 **B.** 0 **C.** 10 **D.** 14
- Câu 10:** Cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^2 + bx + 2a + b$, với a, b là hai số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Giá trị nhỏ nhất có thể của $f(3)$ bằng bao nhiêu?
A. 128. **B.** 243. **C.** 81. **D.** 696.
- Câu 11:** Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + b - 1$. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-20; 20]$ thỏa mãn bài toán?

A. 30. B. 23. C. 22. D. 24.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = (m+n-2)x^7 + x^4 + (m+2n-1)x^3 + x^2 + (2n-1)x + 2$. Với m và n là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 2$. Giá trị của biểu thức $T = 16m + 2n$ bằng:

A. 22. B. 38. C. 46. D. 79.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2b$ với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b$ bằng:

A. 7. B. 8. C. 3. D. 9.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b + c$ bằng:

A. 1. B. 0. C. 2. D. -3.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x^6 - ax^5 + 2bx^4 + 1$ với a, b là hai tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$. Giá trị của biểu thức $T = 3a + 4b$ bằng:

A. 7. B. 8. C. 5. D. 0.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1$, với a, b, c là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng (b) . Giá trị của biểu thức $T = a + 3b + c$ bằng:

A. 3. B. 5. C. -6. D. -1.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = x^8 + ax^5 + bx^4 + cx + 2021$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a + b$ bằng:

A. -1. B. 1. C. -2. D. 3.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + 1$, với a, b là những tham số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2a - b$ bằng:

A. 4. B. 8. C. 16. D. -2.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha = \min f(x)$ Giá trị lớn nhất của α bằng:

A. 1. B. -1. C. -2. D. 0.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1$ với m là tham số thực. Biết rằng $\alpha = \min f(x)$. Khi α đạt giá trị lớn nhất thì $x = x_0; m = m_0$. Giá trị của biểu thức $(x_0 + m_0)$ bằng:

A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. -1. D. $-\frac{3}{4}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^3 + mx^2 - (m+2)x$, với m là tham số thực. Biết rằng $\beta = \max f(x)$. Khi β đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 0. B. 2. C. 1. D. -1.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = x^6 - 6a^5x - 5b$, với a và b là hai số thực không âm. Biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -5 . Giá trị lớn nhất của biểu thức ab tương ứng bằng:

- A. 1. B. $\frac{6}{7}$. C. $\frac{2}{7\sqrt{6}}$. D. $\frac{6}{7\sqrt[6]{7}}$.

Câu 23: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 4y^2 = 4$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2 + 2xy + 1}{2y^2 + 2} \text{ lần lượt là } M \text{ và } m. \text{ Giá trị của biểu thức } T = 4M - 4m \text{ bằng:}$$

- A. $\sqrt{113}$. B. 36. C. 12. D. 64.

Câu 24: Biết rằng để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx + 1$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 4 thì giá trị thực của tham số $m = \frac{a}{b}$, trong đó a, b là những số nguyên dương và phân số $m = \frac{a}{b}$ tối giản.

Giá trị của biểu thức $T = a + b$ bằng:

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 5

Câu 25: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m \in [-50; 50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - mx$ trên đoạn $[-1; 3]$ nhỏ hơn hoặc bằng 60?

- A. 53. B. 44. C. 58. D. 8

Câu 26: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m \in [-50; 50]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx$ trên đoạn $[1; 3]$ lớn hơn hoặc bằng 40?

- A. 52. B. 51. C. 49. D. 50

Câu 27: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 + mx^2$ trên đoạn $[1; 2]$ nằm trong $(6; 20)$?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 28: Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx^2$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 1 thì giá trị thực của tham số m bằng:

- A. -1. B. 1. C. -2. D. 0.

Câu 29: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - mx}{x+1} \text{ trên đoạn } [1; 4] \text{ lớn hơn hoặc bằng } 2.$$

- A. 3. B. 27. C. 28. D. 33.

Câu 30: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-30; 30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ nhỏ hơn hoặc bằng 3?

- A. 35. B. 26. C. 11. D. 31

Câu 31: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-44; 44)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 + mx - 1$ trên $[0; 3]$ nằm trong $[-2; 0]$. Số phần tử của tập S là:

- A. 41. B. 45. C. 72. D. 5

Câu 32: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 + 2mx}{x^2 + x + 1} \text{ bằng } -\frac{1}{2}. \text{ Tổng bình phương tất cả các phần tử của tập } S \text{ bằng:}$$

A. $\frac{13}{8}$.

B. 1.

C. $\frac{11}{4}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 33: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm

số $f(x) = \frac{x^2 + m}{x^2 + 2x + 2}$ lớn hơn $-\frac{1}{3}$. Số phần tử của tập S bằng:

A. 31.

B. 32.

C. 11.

D. 2

Câu 34: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = \frac{x^2 - 2mx + 4}{x^2 + 2x + 3}$ nhỏ hơn $\frac{1}{4}$. Số phần tử của tập S bằng :

A. 2.

B. 3.

C. 59.

D. 58

Câu 35: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \frac{x^2 - mx + 3}{x^2 + 2x + 2}$ bằng 2. Tổng bình phương các phần tử của tập S bằng :

A. 32.

B. 36.

C. 40.

D. 48

Câu 36: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \frac{x^2 - mx + 2}{x^2 + x + 1}$ nhỏ hơn 4. Số phần tử của tập S bằng

A. 2.

B. 10.

C. 8.

D. 9.

Câu 37: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để giá trị lớn nhất của hàm

số $f(x) = \frac{2x^2 - mx + 3}{x^2 - 2x + 2}$ lớn hơn 6. Số phần tử của tập S bằng

A. 17.

B. 16.

C. 43.

D. 35.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. C	5. D	6. B	7. C	8. C	9. D	10. D
11. B	12. D	13. A	14. B	15. B	16. C	17. A	18. A	19. B	20. D
21. A	22. D	23. A	24. A	25. B	26. C	27. D	28. D	29. C	30. A
31. B	32. A	33. A	34. D	35. C	36. D	37. D			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trường hợp 1: $m = 13 \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow \min_{\mathbb{R}} f(x) = 2$. Vậy $m = 13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m \neq 13$ (*)

Khi đó một hàm đa thức có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của

$$\text{nó phải dương} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 - m > 7 \\ 20 - m = 2k \\ m, k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 13 \\ m = 20 - 2k \\ m, k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 13 \\ \frac{7}{2} < k \leq \frac{19}{2} \\ m = 20 - 2k \\ m, k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq k \leq 9 \\ m = 20 - 2k \\ m, k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{2; 4; 6; 8; 10; 12\} \text{ (thỏa mãn điều kiện (*))}.$$

Vậy có 7 giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Câu 2: Chọn C

Trường hợp 1: $m = 24 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow \max_{\mathbb{R}} f(x) = 1$. Vậy $m = 24$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m \neq 24$ (*)

Khi đó một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của

$$\text{nó phải âm} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 30 - m \leq 6 \\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 \leq m \leq 30 \\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{24; 25; 26; 27; 28; 29; 30\}$$

Trong trường hợp này kết hợp với (*) ta có $m \in \{25; 26; 27; 28; 29; 30\}$.

Vậy $m \in \{24; 25; 26; 27; 28; 29; 30\}$. Suy ra có 7 giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Câu 3: Chọn D

Một hàm đa thức có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ bậc cao nhất phải là bậc chẵn và hệ số của nó phải

$$\text{âm, suy ra } m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Với $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3 \Rightarrow$ không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Với $m = 3 \Rightarrow f(x) = -3x^6 + x^3 - 3 \Rightarrow$ tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Vậy có duy nhất một giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Chọn C

Hàm đa thức $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi bậc cao nhất phải là bậc chẵn

$$\text{suy ra } m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

Với $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + 1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m = 0$ thỏa mãn.

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Với $m = 1 \Rightarrow f(x) = -x^6 + x^4 + 1$, không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m = 1$ không thỏa mãn.

Với $m = -1 \Rightarrow f(x) = x^6 + x^4 + 1$, tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên $m = -1$ thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị thực của m thỏa mãn bài toán.

Câu 5: Chọn D

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2(m-1)x + 2m$, $f''(x) = 12x^2 + 6x - 2(m-1)$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 0$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0 = 0$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(0) = 2m = 0 \\ f''(0) = -2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Thử lại: với $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ và $f(0) = 1$

Xét $f(x) - f(0) = x^4 + x^3 + x^2 = x^2(x^2 + x + 1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $m = 0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 6: Chọn B

$$f'(x) = 4x^3 - 6mx^2 + 28mx - 2m - 2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12mx + 8m$$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 2$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại $x_0 = 2$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(2) = 30 - 10m = 0 \\ f''(2) = 48 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Thử lại: với $m = 3 \Rightarrow f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x - 2021$ và $f(2) = -2021$

Xét $f(x) - f(2) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x = (x-2)^2(x^2 - 2x)$ không thỏa mãn điều kiện không âm, $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 7: Chọn C

Ta có: $f'(x) = -4x^3 - 6mx^2 + 6mx - 2m$; $f''(x) = -12x^2 - 12mx + 6m$

Hàm đa thức đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x_0 = 1$ thì hàm số phải đạt cực đại tại $x_0 = 1$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(1) = -4 - 2m = 0 \\ f''(1) = -12 - 6m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Thử lại:

Với $m = -2 \Rightarrow f(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2021$ và $f(1) = -2020$

Xét: $f(x) - f(1) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = -(x-1)^4 \leq 0$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $m = -2$ thỏa mãn bài toán.

Câu 8: Chọn C

Cách 1: Lập luận bản chất theo tư duy bất phương trình:

Ta có: $f(x) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2-11)x^4 + 2021 \geq f(0) = 2021$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^4 \cdot [x^2 + (m-2)x + m^2 - 11] \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x + m^2 - 11 \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-2)^2 - 4(m^2 - 11) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m \geq \frac{-2+2\sqrt{37}}{3} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-21; 21]} \begin{cases} -21 \leq m \leq -5 \\ 4 \leq m \leq 21 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Cách 2: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 6x^5 + 5(m-2)x^4 + 4(m^2-11)x^3$; $f''(x) = 30x^4 + 20(m-2)x^3 + 12(m^2-11)x^2$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$

Thử lại. Xét: $f(x) - f(0) = x^6 + (m-2)x^5 + (m^2-11)x^4 = x^4 \cdot (x^2 + (m-2)x + m^2-11) \geq 0$

$x^2 + (m-2)x + m^2-11 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-2)^2 - 4(m^2 - 11) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m \geq \frac{-2+2\sqrt{37}}{3} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-21; 21]} \begin{cases} -21 \leq m \leq -5 \\ 4 \leq m \leq 21 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 35 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 9: Chọn D

Cách 1: Áp dụng kiến thức GTLN và GTNN hàm đa thức trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = (2x-3)(x^2-ax+b) + (x^2-3x+2)(2x-a)$

$f''(x) = 2(x^2-ax+b) + (2x-3)(2x-a) + (2x-3)(2x-a) + 2(x^2-3x+2)$

Hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = 1$ thì hàm số phải đạt cực tiểu tại x_0 : $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) \geq 0 \end{cases}$

Nhận thấy rằng $\min f(x) = 2021 = f(1) = f(2)$. Tức là hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1; x = 2$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} f'(1) = a-b-1 = 0 \\ f'(2) = 4-2a+b = 0 \\ f''(1) = 2b-2 \geq 0 \\ f''(2) = 16-6a+2b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $a = 3; b = 2 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x^2-3x+2) + 2021 = (x-1)^2(x-2)^2 + 2021 \geq 2021$
(TM)

Suy ra $a = 3; b = 2$ thỏa mãn. Suy ra: $4a + b = 14$.

Cách 2: Theo cách tư duy bất phương trình:

Ta có $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2-ax+b) + 2021 \geq 2021 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2-ax+b) \geq 0$ với $\forall x$

$$\text{Suy ra: } (x^2-ax+b)|_{x=1; x=2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-a+b = 0 \\ 4-2a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $a = 3, b = 2$ thỏa mãn. Suy ra: $4a + b = 14$.

Câu 10: Chọn D

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Có đạo hàm $f'(x) = 6x^5 + 2ax + b$; $f''(x) = 30x^4 + 2a$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$, suy ra hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x_0 = 1$. Suy ra:

$$\begin{cases} f'(1) = 6 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 30 + 2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 6 \\ a \geq -15 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $\begin{cases} b = -2a - 6 \\ a \geq -15 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^6 + ax^2 - 2(a+3)x - 6$ và $f(1) = -a - 11$

$$f(x) - f(1) = x^6 + ax^2 - 2(a+3)x + a + 5 = (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5) \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5 \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

Xét hàm số: $g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5$ có:

$$g'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4 = (x+1)(4x^2 + 2x + 4)$$

Khảo sát nhanh hàm số: $y = g(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$a+3$	$+\infty$

Để $g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + a + 5 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $a + 3 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -3$

$$\text{Có } f(3) = 11a + 4b + 729 = 11a + 4(-2a - 6) + 729 = 3a + 705 \geq 3 \cdot (-3) + 705 = 696$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(3)$ là 696.

Câu 11: Chọn B

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 12x^2 + 6x + 2a$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$, thì:

$$\begin{cases} f'(1) = 2a + b + 7 = 0 \\ f''(1) = 2a + 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 7 \\ a \geq -9 \end{cases}$$

Thử lại: Xét $\begin{cases} b = -2a - 7 \\ a \geq -9 \end{cases}$ suy ra $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + (-2a - 7)x - 2a - 8$ và $f(1) = -3a - 13$

$$\text{Xét } f(x) - f(1) = x^4 + x^3 + ax^2 + (-2a - 7)x + a + 5 = (x-1)^2(x^2 + 3x + a + 5) \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + a + 5 \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 3^2 - 4(a+5) \leq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{11}{4} \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}; a \in [-20; 20]} -2 \leq a \leq 20$$

Vậy có tất cả 23 giá trị a nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 12: Chọn D

Điều kiện để hàm số tồn tại giá trị nhỏ nhất là: $m + n - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 - n$.

$$f(x) = x^4 + (n+1)x^3 + x^2 + (2n-1)x + 2.$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3(n+1)x^2 + 2x + 2n-1; f''(x) = 12x^2 + 6(n+1)x + 2$$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 2$, thì:

$$\begin{cases} f'(2) = 2n + 47 = 0 \\ f''(2) = 62 + 12n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = -\frac{47}{14}.$$

Thử lại: Thay $n = -\frac{47}{14}$ vào ta được

$$f(x) - f(2) = x^4 - \frac{33}{14}x^3 + x^2 - \frac{54}{7}x + \frac{100}{7} = (x-2)^2 \left(x^2 + \frac{23}{14}x + \frac{25}{7}\right) \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suy ra } n = -\frac{47}{14}; m = 2 - n = \frac{75}{14} \Rightarrow T = 2n + 3m = 79.$$

Câu 13: Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 4bx + 2c; f''(x) = 12x^2 + 6ax + 4b.$$

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(1) = f(2) \\ f'(1) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f''(1) \geq 0 \\ f''(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a + 6b + 2c = -15 \\ 3a + 4b + 2c = -4 \\ 12a + 8b + 2c = -32 \\ 12 + 6a + 4b \geq 0 \\ 48 + 12a + 4b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = \frac{13}{2} \\ c = -6 \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a = -6; b = \frac{13}{2}; c = -6$ vào ta được $f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 13$ và $f(1) = 9$.

$$\text{Xét } f(x) - f(1) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x-1)^2(x-2)^2 \geq 0 \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Vậy } T = a + 2b = 7.$$

Câu 14: Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c; f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b.$$

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(0) = f(1) \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(0) \geq 0 \\ f''(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = -4 \\ 2b \geq 0 \\ 12 + 6a + 2b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Thử lại, thay $a = -2; b = 1; c = 0$ vào ta được $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ và $f(0) = 1$.

$$\text{Xét } f(x) - f(0) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x-1)^2 \geq 0 \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Vậy } T = a + 2b + c = 0.$$

Câu 15: Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 6x^5 - 5ax^4 + 8bx^3; f''(x) = 30x^4 - 20ax^3 + 24bx^2.$$

Để hàm đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$, thì phải có:

$$\begin{cases} f(0) = f(1) \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(0) \geq 0 \\ f''(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = -1 \\ 0 = 0 \\ -5a + 8b = -6 \\ 0 \geq 0 \\ 30 - 20a + 24b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Thử lại, thay $a = 2; b = \frac{1}{2}$ vào ta được $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + 1$ và $f(0) = 1$.

Xét $f(x) - f(1) = x^6 - 2x^5 + x^4 = x^4(x-1)^2 \geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $T = 3a + 4b = 8$.

Câu 16: Chọn C

Dễ thấy: $\frac{f(-1) + f(1)}{2} = b$

Ta có $\begin{cases} \min f(x) = b \leq f(-1) \\ \min f(x) = b \leq f(1) \end{cases} \Rightarrow b \leq \frac{f(-1) + f(1)}{2}$

Bài toán cho dấu "=" xảy ra nên $\min f(x) = f(-1) = f(1)$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = -1, x_2 = 1$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(-1) = f(1) \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(-1) \geq 0 \\ f''(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c = a + b + c \\ -4 + 3a - 2b + c = 0 \\ 4 + 3a + 2b + c = 0 \\ 12 - 6a + 2b \geq 0 \\ 12 + 6a + 2b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a = 0, b = -2, c = 0$ vào ta được $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$, $f(1) = b = -2$

Xét $f(x) - b = x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2 \geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $a = 0, b = -2, c = 0 \Rightarrow T = a + 3b + c = -6$.

Câu 17: Chọn A

Ta có $\min f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 2021, \forall x \in \mathbb{R}$

Dễ thấy để xuất hiện $(a+b)$ thì ta xét $f(1) = 1 + a + b + 2021 \geq f(0) = 2021 \Leftrightarrow a + b \geq -1$.

Dấu "=" xảy ra khi $f(1) = f(0)$ tức là khi đó $\min f(x) = f(0) = f(1)$

Ta có $f'(x) = 8x^7 + 5ax^4 + 4bx^3$; $f''(x) = 56x^6 + 20ax^3 + 12bx^2$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = 0, x_2 = 1$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(0) = f(1) \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(0) \geq 0 \\ f''(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 0 = 0 \\ 5a + 4b = -8 \\ 0 \geq 0 \\ 56 + 20a + 12b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a = 4, b = -3$ vào ta được $f(x) = x^8 - 4x^5 + 3x^4 + 2021$, $f(0) = 2021$

Xét $f(x) - f(0) = x^8 - 4x^5 + 3x^4 = x^4(x-1)^2(x^2 + 2x + 3) \geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $a = 4, b = -3 \Rightarrow T_{\min} = (a + b)_{\min} = -1$.

Câu 18: Ta có $\min f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Để thấy đề xuất hiện $(2a - b)$ thì ta xét $f(-2) = 64 - 32a + 16b + 1 \geq f(0) = 1 \Leftrightarrow 2a - b \leq 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $f(-2) = f(0)$ tức là khi đó $\min f(x) = f(0) = f(-2)$

Ta có $f'(x) = 6x^5 + 5ax^4 + 4bx^3; f''(x) = 30x^4 + 20ax^3 + 12bx^2$

Để hàm số đa thức đạt giá trị nhỏ nhất tại đồng thời hai điểm $x_1 = 0, x_2 = -2$ thì phải có:

$$\begin{cases} f(0) = f(-2) \\ f'(0) = 0 \\ f'(-2) = 0 \\ f''(0) \geq 0 \\ f''(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 4 \\ 0 = 0 \\ 5a - 2b = 12 \\ 0 \geq 0 \\ 480 - 160a + 48b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

Thử lại, thay $a = 4, b = 4$ vào ta được $f(x) = x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 1, f(0) = 1$

Xét $f(x) - f(0) = x^6 + 4x^5 + 4x^4 = x^4(x + 2)^2 \geq 0$ thỏa mãn.

Vậy $a = 4, b = 4 \Rightarrow T_{\max} = (2a - b)_{\max} = 4$.

Câu 19: Chọn B

Ta có: $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1 = m(x^2 - x) + (x^4 - 4x^3 + x^2 + 1)$

Để thấy: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Biết rằng $\alpha = \min f(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $\begin{cases} \alpha \leq f(0) = 1 \\ \alpha \leq f(1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \leq f(1) = -1$

Ta tìm điều kiện dấu bằng xảy ra: $\alpha = \min f(x) = f(1) = -1$

Tức là ta tìm điều kiện để hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2(m+1)x - m; f''(x) = 12x^2 - 24x + 2m + 2$

$$\begin{cases} f'(1) = m - 6 = 0 \\ f''(1) = 2m - 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6$$

Thay $m = 6$ ta được:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 1; f(1) = -1$$

$$f(x) - f(1) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = (x-1)^2(x^2 - 2x + 2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy khi $m = 6$ thì $\alpha = \min f(x) = f(1) = -1$ là giá trị lớn nhất của α .

Câu 20: Chọn D

Ta có: $f(x) = x^4 - 4x^3 + (m+1)x^2 - mx + 1 = m(-x^2 + 2x + 3) + (x^4 + x^3)$

Để thấy: $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Biết rằng: $\alpha = \min f(x) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra: $\begin{cases} \alpha \leq f(-1) = 0 \\ \alpha \leq f(3) = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \leq f(-1) = 0$

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Dấu bằng xảy ra: $\alpha = \min f(x) = f(-1) = 0$ hay hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = -1$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2mx + 2m$; $f''(x) = 12x^2 + 6x - 2m$

$$\begin{cases} f'(-1) = 4m - 1 = 0 \\ f''(-1) = 6 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Thử lại: thay $m = \frac{1}{4}$ vào ta được $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$; $f(-1) = 0$

$$\text{Xét: } f(x) - f(-1) = x^4 + x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - 0 = (x+1)^2 \left(x^2 - x + \frac{3}{4} \right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy khi $m = \frac{1}{4} = m_0 \Rightarrow \alpha = \min f(x) = f(x_0) = f(-1) = 0$ là giá trị lớn nhất của α

$$\text{Suy ra } (x_0 + m_0) = -\frac{3}{4}$$

Câu 21: Chọn A

Ta có: $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x + m(x^2 - x)$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \max f(x) \geq 0$. Ta chỉ ra tồn tại m để $\max f(x) = 0$ tại $x = 0$. Khi

đó hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow m = -2$.

Thử lại với $m = -2$ thì $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 4x$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Vậy với $m = -2$ thì $\max f(x) = 0$.

Câu 22: Chọn D

Ta có $f(x) = x^6 - 6a^5x - 5b \Rightarrow f'(x) = 6x^5 - 6a^5$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-5a^6 - 5b$	$+\infty$

Theo bài ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-5 \Leftrightarrow -5a^6 - 5b = -5 \Leftrightarrow b = 1 - a^6$.

$$\text{Giả sử } h(a) = a.b = a(1 - a^6) = a - a^7 \Rightarrow h'(a) = 1 - 7a^6 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}.$$

Ta có bảng biến thiên

a	0	$\frac{1}{\sqrt[5]{7}}$	$+\infty$
$h'(a)$	+	0	-
$h(a)$	$-\infty$	$\frac{6}{7\sqrt[5]{7}}$	$+\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức ab bằng $\frac{6}{7\sqrt[5]{7}}$.

Câu 23: Chọn A

Nếu $y = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ khi đó $P = \frac{5}{2}$.

$$\text{Nếu } y \neq 0 \text{ ta có: } P = \frac{4x^2 + 8xy + 4}{8y^2 + 8} = \frac{5x^2 + 8xy + 4y^2}{2x^2 + 16y^2} = \frac{5\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 8\left(\frac{x}{y}\right) + 4}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 16}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \text{ ta được: } P = \frac{5t^2 + 8t + 4}{2t^2 + 16} \Leftrightarrow (5 - 2P)t^2 + 8t + 4 - 16P = 0 \quad (2).$$

$$\text{Nếu } P = \frac{5}{2} \text{ thì } t = \frac{9}{2}.$$

Nếu $P \neq \frac{5}{2}$ thì phương trình (2) là phương trình bậc hai.

$$\Delta = 4^2 - (5 - 2P)(4 - 16P) = 16 - (20 - 88P + 32P^2) = -32P^2 + 88P - 4$$

$$-32P^2 + 88P - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11 - \sqrt{113}}{8} \leq P \leq \frac{11 + \sqrt{113}}{8}$$

$$\Rightarrow \text{Max}P = \frac{11 + \sqrt{113}}{8} = M, \text{Min}P = \frac{11 - \sqrt{113}}{8} = m \Rightarrow T = 4M - 4m = \sqrt{113}.$$

Câu 24: Chọn A

$$\text{Ta có: } \text{Max}_{[1;2]} \{x^2 - mx + 1\} = 4 \Leftrightarrow x^3 - mx + 1 \leq 4, \forall x \in [1;2]$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x^3 - 3}{x}, \forall x \in [1;2]; m \geq \text{Max}_{[1;2]} \left\{ \frac{x^3 - 3}{x} \right\} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } m = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 5, b = 2 \Rightarrow T = a + b = 5 + 2 = 7.$$

Câu 25: Chọn B

$$\text{Ta có: } \text{Max}_{[1;2]} \{x^4 - mx\} \leq 60 \Leftrightarrow x^4 - mx + 1 \leq 60, \forall x \in [-1;3] \Leftrightarrow mx \geq x^4 - 60, \forall x \in [-1;3]$$

Với $x = 0$, thỏa mãn.

Với $x \neq 0$ ta xét

$$\begin{cases} m \in [-1; 0) \\ mx \geq x^4 - 60 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{x^4 - 60}{x}, \forall x \in [-1; 0) \Leftrightarrow m \leq \min_{[-1; 0)} \left\{ \frac{x^4 - 60}{x} \right\} \Leftrightarrow m \leq 59$$

$$\begin{cases} m \in (0; 2] \\ mx \geq x^4 - 60 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{x^4 - 60}{x}, \forall x \in (0; 2] \Leftrightarrow m \geq \min_{(0; 2]} \left\{ \frac{x^4 - 60}{x} \right\} \Leftrightarrow m \geq 7$$

$$\Leftrightarrow 7 \leq m \leq 59$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}, m \in [-50; 50] \Rightarrow m \in \{7; 8; \dots; 50\}$

Có 44 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 26: Chọn C

Ta có: $\max_{[1; 3]} \{x^3 - 3mx\} < 40, \forall x \in [1; 3]$

$$\Leftrightarrow m > \frac{x^3 - 40}{3x}, \forall x \in [1; 3] \Leftrightarrow m > \max_{[1; 3]} \left\{ \frac{x^3 - 40}{3x} \right\} = -\frac{13}{9}$$

Suy ra, để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 40 thì $m \leq -\frac{13}{9}$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}, m \in [-50; 50] \Rightarrow m \in \{-50; -49; \dots; -2\}$ có 49 số thỏa mãn.

Câu 27: Chọn D

Đặt M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 + mx^2$ trên đoạn $[1; 2]$. Ta có: $6 < M < 20$

Để $M < 20$ thì $x^3 + mx^2 < 20 \quad \forall x \in [1; 2]$.

$$\text{Từ đó suy ra: } m < \frac{20 - x^3}{x^2} \quad \forall x \in [1; 2] \Rightarrow m < \min_{[1; 2]} \frac{20 - x^3}{x^2} = 3.$$

$$\text{Tương tự để } M \leq 6 \text{ thì } x^3 + mx^2 \leq 6 \quad \forall x \in [1; 2] \Rightarrow m \leq \min_{[1; 2]} \frac{6 - x^3}{x^2} = \frac{-1}{2}.$$

Do đó để $M > 6$ thì $m > \frac{-1}{2}$. Vậy $\frac{-1}{2} < m < 3$, do đó có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 28: Chọn D

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - mx^2$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 1 thì:

$$x^3 - mx^2 \geq 1 \quad \forall x \in [1; 2] \text{ và dấu “=” phải xảy ra. Khi đó ta có: } m = \min_{[1; 2]} \frac{x^3 - 1}{x^2} = 0.$$

Câu 29: Chọn C

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - mx}{x + 1}$ trên đoạn $[1; 4]$ lớn hơn hoặc bằng 2 thì:

$$\frac{x\sqrt{x} - mx}{x + 1} \geq 2 \quad \forall x \in [1; 4] \Rightarrow mx \leq x\sqrt{x} - 2x - 2 \quad \forall x \in [1; 4]$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{x\sqrt{x} - 2x - 2}{x} \quad \forall x \in [1; 4] \Rightarrow m \leq \min_{[1; 4]} \frac{x\sqrt{x} - 2x - 2}{x}.$$

$$\text{Lại có: đặt } g(x) = \frac{x\sqrt{x} - 2x - 2}{x} \text{ thì } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} > 0 \quad \forall x \in [1; 4].$$

Do đó: $m \leq \min_{[1; 4]} \frac{x\sqrt{x} - 2x - 2}{x} = g(1) = -3$. Vậy có tất cả 28 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 30: Chọn A

Vì $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 1}$ là hàm liên tục trên $[1; 2]$ nên $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $[1; 2]$.

Ta có: $\min_{[1; 2]} f(x) \leq 3 \Leftrightarrow \exists x \in [1; 2]: \frac{x^2 + mx + 1}{x + 1} \leq 3 \Leftrightarrow \exists x \in [1; 2]: m \leq \frac{-x^2 + 3x + 2}{x} \quad (1)$

Đặt: $g(x) = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x}$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow m \leq \max_{[1; 2]} g(x) \Leftrightarrow m \leq 4$.

Như vậy có 35 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Chọn B

Vì hàm số $f(x) = x^3 + mx - 1$ là hàm liên tục trên $[0; 3]$ nên $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 3]$.

Ta có: $\min_{[0; 3]} f(x) \in [-2; 0] \Leftrightarrow -2 \leq \min_{[0; 3]} f(x) \leq 0 \quad (1)$.

Ta thấy: $f(0) = -1 < 0 \forall m$ nên $\min_{[0; 3]} f(x) \leq 0 \forall m$. Suy ra:

$(1) \Leftrightarrow -2 \leq \min_{[0; 3]} f(x) \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \forall x \in [0; 3] \Leftrightarrow x^3 + mx - 1 \geq -2 \forall x \in [0; 3]$

$\Leftrightarrow m \geq -x^2 - \frac{1}{x} \forall x \in (0; 3] \Leftrightarrow m \geq \max_{(0; 3]} \left(-x^2 - \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt{2}$

Vậy số giá trị nguyên của m thuộc $(-44; 44)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là 45.

Câu 32: Chọn A

Ta có: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2mx}{x^2 + x + 1}$ bằng $-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2} \forall x \in \mathbb{R}$ và phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ có nghiệm $\Leftrightarrow 3x^2 + (4m + 1)x + 1 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và phương trình $3x^2 + (4m + 1)x + 1 = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (4m + 1)^2 - 12 \leq 0 \\ \Delta = (4m + 1)^2 - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = (4m + 1)^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 16m^2 + 8m - 11 = 0$$

Theo định lý Vi-et, ta có phương trình $16m^2 + 8m - 11 = 0$ có hai nghiệm phân biệt m_1, m_2 thỏa

$$\text{mãn: } \begin{cases} m_1 + m_2 = -\frac{1}{2} \\ m_1 \cdot m_2 = -\frac{11}{16} \end{cases} \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 = (m_1 + m_2)^2 - 2m_1 \cdot m_2 = \frac{13}{8}.$$

Vậy tổng bình phương tất cả các phần tử của tập S bằng $\frac{13}{8}$

Câu 33: Chọn A

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì $\begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \geq \frac{c}{c'} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases}$. Dễ thấy $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ nên hàm số luôn có giá trị lớn

nhất và giá trị nhỏ nhất.

Khi đó $f(x) = \frac{x^2 + m}{x^2 + 2x + 2} \geq \min f(x) > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 3m > -x^2 - 2x - 2$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2x + 3m + 2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } \Delta' = 1 - 12m - 8 < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{7}{12} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-30; 30]} 0 \leq m \leq 30.$$

Vậy có 31 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 34: Chọn D

$$\text{Để hàm số có giá trị nhỏ nhất thì } \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \geq \frac{c}{c'} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Ta có $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} > \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{-2m}{2} > \frac{4}{3}$ nên vô nghiệm.

Trường hợp 2: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-2m}{2} \Leftrightarrow m \neq -1$. Khi đó hàm số có cả giá trị lớn nhất và giá trị

nhỏ nhất. Ta sẽ đi tìm điều kiện để $\min f(x) \geq \frac{1}{4}$

$$\text{Khi đó } f(x) = \frac{x^2 - 2mx + 4}{x^2 + 2x + 3} \geq \min f(x) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 8mx + 16 \geq x^2 + 2x + 3 \text{ đúng với mọi } x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $3x^2 - 2(4m+1)x + 13 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra } \Delta' = (4m+1)^2 - 39 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{39}}{4} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{39}}{4}$$

$$\text{Suy ra để } \min f(x) < \frac{1}{4} \text{ thì } \begin{cases} m > \frac{-1+\sqrt{39}}{4} \\ m < \frac{-1-\sqrt{39}}{4} \end{cases} \xrightarrow{m \neq -1, m \in [-30; 30], m \in \mathbb{Z}} \begin{cases} -30 \leq m \leq -2 \\ 2 \leq m \leq 30 \end{cases}$$

Có tất cả 58 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 35: Chọn C

$$\text{Để hàm số có giá trị lớn nhất thì } \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{-m}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m = -2$.

Trường hợp 2: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow m \neq -2$.

Khi đó ta tìm điều kiện để $\max f(x) = 2$.

$$\text{Mặt khác: } f(x) = \frac{x^2 - mx + 3}{x^2 + 2x + 2} \leq \max f(x) = 2 \text{ đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Phải có điều kiện dấu bằng xảy ra.

Ta suy ra $x^2 + (m+4)x + 1 \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\Delta = (m+4)^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq -2$. Kết hợp điều kiện suy ra $m = -6$.

Kết hợp cả hai trường hợp, ta suy ra $m = \{-6; -2\} \Rightarrow S = \{-6; -2\}$.

Tổng bình phương các giá trị của S bằng 40.

Câu 36: Chọn D

$$\text{Để hàm số có giá trị lớn nhất thì } \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1} = \frac{-m}{1} \leq \frac{2}{1} \\ \frac{1}{1} \neq \frac{-m}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m.$$

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{x^2 - mx + 2}{x^2 + x + 1} \leq \max f(x) < 4 \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + 2 \leq 4(x^2 + x + 1) \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 + (m+4)x + 2 \geq 0 \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (m+4)^2 - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -4 - 2\sqrt{6} \leq m \leq -4 + 2\sqrt{6}$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$$

Vậy có tất cả 9 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 37: Chọn D

$$\text{Để hàm số có giá trị lớn nhất thì } \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \leq \frac{c}{c'} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1} = \frac{-m}{-2} \leq \frac{3}{2} \\ \frac{2}{1} \neq \frac{-m}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{VN} \\ m \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -4.$$

Để tìm điều kiện của m để $\max f(x) > 6$ ta đi tìm điều kiện để $\max f(x) \leq 6$

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{2x^2 - mx + 3}{x^2 - 2x + 2} \leq \max f(x) \leq 6 \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - mx + 3 \leq 6(x^2 - 2x + 2) \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4x^2 + (m-12)x + 9 \geq 0 \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

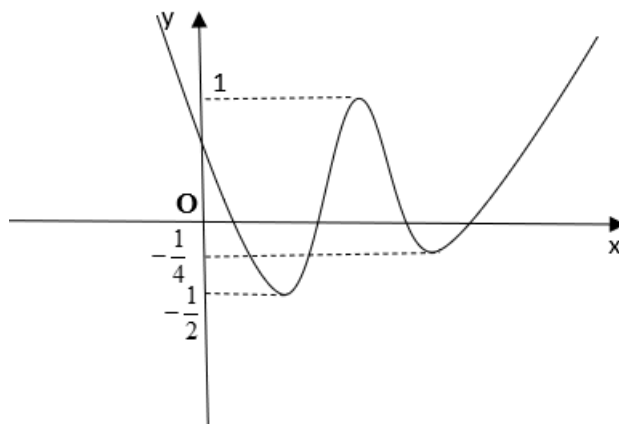
$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (m-12)^2 - 144 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 24$$

$$\text{Vậy để } \max f(x) > 6 \text{ thì } \begin{cases} m < 0 \\ m > 24 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \neq -4, m \in [-30; 30]} \begin{cases} m \neq -4 \\ -30 \leq m \leq -1 \\ 25 \leq m \leq 30 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 35 giá trị của m thỏa mãn điều kiện.

DẠNG 3**Mín max của hàm hợp**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Cho $a = |f(x) - f(x)|$, $b = -a^2 + a + \frac{3}{4}$ và $S = \frac{3}{8} \sqrt{(b+1)^2 [1+b^2 \cdot (2-b)^2]} - \frac{2}{1+b \cdot \sqrt{2-b}}$.

Có giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{m}{n}$ và $k = \frac{(m+n)^2}{|mn|}$. Khẳng định đúng là

- A. $k = 1$. B. $\frac{49}{6}$ C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{9}{4}$.

Câu 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

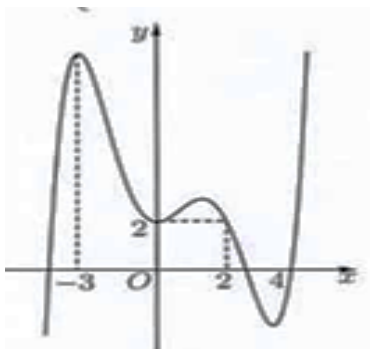
- A. -16. B. 16. C. -12. D. -2.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = (x-1)^2(x+m^2) - \frac{3}{2}m$ (m là số thực). Gọi tổng các giá trị của m sao cho

$\max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| = \frac{9}{4}$ là $S = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (với $a, b \in \mathbb{N}$). Giá trị $\frac{b}{a}$ bằng

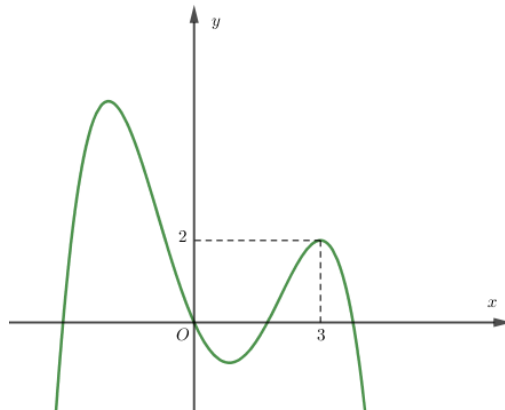
- A. $\frac{5}{18}$. B. $\frac{9}{5}$. C. $\frac{36}{5}$. D. $\frac{18}{5}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng



- A. $f(0)$. B. $f(-3)+6$. C. $f(2)-4$. D. $f(4)-8$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp các giá trị của x sao cho hàm số $g(x) = \frac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)+2}$ đạt giá trị lớn nhất

hoặc đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập S là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 7.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \left| \frac{x+m}{x+1} \right|$. Số giá trị của m thỏa mãn $\min_{[1;2]} f(x) + \max_{[1;2]} f(x) = \frac{16}{3}$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 7: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	-4	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	0	-2	5	-6	4	-5	3

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4; 4]$ để hàm số $g(x) = \left| f(x^3 + 2x) + 3f(m) \right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 8?

- A. 12. B. 11. C. 9. D. 10.

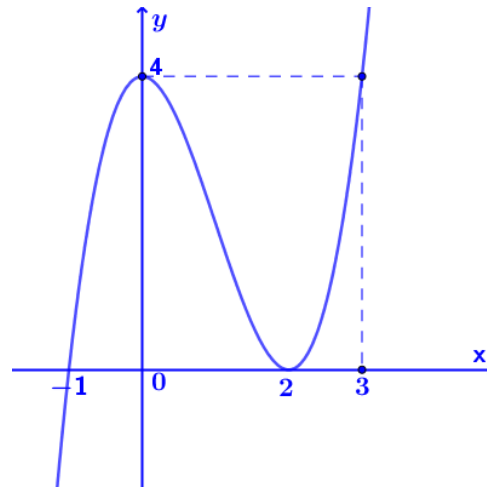
Câu 8: Cho hàm số $f(x) = 8x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

- A. 60. B. 75. C. 70. D. 65.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + |4x-2| + |6-4x|}{|2x-1| + |2x-3|}$.

Đặt $h(x) = f(g(x)) - f(3-2x+x^2) + f(2-\sqrt{4-m^2})$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $h(x)$.

Giá trị lớn nhất của M thuộc khoảng nào sau đây:



- A. $(0; 2)$. B. $(2; 4)$. C. $(4; 5)$. D. $(5; 10)$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 - mx - 4}{x + 2}$, với m là tham số. Tìm tham số m để $\min_{[-1;1]} |f(x)| > \frac{3}{4}$?

- A. $m > \frac{1}{4}$. B. $m < \frac{1}{5}$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $\frac{1}{4} < m < \frac{5}{4}$.

Câu 11: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$ là

- A. $\min P = \frac{9+3\sqrt{21}}{2}$. B. $\min P = 9 + 3\sqrt{15}$. C. $\min P = -63$. D. $\min P = -91$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = |f(2 - \cos x) + m|$ (m là tham số thực) gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $3\max_{\mathbb{R}} g(x) + \min_{\mathbb{R}} g(x) = 100$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

- A. -16 . B. 12 . C. -32 . D. -28 .

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{2x^2+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Có bao nhiêu cặp số (a, b) với $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $M^2 + m^2 \leq 5$?

- A. 51. B. 89. C. 198. D. 102.

Câu 14: Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (3-3m^2)x + 1 \right|$. Tìm $m \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 4.

- A. $m = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$. B. $m = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$. C. $m = \frac{1-\sqrt{2}}{4}$. D. $m = \frac{1-\sqrt{5}}{6}$.

Câu 15: Tìm số giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 6mx^2 + 12mx + m|$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 18.

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$[f(x) - x] \cdot f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Giá trị của $3M - m$ bằng

- A. 33. B. -3. C. 4. D. -28.

Câu 17: Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 4x$ bằng -1 .

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

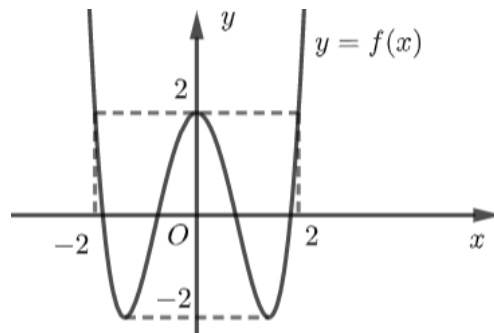
Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 12x + m|$ trên $[1; 3]$ không vượt quá 20.

- A. 33. B. 34. C. 35. D. 36.

Câu 19: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$ trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của biểu thức $a + 2b$ khi M nhỏ nhất là

- A. 3. B. -4. C. 2. D. 4.

Câu 20: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |2f(x) + m + 4| - f(x) - 3|$ trên đoạn $[-2; 2]$ không bé hơn 1?



- A. 18. B. 19. C. 20. D. 21.

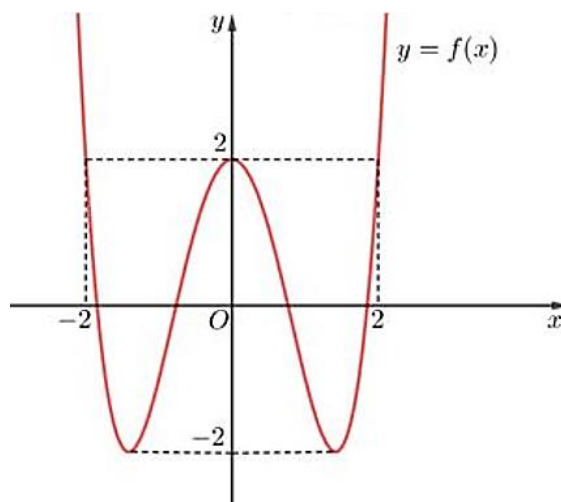
Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4ax + |x^2 - 4x + 3|$ lớn hơn 2?

- A. $a > \frac{1}{2}$ B. $a < -1$ C. $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ D. $a < 0$

Câu 22: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x) = \left| \frac{2mx - 2\sqrt{4x+8}}{x+2} \right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là a thỏa mãn $0 < a < 1$.

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

Câu 23: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1; 20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |2f(x) + m + 4| + |f(x) + 3m - 2|$ trên đoạn $[-2; 2]$ không bé hơn 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:



A. 207.

B. 209.

C. 210.

D. 212.

Câu 24: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 5x + 4| + mx$ lớn hơn 1. Số phần tử của S là:

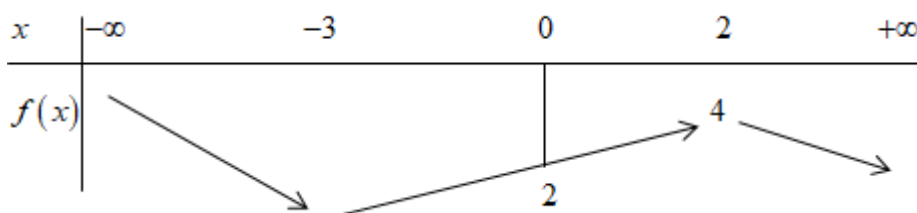
A. 7.

B. 6.

C. 8.

D. 3.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ và $f''(x) < 0, \forall x \in (0; +\infty)$.



Biết a, x thay đổi trên đoạn $[0; 2]$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{\left[(f'(x))^2 + 1 \right] \left[2f'(0) + (a-x)f'(a) + 6 \right]}{\left[f(2 - \sqrt{4-2x}) + f(x) \right]^2 \left[f(2 - \sqrt{4-2x}) + f(a) \right]} \text{ bằng } \frac{m}{n} \text{ (phân số tối giản, } m, n \in \mathbb{Z}_+).$$

Tổng $m+n$ thuộc khoảng nào dưới đây?

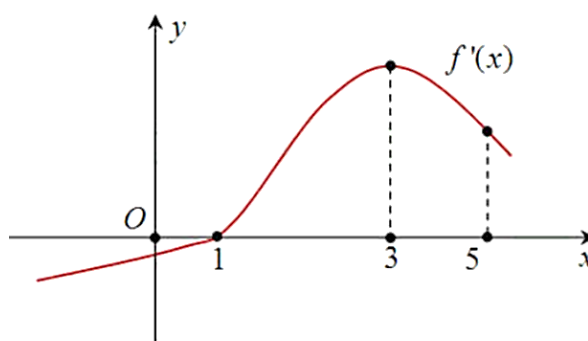
A. (20; 25).

B. (95; 145).

C. (45; 75).

D. (75; 95).

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $f(x) = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) - f(3) = f(5) - f(1)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$. Đáp án đúng là



A. $M = f(5); m = f(1)$.

B. $M = f(0); m = f(1)$.

C. $M = f(3); m = f(0)$.

D. $M = f(1); m = f(5)$.

Câu 27: Đặt $M = \max \left| \sqrt{4x - x^2} - mx \right|$. Giá trị nhỏ nhất của M là

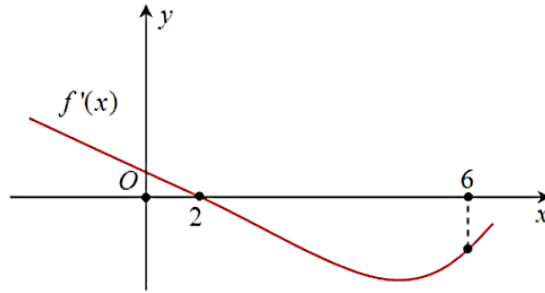
A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. 2.

Câu 28: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $2f(6) = f(0) + f(2)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$. Đáp án đúng là



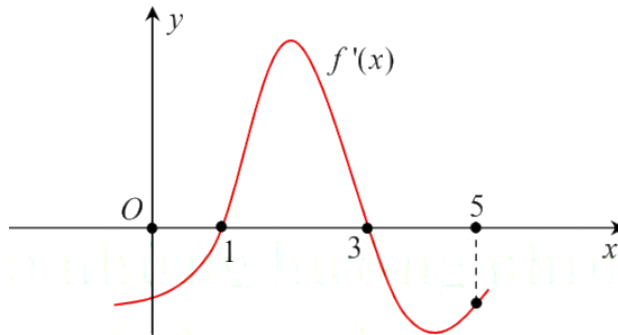
A. $M = f(6); m = f(0)$.

B. $M = f(2); m = f(6)$.

C. $M = f(2); m = f(0)$.

D. $M = f(6); m = f(0)$.

Câu 29: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(2) = f(1) + f(3)$ và $f(0) + f(1) = f(3) + f(5)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$. Đáp án đúng là



A. $M = f(3); m = f(1)$.

B. $M = f(0); m = f(1)$.

C. $M = f(0); m = f(5)$.

D. $M = f(3); m = f(5)$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là m . Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 3f(x) + x^2 - 2x$ thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

A. $\min g(x) \geq 3m$.

B. $\min g(x) = 3m - 2$.

C. $\min g(x) \leq 3m - 2$.

D. $\min g(x) \geq 3m - 1$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tương ứng là 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x$ tương ứng bằng 8. Kết luận nào dưới đây luôn đúng?

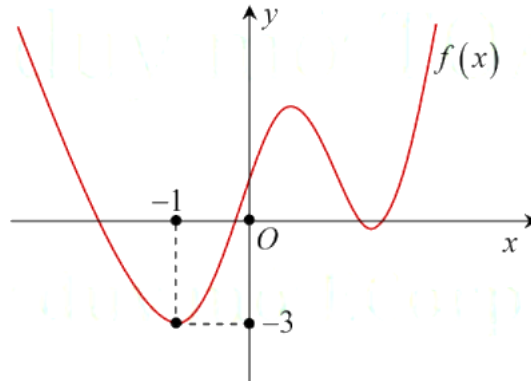
A. $f(2) = 3$.

B. $f(2) > 3$.

C. $f(3) < 3$.

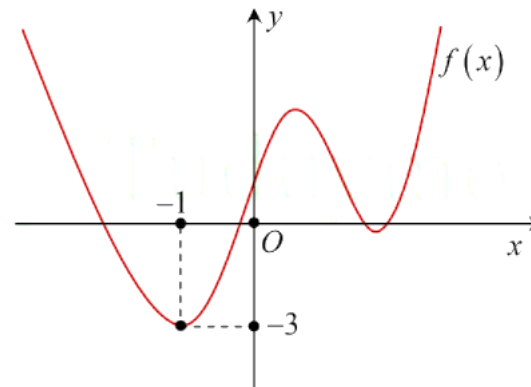
D. $f(3) \geq 4$.

- Câu 32:** Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất lần lượt là 3 và 6. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3f(x) + 2g(x)$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?
- A. $\max(3f(x) + 2g(x)) \leq 21$. B. $\max(3f(x) + 2g(x)) \geq 24$.
C. $\max(3f(x) + 2g(x)) \leq 30$. D. $\max(3f(x) + 2g(x)) \geq 21$.
- Câu 33:** Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là 6 và giá trị nhỏ nhất $y = g(x)$ là 3. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2f(x) - 3g(x) + 2$ luôn thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?
- A. $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \geq 5$. B. $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 3$.
C. $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 5$. D. $\max(2f(x) - 3g(x) + 2) \geq 2$.
- Câu 34:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất là 2. Biết hàm số $y = 2f(x) - x^2 + 6x$ có giá trị lớn nhất bằng 8. Chọn đáp án đúng trong các đáp án sau?
- A. $f(0) \leq 4$. B. $f(3) \leq -1$. C. $f(2) \geq 0$. D. $f(2) \leq -2$.
- Câu 35:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, có $\min f(x) = 4$. Khi đó kết luận đúng về nghiệm của bất phương trình $f(x) > 4$ sẽ là:
- A. luôn có nghiệm. B. luôn vô nghiệm.
C. có thể có nghiệm có thể vô nghiệm. D. luôn có đúng một nghiệm duy nhất.
- Câu 36:** Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2ax + 6a - 3$ có giá trị nhỏ nhất bằng m . Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây luôn đúng?
- A. $m \geq -3$. B. $m < -3$. C. $m \leq 78$. D. $m \leq 3$.
- Câu 37:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và nhỏ bằng M và m . Biết rằng $f(a) + 2f(b) = 18$, trong đó a và b là hai số thực dương. Nhận xét nào trong các đáp án dưới đây là **luôn đúng**?
- A. $m \leq 3$. B. $M \geq 9$. C. $m \leq 5$. D. $M \geq 6$.
- Câu 38:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là M và m . Biết rằng $f(a) + 2f(b) = 12$, trong đó a và b là hai số thực dương. Khi đó giá trị biểu thức $(M - 2)(m - 5)$ có thể bằng
- A. -1 . B. -3 . C. 0 . D. 10 .
- Câu 39:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2ax + 4a - 7$, có giá trị nhỏ nhất là m . Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương mà m có thể nhận?
- A. 11. B. 8. C. 9. D. 10.
- Câu 40:** Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) + x^2 - 2mx + m^2 + 1$ tương ứng bằng:



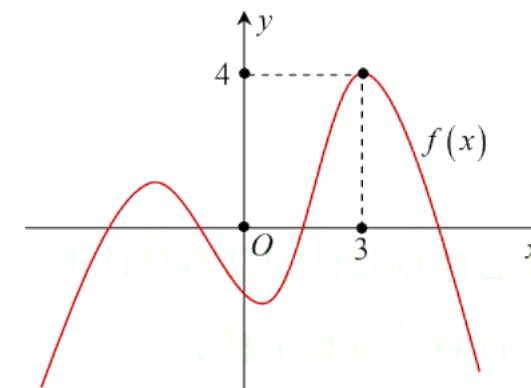
- A. 1. B. 3. C. -1. D. -2.

Câu 41: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(2x+3) + x^2 - 4mx + 4m^2 - 1$ bằng -4 thì tham số m bằng:



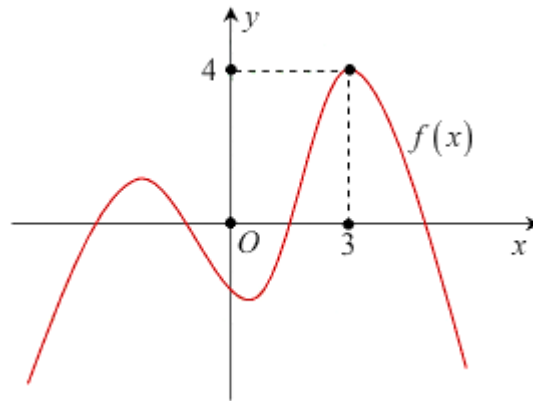
- A. -1. B. 0. C. $-\frac{1}{2}$. D. 2.

Câu 42: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng m là tham số thực. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(3x-m) + 2f(x^2 - 2x)$ đạt giá trị lớn nhất. Tổng các giá trị của tất cả các phân tử thuộc tập S bằng:



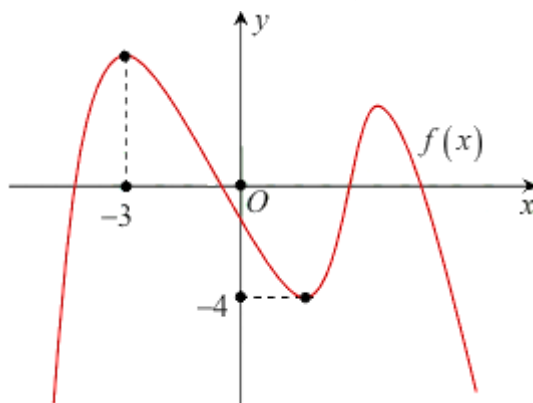
- A. 6. B. 3. C. 0. D. -2.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x$ đạt giá trị lớn nhất thì $(2m-n)$ bằng



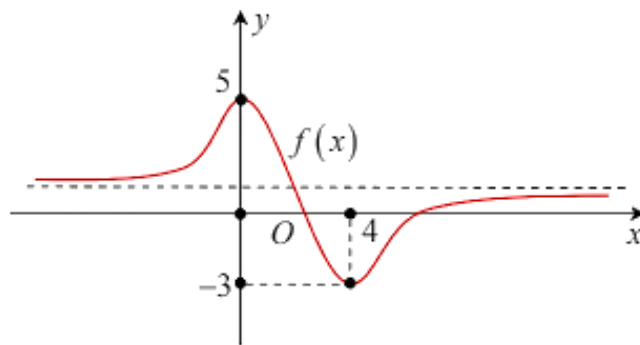
- A. 3. B. 0. C. 5. D. 1.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = x^2 - 2m^2x + m^4 - f(f(x))$ đạt giá trị nhỏ nhất?



- A. 6. B. 4. C. 3. D. 8.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng m, n là hai số thực. Để hàm số $2f(2x - m) - f(3x + n) + x^2 - 2x$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $T = 2m + 3n$ bằng



- A. -11. B. -7. C. -13. D. 5.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-1; 3)$?

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2(2m - 1)x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(-3; 11]$?

- A. 6. B. 31. C. 4. D. 5.

Câu 48: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(1; 3)$?

A. 8.

B. 9.

C. 7.

D. 11.

Câu 49: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất nhất trên $(-2; 3)$?

A. 30.

B. 18.

C. 32.

D. 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A	3.A	4.C	5.D	6.D	7.C	8.D	9.D	10.D
11.A	12.A	13.B	14.D	15.D	16.A	17.D	18.B	19.B	20.B
21.C	22.D	23.C	24.A	25.C	26.B	27.B	28.C	29.D	30.D
31.A	32.A	33.C	34.A	35.C	36.C	37.D	38.B	39.D	40.D
41.A	42.C	43.C	44.A	45.C	46.A	47.B	48.C	49.C	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Ta có: $f(x) - |f(x)| = \begin{cases} 0 & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ 2f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow a = |f(x) - |f(x)|| \in [0;1], \forall x \in \mathbb{R}$.

Có $b = -a^2 + a + \frac{3}{4} \in \left[\frac{3}{4}; 1\right], \forall a \in [0;1]$. Xét $g(b) = (b+1)^2 [1 + b^2 \cdot (2-b)^2]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(b) &= 2(b+1) [1 + b^2 \cdot (2-b)^2] + (b+1)^2 [2b \cdot (2-b)^2 - 2b^2 \cdot (2-b)] \\ &= 2(b+1) [1 + b^2 \cdot (4 - 4b + b^2) + (b+1) \cdot (4b - 4b^2 + b^3) - (b+1) \cdot (2b^2 - b^3)] \\ &= 2(b+1) [1 + 4b^2 - 4b^3 + b^4 + 4b^2 - 4b^3 + b^4 + 4b - 4b^2 + b^3 - 2b^3 + b^4 - 2b^2 + b^3] \\ &= 2(b+1) [3b^4 - 8b^3 + 2b^2 + 4b + 1] \\ &= 2(b+1) [b(b-2)(3b^2 - 2b - 2) + 1] \end{aligned}$$

Ta có $b \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \Rightarrow b-2 < 0; 3b^2 - 2b - 2 < 0 \Rightarrow g'(b) > 0, \forall b \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(b) = (b+1)^2 [1 + b^2 \cdot (2-b)^2]$ đồng biến trên $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$

$$\Rightarrow g(b) \leq g(1) = 8, \forall b \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$$

$$\text{Xét } h(b) = -\frac{2}{1+b\sqrt{2-b}} \Rightarrow h'(b) = -\frac{4-3b}{\sqrt{2-b}(1+b\sqrt{2-b})^2}$$

$$\Rightarrow h'(b) > 0, \forall b \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \quad \Rightarrow h(b) \leq h(1) = -1, \forall b \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$$

$$\Rightarrow S = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(b+1)^2 [1 + b^2 \cdot (2-b)^2]} - \frac{2}{1+b\sqrt{2-b}} \leq \frac{3}{8} \sqrt[3]{8} - 1 = -\frac{1}{4}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } b = 1.$$

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của S bằng $-\frac{1}{4}$ và $k = \frac{9}{4}$.

Câu 2: Ta có :

$$|x^3 - 3x + m| \leq 16 \quad \forall x \in [0;3]$$

$$\Leftrightarrow -16 \leq x^3 - 3x + m \leq 16 \quad \forall x \in [0;3]$$

$$\Leftrightarrow -16 - m \leq x^3 - 3x \leq 16 - m \quad \forall x \in [0;3]$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x$ với $x \in [0; 3]$. Khi đó : $\begin{cases} \max_{[0;3]} g(x) = 18 \\ \min_{[0;3]} g(x) = -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 18 \leq 16 - m \\ -2 \geq -16 - m \end{cases} \Leftrightarrow -14 \leq m \leq -2.$$

Dấu '=' xảy ra khi $\begin{cases} m = -14 \\ m = -2 \end{cases}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng -16 .

Câu 3: $f'(x) = (x-1)(3x+2m^2-1)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+2m^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin (1; 2) \\ x = \frac{1-2m^2}{3} \notin (1; 2) \forall m \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	1	2
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	$-\frac{3}{2}m$	$m^2 + 2 - \frac{3}{2}m$

Từ bảng biến thiên ta có: $\min_{[1;2]} f(x) = -\frac{3}{2}m$ và $\max_{[1;2]} f(x) = m^2 - \frac{3}{2}m + 2 > 0 \forall m$.

Xét phương trình $\max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| = \frac{9}{4}$ (1).

Trường hợp 1: $-\frac{3}{2}m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

$$(1) \Leftrightarrow m^2 - \frac{3}{2}m + 2 - \frac{3}{2}m = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m^2 - 3m - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3+\sqrt{10}}{2} \\ m = \frac{3-\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Do $m < 0$ nên $m = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$.

Trường hợp 2: $-\frac{3}{2}m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \max |f(x)| = \frac{9}{4}$$

$$\max |f(x)| = \max \left\{ \frac{3m}{2}; m^2 - \frac{3m}{2} + 2 \right\}$$

$$\max |f(x)| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3m}{2} = \frac{9}{4} \\ \frac{3m}{2} \geq m^2 - \frac{3m}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (nhận)}$$

$$\max |f(x)| = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - \frac{3m}{2} + 2 = \frac{9}{4} \\ \frac{3m}{2} \leq m^2 - \frac{3m}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3+\sqrt{13}}{4} \text{ (ktm)} \\ m = \frac{3-\sqrt{13}}{4} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy $S = \frac{3-\sqrt{10}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{36} - \sqrt{10})$ nên $a = 36, b = 10$ giá trị $\frac{b}{a} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Câu 4: Xét $g(x) = f(2x) - 4x$ (*)

Đặt $u = 2x, x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right] \Rightarrow u \in [-3; 4]$

Khi đó theo cách đặt (*) trở thành: $g_1(u) = f(u) - 2u \Rightarrow g_1'(u) = f'(u) - 2$,

$$g_1'(u) = 0 \Leftrightarrow f'(u) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \in [-3; 4] \\ u = 2 \in [-3; 4] \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g_1(u)$ trên $[-3; 4]$

u	-3		0		2		4
$g'(u)$		+	0	+	0	-	
$g(u)$					$g(2)$		

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{[-3; 4]} g_1(u) = g_1(2) = f(2) - 4$.

Câu 5: Đặt $f(x) = t, t \in (-\infty; a], a > 2$

Ta có $g(x) = \frac{2f(x) - 2}{f^2(x) - 2f(x) + 2} = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 2}$.

Đặt $h(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 2}, t \in (-\infty; a], a > 2$.

$$h'(t) = \frac{-2(t^2 - 2t)}{(t^2 - 2t + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$.

t	$-\infty$	0	2	a	
$h'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$	0	-1	1	$h(a)$	

Ta có $h(a) = \frac{2a-2}{a^2-2a+2} > 0 \quad \forall a > 2$ nên từ bảng biến thiên suy ra:

$$\max_{\mathbb{R}} g(x) = \max_{(-\infty; a]} h(t) = 1 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hay } f(x) = 2 \text{ (phương trình này có 3 nghiệm).}$$

$$\min_{\mathbb{R}} g(x) = \min_{(-\infty; a]} h(t) = -1 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hay } f(x) = 0 \text{ (phương trình này có 4 nghiệm).}$$

Vậy có tất cả 7 giá trị của x sao cho hàm số $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6: Ta có: $\min_{[1;2]} f(x) + \max_{[1;2]} f(x) = \frac{16}{3}$ (1). Đặt $h(x) = \frac{x+m}{x+1}$ có đạo hàm: $h'(x) = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m = 1$ thì $\min_{[1;2]} f(x) = \max_{[1;2]} f(x) = 1$ (loại)

$$\text{Nếu } m = 1 \text{ thì } h'(x) \neq 0, \forall x \neq 1 \text{ và } h(1) = \frac{m+1}{2}; h(2) = \frac{m+2}{3}$$

Trường hợp 1: $h(1), h(2) \geq 0$ khi đó $m \geq -1$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow m = 5 \text{ (TM)}$$

Trường hợp 2: $h(1), h(2) \leq 0$ khi đó $m \leq -2$

$$\text{Phương trình 1 (1)} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = -\frac{16}{3} \Rightarrow m = \frac{-39}{5} \text{ (TM)}$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} h(1).h(2) < 0 \\ \left| \frac{m+1}{2} \right| \leq \left| \frac{m+2}{3} \right| \end{cases} \text{ khi đó } -\frac{7}{5} < m < -1$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow m = 14 \text{ (không TM)}$$

$$\text{Trường hợp 4: } \begin{cases} h(1).h(2) < 0 \\ \left| \frac{m+2}{3} \right| < \left| \frac{m+1}{2} \right| \end{cases} \text{ khi đó } -2 < m < -\frac{7}{5}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow -\frac{m+1}{2} = \frac{16}{3} \Rightarrow m = -\frac{35}{3} \text{ (không TM)}$$

Vậy $m = 5, m = \frac{-39}{5}$ nên có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 7: Cách 1:

Đặt $t = f(x^3 + 2x)$. Vì $x \in [-1; 1]$ nên $t \in [-6; 5]$. Khi đó, $g(x) = |t + n|$ với $n = 3f(m)$.

$$\text{Do đó, } \max_{[-1;1]} g(x) = \max\{|n+5|; |n-6|\} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |n+5| = 8 \\ |n+5| \geq |n-6| \end{cases} \Leftrightarrow n = 3$$

$$\begin{cases} |n-6| = 8 \\ |n-6| > |n+5| \end{cases} \Leftrightarrow n = -2$$

Với $n = 3 \Leftrightarrow 3.f(m) = 3 \Leftrightarrow f(m) = 1$, suy ra có 5 giá trị của m .

Với $n = -2 \Leftrightarrow 3.f(m) = -2 \Leftrightarrow f(m) = -\frac{2}{3}$, suy ra có 6 giá trị của m .

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2:

Vì $x \in [-1;1]$ nên $-3 \leq x^3 + 3x \leq 3 \Rightarrow -6 \leq f(x^3 + 3x) \leq 5$.

Ta có: $|f(x^3 + 3x) + 3f(m)| \leq 8, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow -8 \leq f(x^3 + 3x) + 3f(m) \leq 8, \forall x \in [-1;1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 + 3x) \leq 8 - 3f(m) \\ -8 - 3f(m) \leq f(x^3 + 3x) \end{cases} \forall x \in [-1;1] \Rightarrow \begin{cases} 5 \leq 8 - 3f(m) \\ -8 - 3f(m) \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(m) \leq 1 \\ f(m) \geq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \max |f(x^3 + 3x) + 3f(m)| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = 1 \\ f(m) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Với $f(m) = 1$, có 5 giá trị của m . Với $f(m) = -\frac{2}{3}$, có 6 giá trị của m .

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8: Ta có: $\begin{cases} |f(-1)| \leq 1 \\ |f(-\frac{1}{\sqrt{2}})| \leq 1 \\ |f(0)| \leq 1 \\ |f(\frac{1}{\sqrt{2}})| \leq 1 \\ |f(1)| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |8 - a + b - c + d| \leq 1 \\ |2 - \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} - \frac{c}{\sqrt{2}} + d| \leq 1 \\ |d| \leq 1 \\ |2 + \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}} + d| \leq 1 \\ |8 + a + b + c + d| \leq 1 \end{cases}$

$$|4 + b + 2d| \leq \left| 2 - \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} - \frac{c}{\sqrt{2}} + d \right| + \left| 2 + \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{b}{2} + \frac{c}{\sqrt{2}} + d \right| \leq 2 \Rightarrow \left| 2 + \frac{b}{2} + d \right| \leq 1$$

$$\text{Tương tự: } |16 + 2b + 2d| \leq 2 \Rightarrow |8 + b + d| \leq 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra kết hợp với } |d| \leq 1 \text{ khi: } \begin{cases} 2 + \frac{b}{2} + d = -1 \\ 8 + b + d = 1 \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} |-a-c+1| \leq 1 \\ \left| -\frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}} - 1 \right| \leq 1 \\ \left| \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}} - 1 \right| \leq 1 \\ |a+c+1| \leq 1 \end{cases} \quad \text{đấu “=” xảy ra khi } a=c=0$$

Vậy $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 65$

Chú ý: Ta có thể suy luận như sau để được nhanh đáp số:

Vì $\cos(4t) = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$ nên nếu đặt $x = \cos t$ thì $\cos(4t) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ và như vậy hàm $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$

Câu 9: Điều kiện: $x \in [0; 2]$. Ta có: $g(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + |4x-2| + |6-4x|}{|2x-1| + |2x-3|} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}}{|2x-1| + |2x-3|} + 2$.

Do $(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^2 = 2 + 2\sqrt{x(2-x)} \leq 4$ vì $\sqrt{x(2-x)} \leq 1, \forall x \in [0; 2]$.

$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \leq 2 \leq |2x-1| + |3-2x| \Rightarrow 2 < g(x) \leq 3 \Rightarrow f(g(x)) \leq 4 \quad (1)$.

Đấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $3-2x+x^2 \in [2; 3], \forall x \in [0; 2] \Rightarrow -f(3-2x+x^2) \leq 0 \quad (2)$.

Đấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $2-\sqrt{4-m^2} \in [0; 2] \Rightarrow f(2-\sqrt{4-m^2}) \leq 4 \quad (3)$

Đấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=0$.

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow h(x) \leq 4-0+4=8 \Rightarrow \max h(x) = 8 \Leftrightarrow x=1; m=0$.

Câu 10: Ta có: $\min_{[-1;1]} |f(x)| > \frac{3}{4} \Leftrightarrow |f(x)| > \frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1] \quad (1) \\ f(x) < -\frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1] \quad (2) \end{cases}$.

Trường hợp 1: $f(x) > \frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1]$.

Nhận thấy $f(0) = -2 < \frac{3}{4}$. Nên trường hợp (1) không tìm được m .

Trường hợp 2: $f(x) < -\frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1]$.

Ta có: $f(x) < -\frac{3}{4}, \forall x \in [-1; 1]$.

$$\Leftrightarrow \frac{2x^4 - mx - 4}{x+2} < -\frac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow 8x^4 - 4mx - 16 < -3x - 6, \forall x \in [-1;1]$$

$$\Leftrightarrow 4mx > 8x^4 + 3x - 10, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > -10, \text{ khi } x = 0 \\ 4m > 8x^3 + 3 - \frac{10}{x}, \forall x \in (0;1] \quad (*) \\ 4m < 8x^3 + 3 - \frac{10}{x}, \forall x \in [-1;0) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^3 + 3 - \frac{10}{x}$ có $g'(x) = 24x^2 + \frac{10}{x^2} = \frac{24x^4 + 10}{x^2} > 0, \forall x \neq 0$.

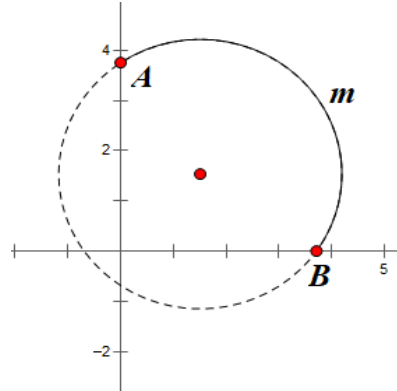
Bảng biến thiên:

x	-1	0	1
$g'(x)$			
$g(x)$	5		1

Dựa vào bảng biến thiên:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \in \mathbb{R} \text{ khi } x = 0 \\ 4m > \max_{(0;1]} g(x) \\ 4m < \min_{[-1;0)} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 1 \\ 4m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m < \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < \frac{5}{4}.$$

Câu 11: Cách 1:



Đặt $X = \sqrt{x+1}, Y = \sqrt{y+2}$ với $X, Y \geq 0$ suy ra: $x = X^2 - 1, y = Y^2 - 2$

Ta có: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y \Rightarrow X^2 + Y^2 - 3X - 3Y - 3 = 0$ (1)

Tập hợp các điểm $M(X, Y)$ thỏa mãn phương trình (1) là đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, bán

kính $R = \frac{\sqrt{30}}{2}$. Gọi $A = (C) \cap (Oy) \Rightarrow A\left(0; \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right); B = (C) \cap (Ox) \Rightarrow B\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}; 0\right)$. Vì

$X, Y \geq 0$ nên ta chỉ xét các điểm $M \in AmB$.

Ta có: $P = x + y = X^2 + Y^2 - 3 = OM^2 - 3$ suy ra $P_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min} = OA = OB$.

$$\text{Mặt khác: } OA = \sqrt{0^2 + \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^2} = \frac{3+\sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min P = OA^2 - 3 = \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right)^2 - 3 = \frac{9 + 3\sqrt{21}}{2}.$$

Cách 2:

ĐK: $x \geq 1; y \geq -2$. Ta có: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y \Leftrightarrow x + y = 3\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2}, (x + y > 0).$

$$\Rightarrow (x + y)^2 = 9(x + y + 3) + 18\sqrt{(x+1)(y+2)}$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 - 9(x + y) - 27 \geq 0 \Rightarrow x + y \geq \frac{9 + 3\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{11 + 3\sqrt{21}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{13 + 3\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{9 + 3\sqrt{21}}{2} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{11 + 3\sqrt{21}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = -2 \\ x = \frac{13 + 3\sqrt{21}}{2} \end{cases}.$$

Câu 12: Đặt $t = 2 - \cos x, t \in [1; 3]$. Ta có $f(t) = t^3 - 3t; g_1(t) = |t^3 - 3t + m|$

Xét hàm số $h(t) = t^3 - 3t + m$ trên đoạn $[1; 3]$; $h'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (tm)} \\ t = -1 \text{ (l)} \end{cases}.$

$$h(1) = m - 2, h(3) = m + 18.$$

$$\text{Trường hợp 1 : } m > 2 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} g_1(t) = m - 2 \\ \max_{[1;3]} g_1(t) = m + 18 \end{cases}$$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3(m + 18) + m - 2 = 100 \Leftrightarrow m = 12 \text{ (tm)}$

$$\text{Trường hợp 2 : } m < -18 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} g_1(t) = -m - 18 \\ \max_{[1;3]} g_1(t) = -m + 2 \end{cases}$$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3(-m + 2) - m - 18 = 100 \Leftrightarrow m = -28 \text{ (tm)}$

$$\text{Trường hợp 3 : } -18 \leq m \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} g_1(t) = 0 \\ \max_{[1;3]} g_1(t) = \max\{|m - 2|; |m + 18|\} \end{cases}$$

$$\text{Nếu } |m - 2| \geq |m + 18| \Leftrightarrow m \leq -8.$$

$$\text{Từ giả thiết bài toán ta có : } 3|m - 2| = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{106}{3} \text{ (l)} \\ m = \frac{-94}{3} \text{ (l)} \end{cases} \text{ vì } -18 \leq m \leq -8$$

$$\text{Nếu } |m + 18| \geq |m - 2| \Leftrightarrow m \geq -8.$$

$$\text{Từ giả thiết bài toán ta có : } 3|m + 18| = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-154}{3} \text{ (l)} \\ m = \frac{46}{3} \text{ (l)} \end{cases} \text{ vì } -8 \leq m \leq 2$$

$$\text{Vậy } S = \{12; -28\} \Rightarrow 12 - 28 = -16$$

Câu 13: Cách 1:

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : y = \frac{ax+b}{2x^2+2} \Leftrightarrow 2yx^2 - ax + 2y - b = 0 \quad (1)$$

Để có $\max y, \min y$ thì phương trình (1) phải có nghiệm x

$$\text{Trường hợp 1: } y = 0, \text{ khi đó } (1) \Leftrightarrow -ax - b = 0. \text{ Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}.$$

Với $a = b = 0$ thì $y = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó $\min y + \max y = 0 \leq 5$ (thỏa mãn).

$$\text{Với } a \neq 0 \text{ thì } y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Trường hợp 2: $y \neq 0$. Xét $\Delta = -16y^2 + 8by + a^2$.

$$(1) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -16y^2 + 8by + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{4} \leq y \leq \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$$

$$\Rightarrow M = \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{4}; m = \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$$

$$M^2 + m^2 = \frac{a^2 + 2b^2}{8} \leq 5 \Rightarrow a^2 + 2b^2 \leq 40(*)$$

Suy ra $b^2 \leq 20 \Rightarrow -4 \leq b \leq 4$ (do $b \in \mathbb{Z}$).

Nhận xét nếu $a^2 \leq M$ thì có $2 \times \left[\sqrt{M} \right] + 1$ số nguyên a thỏa mãn.

Với $b = \pm 4 \Rightarrow a^2 \leq 8$. Có 5 số nguyên a thỏa mãn. Vậy có 10 cặp $(a; b)$.

Với $b = \pm 3 \Rightarrow a^2 \leq 22$. Có 9 số nguyên a thỏa mãn. Vậy có 18 cặp $(a; b)$.

Với $b = \pm 2 \Rightarrow a^2 \leq 32$. Có 11 số nguyên a thỏa mãn. Vậy có 22 cặp $(a; b)$.

Với $b = \pm 1 \Rightarrow a^2 \leq 38$. Có 13 số nguyên a thỏa mãn. Vậy có 26 cặp $(a; b)$.

Với $b = 0 \Rightarrow a^2 \leq 40$. Có 13 số nguyên a thỏa mãn. Vậy có 13 cặp $(a; b)$.

Tổng cộng có 89 cặp $(a; b)$ cần tìm.

Cách 2:

$$(C): y = \frac{ax+b}{2x^2+2} \Rightarrow y' = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{2(x^2+1)^2}$$

Nếu $a = b = 0$ thì $y = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó $M = m = 0 \Rightarrow M^2 + m^2 \leq 5$ (thỏa mãn).

Xét a, b không đồng thời bằng 0. Khi đó $y' = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{a} & (\text{Giả sử } x_1 < x_2) \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên (C) có dạng



hoặc



M, m nhận $y(x_1), y(x_2)$.

Ta có công thức cực trị của hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ là $y(x_{ct}) = \frac{u'}{v'} = \frac{a}{4x_{ct}}$

$$\Rightarrow M^2 + m^2 = \frac{a^2}{4^2 x_1^2} + \frac{a^2}{4^2 x_2^2} = \frac{a^2}{16} \left(\frac{4b^2}{a^2} + 2 \right) \leq 5 \Leftrightarrow 2b^2 + a^2 \leq 40.$$

(đến đây thực hiện tương tự cách 1.)

Câu 14: Đặt $f(x) = \frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 + (3-3m^2)x + 1$. Suy ra

$$f'(x) = x^2 - 2(m+2)x + 3 - 3m^2 = (x+m-1)(x-3m-3).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1-m \\ x_2 = 3+3m \end{cases}. \text{ Vì } m \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \text{ nên } \begin{cases} x_1 \in \left(1; \frac{5}{3}\right) \\ x_2 \in (1; 3) \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 \notin [-1; 1].$$

Do đó hàm số $f(x)$ đơn điệu trên đoạn $[-1; 1]$. Suy ra $\max_{[-1; 1]} |f(x)| = \max_{[-1; 1]} \{|f(-1)|; |f(1)|\}$.

$$|f(1)| = \left| -3m^2 - m + \frac{7}{3} \right| = -3m^2 - m + \frac{7}{3} \Leftrightarrow |f(-1)| = \left| 3m^2 - m - \frac{13}{3} \right| = -3m^2 + m + \frac{13}{3}.$$

$$\max_{[-1; 1]} y = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |f(1)| = 4 \\ |f(-1)| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 - m + \frac{7}{3} = 4 \\ -3m^2 + m + \frac{13}{3} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1-\sqrt{5}}{6}.$$

Câu 15: Đặt $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6mx^2 + 12mx + m$. Ta có: $f(1) = 7m - 1$ và $f(2) = m + 16$.

$$\text{Điều kiện cần: giả sử } \max_{[1; 2]} |f(x)| = 18 \Rightarrow \begin{cases} |f(1)| = |7m - 1| \leq 18 \\ |f(2)| = |m + 16| \leq 18 \end{cases} \Rightarrow -\frac{17}{7} \leq m \leq 2.$$

$$\text{Vậy chỉ cần xét } m \in \left[-\frac{17}{7}; 2\right].$$

Điều kiện đủ: Ta có: $f'(x) = 12(x-1)(x^2 - m)$.

Trường hợp 1: $-\frac{17}{7} \leq m \leq 1$, khi đó: $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 2]$ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; 2]$, mà $f(2) = m + 16 \in (0; 17)$ nên yêu cầu bài toán tương đương $f(1) = 7m - 1 = -18 \Leftrightarrow m = -\frac{17}{7}$.

Trường hợp 2: $1 < m \leq 2$, khi đó: $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{m} \in [1; 2]$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$f(1)$		$f(2)$

$f(\sqrt{m})$

Với: $f(\sqrt{m}) = 3m^2 - 4m\sqrt{m} - 6m^2 + 12m\sqrt{m} + m = 3m\sqrt{m}(2 - \sqrt{m}) + 2m\sqrt{m} + m > 0$.

$$\text{Do đó YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 7m - 1 = 18 \\ f(2) = m + 16 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{19}{7} \\ m = 2 \end{cases} (I).$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn là: $m = -\frac{17}{7}, m = 2$.

Câu 16: $[f(x) - x] \cdot f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow [f(x) - x] \cdot f(x) = (x^3 + 2x)[x^3 + 2x - x], \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow [f(x) - x^3 - 2x] \cdot [f(x) + x^3 - x] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 + 2x \\ f(x) = -x^3 + x \end{cases}$$

Vì $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại $f(x) = -x^3 + x$.

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(1) = 3 = \min_{[1; 2]} f(x) = m; f(2) = 12 = \max_{[1; 2]} f(x) = M$$

$$\text{Suy ra: } 3M - m = 3 \cdot 12 - 3 = 33$$

Câu 17: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y = -1$ có nghiệm.

$$\text{Ta có } y \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| + 4x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| \geq -4x - 1, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \leq 4x + 1, \forall x \leq -\frac{1}{4} \\ x^2 - 2x + m \geq -4x - 1, \forall x \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \quad (\text{vì } x > -\frac{1}{4} \text{ thì } (*) \text{ luôn đúng})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^2 + 6x + 1, \forall x \leq -\frac{1}{4} \\ m \geq -x^2 - 2x - 1, \forall x \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0 \quad (1).$$

Ta có $y = -1$ có nghiệm $\Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| = -4x - 1$ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m = 4x + 1 \\ x^2 - 2x + m = -4x - 1 \end{cases}$ có nghiệm $x \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 6x + 1 \\ m = -x^2 - 2x - 1 \end{cases}$ có nghiệm $x \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{9}{16} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $m = 0$

Câu 18: Đặt $g(x) = x^3 - 12x + m \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 12, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in (1; 3) \\ x = -2 \notin (1; 3) \end{cases}$

Ta có: $g(1) = m - 11; g(2) = m - 16; g(3) = m - 9 \Rightarrow \min_{[1;3]} g(x) = m - 16; \max_{[1;3]} g(x) = m - 9$

Do đó: $\max_{[1;3]} f(x) = \max \{|m - 9|; |m - 16|\}$

$$\begin{cases} |m - 9| \leq 20 \\ |m - 16| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20 \leq m - 9 \leq 20 \\ -20 \leq m - 16 \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11 \leq m \leq 29 \\ -4 \leq m \leq 36 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 29.$$

Vậy có 34 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19: M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$ trên đoạn $[-1; 3]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ 2M \geq 2f(1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1 - a + b| \\ M \geq |9 + 3a + b| \\ 2M \geq 2|1 + a + b| \end{cases} \\ \Rightarrow 4M &\geq |1 - a + b| + |9 + 3a + b| + 2|-1 - a - b| \geq |1 - a + b + 9 + 3a + b - 2 - 2a - 2b| \\ \Rightarrow 4M &\geq 8 \Rightarrow M \geq 2 \Rightarrow M_{\min} = 2. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} -a + b + 1 = 2 \\ 3a + b + 9 = 2 \\ -1 - a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}.$

Thử lại thấy thỏa $M = 2$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$.

Vậy $a + 2b = -4$.

Câu 20: Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $f(x) \in [-2; 2]$ với $x \in [-2; 2]$.

Đặt $t = f(x) + 2$ với $x \in [-2; 2] \Rightarrow t \in [0; 4]$ với $x \in [-2; 2]$.

Xét $h(t) = |2t + m| - t - 1 = |2t + m - t - 1| = |t + m - 1|$ (vì $2t + m \geq 0$ do $t \in [0; 4], m \in [0; 20]$).

Trường hợp 1: Xét $m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1 \Rightarrow \min_{[-2; 2]} g(x) = \min_{[0; 4]} h(t) = m - 1 \geq 1 \Rightarrow m \geq 2$ (tm)

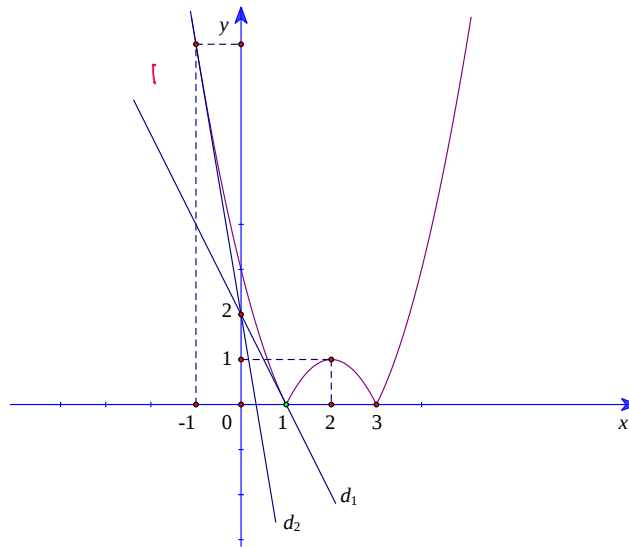
Trường hợp 2: Xét $\begin{cases} m-1 \leq 0 \\ m+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq m \leq 1$ (do $m \in [0; 20]$) $\Rightarrow \min_{x \in [-2; 2]} g(x) = \min_{t \in [0; 4]} |h(t)| = 0 \geq 1$ (ktm).

Trường hợp 3: Xét $m+3 \leq 0 \Rightarrow m \leq -3$ (không thỏa mãn $m \in [0; 20]$).

Ta có $\min_{[-2; 2]} g(x) \geq 1 \Leftrightarrow m-1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 2$ mà $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [0; 20]$ nên $m \in \{2; 3; \dots; 20\}$.

Suy ra có 19 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 21:



Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4ax + |x^2 - 4x + 3|$ lớn hơn 2 thì:

$$4ax + |x^2 - 4x + 3| > 2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Suy ra } |x^2 - 4x + 3| > 2 - 4ax \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

Hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ có đồ thị (C)

Đường thẳng $d: y = 2 - 4ax$ đi qua điểm cố định $(0; 2)$.

Đường thẳng $d: y = 2 - 4ax$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ ($x \leq 1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4ax = x^2 - 4x + 3 \\ -4a = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow d_1: y = 2 - 2x \\ x = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow d_2: y = 2 - 6x \end{cases}$$

$$\text{Để } |x^2 - 4x + 3| > 2 - 4ax \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \text{ thì } d: y = 2 - 4ax \text{ nằm giữa } d_1, d_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}.$$

Câu 22: Đặt $t = \sqrt{x+2}$ với $x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [1; \sqrt{3}]$ và $x = t^2 - 2$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t) = \left| \frac{2mt^2 - 4t - 4m}{t^2} \right|$. Khi đó: $\min_{[-1; 1]} f(x) = \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t)$.

Xét hàm số $h(t) = \frac{2mt^2 - 4t - 4m}{t^2}$ trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$.

$$h'(t) = \frac{4t^2 + 8mt}{t^4} > 0, \forall t \in [1; \sqrt{3}] \text{ và } m > 0.$$

$$\text{suy ra } \min_{[1; \sqrt{3}]} h(t) = -2m - 4 \text{ và } \max_{[1; \sqrt{3}]} h(t) = \frac{2m - 4\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện cần: Ta có: } \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t) = a \in (0; 1) &\Rightarrow h(1) \cdot h(\sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow (-2m - 4) \left(\frac{2m - 4\sqrt{3}}{3} \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow -2 < m < 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3\}$.

Điều kiện đủ: $m \in \{1; 2; 3\}$

$$\text{Khi đó: } \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t) = \min \left\{ g(1); g(\sqrt{3}) \right\} = \min \left\{ |2m + 4|; \left| \frac{2m - 4\sqrt{3}}{3} \right| \right\}.$$

$$+ m = 1: \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t) = \min \left\{ 6; \frac{4\sqrt{3} - 2}{3} \right\} = \frac{4\sqrt{3} - 2}{3} > 1 \text{ (loại).}$$

$$+ m = 2: \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t) = \min \left\{ 8; \frac{4\sqrt{3} - 4}{3} \right\} = \frac{4\sqrt{3} - 4}{3} \in (0; 1) \text{ (nhận).}$$

$$+ m = 3: \min_{[1; \sqrt{3}]} g(t) = \min \left\{ 10; \frac{4\sqrt{3} - 6}{3} \right\} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3} \in (0; 1) \text{ (nhận).}$$

Vậy $m \in \{2; 3\}$ nên có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23: Với $m \in \mathbb{N}^*$, $m \leq 20$, ta có $x \in [-2; 2] \Rightarrow t = f(x) \in [-2; 2]$.

$$\text{Khi đó } h(t) = |2t + m + 4| + |t + 3m - 2| - 2 \geq 0, \forall t \in [-2; 2]$$

$$\Rightarrow h(t) = 2t + m + 2 + |t + 3m - 2| \geq 0, \forall t \in [-2; 2]$$

Trường hợp 1: $t \geq 2 - 3m \Rightarrow h(t) = 3t + 4m$

$$+) \begin{cases} 2 - 3m \in [-2; 2] \\ \min_{[-2; 2]} h(t) = h(2 - 3m) = 6 - 5m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{6}{5} \Rightarrow m = 1$$

$$+) \begin{cases} 2 - 3m \leq -2 \\ \min_{[-2; 2]} h(t) = h(-2) = 4m - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2} \Rightarrow m \in \{2; 3; \dots; 20\} \Rightarrow m \in \{1; 2; \dots; 20\}$$

Trường hợp 2: $t < 2 - 3m$ không cần xét nữa vì đã lấy tất cả các giá trị m nguyên thuộc đoạn cho trong đề bài.

$$\text{Vậy tổng các phần tử của } S \text{ là } 1 + 2 + \dots + 20 = \frac{(1 + 20)20}{2} = 210.$$

$$\text{Câu 24: Ta có } y = |x^2 - 5x + 4| + mx = \begin{cases} x^2 - (5 - m)x + 4, & x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty) \\ -x^2 + (5 + m)x + 4, & x \in [1, 4] \end{cases}$$

Trường hợp 1: $0 < m < 3 \Rightarrow 1 < \frac{5-m}{2} < \frac{m+5}{2} < 4$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	1	$\frac{5-m}{2}$	$\frac{m+5}{2}$	4	$+\infty$
y	$+\infty$		m		$4m$	$+\infty$

Từ đó để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 5x + 4| + mx$ lớn hơn 1 thì $m > 1$, kết hợp với điều kiện $m < 3$ và m nguyên dương ta được $m = 2$.

Trường hợp 2: $m \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{m+5}{2} \geq 4 \\ \frac{5-m}{2} \leq 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	$\frac{5-m}{2}$	1	4	$\frac{m+5}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$		$\frac{-m^2 + 10m - 9}{4}$			$+\infty$

Từ đó để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 5x + 4| + mx$ lớn hơn 1 thì $\frac{-m^2 + 10m - 9}{4} > 1 \Leftrightarrow -m^2 + 10m - 9 > 4 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 13 < 0 \Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{3} < m < 5 + 2\sqrt{3}$. Kết hợp với điều kiện $m \geq 3$ và m nguyên dương ta được $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Gộp hai trường hợp ta được tập các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán $S = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu 25: Do $f''(x) < 0, \forall x \in (0; +\infty)$ nên $f(x)$ có đồ thị lõm trên $(0; +\infty)$, tức là tiếp tuyến ở phía trên đồ thị. Suy ra $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \forall x \in (0; +\infty)$
 $\Rightarrow f(a) \leq f'(0)(a - 0) + f(0) = af'(0) + 2$.

Xét trên $[0; 2]$, ta có

x	0	2
$f''(x)$	-	
$f'(x)$		0
$f(x)$	2	4

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Suy ra $f(2 - \sqrt{4 - 2x}) \leq f(2) = 4$, do đó $f(a) + f(2 - \sqrt{4 - 2x}) \leq af'(0) + 6$.

Ta chứng minh $2f'(0) + (a - x)f'(a) + 6 \geq af'(0) + 6 \Leftrightarrow (2 - a)f'(0) \geq (x - a)f'(a) (*)$

Thật vậy:

Nếu $x \leq a$ thì $VT(*) \geq 0 \geq VP(*)$.

Nếu $x \geq a$ thì $\begin{cases} 2 - a \geq x - a > 0 \\ f'(0) \geq f'(a) \end{cases}$ nên $(*)$ đúng.

Do đó $\frac{2f'(0) + (a - x)f'(a) + 6}{f(2 - \sqrt{4 - 2x}) + f(a)} \geq 1$.

Lại có $[f'(x)]^2 + 1 \geq 1$ và $f(2 - \sqrt{4 - 2x}) + f(x) \leq 2f(2) = 8$ nên suy ra $S \geq \frac{1}{64}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = 0; x = 2$. Như vậy $m = 1, n = 64 \Rightarrow m + n = 65$.

Câu 26: Chọn B

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ như sau:

x	$[0$	1	3	$5]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(3)$	$f(5)$

Suy ra: $\min_{x \in [0; 5]} f(x) = f(1) = m$ và $\begin{cases} \max_{x \in [0; 5]} f(x) = f(0) \\ \max_{x \in [0; 5]} f(x) = f(5) \end{cases}$.

Từ giả thiết: $f(0) - f(3) = f(5) - f(1) \Leftrightarrow f(5) - f(0) = f(1) - f(3) < 0 \Leftrightarrow f(5) < f(0)$.

Suy ra, $\max_{x \in [0; 5]} f(x) = f(0) = M$.

Câu 27: Ta có: $|\sqrt{4x - x^2} - mx| \leq M, \forall x \in [0; 4]$ và $M \geq 0$

Với $x = 0$ thỏa mãn.

Với $x \in (0; 4]$ ta có:

$$-M \leq \sqrt{4x - x^2} - mx \leq M \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \sqrt{\frac{4}{x} - 1} + \frac{M}{x} = g(x) \\ m \geq \sqrt{\frac{4}{x} - 1} - \frac{M}{x} = h(x) \end{cases}, \forall x \in (0; 4]$$

+ Ta có $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 4]$ nên: $m \leq \min_{x \in (0; 4]} g(x) = g(4) = \frac{M}{4}$

$$+ \text{Ta có } h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4M^2}{4+M^2} < 4 \Rightarrow \text{Max } h(x) = \frac{4-M^2}{4M}$$

$$\text{Vậy: } \frac{4-M^2}{4M} \leq m \leq \frac{M}{4} \Leftrightarrow M^2 \geq 2 \Leftrightarrow M \geq \sqrt{2} \Rightarrow M_{\min} = \sqrt{2}$$

Câu 28: Chọn C

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ như sau:

x	$[0$	2	$6]$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(6)$

Suy ra: $\max_{x \in [0;6]} f(x) = f(2) = M$

Và $\min_{x \in [0;6]} f(x) = f(0); \min_{x \in [0;6]} f(x) = f(6)$

Từ giả thiết: $2f(6) = f(0) + f(2) \Leftrightarrow f(6) - f(0) = f(2) - f(6) > 0 \Leftrightarrow f(6) > f(0)$

Suy ra: $\min_{x \in [0;6]} f(x) = f(0) = m$

Câu 29: Chọn D

Bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ như sau:

x	$[0$	1	2	3	$5]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(5)$

Suy ra: $\begin{cases} \max_{x \in [0,5]} f(x) = f(0) \\ \max_{x \in [0,5]} f(x) = f(3) \end{cases}$ và $\begin{cases} \min_{x \in [0,5]} f(x) = f(1) \\ \min_{x \in [0,5]} f(x) = f(5) \end{cases}$

Từ giả thiết: $f(0) + f(2) = f(1) + f(3) \Leftrightarrow f(0) - f(3) = f(1) - f(2) < 0 \Leftrightarrow f(0) < f(3)$

Suy ra: $\max_{x \in [0,5]} f(x) = f(3) = M$

Từ giả thiết: $f(0) + f(1) = f(3) + f(5) \Leftrightarrow f(1) - f(5) = f(3) - f(0) > 0 \Leftrightarrow f(1) > f(5)$

Suy ra: $\min_{x \in [0,5]} f(x) = f(5) = m$

Câu 30: Chọn D

Tồn tại một giá trị $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho: $f(x) \geq f(x_0) = m$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $3f(x) \geq 3f(x_0) = 3m$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Lại có: $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1$

Suy ra: $y = 3f(x) + x^2 - 2x \geq 3m + (-1) = 3m - 1$. Suy ra $\min f(x) \geq 3m - 1$

Câu 31: Chọn A

Ta có: $f(x) \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$

Mà: $g(x) = 4f(x) + x^2 - 4x = 4f(x) + (x-2)^2 - 4 \geq 4.3 - 4 = 8$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(2) = 3$.

Câu 32: Chọn A

Ta có: $f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) \leq 6, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = 3f(x) + 2g(x) \leq 3.3 + 2.6 = 21 \Rightarrow \max(3f(x) + 2g(x)) \leq 21$.

Câu 33: Chọn C

Ta có: $f(x) \leq 6, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = 2f(x) - 3g(x) + 2 \leq 2.6 - 3.3 + 2 = 5 \Rightarrow \max(2f(x) - 3g(x) + 2) \leq 5$.

Câu 34: Chọn A

Theo giả thiết ta có: $y = g(x) = 2f(x) - x^2 + 6x \leq 8$.

Do đó: $g(0) = 2f(0) \leq 8 \Leftrightarrow f(0) \leq 4$.

$g(3) = 2f(3) + 9 \leq 8 \Leftrightarrow f(3) \leq -\frac{1}{2}$.

$g(2) = 2f(2) + 8 \leq 8 \Leftrightarrow f(2) \leq 0$.

Câu 35: Chọn C

Nếu $f(x) = 4$ là hàm hằng trên $\mathbb{R}$ thì bất phương trình $f(x) > 4$ vô nghiệm. (Đáp án A sai)

Nếu $f(x) = x^2 + 4$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thì bất phương trình $f(x) > 4 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ có vô số nghiệm. (Đáp án B, D sai)

Câu 36: Chọn C

Ta có $y = f(x) = x^4 - 2ax + 6a - 3 \geq m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(3) = 3^4 - 2a.3 + 6a - 3 \geq m \Leftrightarrow 78 \geq m$.

Câu 37: Chọn D

Ta có: $m \leq y = f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} f(a) \geq m \\ f(b) \geq m \end{cases} \Rightarrow 18 = f(a) + 2f(b) \geq m + 2m = 3m \Rightarrow m \leq 6$.

Tương tự ta cũng có $\begin{cases} f(a) \leq M \\ f(b) \leq M \end{cases} \Rightarrow 18 = f(a) + 2f(b) \leq M + 2M = 3M \Rightarrow M \geq 6$.

Câu 38: Chọn B

Ta có $m \leq y = f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} f(a) \geq m \\ f(b) \geq m \end{cases} \Rightarrow 12 = f(a) + 2f(b) \geq m + 2m = 3m \Rightarrow m \leq 4 \Leftrightarrow (m-5) \leq -1$.

Tương tự, ta cũng có được:

$\begin{cases} f(a) \leq M \\ f(b) \leq M \end{cases} \Rightarrow 12 = f(a) + 2f(b) \leq M + 2M = 3M \Rightarrow M \geq 4 \Rightarrow M-2 \geq 2$.

Suy ra $(M-2)(m-5) \leq -2$.

Câu 39: Chọn D

Ta có: $m \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $m \leq f(2) = 9$. Suy ra các giá trị nguyên dương của m thỏa $1 \leq m \leq 9$.

Có 9 giá trị.

Câu 40: Chọn D

Ta thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x^2 - 2mx + m^2 + 1 = f(x) + (x-m)^2 + 1$.

Có $\begin{cases} f(x) \geq f(-1) = -3 \\ (x-m)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x) + (x-m)^2 + 1 \geq (-3) + 0 + 1 = -2$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x = -1 \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó $\min g(x) = g(-1) = -2$.

Câu 41: Chọn A

Ta thấy $\min f(x) = f(-1) = -3$.

Xét hàm số $g(x) = f(2x+3) + (x-2m)^2 - 1 \geq -3 + 0 - 1 = -4$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} f(2x+3) = -3 \\ x-2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = -1 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ m = -1 \end{cases}$.

Câu 42: Chọn C

+) Ta thấy $\max f(x) = f(3) = 4 \Leftrightarrow f(x) \leq f(3) = 4, x \in \mathbb{R}$.

+) Ta có $\begin{cases} f(3x-m) \leq f(3) = 4 \\ f(x^2-2x) \leq f(3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2f(x^2-2x) + f(3x-m) \leq 2.4 + 4 = 12$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} 3x-m = 3 \\ x^2-2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3x-3 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-6; 6\} = S$.

Vậy tổng các phần tử thuộc tập S bằng 0.

Câu 43: Chọn C

Ta thấy $\max f(x) = f(3) = 4$ nên

$$\begin{cases} f(3x-m) \leq 4 \\ f(x+n) \leq 4 \Rightarrow 3f(3x-m) + f(x+n) - x^2 + 4x \leq 20. \\ -x^2 + 4x \leq 4 \end{cases}$$

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x=2 \\ 3x-m=3 \\ x+n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ m=3 \\ n=1 \end{cases}$.

Vậy $2m-n=5$.

Câu 44: Chọn A

Ta thấy $\max f(x) = f(-3)$ nên $-f(f(x)) \geq -f(-3)$.

Mặt khác, $x^2 - 2m^2x + m^4 = (x-m^2)^2 \geq 0$.

Từ đó, ta có $g(x) = x^2 - 2m^2x + m^4 - f(f(x)) \geq -f(-3)$

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x=m^2 \\ f(x)=-3 \end{cases} \Rightarrow f(m^2)=-3(*)$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và (*) tồn tại $a < 0 < b < c < d$ để $\begin{cases} m^2 = a \\ m^2 = b \\ m^2 = c \\ m^2 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{b} \\ m = \pm\sqrt{c} \\ m = \pm\sqrt{d} \end{cases}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 45: Chọn C

Ta thấy $\begin{cases} \max f(x) = f(0) = 5 \\ \min f(x) = f(4) = -3 \end{cases}$ nên $\begin{cases} f(2x-m) \geq -3 \\ f(3x+n) \leq 5 \\ x^2 - 2x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow 2f(2x-m) - f(3x+n) + x^2 - 2x \geq -12$

.

Để xảy ra dấu bằng thì $\begin{cases} x=1 \\ 2x-m=4 \\ 3x+n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ m=-2 \\ n=-3 \end{cases}$

Vậy $T = 2m + 3n = -13$.

Câu 46: Chọn A

Ta có đạo hàm: $f'(x) = 2x - 2m$.

Bảng biến thiên:

x	$(-1$	m	$3)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$f(-1)$	$f(m)$	$f(3)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in (-1; 3) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-30; 30]} 0 \leq m \leq 2$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 47: Chọn B

Ta có đạo hàm: $f'(x) = -2x + 4m - 2$.

Bảng biến thiên:

x	$(-3$	$2m-1$	$11]$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(-3)$	$f(2m-1)$	$f(11)$

x	$(-3$	$11]$	$2m-1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(-3)$	$f(11)$	

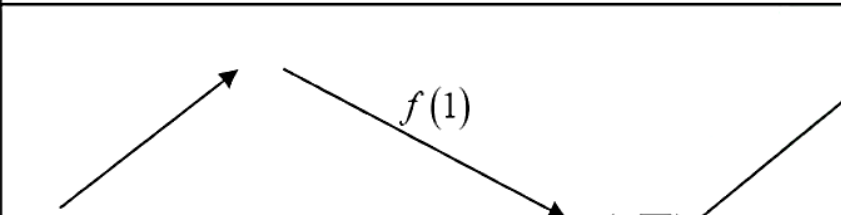
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3 < 2m-1 \Leftrightarrow -1 < m \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-30; 30]} 0 \leq m \leq 30$.

Vậy có tất cả 31 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 48: Ta có đạo hàm: $y' = 3x^2 - 3m$. Hàm số $y = x^3 - 3mx$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1; 3)$ khi có điểm cực tiểu trên $(1; 3)$ và giá trị cực tiểu nhỏ hơn giá trị của hàm số tại hai đầu mút.

Nhận thấy, khi $m \leq 0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cũng đồng biến trên $(1; 3)$) nên không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1; 3)$.

Khi $m > 0$, hàm số có điểm cực tiểu là $x = \sqrt{m}$

x	$-\sqrt{m}$	$(1$	$\sqrt{m}$	$3)$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

$$\text{Khi đó, ta phải có: } \begin{cases} \sqrt{m} \in (1;3) \\ f(\sqrt{m}) \leq f(1) \\ f(\sqrt{m}) \leq f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 9 \\ f(\sqrt{m}) \leq f(1) \\ f(\sqrt{m}) \leq f(3) \end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $\sqrt{m} \in (1;3) \Leftrightarrow 1 < m < 9 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} 2 \leq m \leq 8$.

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 49: Ta có đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx$. Hàm số $y = x^3 - 3mx^2$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $(1;3)$ khi có điểm cực đại trên $(-2;3)$ và giá trị cực đại lớn hơn giá trị của hàm số tại hai đầu mút.

Nhận thấy, khi $m = 0$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cũng đồng biến trên $(-2;3)$) nên không tồn tại giá trị lớn nhất nhất trên $(-2;3)$.

Khi $m > 0$ thì $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2m \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = 0$

$$\text{Khi đó ta phải có: } \begin{cases} m > 0 \\ 0 \in (-2;3) \\ f(0) \geq f(-2) \\ f(0) \geq f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \geq -8 - 12m \\ 0 \geq 27 - 27m \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

Khi $m < 0$ thì $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2m \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = 2m$

$$\text{Khi đó ta phải có: } \begin{cases} m < 0 \\ 2m \in (-2;3) \\ f(2m) \geq f(-2) \\ f(2m) \geq f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ -4m^3 \geq -8 - 12m \\ -4m^3 \geq 27 - 27m \end{cases} \Leftrightarrow \text{vô nghiệm}$$

Kết hợp lại ta được: $m \geq 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-30;30]} 1 \leq m \leq 30$.

Vậy có tất cả 30 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

DẠNG 4**GTLN-GTNN của hàm chứa dấu GTĐ****DẠNG 3: GTLN – GTNN CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI**

- Câu 1.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 + 4x - 5|$ trên đoạn $[-3; 0]$. Khi đó tổng $M + m$ là
- A. 5. B. 9. C. 14. D. 8.
- Câu 2.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 7|$ trên đoạn $[0; 4]$ là
- A. 0. B. 11. C. 9. D. 7.
- Câu 3.** Cho hàm số $y = |x^4 - 16x^2 - 7|$, gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$. Tính giá trị biểu thức $M - 2m$.
- A. 14. B. 57. C. 64. D. 60.
- Câu 4.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{2x-1}{x+2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$. Giá trị của biểu thức $2M - 3m$ là
- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. 0. D. 6.
- Câu 5.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} \right|$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$. Giá trị của biểu thức $3M + m$ bằng
- A. $\frac{27}{2}$. B. 10. C. $-\frac{40}{3}$. D. 16.
- Câu 6.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |e^{3x} - 4e^{2x} + 4e^x - 10|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$
- A. 9. B. 6. C. 10. D. 5.
- Câu 7.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |\ln^2 x - 2\ln x - 3|$ trên đoạn $[1; e^2]$. Giá trị $M + m$ bằng
- A. 4. B. 7. C. 5. D. 3.
- Câu 8.** Giả sử M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |\cos 2x + 2\sin x - 3|$ trên $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$. Tính $M - 4m$.
- A. 6. B. 0. C. -2. D. 3.
- Câu 9.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 1 + \sqrt{3 - x^2}|$. Khi đó $M + m = \frac{a}{4} + b\sqrt{c}$, với a, b, c nguyên. Tính $T = a + bc$.
- A. 7. B. 9. C. 12. D. 8.

Câu 10. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x-1| + x^2 - 5x + 3$ trên đoạn $[-2; 4]$. Tính giá trị biểu thức $T = M + m$.

- A. $T = 18$. B. $T = 19$. C. $T = 20$. D. $T = 2$.

Câu 11. Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3| + x^2 - 1$ trên $[-4; 2]$ bằng

- A. -200 . B. 200 . C. 50 . D. 0 .

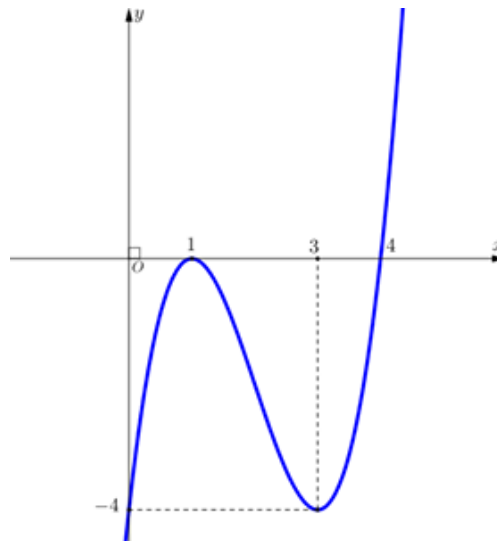
Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 3x + 2| + |x + 3|$ là 2^a . Tìm a .

- A. 0 . B. 2 . C. 3 . D. 1 .

Câu 13. Cho hàm số $y = |3x - 1| - 1 + |x^2 - 2|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$. Giả sử $\frac{M}{m} = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản), biểu thức $T = a + b$ có giá trị bằng

- A. 37 . B. 40 . C. 13 . D. 20 .

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) như hình vẽ sau



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 4]$. Khi đó biểu thức $M + 2m$ có giá trị

- A. 4 . B. 1 . C. 8 . D. 0 .

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(|x| + 1) - 1|$ trên đoạn $[-2; 2]$.

- A. 2 . B. 1 . C. 3 . D. 4 .

Câu 16. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 2x + m|$ trên $[-1; 2]$ bằng 5 .

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 17. Tính tích tất cả các số thực m để hàm số $y = \left| \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 8x + m \right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng 18 là.

A. 432.

B. -216.

C. -432.

D. 288.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^2 + m - 1|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -5.

B. 4.

C. -14.

D. -10.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-m}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để $\min_{[-2; 0]} |f(x)| = 2$. Tổng các phần tử của tập S là

A. 2.

B. -8.

C. -5.

D. 3.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1} + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\min_{[2; 3]} |f(x)| = 5$. Số phần tử của S là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng 9.

A. -10.

B. -6.

C. 4.

D. 8.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(\sin x + 1) + m|$ bằng 4. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

Câu 23. Biết đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và $f(1) = -1; f'(1) = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $|f(x) - m| \leq 12$ nghiệm đúng $\forall x \in [0; 2]$. Số phần tử của S là

A. 10.

B. 16.

C. 11.

D. 0.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2020}{x-m}$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\max_{[0; 2019]} |f(x)| = 2020$.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 25. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 + 2mx + 4m}{x+2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 1.

B. $-\frac{1}{2}$.C. $\frac{1}{2}$.D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 26. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - (m+1)x + m|$ trên $[2; m-1]$ nhỏ hơn 2020.

A. 2043210. B. 2034201. C. 3421020 D. 3412020.

Câu 27. Cho hàm số $y = \left| x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 3 + m \right|$. Tổng các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ không bé hơn 5.

A. 1. B. -1. C. 0. D. -7.

Câu 28. Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m \right|$. Tính tổng tất cả các số nguyên m để $\max_{[-1; 2]} y \leq 11$.

A. -19. B. -37. C. -30. D. -11.

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| -4\cos^2 x + 2\sin x + m + 4 \right|$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 4?

A. 12. B. 14. C. 13. D. 15.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \left| x^2 - 2mx + 3 \right|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$ không lớn hơn 3?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 31. Cho hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x + m \right|$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[-2; 3]} y < 50$. Tổng các phần tử của M là

A. 0. B. 737. C. 759. D. -215.

Câu 32. Cho hàm số $y = \left| x^4 - 2x^3 + x^2 + a \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $\max_{[-1; 2]} y \leq 100$.

A. 197. B. 196. C. 200. D. 201.

Câu 33. Cho hàm số $y = \left| \sin x + \cos x + m \right|$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất bé hơn 2.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 34. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| x^2 + 2x + m \right|$ trên đoạn $[-2; 1]$. Với $m \in [-3; 3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 35. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| x^3 + 3x^2 + m - 1 \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$. Với $m \in [-4; 3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

B. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \left| x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m \right|$. Khi m thuộc $[-3; 3]$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 37. Cho hàm số $y = \left| x^2 - 4x + 2m - 3 \right|$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a khi $m = b$. Tính $P = 2b - a$.

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{13}{4}$. C. $\frac{-9}{4}$. D. 6.

- Câu 38.** Cho hàm số $y = \left| x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27 \right|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tích các phần tử của S là
- A. 4. B. -4. C. 8. D. -8.
- Câu 39.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?
- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.
- Câu 40.** Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| x^2 - 2x + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là
- A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.
- Câu 41.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| x^3 - mx^2 - 9x + 9m \right|$ trên đoạn $[-2; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.
- Câu 42.** Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \left| -x^4 + 8x^2 + m \right|$ trên đoạn $[-1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. 23. B. 24. C. 25. D. 26.
- Câu 43.** Cho hàm số $y = \left| x^4 - 2x^3 + x^2 + a \right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min_{[-1; 2]} y + \max_{[-1; 2]} y = 10$
- A. 1. B. 5. C. 3. D. 2.
- Câu 44.** Cho hàm số $y = \left| \frac{x^2 + ax - 4}{x} \right|$ (a là tham số). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1; 4]$. Có bao nhiêu giá trị thực của a để $M + 2m = 7$?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 45.** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + m$ (m là tham số thực). Tìm tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0; 1]} |f(x)| + 2 \min_{[0; 1]} |f(x)| = 10$.
- A. 4. B. -3. C. 1. D. 2.
- Câu 46.** Cho hàm số $f(x) = \left| x^3 - 3x^2 + m \right|$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn $3 \max_{[1; 3]} f(x) - 2 \min_{[1; 3]} f(x) = 17$.
- A. $m \in \{9; -5; 29\}$. B. $m \in \left\{ 9; -5; \frac{-5}{3} \right\}$. C. $m \in \{9; -5\}$. D. $m \in \{9; -5; 5\}$.
- Câu 47.** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m$. Tích tất cả các giá trị của tham số m để $\min_{[0; 2]} |f(x)| + \max_{[0; 2]} |f(x)| = 6$ là
- A. -16 B. -9 C. 16 D. 144

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho

$$2\max_{[0;1]}|f(x)| + 3\min_{[0;1]}|f(x)| = 6. \text{ Số phần tử của } S \text{ là}$$

- A. 6. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4;4]$ như sau

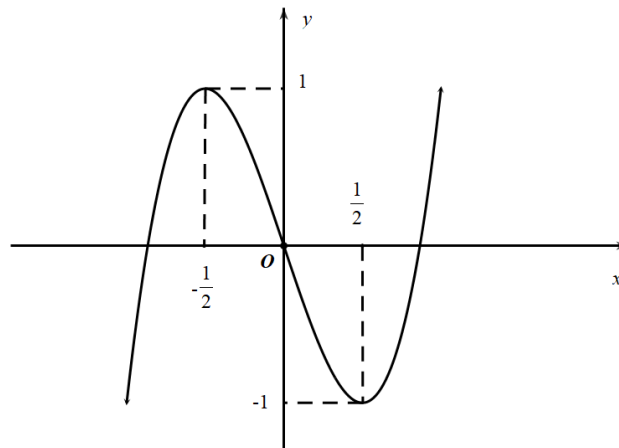
x	-4	-3	-1	0	2	4			
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	4 3 1 -4 2 -3								

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in [-4;4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số

$$g(x) = f(|x^3| + 3|x|) + f(m) \text{ trên đoạn } [-1;1] \text{ bằng } \frac{11}{2}.$$

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đặt $g(x) = |f(x)| - \sqrt{1-2|x|} + f\left(\frac{\sqrt{1+2m} - \sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0.

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.B	4.D	5.D	6.C	7.B	8.B	9.D	10.A
11.D	12.B	13.D	14.A	15.C	16.C	17.C	18.A	19.B	20.B
21.B	22.C	23.B	24.A	25.B	26.A	27.D	28.C	29.D	30.A
31.B	32.A	33.B	34.B	35.B	36.B	37.D	38.D	39.D	40.A
41.B	42.D	43.D	44.B	45.C	46.C	47.B	48.B	49.C	50.A

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1. Chọn C**

Xét $g(x) = x^2 + 4x - 5$ liên tục trên đoạn $[-3; 0]$.

Ta có $g'(x) = 2x + 4$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \in [-3; 0]$.

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-3; 0]$

x	-3	-2	0
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-8	-9	-5

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số suy ra $M = \max_{[-3; 0]} |g(x)| = \max\{|-8|; |-9|; |-5|\} = 9$,

$m = \min_{[-3; 0]} |g(x)| = \min\{|-8|; |-9|; |-5|\} = 5$. Vậy $M + m = 14$.

Câu 2. Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 7$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 4] \\ x = 2 \in [0; 4] \end{cases}$.

Ta có: $f(0) = -7$, $f(2) = -11$, $f(4) = 9$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$

x	0	2	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-7	-11	9

Khi đó $\max_{[0; 4]} f(x) = 9$, $\min_{[0; 4]} f(x) = -11$. Suy ra $\max_{[0; 4]} |f(x)| = 11$.

Câu 3. Chọn B

Xét hàm số $y = x^4 - 16x^2 - 7$ liên tục trên $[0; 4]$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 32x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 4] \\ x = 2\sqrt{2} \in [0; 4] \\ x = -2\sqrt{2} \notin [0; 4] \end{cases}$

Có bảng biến thiên

x	0	$2\sqrt{2}$	4
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	-7	-71	-7

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min_{[0;4]} |f(x)| = |f(0)| = |f(4)| = 7$; $\max_{[0;4]} |f(x)| = |f(2\sqrt{2})| = 71$.

Vậy $M - 2m = 57$.

Câu 4. Chọn D

Xét hàm số $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

$g'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in [-1; 1]$. Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1; 1]$.

$g(-1) = -3$; $g(1) = \frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ và $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$:

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$		+	
$g(x)$	-3		$\frac{1}{3}$
$f(x) = g(x) $	3	0	$\frac{1}{3}$

Suy ra $M = \max_{[-1;1]} f(x) = \max_{[-1;1]} |g(x)| = \max_{[-1;1]} \left\{ |-3|; \left| \frac{1}{3} \right| \right\} = 3$ khi $x = -1$.

Và $m = \min_{[-1;1]} f(x) = \min_{[-1;1]} |g(x)| = \min_{[-1;1]} \left\{ |-3|; 0; \left| \frac{1}{3} \right| \right\} = 0$ khi $x = \frac{1}{2}$.

Vậy $2M - 3m = 2.3 - 3.0 = 6$.

Câu 5. Chọn D.

Đặt $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$. Hàm số xác định và liên tục trên $D = \left[-2; \frac{1}{2} \right]$.

Ta có $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in D \\ x = 2 \notin D \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	-2	0	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\frac{13}{3}$	-3	$-\frac{7}{2}$

Ta có $f(-2) = -\frac{13}{3}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$, $f(0) = -3$.

Suy ra $\max_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} f(x) = -3$ tại $x = 0$, $\min_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} f(x) = -\frac{13}{3}$ tại $x = -2$.

Từ đó ta có, $M = \max_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} |f(x)| = \frac{13}{3}$ tại $x = -2$, $m = \min_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} |f(x)| = 3$ tại $x = 0$.

Vậy $3M + m = 16$.

Câu 6. Chọn C

Đặt $e^x = t$. Ta có $0 \leq x \leq \ln 4 \Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^{\ln 4} \Rightarrow 1 \leq t \leq 4$.

Khi đó hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ trở thành $g(t) = |t^3 - 4t^2 + 4t - 10|$, với $t \in [1; 4]$.

Xét hàm số $h(t) = t^3 - 4t^2 + 4t - 10$. Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1; 4]$.

$h'(t) = 3t^2 - 8t + 4$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \in [1; 4] \\ t = \frac{2}{3} \notin [1; 4] \end{cases}$; $h(1) = -9$, $h(2) = -10$, $h(4) = 6$.

Khi đó $\max_{[1; 4]} h(t) = 6$, $\min_{[1; 4]} h(t) = -10$.

Suy ra $\max_{[0; \ln 4]} f(x) = \max_{[1; 4]} |h(t)| = 10$ khi $t = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ là 10.

Câu 7. Chọn B

Xét $u(x) = \ln^2 x - 2\ln x - 3$ trên $[1; e^2]$; $u(x)$ xác định và liên tục trên $[1; e^2]$.

Ta có $u'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}$, $u'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \in (1; e^2)$.

Ta có $u(1) = -3$, $u(e) = -4$, $u(e^2) = -3$.

$M = \max_{[1; e^2]} f(x) = \max_{[1; e^2]} |u(x)| = \max\{|u(1)|, |u(e)|, |u(e^2)|\} = 4$ khi $x = e$.

$m = \min_{[1; e^2]} f(x) = \min_{[1; e^2]} |u(x)| = \min\{|u(1)|, |u(e)|, |u(e^2)|\} = 3$ khi $x = 1$.

Vậy $M + m = 4 + 3 = 7$.

Câu 8. Chọn B

Xét hàm số $u(x) = \cos 2x + 2 \sin x - 3$ với $x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$. $u(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

+) $u'(x) = -2 \sin 2x + 2 \cos x$.

+) $u'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin 2x + 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$. Mà $x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ nên $x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

+) $u(0) = -2$, $u\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -6$, $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, $u\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$, $u\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$.

Khi đó: $\max_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} u(x) = -\frac{3}{2}$, $\min_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} u(x) = -6$.

Suy ra: $M = \max_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} |u(x)| = 6$ khi $x = \frac{3\pi}{2}$, $m = \min_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} |u(x)| = \frac{3}{2}$ khi $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Vậy $M - 4m = 0$.

Câu 9. Chọn D

Tập xác định: $D = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. Đặt $t = \sqrt{3 - x^2}$, $t \in [0; \sqrt{3}]$.

Khi đó hàm số đã cho trở thành: $y = |-t^2 + t + 2| = |t^2 - t - 2|$.

Xét $g(t) = t^2 - t - 2$ liên tục trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ ta có: $g'(t) = 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của $y = g(t)$ và $y = |g(t)|$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

t	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$g'(t)$		0	+
$g(t)$	-2	$-\frac{9}{4}$	$1 - \sqrt{3}$
$ g(t) $	2	$\frac{9}{4}$	$\sqrt{3} - 1$

Từ bảng biến thiên ta có: $M = \left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{9}{4}$; $m = |g(\sqrt{3})| = \sqrt{3} - 1$.

$$\Rightarrow M + m = \frac{5}{4} + \sqrt{3} \Rightarrow a = 5; b = 1; c = 3. \text{ Vậy } T = a + bc = 5 + 1.3 = 8.$$

Câu 10. Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(x) = |x-1| + x^2 - 5x + 3 = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 - 6x + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

Với $x \geq 1$: Ta có $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Đạo hàm: $f'(x) = 2x - 4$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận).

Với $x < 1$: Ta có $f(x) = x^2 - 6x + 4$. Đạo hàm: $f'(x) = 2x - 6$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (loại).

$$f(-2) = 20; f(2) = -2; f(4) = 2.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = |x-1| + x^2 - 5x + 3$ trên đoạn $[-2; 4]$.

x	-2	1	2	4
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	20	-1	-2	2

Ta có $M = \max_{x \in [-2; 4]} f(x) = f(-2) = 20$; $m = \min_{x \in [-2; 4]} f(x) = f(2) = -2$. Vậy $T = M + m = 18$.

Câu 11. Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \begin{cases} 2x^2 - 4x + 2 & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ 4x - 4 & \text{khi } x \in (1; 3) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 4x - 4 & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ 4 & \text{khi } x \in (1; 3) \end{cases}.$$

Có $y' = 0$ (Vô nghiệm).

Bảng biến thiên

x	-4	1	2
y'	-		+
y	50	0	4

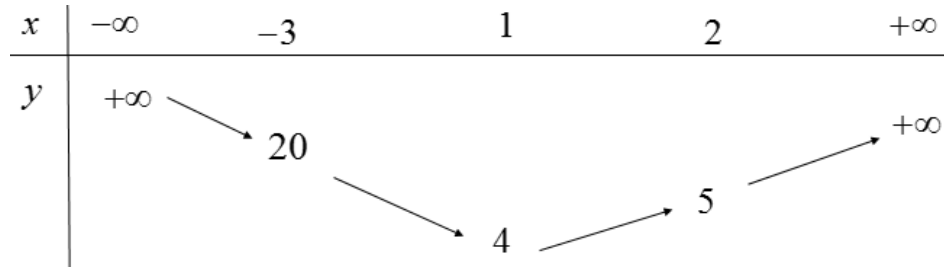
$$\text{Ta có: } \begin{cases} y(-4) = 50 \\ y(1) = 0 \\ y(2) = 4 \end{cases}. \text{ Suy ra } \max_{[-4; 2]} y = 50 \text{ tại } x = -4; \min_{[-4; 2]} y = 0 \text{ tại } x = 0.$$

$$\text{Vậy } \left(\max_{[-4; 2]} y \right) \cdot \left(\min_{[-4; 2]} y \right) = 0.$$

Câu 12. Chọn B

Ta có $y = |x^2 - 3x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x - 1 & \text{khi } x < -3 \\ x^2 - 2x + 5 & \text{khi } -3 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x + 1 & \text{khi } 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x + 5 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:



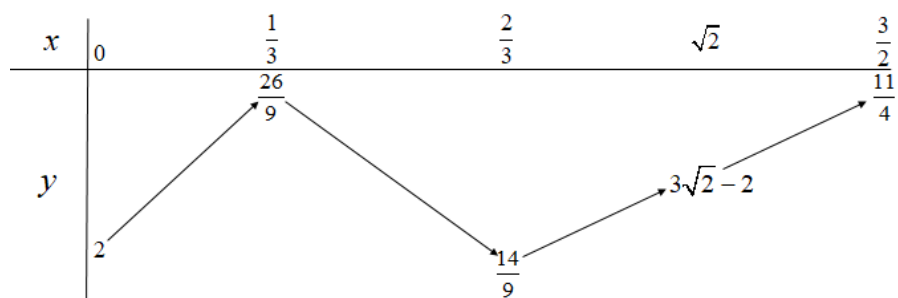
Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là $4 \Rightarrow 2^a = 4 \Rightarrow a = 2$.

Câu 13. Chọn D

Ta có $y = \begin{cases} |3x| + x^2 - 2 & \text{khi } x \leq -\sqrt{2} \\ |3x| + 2 - x^2 & \text{khi } -\sqrt{2} < x \leq \frac{1}{3} \\ |3x - 2| + 2 - x^2 & \text{khi } \frac{1}{3} \leq x < \sqrt{2} \\ |3x - 2| + x^2 - 2 & \text{khi } x \geq \sqrt{2} \end{cases}$.

Xét trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ ta có: $y = \begin{cases} -x^2 + 3x + 2 & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -x^2 - 3x + 4 & \text{khi } \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ -x^2 + 3x & \text{khi } \frac{2}{3} < x \leq \sqrt{2} \\ x^2 + 3x - 4 & \text{khi } \sqrt{2} < x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$



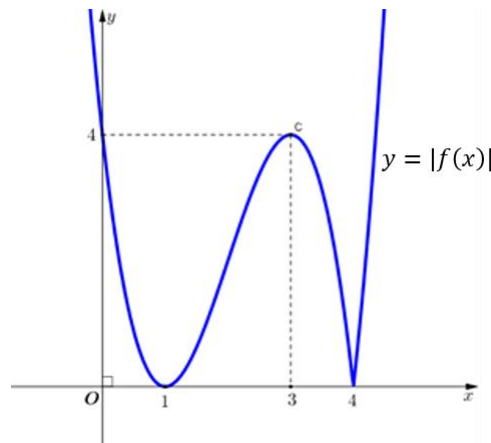
Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra $M = \max_{\left[0; \frac{3}{2}\right]} y = \frac{26}{9}; m = \min_{\left[0; \frac{3}{2}\right]} y = \frac{14}{9}$.

Vậy $\frac{M}{m} = \frac{13}{7}$ hay $a = 13; b = 7 \Rightarrow T = a + b = 20$.

Câu 14. Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị trên trục hoành và phía trên trục hoành của (C) (ứng với $f(x) \geq 0$), lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C) (ứng với $f(x) < 0$). Bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành của (C) .



Dựa vào đồ thị ta suy ra $M = \max_{[0;4]} |f(x)| = 4$, đạt được khi $x = 0$ hoặc $x = 3$.

$m = \min_{[0;4]} |f(x)| = 0$, đạt được khi $x = 1$ hoặc $x = 4$. Vậy $M + 2m = 4$.

Câu 15. Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f(x+1)$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Khi đó hàm số $p(x) = g(|x|) = f(|x|+1)$ là hàm chẵn nên có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$p'(x)$		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$p(x)$	$+\infty$						$+\infty$

Diagram illustrating the function $p(x)$ and its derivative $p'(x)$ over the domain $x \in (-\infty, +\infty)$.

The derivative $p'(x)$ is zero at $x = -2$ and $x = 2$. The function $p(x)$ has local minima at $x = -2$ and $x = 2$, and local maxima at $x = 0$.

The function $p(x)$ is increasing on $(-\infty, -2)$, decreasing on $(-2, 0)$, increasing on $(0, 2)$, decreasing on $(2, +\infty)$, and increasing on $(+\infty, +\infty)$.

Xét hàm số $h(x) = f(|x|+1) - 1 = g(|x|) - 1 = p(x) - 1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$						$+\infty$

Diagram illustrating the function $h(x)$ and its derivative $h'(x)$ across the domain of x .

The domain of x is marked at $-\infty$, -2 , 0 , 2 , and $+\infty$.

The derivative $h'(x)$ is marked at $-\infty$, -2 , 0 , 2 , and $+\infty$ with signs: $-$, 0 , $+$, $-$, 0 , $+$.

The function $h(x)$ is marked at $-\infty$, -2 , 0 , 2 , and $+\infty$ with values: $+\infty$, -3 , 1 , -3 , $+\infty$.

Arrows indicate the path of the function $h(x)$ between these marked points: from $+\infty$ at $x = -\infty$ to -3 at $x = -2$; from -3 at $x = -2$ to 1 at $x = 0$; from 1 at $x = 0$ to -3 at $x = 2$; and from -3 at $x = 2$ to $+\infty$ at $x = +\infty$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(|x|+1)-1| = |h(x)|$

x	$-\infty$	a	-2	b	0	c	2	d	$+\infty$
y'		$-$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$								$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(|x|+1)-1|$ trên đoạn $[-2;2]$ là 3 tại $x = 2$.

Câu 16. Chọn C

Đặt $g(x) = x^2 - 2x + m$. Ta có: $g'(x) = 2x - 2 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} g(-1) = m + 3 \\ g(1) = m - 1 \\ g(2) = m \end{cases} \quad \text{Suy ra } \begin{cases} \min_{[-1;2]} g(x) = m - 1 \\ \max_{[-1;2]} g(x) = m + 3 \end{cases}.$$

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ suy ra $\min_{[-1;2]} f(x) = m - 1 \Leftrightarrow m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = 6$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -3$ suy ra $\min_{[-1;2]} f(x) = -m - 3 \Leftrightarrow -m - 3 = 5 \Leftrightarrow m = -8$ (tm).

Trường hợp 3: $m - 1 \leq 0 \leq m + 3 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$ suy ra $\min_{[-1;2]} f(x) = 0$ mà theo bài $\min_{[-1;2]} f(x) = 5$ nên không có m thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị của tham số m thỏa mãn.

Câu 17. Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 8x + m$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^2 - 12x + 8; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 3] \\ x = 2 \in [0; 3] \end{cases}.$$

$$\text{Mặt khác: } f(0) = m; \quad f(1) = \frac{10}{3} + m; \quad f(2) = \frac{8}{3} + m; \quad f(3) = 6 + m.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[0;3]} f(x) = \max\{f(0); f(1); f(2); f(3)\} = f(3) = m + 6 \\ \min_{[0;3]} f(x) = \min\{f(0); f(1); f(2); f(3)\} = f(0) = m \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[0;3]} y = \min\{0; |m|; |m + 6|\}.$$

Trường hợp 1. $m > 0$ suy ra $\min_{[0;3]} y = m \Leftrightarrow m = 18$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2. $m + 6 < 0 \Leftrightarrow m < -6$ suy ra $\min_{[0;3]} y = -m - 6 \Leftrightarrow -m - 6 = 18 \Leftrightarrow m = -24$ (tm).

Trường hợp 3. $m(m + 6) \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 0 \Rightarrow \min_{[0;3]} y = 0$ (loại).

Kết luận: tích các số thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-24.18 = -432$.

Câu 18. Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 2x^2 + m - 1$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$ có $g'(x) = 4x^3 - 4x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 0 \in [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \end{cases}; g(0) = m - 1, g(1) = m - 2, g(2) = m + 7.$$

$$\Rightarrow \min_{x \in [0; 2]} g(x) = m - 2, \max_{x \in [0; 2]} g(x) = m + 7 \Rightarrow \min_{x \in [0; 2]} f(x) = \min\{0, |m - 2|, |m + 7|\}.$$

Trường hợp 1: $m > 2$ suy ra $\min_{x \in [0; 2]} f(x) = m - 2 \Leftrightarrow m - 2 = 18 \Leftrightarrow m = 20$ (nhận).

Trường hợp 2: $m + 7 < 0 \Leftrightarrow m < -7 \Rightarrow \min_{x \in [0; 2]} f(x) = -m - 7 \Leftrightarrow -m - 7 = 18 \Leftrightarrow m = -25$ (nhận).

Trường hợp 3: $(m - 2)(m + 7) \leq 0 \Leftrightarrow -7 \leq m \leq 2 \Rightarrow \min_{x \in [0; 2]} f(x) = 0$ (loại).

Suy ra $m \in \{20; -25\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -5 .

Câu 19. Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Với $m = 2$. Ta có $f(x) = \frac{2x - 2}{1 - x} = -2$ nên $\min_{[-2; 0]} |f(x)| = 2$. Vậy $m = 2$ (nhận).

Với $m \neq 2$. Khi đó, $f'(x) = \frac{2 - m}{(1 - x)^2}, \forall x \neq 1$.

Ta có $f(-2) = \frac{-m - 4}{3}, f(0) = -m; f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - m \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ thuộc $[-2; 0]$

tức là $-2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$. Khi đó $\min_{[-2; 0]} |f(x)| = 0$ (loại).

Trường hợp 2: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không cắt trục hoành hoặc cắt trục hoành tại một điểm

có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-2; 0]$, tức là $\begin{cases} \frac{m}{2} < -2 \\ \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 0 \end{cases} (*)$.

Khi đó: $\min_{[-2; 0]} |f(x)| = \min\{|f(-2)|; |f(0)|\} = \min\left\{\left|\frac{-m - 4}{3}\right|; |-m|\right\} = \min\left\{\left|\frac{m + 4}{3}\right|; |m|\right\}$.

Nếu $\left|\frac{m + 4}{3}\right| \leq |m| \Leftrightarrow |m + 4| \leq 3|m| \Leftrightarrow (m + 4)^2 \leq (3m)^2 \Leftrightarrow (4 - 2m)(4m + 4) \leq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases} (**) \text{ thì } \min_{[-2; 0]} |f(x)| = \left|\frac{m + 4}{3}\right|$.

Ta có $\left|\frac{m + 4}{3}\right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m + 4 = 6 \\ m + 4 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ (loại, } m \neq 2) \\ m = -10 \text{ (nhận)} \end{cases}$ (do điều kiện $(*)$ và $(**)$).

Nếu $\left|\frac{m + 4}{3}\right| > |m| \Leftrightarrow -1 < m < 2$ thì $\min_{[-2; 0]} |f(x)| = |m|$.

Ta có $|m| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 & (\text{loại}) \\ m = -2 & (\text{loại}) \end{cases}$. Suy ra $S = \{2; -10\}$. Vậy tổng các phần tử của S là -8 .

Câu 20. Chọn B

Hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1} + m$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$ có $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$; $x = 0, x = 2 \notin (2; 3)$ và $f(2) = m + 4$, $f(3) = m + \frac{9}{2}$.

Nếu $f(2) \cdot f(3) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq m \leq -4$ thì $\min_{[2; 3]} |f(x)| = 0$. Trường hợp này không thoả yêu cầu bài toán.

Ta xét trường hợp $f(2) \cdot f(3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{9}{2} \\ m > -4 \end{cases}$.

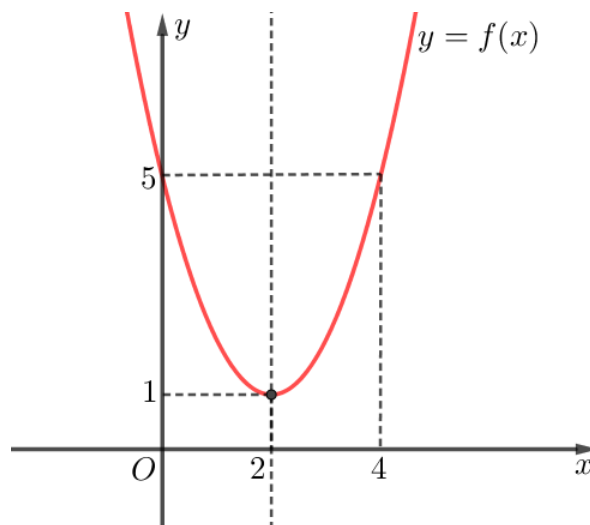
Khi đó $\min_{[2; 3]} |f(x)| = \min\{|f(2)|; |f(3)|\} = \min\left\{|m+4|; \left|m+\frac{9}{2}\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\min_{[2; 3]} |f(x)| = |m+4| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+4| = 5 \\ \left|m+\frac{9}{2}\right| \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \\ m \leq -\frac{19}{2} \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \text{ (thoả mãn)}.$

Trường hợp 2: $\min_{[2; 3]} |f(x)| = \left|m+\frac{9}{2}\right| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \left|m+\frac{9}{2}\right| = 5 \\ |m+4| \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{19}{2} \\ m \leq -9 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{19}{2} \text{ (thoả mãn)}.$

Vậy có 2 giá trị của m thoả mãn bài toán.

Câu 21. Chọn B



Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ta có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ là trục đối xứng, mà $f(0) = 5 \Rightarrow f(4) = 5$. Suy ra: $1 \leq f(x) \leq 5, \forall x \in [0; 4]$.

Xét hàm số $g(x) = |f(x) + m|, \forall x \in [0; 4]$.

Ta có: $\max_{[0;4]} g(x) = \max\{|m+1|; |m+5|\}$.

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} |m+1| \geq |m+5| \\ \max_{[0;4]} g(x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ |m+1| = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m = 8 \\ m = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = -10.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} |m+1| < |m+5| \\ \max_{[0;4]} g(x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ |m+5| = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m = 4 \\ m = -14 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy tổng tất cả giá trị nguyên của m là: $-10 + 4 = -6$.

Câu 22. Chọn C

Đặt $t = \sin x + 1 (t \in [0; 2])$, khi đó $y = |f(\sin x + 1) + m| = |f(t) + m| = |t^3 - 3t + m|$.

Xét hàm số $u(t) = t^3 - 3t + m$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$ có $u'(t) = 3t^2 - 3$.

$$u'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [0; 2] \\ t = -1 \notin [0; 2] \end{cases}.$$

Ta có $u(0) = m; u(1) = m - 2; u(2) = m + 2 \Rightarrow \max_{[0;2]} u(x) = m + 2, \min_{[0;2]} u(x) = m - 2$.

Khi đó $\max y = \max\{|m-2|; |m+2|\}$.

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} |m-2| = 4 \\ |m-2| \geq |m+2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} |m+2| = 4 \\ |m+2| \geq |m-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $S \in \{-2; 2\} \Rightarrow -2 + 2 = 0$.

Câu 23. Chọn B

Đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành nên đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ, suy ra $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 (I)$.

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} (II).$$

Từ (I) và (II) suy ra $a = 1; b = -2; c = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2$.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0; 2]$.

Để thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } y(0) = -m; y(1) = -m - 1; y(2) = -m + 8. \Rightarrow \begin{cases} \max_{[0; 2]} y = -m + 8 \\ \min_{[0; 2]} y = -m - 1 \end{cases}.$$

Theo

bài

ra

$$|x^4 - 2x^2 - m| \leq 12, \forall x \in [0; 2] \Leftrightarrow \max\{|-m - 1|; |-m + 8|\} \leq 12 \Leftrightarrow \begin{cases} |-m + 8| \leq 12 \\ |-m + 8| \geq |-m - 1| \\ |-m - 1| \leq 12 \\ |-m - 1| \geq |-m + 8| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq m \leq 20 \\ m \leq \frac{7}{2} \\ -13 \leq m \leq 11 \\ m \geq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq m \leq \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \leq m \leq 11 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 11. \text{ Suy ra } S \text{ có 11 phần tử.}$$

Câu 24. Chọn A

Hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \neq m$.

Nếu $m = -2020$ thì $f(x) = 1, \forall x \neq -2020$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m \neq -2020$ thì $f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$ nên yêu cầu bài toán

$$\max_{[0; 2019]} |f(x)| = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0; 2019] \\ \max\{|f(0)|; |f(2019)|\} = 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0; 2019] \\ \max\left\{\frac{2020}{|m|}; \frac{4039}{|m - 2019|}\right\} = 2020 \end{cases}. \text{ Ta}$$

xét hai trường hợp sau:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} m \notin [0; 2019] \\ \frac{2020}{|m|} = 2020 \\ \frac{4039}{|m - 2019|} \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < 0 \\ m > 2019 \end{cases} \\ m = \pm 1 \\ \frac{4039}{|m - 2019|} \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} m \notin [0; 2019] \\ \frac{4039}{|m-2019|} = 2020 \Leftrightarrow \\ \frac{2020}{|m|} \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2019 \\ m = \frac{4082419}{2020} \approx 2021 \\ m = \frac{4074341}{2020} \approx 2017 \\ \frac{2020}{|m|} \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{4082419}{2020} \approx 2021.$$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25. Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 2mx + 4m}{x + 2}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Hàm số xác định và liên tục trên $[-1; 1]$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}. \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -4 \notin [-1; 1] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } g(0) = 2m; \quad g(-1) = 2m + 1; \quad g(1) = 2m + \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow \max_{[-1; 1]} g(x) = 2m + 1; \quad \min_{[-1; 1]} g(x) = 2m.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-1; 1]} f(x) = \max\{|2m + 1|; |2m|\}. \text{ Ta có } \max_{[-1; 1]} f(x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |2m + 1| = 3 \\ |2m + 1| \geq |2m| \\ |2m| = 3 \\ |2m| \geq |2m + 1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } S = \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}. \text{ Vậy tổng các phần tử thuộc tập } S \text{ bằng } -\frac{1}{2}.$$

Câu 26. Chọn A

Cách 1:

Xét hàm số $f(x) = x^2 - (m+1)x + m$ liên tục trên $[2; m-1]$ với $m > 6$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2x - (m+1); \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m+1}{2} \in [2; m-1].$$

$$\text{Khi đó: } f(2) = 2 - m; \quad f\left(\frac{m+1}{2}\right) = -\frac{(m-1)^2}{4}; \quad f(m-1) = 2 - m.$$

$$\text{Vì } -\frac{(m-1)^2}{4} \leq 2 - m < 0, \forall m > 6 \text{ nên}$$

$$\max_{[2; m-1]} f(x) = \max\left\{f(2); f\left(\frac{m+1}{2}\right); f(m-1)\right\} = 2 - m;$$

$$\text{và } \min_{[2; m-1]} f(x) = \min\left\{f(2); f\left(\frac{m+1}{2}\right); f(m-1)\right\} = -\frac{(m-1)^2}{4}.$$

$$\text{Do đó: } \min_{[2; m-1]} y = \min \left\{ |2-m|; \left| -\frac{(m-1)^2}{4} \right| \right\} = |2-m|$$

Theo yêu cầu bài toán: $|2-m| < 2020 \Leftrightarrow -2020 < 2-m < 2020 \Leftrightarrow -2018 < m < 2022$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 6$ nên $m \in \{7; 8; 9; \dots; 2021\}$.

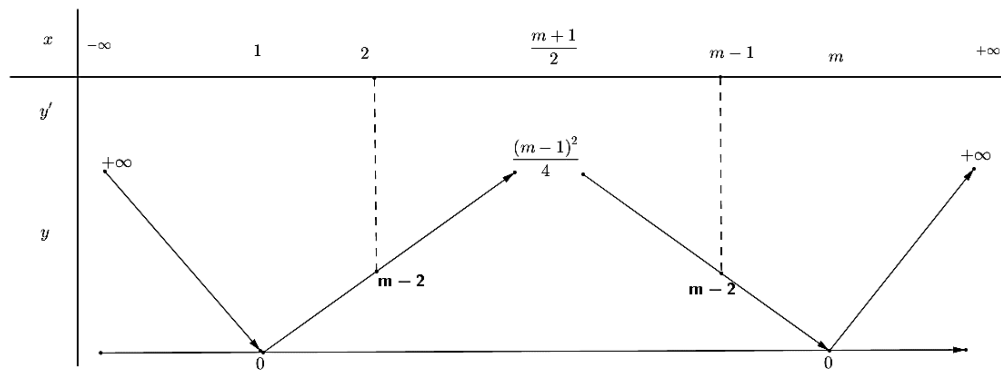
Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $\sum_{n=7}^{2021} n = \frac{(7+2021)2015}{2} = 2043210$.

Cách 2:

Xét hàm số $f(x) = x^2 - (m+1)x + m$ liên tục trên $[2; m-1]$ với $m > 6$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=m \end{cases}. \text{ Do } m > 6 \text{ nên ta có: } \begin{cases} \frac{m+1}{2} > 2 \\ \frac{m+1}{2} < m-1 \end{cases}.$$

$$f(2) = 2-m; f\left(\frac{m+1}{2}\right) = -\frac{(m-1)^2}{4}; f(m-1) = 2-m.$$



Từ bảng biến thiên suy ra: $\min_{[2; m-1]} |f(x)| = m-2$

Theo bài ra ta có: $\min_{[2; m-1]} |f(x)| < 2020 \Leftrightarrow m-2 < 2020 \Leftrightarrow m < 2022$.

Kết hợp với điều kiện $m > 6$ suy ra $m \in \{7; 8; \dots; 2021\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $\sum_{n=7}^{2021} n = \frac{(7+2021)2015}{2} = 2043210$.

Câu 27. Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 3 + m$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 9x + 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \in [0; 3] \\ x=2 \in [0; 3] \end{cases}.$$

$$f(0) = -3 + m; f(1) = -\frac{1}{2} + m; f(2) = -1 + m; f(3) = \frac{3}{2} + m.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0; 3]} f(x) = \frac{3}{2} + m; \min_{[0; 3]} f(x) = -3 + m.$$

Trường hợp 1: $\left(\frac{3}{2} + m\right)(-3 + m) \leq 0$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số y trên đoạn $[0; 3]$ là 0 (loại).

Trường hợp 2: $\left(\frac{3}{2} + m\right)(-3 + m) > 0$. Khi đó: $\min_{[0;3]} y = \min \left\{ \left| \frac{3}{2} + m \right|; |-3 + m| \right\}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ không bé hơn 5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{3}{2} + m \right| \geq |-3 + m| \\ |-3 + m| \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{4} \\ m \geq 8 \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 8 \\ m \leq -\frac{13}{2} \end{cases}$$

Suy ra các giá trị $m \in [-10; 10]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = \{-10; -9; -8; -7; 8; 9; 10\}$.

Vậy tổng các giá trị m cần tìm là -7 .

Câu 28. Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = 1 \in [-1; 2] \\ x = 2 \in [-1; 2] \end{cases}$$

$$f(-1) = \frac{9}{4} + m; f(0) = m; f(1) = \frac{1}{4} + m; f(2) = m.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[-1;2]} f(x) = \max \{f(-1); f(0); f(1); f(2)\} = f(-1) = m + \frac{9}{4} \\ \min_{[-1;2]} f(x) = \min \{f(-1); f(0); f(1); f(2)\} = f(0) = f(2) = m \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;3]} y = \max \left\{ m + \frac{9}{4}, |m| \right\}, \text{ theo yêu cầu bài toán } \max_{[0;3]} y \leq 11 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| m + \frac{9}{4} \right| \leq 11 \\ \left| m + \frac{9}{4} \right| \geq |m| \\ |m| \leq 11 \\ |m| \geq \left| m + \frac{9}{4} \right| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{53}{4} \leq m \leq \frac{35}{4} \\ m \geq -\frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{8} \leq m \leq \frac{35}{4} \\ -11 \leq m \leq -\frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow -11 \leq m \leq \frac{35}{4}.$$

Vì m nguyên nên $m = \{-11; -10; \dots; 8\}$.

Kết luận: tổng các số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-11 - 10 - 9 - \dots + 8 = -30$.

Câu 29. Chọn D

Ta có: $y = |-4\cos^2 x + 2\sin x + m + 4| = |4(1 - \cos^2 x) + 2\sin x + m| = |4\sin^2 x + 2\sin x + m|$.

Đặt $t = \sin x$, do $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên suy ra $t \in [0; 1]$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |4t^2 + 2t + m|$ trên đoạn $[0; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 + 2t + m$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, ta có:

$$f'(t) = 8t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \notin [0; 1].$$

$$f(0) = m; f(1) = m + 6.$$

Trường hợp 1: Nếu $m \geq 0 \Rightarrow \min_{[0;1]} y = m$. Kết hợp với giả thiết ta có $0 \leq m \leq 4$. (1)

Trường hợp 2: Nếu $m + 6 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -6 \Rightarrow \min_{[0;1]} y = -m - 6$. Kết hợp với giả thiết ta có

$$\begin{cases} -m - 6 \leq 4 \\ m \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow -10 \leq m \leq -6. \quad (2)$$

Trường hợp 3: Nếu $m(m + 6) < 0 \Leftrightarrow -6 < m < 0 \Rightarrow \min_{[0;1]} y = 0 \leq 4$. Trường hợp này thỏa mãn. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $m \in [-10; 4]$. Vì m là số nguyên nên $m \in \{-10, -9, -8, \dots, 2, 3, 4\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30. Chọn A

Ta có giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$ không lớn hơn 3, tức là $\max_{[1;2]} f(x) \leq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx + 3 \leq 3, \forall x \in [1; 2] \\ x^2 - 2mx + 3 \geq -3, \forall x \in [1; 2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq x, \forall x \in [1; 2] \\ 2m \leq \frac{x^2 + 6}{x}, \forall x \in [1; 2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq \max_{[1;2]}(x) & (1) \\ 2m \leq \min_{[1;2]}\left(\frac{x^2 + 6}{x}\right) & (2) \end{cases}.$$

$$(1) \Leftrightarrow 2m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Xét hàm $g(x) = \frac{x^2 + 6}{x} = x + \frac{6}{x}$ với $x \in [1; 2]$ có $g'(x) = 1 - \frac{6}{x^2}$.

Suy ra: $g'(x) < 0, \forall x \in [1; 2] \Rightarrow \min_{[1;2]} g(x) = g(2) = 5$. Do đó (2) $\Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$.

Vậy $1 \leq m \leq \frac{5}{2}$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Câu 31. Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}. \text{ Có } f(-2) = m - 2; f(-1) = m + 5; f(3) = m - 27.$$

Suy ra $\max_{[-2; 3]} f(x) = m + 5; \min_{[-2; 3]} f(x) = m - 27$.

Do đó $M = \max_{[-2; 3]} y = \max\{|m + 5|; |m - 27|\}$.

$$M < 50 \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 5| \geq |m - 27| \\ |m + 5| < 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 22 \geq 0 \\ -50 < m + 5 < 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [11; 45) \\ m \in (-23; 45) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-23; 45).$$

Do đó $S = \{-22; -21; -20; \dots; -1; 0; 1; 2; \dots; 44\}$.

Vậy tổng các phần tử của M là 737.

Câu 32: Chọn A

Xét $u = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ có $u' = 4x^3 - 6x^2 + 2x$.

$$\text{Giải phương trình } u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = 1 \in [-1; 2] \\ x = \frac{1}{2} \in [-1; 2] \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M = \max_{[-1; 2]} u = \max\left\{u(-1), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1), u(2)\right\} = u(-1) = u(2) = a + 4 \\ m = \min_{[-1; 2]} u = \min\left\{u(-1), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1), u(2)\right\} = u(0) = u(1) = a \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1; 2]} y = \max\{|a + 4|, |a|\} \leq 100 \Leftrightarrow \begin{cases} |a + 4| \leq |a| \leq 100 \\ |a| \leq |a + 4| \leq 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -100 \leq a \leq -2 \\ -2 \leq a \leq 96 \end{cases}.$$

Vậy $a \in \{-100, -99, \dots, 96\}$ có 197 số nguyên thỏa mãn.

Câu 33. Chọn B

Xét hàm số $f(x) = \sin x + \cos x + m$, có tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-\sqrt{2} + m \leq \sin x + \cos x + m \leq \sqrt{2} + m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $-\sqrt{2} + m \leq f(x) \leq \sqrt{2} + m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy: $\max_D y = |m + \sqrt{2}|$ hoặc $\max_D y = |m - \sqrt{2}|$.

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} |m + \sqrt{2}| < 2 \\ |m - \sqrt{2}| \leq |m + \sqrt{2}| \end{cases} \\ \begin{cases} |m - \sqrt{2}| < 2 \\ |m + \sqrt{2}| \leq |m - \sqrt{2}| \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -2 - \sqrt{2} < m < 2 - \sqrt{2} \\ m \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 + \sqrt{2} < m < 2 + \sqrt{2} \\ m \leq 0 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m < 2 - \sqrt{2} \\ -2 + \sqrt{2} < m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 + \sqrt{2} < m < 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$. Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 34. Chọn B

Xét $f(x) = x^2 + 2x + m$ liên tục trên $[-2; 1]$. Ta có: $f'(x) = 2x + 2$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-2; 1); f(-2) = m; f(1) = m + 3; f(-1) = m - 1;$$

Trường hợp 1: $(m - 1)(m + 3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$, lúc đó $M = \min_{[-2; 1]} y = 0$.

Trường hợp 2: $(m - 1)(m + 3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases} (*)$.

Do đó: $M = \min_{[-2; 1]} y = \min\{|m - 1|; |m + 3|\}$.

Khi $|m - 1| \leq |m + 3| \Leftrightarrow (m - 1)^2 \leq (m + 3)^2 \Leftrightarrow m \geq -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m > 1$, lúc đó: $M = \min_{[-2; 1]} y = |m - 1|$.

Khi $|m - 1| > |m + 3| \Leftrightarrow m < -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m < -3$, lúc đó:

$$M = \min_{[-2; 1]} y = |m + 3|.$$

Xét các giá trị $m \in [-3; 3]$

$$M = \begin{cases} 0 & \text{khi } -3 \leq m \leq 1 \\ |m - 1| & \text{khi } 1 < m \leq 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{khi } -3 \leq m \leq 1 \\ m - 1 & \text{khi } 1 < m \leq 3 \end{cases}.$$

Dễ dàng nhận thấy M đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $m = 3$.

Câu 35. Chọn B

Xét $f(x) = x^3 + 3x^2 + m - 1$ trên $[-1; 1]$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3x^2 + 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}.$$

$$f(-1) = m + 1; f(0) = m - 1; f(1) = m + 3;$$

Trường hợp 1: $(m - 1)(m + 3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$, $M = \min_{[-1; 1]} y = 0$.

Trường hợp 2: $(m - 1)(m + 3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \end{cases} (*)$.

Do đó: $M = \min_{[-1; 1]} y = \min\{|m - 1|; |m + 3|\}$.

Khi $|m-1| \leq |m+3| \Leftrightarrow (m-1)^2 \leq (m+3)^2 \Leftrightarrow m \geq -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m > 1$,

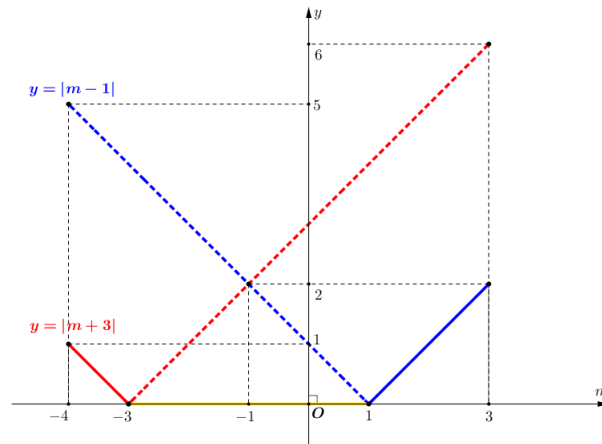
lúc đó: $M = \min_{[-1;1]} y = |m-1|$.

Khi $|m-1| > |m+3| \Leftrightarrow m < -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m < -3$, lúc đó:

$$M = \min_{[-1;1]} y = |m+3|.$$

Xét các giá trị $m \in [-4;3]$:

$$M = \begin{cases} |m+3| & \text{khi } -4 \leq m < -3 \\ 0 & \text{khi } -3 \leq m \leq 1 \\ |m-1| & \text{khi } 1 < m \leq 3 \end{cases}$$



Dựa vào đồ thị, M đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $m = 3$.

Câu 36. Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Xét $u(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$ liên tục trên $[0;2]$.

$$\text{Ta có } u'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x, u'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Ta có: } \begin{cases} u(0) = m \\ u(1) = m+1 \\ u(2) = m \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \min_{[0;2]} u(x) = m \\ \max_{[0;2]} u(x) = m+1 \end{cases}.$$

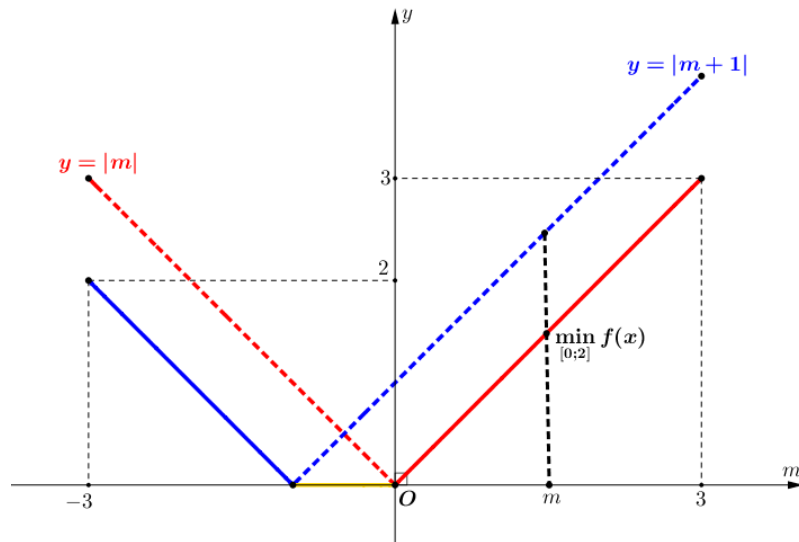
$$\min_{[0;2]} f(x) = \min\{0; |m|; |m+1|\} \text{ hoặc } \min_{[0;2]} f(x) = 0, \text{ với } m \in [-3;3] (*).$$

$$\text{Trường hợp 1: } m(m+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0 \text{ suy ra } \min_{[0;2]} f(x) = 0$$

$$\text{Trường hợp 2: } m > 0 \text{ kết hợp với } (*) \text{ ta có: } 0 < m \leq 3 \text{ suy ra } \min_{[0;2]} f(x) = |m|.$$

$$\text{Trường hợp 3: } m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1 \text{ kết hợp với } (*) \text{ ta có } -3 \leq m < -1 \text{ suy ra } \min_{[0;2]} f(x) = |m+1|.$$

$$\text{Khi đó: } \min_{[0;2]} f(x) = \begin{cases} |m| & , m \in (0;3] \\ |m+1| & , m \in [-3;-1) \\ 0 & , m \in [-1;0] \end{cases}$$



Dựa vào đồ thị ta thấy $\min_{[0;2]} f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $m = 3$.

Câu 37. Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 2m - 3$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

$$f'(x) = 2x - 4; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [1;3]; f(1) = 2m - 6, f(2) = 2m - 7, f(3) = 2m - 6.$$

$$\text{Khi đó } \max_{[1;3]} |f(x)| = \max\{|2m - 6|; |2m - 7|\} = M.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \geq |2m - 6| \\ M \geq |2m - 7| = |7 - 2m| \end{cases} \Rightarrow 2M \geq |2m - 6| + |7 - 2m| \geq |2m - 6 + 7 - 2m| = 1 \Rightarrow M \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} |2m - 6| = |2m - 7| = \frac{1}{2} \\ (2m - 6)(7 - 2m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{13}{4}.$$

$$\text{Do đó } M = \frac{1}{2} = a \text{ khi } m = \frac{13}{4} = b \Rightarrow P = 2b - a = 6.$$

Câu 38. Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$ liên tục trên đoạn $[-3;-1]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0 \text{ với } \forall x \in [-3;-1].$$

$$\text{Ta có } f(-3) = 6 - 3m^2; f(-1) = 26 - m^2.$$

$$\text{Khi đó } \max_{[-3;-1]} |f(x)| = \max\{|6 - 3m^2|; |26 - m^2|\} = M.$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} M \geq |6 - 3m^2| \\ M \geq |26 - m^2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \geq |6 - 3m^2| \\ 3M \geq |3m^2 - 78| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq 72 \Leftrightarrow M \geq 18.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} |6 - 3m^2| = |26 - m^2| = 18 \\ (6 - 3m^2)(3m^2 - 78) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy với $\begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3;-1]$ có giá trị nhỏ nhất.

Khi đó tích các giá trị là $2\sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}) = -8$.

Câu 39. Chọn D

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = x^3 - 19x + 30; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \end{cases}.$$

Ta có: $f(0) = m; f(2) = m + 26$.

Khi đó $\max_{[0; 2]} f(x) = \max\{m; m + 26\} = m + 26$; $\min_{[0; 2]} f(x) = \min\{m; m + 26\} = m$.

Suy ra $\max_{[0; 2]} |f(x)| = \max\{|m|; |m + 26|\} = M$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} M \geq |m| = |-m| \\ M \geq |m + 26| \end{cases} \Rightarrow 2M \geq |-m| + |m + 26| \Leftrightarrow M \geq \frac{|-m| + |m + 26|}{2} \geq \frac{|-m + m + 26|}{2} = 13.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} |m| = |m + 26| = 13 \\ -m(m + 26) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -13.$$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 13 khi $m = -13$. Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 40. Chọn A

Xét $u = x^2 - 2x + m$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có: $u' = 2x - 2$; $u' = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$.

$$u(0) = m, u(1) = m - 1, u(2) = m$$

Khi đó: $\max_{[0; 2]} u = \max\{u(0), u(1), u(2)\} = \max\{m, m - 1, m\} = m$.

$\min_{[0; 2]} u = \min\{u(0), u(1), u(2)\} = \min\{m, m - 1, m\} = m - 1$.

$$\text{Suy ra } \max_{[0; 2]} y = \max\{|m - 1|, |m|\} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = 3 \\ |m| \geq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \\ |m| \geq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \\ |m - 1| \geq |m| \end{cases} \Leftrightarrow m = 3, m = -2.$$

Vậy số phần tử của S là 2.

Câu 41. Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - mx^2 - 9x + 9m$. Dễ thấy $\min_{[-2; 2]} |f(x)| \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [-2; 2]$.

$$\text{Ta có: } f(x) = x^2(x-m) - 9(x-m) = (x^2-9)(x-m); f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \\ x = m \end{cases}$$

Do đó điều kiện cần và đủ để $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [-2; 2]$ là $m \in [-2; 2]$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42. Chọn D

$$\text{Ta có } y = f(x) = |-x^4 + 8x^2 + m| = |x^4 - 8x^2 - m| = |(x^2 - 4)^2 - 16 - m|.$$

Đặt $t = (x^2 - 4)^2$, vì $x \in [-1; 3]$, suy ra $t \in [0; 25]$.

$$\text{Khi đó } y = g(t) = |t - 16 - m|.$$

$$\text{Ta có } \min_{[-1; 3]} f(x) = \min_{[-0; 25]} g(t) = \min\{|m-9|, |m+16|\}.$$

Nếu $m-9 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 9$, khi đó $\min_{[-1; 3]} f(x) = m-9 \geq 0$, khi đó $\min\left(\min_{[-1; 3]} f(x)\right) = 0$, khi $m = 9$.

Nếu $m+16 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -16$, khi đó $\min_{x \in [-1; 3]} f(x) = -m-16 \geq 0$, khi đó $\min\left(\min_{[-1; 3]} f(x)\right) = 0$, khi $m = -16$.

Nếu $(m-9)(m+16) < 0 \Leftrightarrow -16 < m < 9$, khi đó $\min_{x \in [-1; 3]} f(x) = 0$, khi đó $\min\left(\min_{[-1; 3]} f(x)\right) = 0$.

Vậy $\min\left(\min_{[-1; 3]} f(x)\right) = 0$, khi $-16 \leq m \leq 9$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, nên có 26 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43. Chọn D

Xét hàm số $u = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ có $u' = 4x^3 - 6x^2 + 2x$.

$$u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = 1 \in [-1; 2] \\ x = \frac{1}{2} \in [-1; 2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = \max_{[-1; 2]} u = \max\left\{u(-1), u(2), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1)\right\} = u(-1) = u(2) = a + 4. \\ m = \min_{[-1; 2]} u = \min\left\{u(-1), u(2), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1)\right\} = u(0) = u(1) = a \end{cases}$$

Trường hợp 1: Nếu $m \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0 \Rightarrow \min_{[-1; 2]} y = m; \max_{[-1; 2]} y = M$.

$$\text{Ta có điều kiện } \begin{cases} a \geq 0 \\ a + a + 4 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: Nếu $M \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -4$. Khi đó: $\min_{[-1; 2]} y = -M; \max_{[-1; 2]} y = -m$.

Ta có điều kiện $\begin{cases} a \leq -4 \\ -(a+4) - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = -7$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $m < 0 < M \Leftrightarrow -4 < a < 0$.

Khi đó: $\min_{[-1;2]} y = 0$; $\max_{[-1;2]} y = \max\{|a+4|, |a|\} = \max\{a+4, -a\} < 10$.

Suy ra $\min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y < 0 + 10 = 10$ (loại).

Vậy có 2 giá trị của tham số a thỏa mãn đề bài là $\begin{cases} a = 3 \\ a = -7 \end{cases}$.

Câu 44. Chọn B

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + ax - 4}{x}$ liên tục trên đoạn $[1;4]$.

Ta có $g'(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2} > 0 \quad \forall x \in [1;4] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[1;4]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;4]} g(x) = g(1) = a - 3 \\ \max_{[1;4]} g(x) = g(4) = a + 3 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $a - 3 > 0 \Leftrightarrow a > 3$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |a - 3| = a - 3 \\ |a + 3| = a + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \min_{[1;4]} |g(x)| = a - 3 \\ M = \max_{[1;4]} |g(x)| = a + 3 \end{cases}$$

Khi đó $M + 2m = 7 \Leftrightarrow a + 3 + 2(a - 3) = 7 \Leftrightarrow a = \frac{10}{3}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $a + 3 < 0 \Leftrightarrow a < -3$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |a - 3| = -a + 3 \\ |a + 3| = -a - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \min_{[1;4]} |g(x)| = -a - 3 \\ M = \max_{[1;4]} |g(x)| = -a + 3 \end{cases}$$

Khi đó $M + 2m = 7 \Leftrightarrow -a + 3 + 2(-a - 3) = 7 \Leftrightarrow a = -\frac{10}{3}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $a - 3 \leq 0 \leq a + 3 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 3$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |a + 3| = a + 3 \\ |a - 3| = -a + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \min_{[1;4]} |g(x)| = 0 \\ M = \max_{[1;4]} |g(x)| = \max\{a + 3, -a + 3\} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } M + 2m = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3 + 2 \cdot 0 = 7 \\ a + 3 \geq -a + 3 \\ -a + 3 + 2 \cdot 0 = 7 \\ -a + 3 > a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a \geq 0 \\ a = -4 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm 4 \text{ (không thỏa mãn)}.$$

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a = \pm \frac{10}{3}$.

Câu 45. Chọn C

Ta xét $f(x) = x^4 - 2x^3 + m$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 1] \\ x = \frac{3}{2} \notin [0; 1] \end{cases}.$$

$$f(0) = m; f(1) = m - 1.$$

Ta xét các trường hợp sau:

Nếu $m \leq 0$ thì $\max_{[0;1]} |f(x)| = 1 - m; \min_{[0;1]} |f(x)| = -m$.

Khi đó: $\max_{[0;1]} |f(x)| + 2 \min_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow (1 - m) + 2(-m) = 10 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa điều kiện).

Nếu $m \geq 1$ thì $\max_{[0;1]} |f(x)| = m; \min_{[0;1]} |f(x)| = m - 1$.

Khi đó: $\max_{[0;1]} |f(x)| + 2 \min_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow m + 2(m - 1) = 10 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa điều kiện).

Nếu $\frac{1}{2} \leq m < 1$ thì $\max_{[0;1]} |f(x)| = m; \min_{[0;1]} |f(x)| = 0$.

Khi đó: $\max_{[0;1]} |f(x)| + 2 \min_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow m = 10$ (không thỏa điều kiện).

Nếu $0 < m < \frac{1}{2}$ thì $\max_{[0;1]} |f(x)| = 1 - m; \min_{[0;1]} |f(x)| = 0$.

Khi đó: $\max_{[0;1]} |f(x)| + 2 \min_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow 1 - m = 10 \Leftrightarrow m = -9$ (không thỏa điều kiện).

Do đó có hai giá trị $m = -3$ và $m = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;1]} |f(x)| + 2 \min_{[0;1]} |f(x)| = 10$ là 1.

Câu 46: Chọn C

Hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 3] \\ x = 2 \in [1; 3] \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} \min_{[1;3]} y = \min\{y(1); y(3); y(2)\} = \min\{m - 2; m; m - 4\} = m - 4 \\ \max_{[1;3]} y = \max\{y(1); y(3); y(2)\} = \max\{m - 2; m; m - 4\} = m \end{cases}$$

$$\text{Nếu } m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} f(x) = m - 4 \\ \max_{[1;3]} f(x) = m \end{cases}.$$

Ta có $3 \max_{[1;3]} f(x) - 2 \min_{[1;3]} f(x) = 17 \Leftrightarrow 3m - 2(m - 4) = 17 \Leftrightarrow m = 9$ (thỏa mãn).

$$\text{Nếu } m \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} f(x) = -m \\ \max_{[1;3]} f(x) = 4 - m \end{cases}.$$

Ta có $3\max_{[1;3]} f(x) - 2\min_{[1;3]} f(x) = 17 \Leftrightarrow 3(4-m) + 2m = 17 \Leftrightarrow m = -5$ (thỏa mãn).

$$\text{Nếu } 0 < m < 2 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} f(x) = 0 \\ \max_{[1;3]} f(x) = 4 - m \end{cases}.$$

Ta có $3\max_{[1;3]} f(x) - 2\min_{[1;3]} f(x) = 17 \Leftrightarrow 3(4-m) = 17 \Leftrightarrow m = \frac{-5}{3}$ (không thỏa mãn).

$$\text{Nếu } 2 \leq m < 4 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} f(x) = 0 \\ \max_{[1;3]} f(x) = m \end{cases}.$$

Ta có $3\max_{[1;3]} f(x) - 2\min_{[1;3]} f(x) = 17 \Leftrightarrow 3m = 17 \Leftrightarrow m = \frac{17}{3}$ (không thỏa mãn).

Vậy $m \in \{9; -5\}$.

Câu 47. Chọn B

Xét hàm số: $f(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0; 2]$

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) = m \\ f(1) = -2 + m \\ f(2) = 2 + m \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} \min_{[0;2]} f(x) = -2 + m \\ \max_{[0;2]} f(x) = 2 + m \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } (-2 + m)(2 + m) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \min_{[0;2]} |f(x)| + \max_{[0;2]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow |-2 + m| + |2 + m| = 6.$$

Nếu $m < -2$ ta có: $2 - m - 2 - m = 6 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa).

Nếu $m > 2$ ta có: $-2 + m + 2 + m = 6 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa).

$$\text{Trường hợp 2: } (-2 + m)(2 + m) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2 \quad (*)$$

$$\text{Khi đó: } \min_{[0;2]} |f(x)| = 0 \text{ và}$$

$$\min_{[0;2]} |f(x)| + \max_{[0;2]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = 6.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| \geq |-2+m| \\ |m+2| = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| \geq |-2+m| \\ m = 4 \vee m = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \end{cases} \text{ (không thỏa (*))}$$

Vậy tích các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán là: $-3.3 = -9$.

Câu 48. Chọn B

Ta thấy hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+2}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(0) = \frac{m}{2}$; $f(1) = \frac{m+1}{3}$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -m$.

Trường hợp 1: Nếu $0 \leq -m \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$ thì $\max_{[0;1]} |f(x)| = \max \left\{ \left| \frac{m}{2} \right|; \left| \frac{m+1}{3} \right| \right\}$;
 $\min_{[0;1]} |f(x)| = 0$.

$$\text{Do đó } 2 \max_{[0;1]} |f(x)| + 3 \min_{[0;1]} |f(x)| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 2 \left| \frac{m}{2} \right| = 6 \\ 2 \left| \frac{m+1}{3} \right| = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 6 \\ m = 8 \\ m = -10 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: Nếu $-m < 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì $\max_{[0;1]} |f(x)| = \max \left\{ \frac{m}{2}; \frac{m+1}{3} \right\}$;
 $\min_{[0;1]} |f(x)| = \min \left\{ \frac{m}{2}; \frac{m+1}{3} \right\}$.

$$\text{Ta có } \frac{m}{2} - \frac{m+1}{3} = \frac{m-2}{6} \text{ suy ra } \begin{cases} \frac{m}{2} \geq \frac{m+1}{3} \text{ khi } m \geq 2 \\ \frac{m}{2} < \frac{m+1}{3} \text{ khi } 0 < m < 2 \end{cases}.$$

Với $m \geq 2$, ta có

$$2 \max_{[0;1]} |f(x)| + 3 \min_{[0;1]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow m + m + 1 = 6 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Với $0 < m < 2$, ta có

$$2 \max_{[0;1]} |f(x)| + 3 \min_{[0;1]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{m+1}{3} + 3 \cdot \frac{m}{2} = 6 \Leftrightarrow m = \frac{32}{13} \text{ (không thỏa mãn).}$$

Trường hợp 3: Nếu $-m > 1 \Leftrightarrow m < -1$ thì

$$\max_{[0;1]} |f(x)| = \max \left\{ -\frac{m}{2}; -\frac{m+1}{3} \right\}; \min_{[0;1]} |f(x)| = \min \left\{ -\frac{m}{2}; -\frac{m+1}{3} \right\}.$$

Ta có $-\frac{m}{2} + \frac{m+1}{3} = \frac{-m+2}{6} > 0, \forall m < -1$ suy ra $-\frac{m}{2} > -\frac{m+1}{3}$ khi $m < -1$. Do đó:

$$2 \max_{[0;1]} |f(x)| + 3 \min_{[0;1]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{-m}{2} + 3 \cdot \frac{-m-1}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 49. Chọn C

Xét hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[-4;4]$.

Ta có $\begin{cases} x \in [-4;4] \Rightarrow -x \in [-4;4] \\ g(-x) = g(x) \end{cases} \Rightarrow y = g(x)$ là hàm số chẵn trên $[-4;4]$.

$$\text{Do đó: } \max_{[-1;1]} g(x) = \max_{[0;1]} g(x) = \frac{11}{2}.$$

Xét $x \in [0;1]$ khi đó: $g(x) = f(x^3 + 3x) + f(m)$

Đặt $u = x^3 + 3x$, $u' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in [0;1]$. Suy ra $u(0) \leq u \leq u(1) \Leftrightarrow 0 \leq u \leq 4$.

Hàm số trở thành $h(u) = f(u) + f(m)$ với $u \in [0; 4]$.

$$\max_{[0;1]} g(x) = \max_{[0;4]} h(u) = f(0) + f(m) = 3 + f(m)$$

$$\text{Mà } \max_{[0;1]} g(x) = \frac{11}{2} \Rightarrow 3 + f(m) = \frac{11}{2} \Leftrightarrow f(m) = \frac{5}{2}.$$

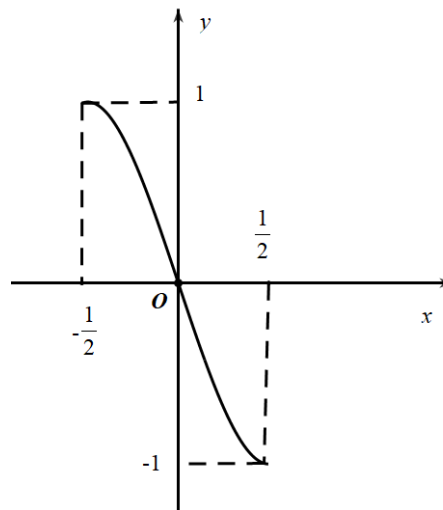
x	-4	-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	The graph shows a piecewise linear function $f(x)$ defined on the interval $[-4, 4]$. The function has vertices at $(-4, -4)$, $(-3, 4)$, $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(2, -3)$, and $(4, 1)$. A horizontal line $y = \frac{5}{2}$ is drawn, intersecting the graph at four points. The function is increasing on $[-4, -3]$, decreasing on $[-3, -1]$, increasing on $[-1, 0]$, decreasing on $[0, 2]$, and increasing on $[2, 4]$.									

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra có 4 giá trị của m .

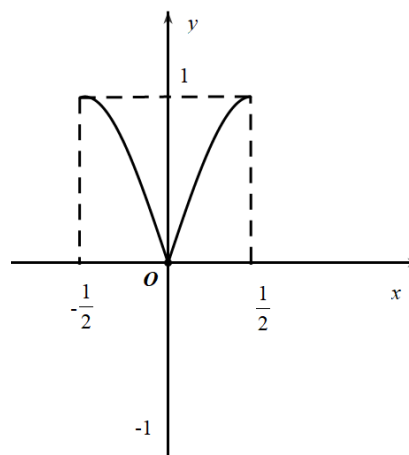
Câu 50. Chọn A

Với $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ điều kiện xác định của $g(x)$ là: $1 - 2|x| \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Trên tập $D = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ hàm số $f(x)$ có đồ thị



Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có dạng :



Ta có $0 \leq |f(x)| \leq 1, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ và $0 \leq 1-2|x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sqrt{1-2|x|} \leq 0$

$$\Rightarrow -1 \leq |f(x)| - \sqrt{1-2|x|} \leq 1.$$

Do đó $\min_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]} g(x) = -1 + f\left(\frac{\sqrt{1+2m} - \sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$ vị trí $x = 0$.

Theo yêu cầu bài toán $\min_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]} g(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{1+2m} - \sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right) = 1.$

Đặt $t = \frac{\sqrt{1+2m} - \sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}, m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$

Ta có $t' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2m}} + \frac{1}{\sqrt{1-2m}} \right) > 0, \forall m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow t$ đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

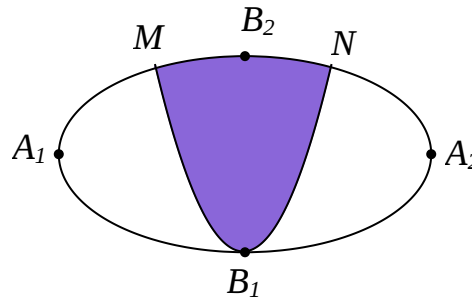
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

Khi đó $f(t) = 1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+2m} - \sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 5**Ứng dụng của min-max**

Câu 1: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh B_1 , trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N . Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/ m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/ m^2 . Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2 = 4m, B_1B_2 = 2m, MN = 2m$.



A. 2.341.000 đồng. B. 2.057.000 đồng. C. 2.760.000 đồng. D. 1.664.000 đồng.

Câu 2: Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2. B. $\frac{8}{3}$. C. 0. D. $\frac{4}{3}$.

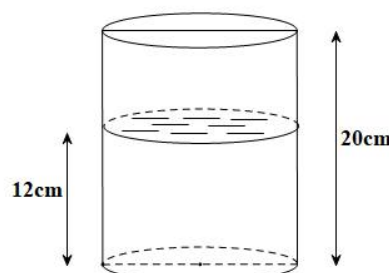
Câu 3: Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính $10cm$.

A. $160cm^2$. B. $100cm^2$. C. $80cm^2$. D. $200cm^2$.

Câu 4: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(m^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Hỏi cần xây bể có chiều cao h bằng bao nhiêu mét để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất?

A. $2(m)$. B. $\frac{5}{2}(m)$. C. $1(m)$. D. $\frac{3}{2}(m)$.

Câu 5: Một cốc hình trụ có bán kính đáy là $2cm$, chiều cao $20cm$. Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là $12cm$. Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá $6cm$. Con quạ thông minh mở những viên đá hình cầu có bán kính $0,6cm$ thả vào cốc để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?



- A. 30. B. 27. C. 28. D. 29.

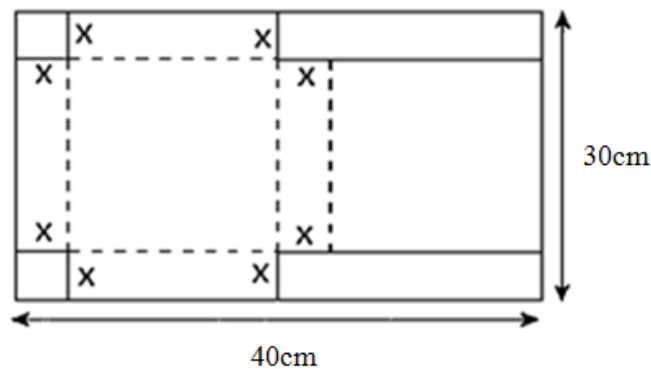
Câu 6: Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

- A. $\frac{56}{4+\pi}$. B. $\frac{112}{4+\pi}$. C. $\frac{84}{4+\pi}$. D. $\frac{92}{4+\pi}$.

Câu 7: Để chuẩn bị cho đợt phát hành sách giáo khoa mới, một nhà xuất bản yêu cầu xưởng in phải đảm bảo các yêu cầu sau: Mỗi cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$, lề trên và lề dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Muốn chi phí sản xuất là thấp nhất thì xưởng in phải in trang sách có kích thước tối ưu nhất, với yêu cầu chất lượng giấy và mực in vẫn đảm bảo. Tìm chu vi của trang sách.

- A. $82cm$. B. $100cm$. C. $90cm$. D. $84cm$.

Câu 8: Với tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $30cm$; $40cm$. Người ta phân chia tấm nhôm như hình vẽ và cắt bỏ một phần để được gập lên một cái hộp có nắp. Tìm x để thể tích hộp lớn nhất.



- A. $\frac{35+5\sqrt{13}}{3}cm$. B. $\frac{35-4\sqrt{13}}{3}cm$. C. $\frac{35-5\sqrt{13}}{3}cm$. D. $\frac{35+4\sqrt{13}}{3}cm$.

Câu 9: Ông A dự định sử dụng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng khối hình hộp chữ nhật chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $2,26m^3$. B. $1,01m^3$. C. $1,33m^3$. D. $1,50m^3$.

Câu 10: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 243. B. 144. C. 27. D. 36.

Câu 11: Một bác nông dân cần xây dựng một hồ ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $3200cm^3$, tỉ số giữa chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hồ ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

- A. $1200cm^2$. B. $120cm^2$. C. $160cm^2$. D. $1600cm^2$.

Câu 12: Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10 m và độ dài trục bé 8 m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá

cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

- A. 67398224 đồng. B. 67593346 đồng. C. 63389223 đồng. D. 67398228 đồng.

Câu 13: Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bè. Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K .

- A. $\frac{5\sqrt{65}}{4}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $9\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{71}}{4}$.

Câu 14: Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25m$, chiều rộng $AD = 20m$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN , biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C .

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{10+2\sqrt{725}}{30}$. C. $\frac{20+\sqrt{725}}{30}$. D. 5.

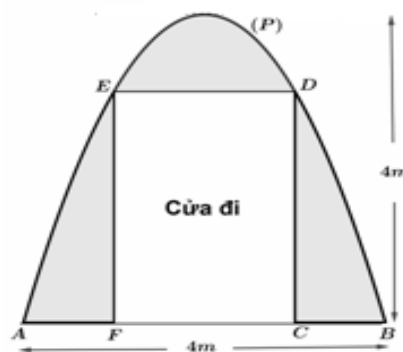
Câu 15: Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đáy hình hộp chữ nhật có chiều cao 60cm, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/ m^2 . Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

- A. 283.000 đồng. B. 382.000 đồng. C. 83.200 đồng. D. 832.000 đồng.

Câu 16: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

- A. 12. B. 13. C. 11. D. 10.

Câu 17: Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng 4 m, $AB = 4m$. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí để trang trí phần tô đậm là 1.000.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm gần với số tiền nào dưới đây?



- A. 4.450.000 đồng. B. 4.605.000 đồng. C. 4.505.000 đồng. D. 4.509.000 đồng.

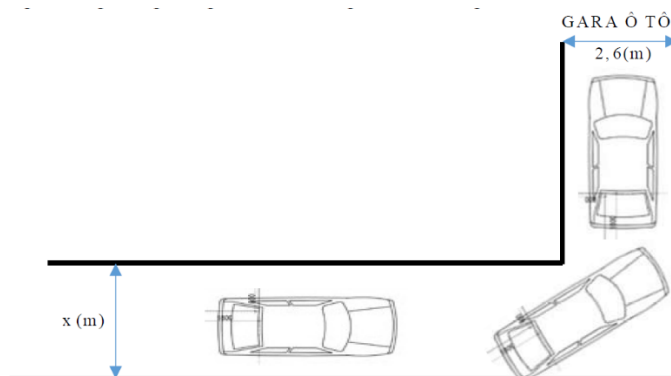
Câu 18: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m+n$ là

A. 12. B. 13. C. 11. D. 10.

Câu 19: Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

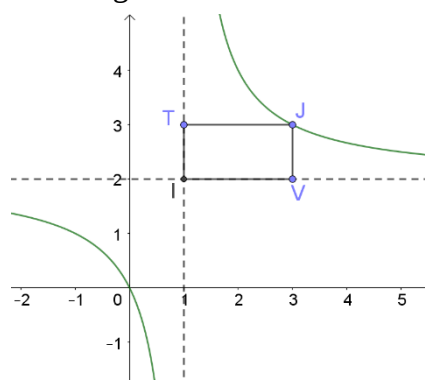
A. 32400000 đồng. B. 34400000 đồng. C. 32420000 đồng. D. 34240000 đồng.

Câu 20: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m} \times 1,9\text{m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?



A. $x = 3,7$ (m). B. $x = 2,6$ (m). C. $x = 3,55$ (m). D. $x = 4,27$ (m).

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm J thay đổi thuộc (C) như hình vẽ bên. Hình chữ nhật ITJV có chu vi nhỏ nhất bằng:



A. $2\sqrt{2}$. B. 6. C. $4\sqrt{2}$. D. 4.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-\infty; -2017)$. C. $(-2017; 0)$. D. $S = (2017; +\infty)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+4}$ với $a \neq 0$ và a, b là các số thực. Biết rằng $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 5$ và $\min_{x \in \mathbb{R}} y = -2$. Giá

trị của biểu thức $P = a^2b$ bằng

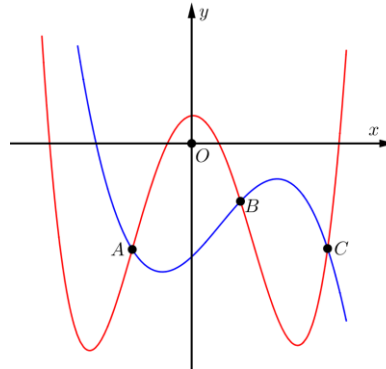
- A. 7680. B. 1920. C. 3840. D. -1920.

Câu 24: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{34}{\sqrt{(x^3 - 3x + 2m)^2 + 1}}$$
 trên đoạn $[0; 3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

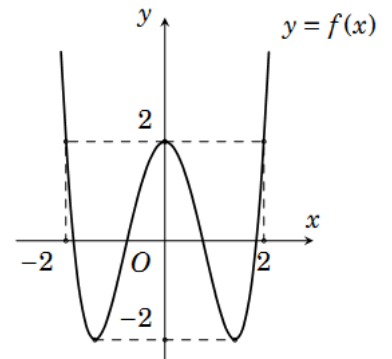
- A. 8. B. -8. C. -6. D. -1.

Câu 25: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm, đồ thị hàm số $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A, B, C của $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ là a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; c]$?



- A. $\min_{[a; c]} h(x) = h(0)$. B. $\min_{[a; c]} h(x) = h(a)$. C. $\min_{[a; c]} h(x) = h(b)$. D. $\min_{[a; c]} h(x) = h(c)$.

Câu 26: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |2f(x) + m + 4| - f(x) - 3|$ trên đoạn $[-2; 2]$ không bé hơn 1?



- A. 18. B. 19.
C. 20. D. 21.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho $\max_{[0; 1]} |f(x)| + \min_{[0; 1]} |f(x)| = 3$. Số phần tử của S là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 28: Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^2 + 3m|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1, m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 2021. Tính giá trị $|m_1 - m_2|$

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{4052}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{4051}{3}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 - mx - 4}{x + 2}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m sao cho $\min_{[-1;1]} |f(x)| > \frac{3}{4}$. Số phần tử của S là

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

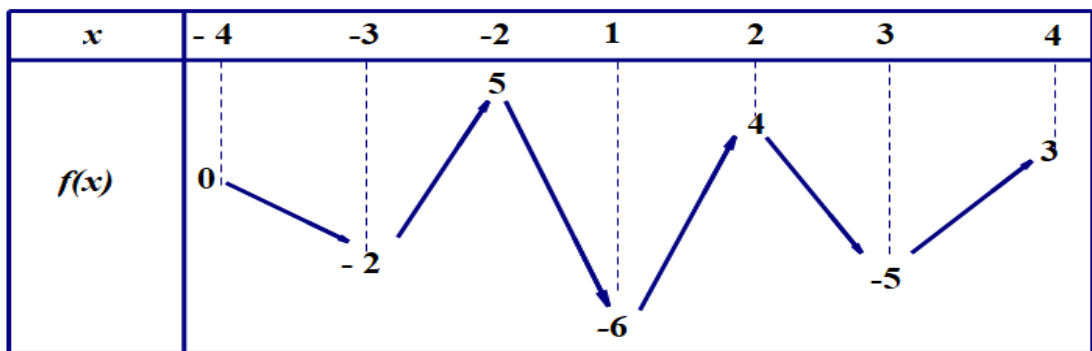
Câu 30: Cho hàm số $f(x) = \frac{\log x + m}{\log x + 2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min_{[\frac{1}{10};1]} |f(x)| + \max_{[\frac{1}{10};1]} |f(x)| = 2$. Tổng số phần tử của S bằng

- A. $-\frac{2}{3}$. B. 2. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{10}{3}$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = |3e^{4x} - 4e^{3x} - 24e^{2x} + 48e^x + m|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; \ln 2]$. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23; -10]$ thỏa mãn $A \leq 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

- A. -33. B. 0. C. -111. D. -74.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 4]$ và có bản biến thiên như hình vẽ bên dưới



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-4; 4]$ để hàm số $g(x) = |f(x^3 + 2x) + 3f(m)|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 8?

- A. 12. B. 11. C. 9. D. 10.

Câu 33: Cho a, b, c . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = \frac{3a^4 + 12b^4 + 25c^3 + 2}{(a + \sqrt{2}b + c)^3}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $A\left(\frac{5}{6}; 2\right)$. B. $\left[\frac{13}{18}; 2\right]$. C. $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$. D. $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.

Câu 34: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{mx - \sqrt{x+2019}}{x+2020} \text{ trên tập } D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x| \leq 2018\} \text{ không vượt quá } \frac{1}{2}. \text{ Số các phần tử của}$$

S là:

A. 2110.

B. 2108.

C. 1054.

D. 1009.

Câu 35: Cho hàm số $f(t) = \frac{2t+1}{t-2}$ và x, y là các số thực thỏa mãn $5x^2 + 2xy + y^2 = 9$. Giá trị lớn nhất

của $f\left(\frac{6x-6}{4x-y-9}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. -3 .

D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = (x^2 + x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\min_{[-2;2]} y = 4$ bằng

A. $-\frac{23}{4}$.

B. $-\frac{31}{4}$.

C. -8 .

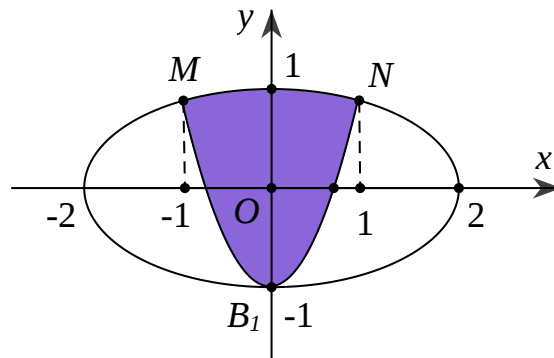
D. $\frac{9}{4}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.B	4.D	5.C	6.B	7.B	8.C	9.D	10.D
11.C	12.A	13.B	14.A	15.C	16.C	17.D	18.C	19.C	20.A
21.C	22.B	23.B	24.B	25.C	26.B	27.A	28.D	29.C	30.C
31.A	32.B	33.C	34.A	35.A	36.A				

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A



Phương trình đường Elip là: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Diện tích hình Elip là $S_{(E)} = \pi a.b = 2\pi (m^2)$

Tọa độ giao điểm M, N là nghiệm hệ:
$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Vậy $M\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Parabol (P) đối xứng qua Oy có dạng $y = ax^2 + c (a \neq 0)$.

Vì $B_1(0; -1), N\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (P) \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases} \Rightarrow (P): y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x^2 - 1.$

Diện tích phần tô đậm là: $S_1 = 2 \int_0^1 \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x^2 + 1 \right] dx$

• Tính $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$. Đặt $\frac{x}{2} = \sin t \Rightarrow \frac{dx}{2} = \cos t dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$$\text{Suy ra } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\bullet \text{ Tính } I_2 = \int_0^1 \left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) x^2 + 1 \right] dx = \left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \frac{x^3}{3} + x \right] \Big|_0^1 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_1 = 2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{4}{3} \text{ m}^2.$$

$$\text{Tổng số tiền sử dụng là: } S_1 \cdot 200000 + (S_{(E)} - S_1) \cdot 500000 \approx 2.341.000 \text{ đồng}$$

Câu 2: Chọn D

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t. \quad v'(t) = 6t - 8. \quad \text{Có } v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}.$$

t	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
v'	-	0	+
v	0	$-\frac{16}{3}$	$+\infty$

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có } \min_{[0; +\infty)} v = v\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{3}.$$

$$\text{Vậy vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi } t = \frac{4}{3}.$$

Câu 3: Chọn B

$$\text{Đặt } OA = x \quad (0 < x < 10). \text{ Suy ra: } AB = 2x; \quad AD = \sqrt{OD^2 - OA^2} = \sqrt{100 - x^2}.$$

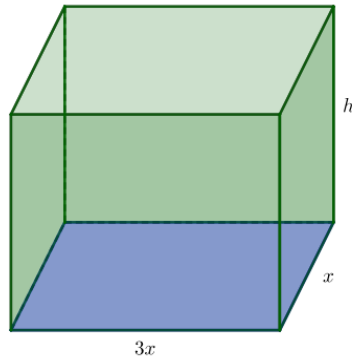
$$\text{Khi đó: } S_{ABCD} = S = AB \cdot AD = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2} = 2\sqrt{100x^2 - x^4}$$

$$\text{Suy ra: } S' = \frac{200x - 4x^3}{\sqrt{100x^2 - x^4}} \Rightarrow S' = 0 \Leftrightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2} \\ x = -5\sqrt{2} \end{cases}$$

x	0	$5\sqrt{2}$	10	
$S(x)$		+	0	-
$S'(x)$			100	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ bằng 100 cm^2 khi $x = 5\sqrt{2} \text{ cm}$.

Câu 4: Chọn D



Gọi x ($x > 0$) là chiều rộng hình chữ nhật đáy bể, suy ra chiều dài hình chữ nhật đáy bể là $3x$.

$$V = h \cdot x \cdot 3x = h \cdot 3x^2 = 18 \quad (x > 0).$$

$$\Rightarrow h = \frac{18}{3x^2} = \frac{6}{x^2},$$

Gọi P là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bể của hình hộp chữ nhật. Nguyên vật liệu ít nhất khi P nhỏ nhất.

$$P = 2hx + 2 \cdot h \cdot 3x + 3x^2 = 2 \cdot \frac{6}{x^2} \cdot x + 2 \cdot \frac{6}{x^2} \cdot 3x + 3x^2 = \frac{48}{x} + 3x^2.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{48}{x} + 3x^2, \quad (x > 0).$$

$$\text{Ta có } f'(x) = -\frac{48}{x^2} + 6x, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{48}{x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$$\text{Suy ra vật liệu ít nhất khi } h = \frac{6}{x^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} (m).$$

Câu 5: Chọn C

Gọi bán kính hình trụ là r , bán kính viên đá hình cầu là R .

$$\text{Thể tích một viên đá là } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (0,6)^3.$$

Gọi n là số viên đá con quạ thả vào cốc, n nguyên dương.

$$\text{Thể tích nước cần đổ thêm vào cốc để mực nước cách miệng cốc } 6cm \text{ là } \pi \cdot r^2 \cdot 2 = 8\pi.$$

Để con quạ uống được nước thì lượng đá bỏ vào cốc phải làm mực nước dâng lên cách miệng

$$\text{cốc không quá } 6cm \text{ nên ta phải có: } n \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (0,6)^3 \geq 8\pi \Leftrightarrow n \geq \frac{24}{4 \cdot (0,6)^3} \Leftrightarrow n \geq \frac{250}{9}.$$

Do n nguyên dương nên suy ra $n \geq 28$.

Vậy con quạ cần thả vào cốc ít nhất 28 viên đá.

Câu 6: Chọn B

Gọi l_1, l_2 (m) lần lượt là chu vi hình vuông và hình tròn. ($0 < l_1, l_2 < 28$)

Gọi a, R (m) lần lượt là cạnh của hình vuông và bán kính của hình tròn. Khi đó ta có:

$$l_1 + l_2 = 28; l_1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{l_1}{4}; l_2 = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{l_2}{2\pi} = \frac{28 - l_1}{2\pi}$$

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là:

$$S = a^2 + \pi R^2 = \frac{l_1^2}{16} + \pi \left(\frac{28 - l_1}{2\pi} \right)^2, \quad 0 < l_1 < 28$$

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm $l_1 \in (0, 28)$ để S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$$S' = \frac{l_1}{8} - \left(\frac{28 - l_1}{2\pi} \right) = 0 \Leftrightarrow l_1 = \frac{112}{\pi + 4}$$

Lập bảng biến thiên ta được S đạt giá trị nhỏ nhất tại $l_1 = \frac{112}{\pi + 4}$.

Câu 7: Chọn B

Ta thấy muốn chi phí sản xuất nhỏ nhất thì kích thước tối ưu là khi diện tích mỗi trang sách phải nhỏ nhất đồng thời vẫn bảo đảm yêu cầu đề ra.

Gọi x, y thứ tự là chiều dài và chiều rộng của trang sách, đơn vị cm , điều kiện: $x > 6; y > 4$.

Diện tích phần chữ trên mỗi trang là:

$$(x - 6)(y - 4) = 384 \Leftrightarrow xy = 4x + 6y + 360 \geq 2\sqrt{4x \cdot 6y} + 360.$$

Khi đó $xy - 4\sqrt{6xy} - 360 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 10\sqrt{6} \Rightarrow xy \geq 600$, dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} xy = 600 \\ 4x = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases}.$$

Vậy chu vi trang sách khi sản xuất theo kích thước tối ưu là $2(x + y) = 100$ (cm).

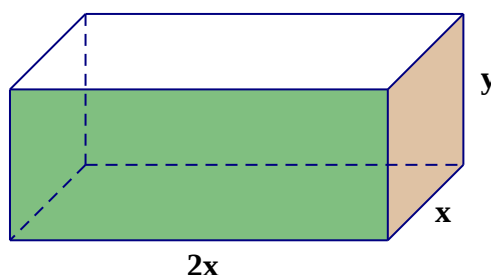
Câu 8: Chọn C

Khối hộp chữ nhật thu được có kích thước là $30 - 2x; 20 - x; x$ với $x \in [0; 15]$.

$$\text{Khi đó } V = x(30 - 2x)(20 - x) = f(x) \leq \max_{[0; 15]} f(x) = f\left(\frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}\right).$$

Dấu “=” đạt tại $x = \frac{35 - 5\sqrt{13}}{3}$.

Câu 9: Chọn D



Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Gọi chiều rộng của bể cá là $x(\text{m})$, chiều cao là $y(\text{m})$ ($x, y > 0$), khi đó chiều dài bể cá là $2x(\text{m})$.
Diện tích kính sử dụng là $S = 2x^2 + 2xy + 4xy(\text{m}^2)$.

$$\text{Theo bài ra ta có: } 2x^2 + 2xy + 4xy = 6,5 \Rightarrow y = \frac{6,5 - 2x^2}{6x} = \frac{13 - 4x^2}{12x}.$$

$$\text{Thể tích bể cá là } V(x) = 2x^2 \cdot \frac{13 - 4x^2}{12x} = \frac{x(13 - 4x^2)}{6} (\text{m}^3).$$

$$\text{Ta xét hàm số } V(x) = \frac{x(13 - 4x^2)}{6} \text{ với } x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right).$$

$$\text{Suy ra } V'(x) = \frac{13 - 12x^2}{6} \Rightarrow V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{39}}{6}.$$

Ta có $V'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = \frac{\sqrt{39}}{6}$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

Trên khoảng $\left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ hàm số $V(x)$ chỉ có một điểm cực đại nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{\sqrt{39}}{6}$.

$$\text{Thể tích của bể cá có giá trị lớn nhất là } \max_{\left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50 (\text{m}^3).$$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50 \text{ m}^3$.

Cách 2: Xử lý tìm giá trị lớn nhất của $V(x)$ bằng bất đẳng thức Cauchy.

$$\text{Theo cách 1, ta tính được } V(x) = \frac{x(13 - 4x^2)}{6} \text{ với } x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right).$$

$$\text{Ta có } V(x) = \frac{x(13 - 4x^2)}{6} = \frac{1}{6} \sqrt{8x^2(13 - 4x^2)(13 - 4x^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$8x^2(13 - 4x^2)(13 - 4x^2) \leq \left(\frac{8x^2 + 13 - 4x^2 + 13 - 4x^2}{3}\right)^3 = \frac{26^3}{27}.$$

$$\text{Suy ra } V(x) \leq \frac{1}{6} \sqrt{\frac{26^3}{8.27}} = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } 8x^2 = 13 - 4x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{13}{12}} = \frac{\sqrt{39}}{6}.$$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,50 \text{ m}^3$.

Câu 10: Chọn D

$$\text{Ta có } v(t) = s'(t) = \left(-\frac{1}{3}t^3 + 6t^2\right)' = -t^2 + 12t. \text{ Tập xác định } D = \mathbb{R}.$$

$$\text{Vì } -t^2 + 12t = -(t-6)^2 + 36 \leq 36 \text{ với mọi } t > 0.$$

$$\text{Suy ra } \max_{t>0} v(t) = 36. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } (t-6)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 6.$$

Vậy trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36.

Câu 11: Chọn C

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hồ ga; h là chiều cao của hồ ga ($x, y, h > 0$)

Ta có: $h = 2x$

$$V = xyh = 2x^2y = 3200 \Rightarrow y = \frac{1600}{x^2}$$

$$\text{Diện tích bề mặt sử dụng của hồ ga không nắp là } S = xy + 2xh + 2yh = 4x^2 + 5xy = 4x^2 + \frac{8000}{x}$$

$$\text{Đặt } f(x) = 4x^2 + \frac{8000}{x}. \text{ Ta có } f'(x) = 8x - \frac{8000}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

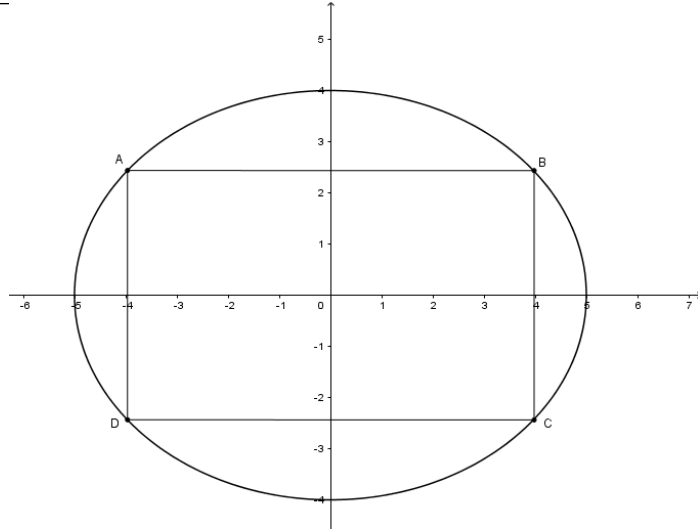
Bảng biến thiên

x	0	10	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$		1200	

Vậy S nhỏ nhất khi $x = 10 \Rightarrow y = 16$.

Diện tích đáy hồ ga khi đó là 160 cm^2 .

Câu 12: Chọn A



Gắn mảnh vườn hình elip của ông An vào hệ trục tọa độ như hình vẽ. Độ dài trục lớn 10m và độ dài trục bé bằng 8m nên ta có $a = 5$ và $b = 4$.

Phương trình của elip là: $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Diện tích của elip là: $S_{(E)} = \pi ab = 20\pi$.

Hình chữ nhật ABCD nội tiếp elip. Đặt $AB = 2x$ ($0 < x < 5$) $\Rightarrow AD = 8\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$.

Diện tích hình chữ nhật ABCD là: $S_{ABCD} = 16x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$.

Diện tích phần còn lại trồng hoa là: $S_{hoa} = 20\pi - 16x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$.

Tổng chi phí xây dựng là:

$$T = 16000000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} + 1200000 \cdot \left(20\pi - 16x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \right) = 24000000\pi - 3200000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}.$$

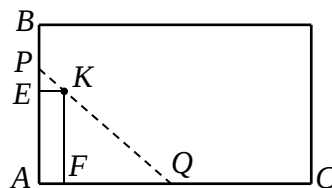
Mặt khác ta có: $16000000 \cdot \frac{x}{5}\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \leq 16000000 \cdot \frac{\frac{x^2}{25} + 1 - \frac{x^2}{25}}{2} = 8000000$.

$$\Rightarrow T = 24000000\pi - 3200000x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \geq 24000000\pi - 8000000 = 67398223.69.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{5} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tổng chi phí thiết kế xây dựng thấp nhất gần với số 67398224.

Câu 13: Chọn B



Đặt $AP = a$, $AQ = b$ ($a, b > 0$). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K xuống AB và AC. Suy ra $KE = 1$, $KF = 8$.

Ta có: $\frac{KE}{AQ} = \frac{PK}{PQ}; \frac{KF}{AP} = \frac{QK}{PQ} \Rightarrow \frac{KF}{AP} + \frac{KE}{AQ} = 1$ hay $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Cách 1:

Ta có: $PQ^2 = a^2 + b^2$. Vì $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow \frac{8k}{a} + \frac{k}{b} = k \quad \forall k > 0$.

$$a^2 + b^2 + k = \left(a^2 + \frac{8k}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{k}{b}\right) = \left(a^2 + \frac{4k}{a} + \frac{4k}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{k}{2b} + \frac{k}{2b}\right) \geq 3\sqrt[3]{16k^2} + 3\sqrt[3]{\frac{k^2}{4}}.$$

Suy ra PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow a^2 + b^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{4k}{a} \\ b^2 = \frac{k}{2b} \\ \frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 250 \\ a = 10 \\ b = 5 \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của PQ là $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K là $5\sqrt{5}$.

Cách 2:

Vì $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{a}{a-8}$ với $a > 8$. Khi đó $PQ^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a > 8$.

Xét hàm số $f(a) = a^2 + \left(\frac{a}{a-8}\right)^2$ với $a > 8$.

Ta có $f'(a) = 2a + \frac{2a}{a-8} \cdot \frac{-8}{(a-8)^2} = \frac{2a[(a-8)^3 - 8]}{(a-8)^3}$; $f'(a) = 0 \Rightarrow a = 10$.

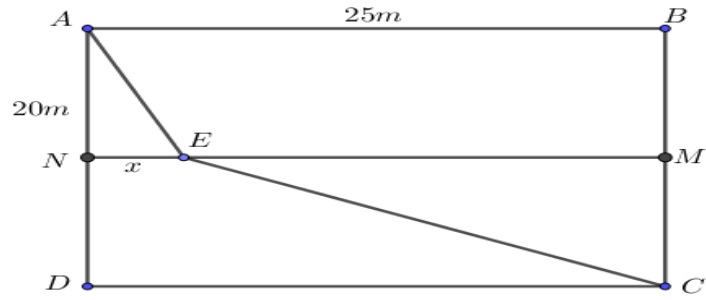
Bảng biến thiên của $f(a)$:

a	8	10	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$+\infty$	125	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(a)$ là 125 khi $a = 10$.

Từ đó suy ra chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào 2 bờ AB , AC và cây cọc K là $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Câu 14: Chọn A



Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng. Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm. Với $NE = x(\text{m})$.

$$\Rightarrow EM = 25 - x(\text{m}).$$

$$\text{Ta được } \begin{cases} AE = \sqrt{AN^2 + EN^2} = \sqrt{100 + x^2} \\ EC = \sqrt{MC^2 + EM^2} = \sqrt{100 + (25 - x)^2} \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$$t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{EC}{30} = \frac{\sqrt{100 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}{30} \text{ (h)}$$

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \frac{25 - x}{30\sqrt{(25 - x)^2 + 100}}.$$

$$\text{Xét } t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{15\sqrt{100 + x^2}} - \frac{25 - x}{30\sqrt{(25 - x)^2 + 100}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{(25 - x)^2 + 100} = (25 - x)\sqrt{100 + x^2} \Leftrightarrow 4x^2((25 - x)^2 + 100) = (25 - x)^2(100 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(25 - x)^2 + 400x^2 - 100(25 - x)^2 - (25 - x)^2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(25 - x)^2(x^2 - 25) + x^2(20^2 - (25 - x)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(4(25 - x)^2(x + 5) + x^2(45 - x)) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{Ta được } \begin{cases} t(0) = \frac{4 + \sqrt{29}}{6} \\ t(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25) = \frac{1 + \sqrt{29}}{3} \end{cases}.$$

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.

Cách 2:

$$\text{Xét } t(x) = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25 - x)^2 + 10^2}}{30} = \frac{\sqrt{20^2 + (2x)^2} + \sqrt{(25 - x)^2 + 10^2}}{30}.$$

$$\text{Lại có } \sqrt{20^2 + (2x)^2} + \sqrt{(25 - x)^2 + 10^2} \geq \sqrt{(45 - x)^2 + (2x + 10)^2} \quad \left(\text{do } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \right).$$

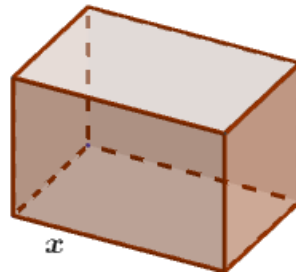
$$\Leftrightarrow \sqrt{20^2 + (2x)^2} + \sqrt{(25-x)^2 + 10^2} \geq \sqrt{5(x-5)^2 + 2000}.$$

$$\text{Do đó } t(x) \geq \frac{\sqrt{5(x-5)^2 + 2000}}{30} \geq \frac{\sqrt{2000}}{30} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Vậy } t(x)_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \text{ (h) khi và chỉ khi } x = 5 \text{ (m)}.$$

Vậy thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (h).

Câu 15: Chọn C



Gọi x (m) là chiều dài của hình chữ nhật đáy ($x > 0$).

$$\text{Khi đó chiều rộng là: } \frac{0,096}{0,6x} = \frac{4}{25x}.$$

$$\text{Khi đó diện tích mặt xung quanh là: } 1,2 \left(x + \frac{4}{25x} \right).$$

$$\text{Chi phí để làm mặt xung quanh là: } 70.1,2 \left(x + \frac{4}{25x} \right) = 84 \left(x + \frac{4}{25x} \right).$$

$$\text{Diện tích mặt đáy là: } x \cdot \frac{4}{25x} = \frac{4}{25}.$$

$$\text{Cho phí để làm mặt đáy là: } 100 \cdot \frac{4}{25} = 16.$$

Chi phí để làm bể cá thấp nhất khi và chỉ khi chi phí làm mặt bên thấp nhất

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x + \frac{4}{25x}, x > 0; f'(x) = 1 - \frac{4}{25x^2} = \frac{25x^2 - 4}{25x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{2}{5}$	$-\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$

$$\text{Khi đó chi phí thấp nhất là: } 84 \cdot \frac{4}{5} + 16 = 83.200 \text{ đồng.}$$

Câu 16: Chọn C

Gọi chiều rộng của hộp là x ($x > 0$) $\Rightarrow$ Chiều dài của hình hộp là $2x$.

Thể tích của hộp là $V = x.2x.h = 48 \Leftrightarrow h = \frac{24}{x^2}$.

Tổng diện tích mặt đáy và 4 mặt bên của hộp là $2x^2 + 6xh = 2x^2 + 6x \cdot \frac{24}{x^2} = 2x^2 + \frac{144}{x}$.

Diện tích nắp hộp là $2x^2$.

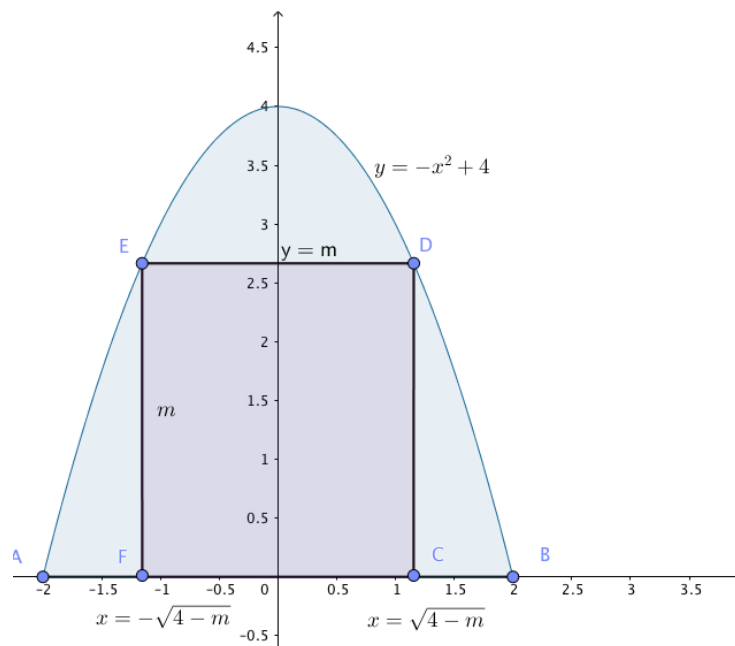
Giá thành hộp thấp nhất $\Leftrightarrow f(x) = 3\left(2x^2 + \frac{144}{x}\right) + 2x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $x > 0$.

Ta có $f(x) = 8x^2 + \frac{432}{x} = 8x^2 + \frac{216}{x} + \frac{216}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{216}{x} \cdot \frac{216}{x}} = 216$.

Vậy $\min_{(0;+\infty)} f(x) = 216$ xảy ra khi và chỉ khi $8x^2 = \frac{216}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow h = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$.

Vậy $m = 8; n = 3 \Rightarrow m + n = 8 + 3 = 11$.

Câu 17: Chọn D



Xét $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có tọa độ đỉnh $(0;4)$ và qua điểm có tọa độ $(2;0)$.

Ta có hoành độ đỉnh: $\frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$; (P) qua điểm $(0;4) \Rightarrow c = 4$ và (P) qua điểm $(2;0)$

$\Rightarrow a = -1$. Suy ra: $(P): y = -x^2 + 4$

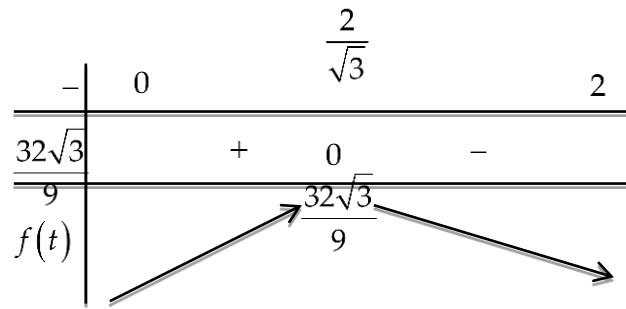
Xét đường thẳng qua $E, D: y = m$. Khi đó $E(-\sqrt{4-m}; m)$ và $D(\sqrt{4-m}; m)$ là giao điểm của (P)

và đường thẳng $y = m$. Suy ra: $ED = 2\sqrt{4-m}$, $EF = m$.

Yêu cầu của bài toán đạt được khi diện tích hình chữ nhật $CDEF$ phải lớn nhất.

Ta có: $S_{CDEF} = ED \cdot EF = 2\sqrt{4-m} \cdot m$. Đặt $t = \sqrt{4-m} \Rightarrow t^2 = 4-m \Rightarrow m = 4-t^2$

Khi đó: $S_{CDEF} = f(t) = 2t(4-t^2) = -2t^3 + 8t$; $f'(t) = -6t^2 + 8 = 0 \Rightarrow t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$



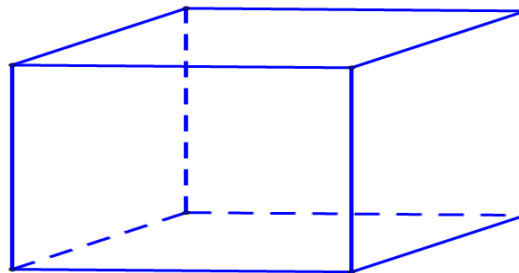
Suy ra: $MaxS_{CDEF} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \frac{8}{3}$

Mặt khác diện tích của chiếc cổng: $S = \int_{-2}^2 |-x^2 + 4| = \frac{32}{3} (m^2)$

Suy ra diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là: $S - MaxS_{CDEF} = \frac{32}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 4,5083 (m^2)$

Vậy số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm: $4,5083 \times 1.000.000 = 4.508.300$.

Câu 18: Chọn C



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x ($x > 0$). Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là

$$V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow 2x^2 \cdot h = 48 \Leftrightarrow x^2 \cdot h = 24$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L = 3(2x^2 + 2xh + 4xh) + 2x^2$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số không âm, ta được

$$L = 8x^2 + 9xh + 9xh \geq 3\sqrt{8x^2 \cdot 9xh \cdot 9xh} = 3\sqrt{648(x^2h)^2} = 216$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 8x^2 = 9xh \\ x^2h = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9h}{8} \\ \frac{9^2}{8^2} \cdot h^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ h = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy $m = 8, n = 3$ và $m + n = 11$.

Câu 19: Chọn C

Gọi số lần tăng giá là y ($y \geq 0$)

Giá bán rau sau mỗi lần tăng giá là $30000 + 1000y$ đồng/kg.

Số rau thừa được thu mua cho chăn nuôi là $20y$ ($y \leq 50$) kg.

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

Số rau bán được trước khi thu mua cho chăn nuôi là $1000 - 20y$ kg.

Tổng số tiền bán rau thu được mỗi ngày là:

$$P = (1000 - 20y) \cdot (30000 + 1000y) + 20y \cdot 2000 \Leftrightarrow P = -20000y^2 + 440000y + 30000000.$$

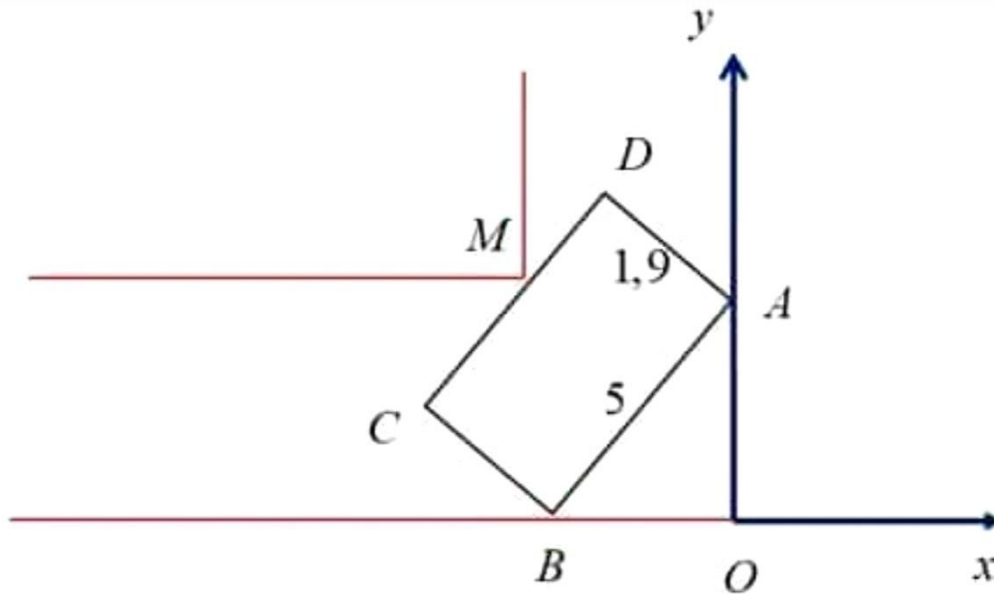
$$P = 32420000 - 20000(y - 11)^2.$$

Ta có:

$$32420000 - 20000(y - 11)^2 \leq 32420000 \Rightarrow P_{\max} = 32420000 \text{ khi } y = 11(N).$$

$$\Rightarrow P \leq 32420000.$$

Câu 20: Chọn A



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó $M(-2,6; x)$.

Gọi $B(-a; 0)$ suy ra $A(0; \sqrt{25 - a^2})$. Phương trình $AB: \frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25 - a^2}} - 1 = 0$.

Do $CD \parallel AB$ nên phương trình $CD: \frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25 - a^2}} - T = 0$.

Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng $1,9(m)$ nên

$$\frac{|T - 1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{25 - a^2}}\right)^2}} = 1,9 \Rightarrow T = 1 + \frac{9,5}{a\sqrt{25 - a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M, O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD .

$$\text{Suy ra: } \frac{-2,6}{-a} + \frac{x}{\sqrt{25 - a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25 - a^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{25 - a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6 \times \sqrt{25 - a^2}}{a}$$

Để cho nhanh, chúng ta dùng chức năng **TABLE** trong máy tính **Casio570ES PLUS**.

$$f(X) = \sqrt{25 - X^2} + \frac{9,5}{X} - \frac{2,6 \times \sqrt{25 - X^2}}{X} \text{ với } \text{STEP} = \frac{5}{29}; \text{START} = 0; \text{END} = 5.$$

Thấy giá trị lớn nhất của $f(X) = \sqrt{25 - X^2} + \frac{9,5}{X} - \frac{2,6 \times \sqrt{25 - X^2}}{X}$ xấp xỉ 3,698.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị ở câu A.

Câu 21: Chọn C

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x = 1$ và tiệm cận ngang là $y = 2$

$$\text{với } J\left(x; \frac{2x}{x-1}\right) \in (C) \Rightarrow TJ = d(J; \text{TCD}) = |x-1|, JV = d(J, \text{TCN}) = \left| \frac{2x}{x-1} - 2 \right| = \frac{2}{|x-1|}$$

Khi đó, chu vi hình chữ nhật ITJV là:

$$P = 2(TJ + JV) = 2\left(|x-1| + \frac{2}{|x-1|}\right) \geq 2 \cdot 2 \sqrt{|x-1| \cdot \frac{2}{|x-1|}} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } |x-1| = \frac{2}{|x-1|} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J(1 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}) \\ J(1 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

Vậy hình chữ nhật ITJV có chu vi nhỏ nhất bằng $4\sqrt{2}$.

Câu 22: Chọn B

Ta có $y' = f'(x+2017) + 2018$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x+2017) = -2018$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-\infty$	3	-2018	$+\infty$	

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên, ta có } f'(x+2017) = -2018 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2017 = t (t < 0) \\ x+2017 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 2017 \\ x = -2015. \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$

x	$-\infty$	$t-2017$		-2015		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = t - 2017 < -2017$.

Vậy $x_0 \in (-\infty; -2017)$.

Câu 23: Chọn B

Xét phương trình ẩn x : $y = \frac{ax+b}{x^2+4} \Leftrightarrow yx^2 - ax + 4y - b = 0 \quad (1)$.

Trường hợp 1: $y = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) trở thành: $x = -\frac{b}{a}$.

Trường hợp 2: $y \neq 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4y(4y - b) \geq 0 \Leftrightarrow 16y^2 - 4by - a^2 \leq 0 \Leftrightarrow y^2 - \frac{b}{4}y - \frac{a^2}{16} \leq 0 \quad (*).$$

Vì $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 5, \min_{x \in \mathbb{R}} y = -2$ nên $-2 \leq y \leq 5 \Leftrightarrow (y+2)(y-5) \leq 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 10 \leq 0 \quad (*)'$.

Từ (*) và (*)' suy ra $\begin{cases} \frac{b}{4} = 3 \\ \frac{a^2}{16} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12 \\ a^2 = 160 \end{cases} \Rightarrow P = a^2b = 1920.$

Câu 24: Chọn B

Hàm số $f(x) = \frac{34}{\sqrt{(x^3 - 3x + 2m)^2 + 1}}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 2 khi và chỉ khi

hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng 16.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 2m$ trên đoạn $[0;3]$, ta có $g'(x) = 3(x^2 - 1)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	3
$g'(x)$		0	
	–	+	
$g(x)$	$2m$	$2m-2$	$2m+18$

Suy ra $\max_{[0;3]} |g(x)| = \max\{|2m-2|, |2m+18|\}$.

$$\text{Do đó } \max_{[0;3]} |g(x)| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} |2m-2| = 16 \\ |2m+18| \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-2 = 16 \\ 2m+18 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m \leq -17 \end{cases} \text{ Vô lý}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2m-2| \leq 16 \\ |2m+18| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14 \leq 2m \leq 18 \\ 2m+18 = 16 \\ 2m+18 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -7 \\ m \leq 9 \\ m = -17 \\ m = -34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -7 \\ m = -34 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{-7; -34\}.$$

Câu 25: Chọn C

Ta có: $h'(x) = f'(x) - g'(x)$. Theo bài ra ta có: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	a	b	c
$h'(x)$	0	-	0
$h(x)$			

Suy ra: $\min_{[a;c]} h(x) = h(b)$.

Câu 26: Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta có $-2 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [-2; 2] (*) \Rightarrow 2f(x) + 4 \geq 0, \forall x \in [-2; 2]$.

Vì $m \in [0; 20]$ nên $2f(x) + m + 4 \geq 0 \Rightarrow |2f(x) + m + 4| = 2f(x) + m + 4, \forall x \in [-2; 2]$

Khi đó $g(x) = |2f(x) + m + 4| - f(x) - 3 = |2f(x) + m + 4 - f(x) - 3| = |f(x) + m + 1|$

Với $m = 0 \Rightarrow g(x) = |f(x) + 1|, \forall x \in [-2; 2]$.

$(*) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) + 1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq |f(x) + 1| \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq g(x) \leq 3, \forall x \in [-2; 2]$

$\Rightarrow \min_{[-2; 2]} g(x) = 0 \Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $m \in [1; 20] \Rightarrow f(x) + m + 1 \geq 0 \Rightarrow g(x) = f(x) + m + 1$.

Từ $(*)$ ta có $f(x) + m + 1 \geq m - 1 \Rightarrow \min_{[-2; 2]} g(x) = m - 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \min_{[-2; 2]} g(x) \geq 1 \Leftrightarrow m - 1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 2 \Rightarrow m \in [2; 20]$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Chọn A

Với $m = \frac{1}{2}$: ta có $f(x) = 1, \forall x \in [0; 1]$.

Do đó $\max_{[0; 1]} |f(x)| = \min_{[0; 1]} |f(x)| = 1 \Rightarrow \max_{[0; 1]} |f(x)| + \min_{[0; 1]} |f(x)| = 2$ (không thỏa mãn đề bài).

Với $m \neq \frac{1}{2}$, ta có: $f'(x) = \frac{1-2m}{(x+1)^2} \neq 0, \forall x \in [0; 1]$. Có $f(0) = 2m; f(1) = \frac{2m+1}{2}$.

Nếu $2m(2m+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó $\max_{[0; 1]} |f(x)|$ và $\min_{[0; 1]} |f(x)|$ là một trong 2 giá trị

$|2m|; \left| \frac{2m+1}{2} \right|$. Khi đó: $\max_{[0; 1]} |f(x)| + \min_{[0; 1]} |f(x)| = 3 \Leftrightarrow |2m| + \left| \frac{2m+1}{2} \right| = 3 \Leftrightarrow 2|2m| + |2m+1| = 6$.

Xét $m > 0$: phương trình $\Leftrightarrow 4m + 2m + 1 = 6 \Leftrightarrow m = \frac{5}{6}$ (thỏa mãn).

Xét $m < -\frac{1}{2}$: phương trình $\Leftrightarrow -4m - (2m + 1) = 6 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{6}$ (thỏa mãn).

Nếu $2m(2m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

Khi đó: $\max_{[0;1]} |f(x)| = \left\{ \left| \frac{2m+1}{2} \right|; |2m| \right\}$ và $\min_{[0;1]} f(x) = 0$.

Ta xét $\begin{cases} |2m| = 3 \\ \left| \frac{2m+1}{2} \right| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm \frac{2}{3} \\ m = \frac{5}{2} \\ m = -\frac{7}{2} \end{cases}$. Ta thấy các giá trị này không thỏa mãn $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

Vậy, ta có tập $S = \left\{ -\frac{7}{6}; \frac{5}{6} \right\}$, do đó số phần tử của tập S bằng 2.

Câu 28: Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3m$

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$

x	-1	0	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$3m-1$	$3m$	$3m-1$	$8+3m$	

$\Rightarrow \max_{[-1;2]} f(x) = 8 + 3m = A; \min_{[-1;2]} f(x) = 3m - 1 = a$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow A.a > 0 \Leftrightarrow (3m - 1)(8 + 3m) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m < -\frac{8}{3} \end{cases}$

Khi đó: $\min_{[-1;2]} |f(x)| = \frac{|A+a| - |A-a|}{2} = 2021$

$\Leftrightarrow \frac{|7+6m| - |9|}{2} = 2021 \Leftrightarrow |7+6m| = 4051 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4044}{6} \\ m = -\frac{4058}{6} \end{cases} (t/m) \Rightarrow |m_1 - m_2| = \frac{4051}{3}$.

Câu 29: Chọn C

Ta có $\min_{[-1;1]} |f(x)| > \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^4 - mx - 4}{x+2} > \frac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] & (1) \\ \frac{2x^4 - mx - 4}{x+2} < \frac{-3}{4}, \forall x \in [-1;1] & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow m \in \emptyset$ do (1) không thỏa với $x = 0$.

(2) $\Leftrightarrow 8x^4 - 4mx + 3x - 10 < 0(*)$, $\forall x \in [-1;1]$

Nhận xét $x = 0$ thỏa (*) nên (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 8x^3 + 3 - \frac{10}{x}, \forall x \in (0;1] \\ 4m < 8x^3 + 3 - \frac{10}{x}, \forall x \in [-1;0) \end{cases} \quad (3)$

Xét $g(x) = 8x^3 + 3 - \frac{10}{x}$, $x \in [-1;1] \setminus \{0\}$ có $g'(x) = 24x^2 + \frac{10}{x^2} > 0, \forall x \neq 0$

x	-1	0	1
g'	+		+
g	5	$+\infty$	1

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 1 \\ 4m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < \frac{5}{4}$. Do $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m = 1$.

Câu 30: Chọn C

Đặt $t = \log x$, vì $x \in \left[\frac{1}{10}; 1\right]$ nên miền giá trị của t là $[-1;0]$.

Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = \frac{t+m}{t+2}$ thỏa $\max_{[-1;0]} |f(t)| + \min_{[-1;0]} |f(t)| = 2$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ta có $f'(x) = \frac{2-m}{(t-2)^2}$.

Trường hợp 1: $m = 2$. Ta có $f(t) = 1$, khi đó $\max_{[-1;0]} |f(t)| + \min_{[-1;0]} |f(t)| = 2$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m \neq 2 \Rightarrow$ hàm số đơn điệu trên mỗi khoảng của tập xác định nên đơn điệu trên $[-1;0]$. Ta có $f(0) = \frac{m}{2}$, $f(-1) = m-1$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-m;0)$.

Khi $\frac{m}{2} \cdot (m-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$, ta có $\min_{[-1;0]} |f(t)| = 0$, $\begin{cases} \max_{[-1;0]} |f(t)| = \frac{m}{2} \\ \max_{[-1;0]} |f(t)| = 1-m \end{cases}$.

Khi đó $\max_{[-1;0]} |f(t)| + \min_{[-1;0]} |f(t)| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{m}{2}\right| = 2 \\ |m-1| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \\ m = 3 \\ m = -1 \end{cases} \quad (\text{không thỏa mãn } 0 \leq m \leq 1).$

$$\text{Khi } \frac{m}{2} \cdot (m-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases} \text{ khi đó } \max_{[-1;0]} |f(t)| + \min_{[-1;0]} |f(t)| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{m}{2} \right| + |m-1| = 2.$$

$$\text{Với } m < 0, \text{ ta có } \left| \frac{m}{2} \right| + |m-1| = 2 \Leftrightarrow -\frac{m}{2} + 1 - m = 2 \Leftrightarrow -3m = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Với } m > 1, m \neq 2, \text{ ta có } \left| \frac{m}{2} \right| + |m-1| = 2 \Leftrightarrow \frac{m}{2} + m - 1 = 2 \Leftrightarrow 3m = 6 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (không thỏa mãn } m > 1, m \neq 2).$$

$$\text{Kết hợp trường hợp 1 và trường hợp 2 ta có } S = \left\{ -\frac{2}{3}; 2 \right\}.$$

$$\text{Tổng số phần tử của } S \text{ bằng } -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}.$$

Câu 31: Chọn A

$$\text{Đặt } t = e^x \text{ thì } t \in [1; 2]. \text{ Khi đó } f(x) = g(t) = |3t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 48t + m|.$$

$$\text{Xét } h(t) = 3t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 48t + m, t \in [1; 2] \text{ có } h'(t) = 12t^3 - 12t^2 - 48t + 48.$$

$$\begin{cases} h'(t) = 0 \\ t \in [1; 2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow h(t) \text{ nghịch biến trên } [1; 2]; g(1) = |m + 23|, g(2) = |m + 16|.$$

$$\text{Nếu } (m + 16)(m + 23) \leq 0 \text{ thì } \min g(t) = 0, \text{ suy ra } 0 \leq \max g(t) \leq 3 \min g(t) = 0 \text{ hay } g(t) = 0 \forall t \in [1; 2] \text{ (vô lý).}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} m + 16 > 0 \\ m + 23 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -16.$$

$$\text{Khi đó } \max g(t) \leq 3 \min g(t) \Leftrightarrow m + 23 \leq 3(m + 16) \Leftrightarrow m \geq -12,5 \Rightarrow m \geq -12,5 \text{ (1).}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} m + 16 < 0 \\ m + 23 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -23$$

Ta không cần xét tiếp trường hợp này do đề bài chỉ yêu cầu tìm $m \geq -23$.

$$\text{Từ (1) và } m \in \mathbb{Z} \cap [-23; 10] \text{ ta có } m \in \{-12; -11; -10; -9; \dots; 8; 9; 10\}.$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa là -33 .

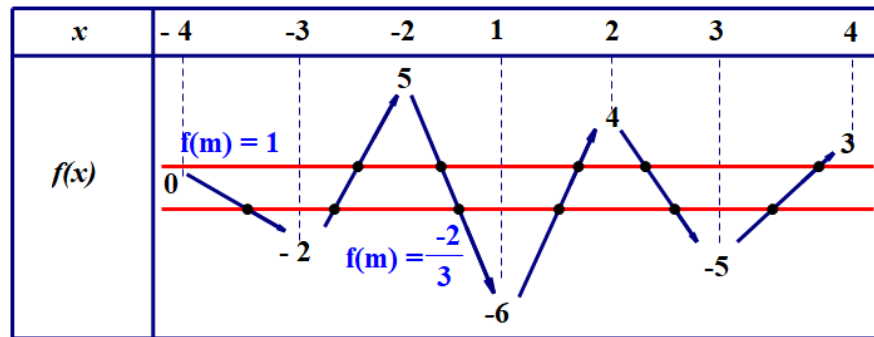
Câu 32: Chọn B

$$\text{Đặt } t = u(x) = x^3 + 2x \text{ ta có } t' = u'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \text{ do đó } t = x^3 + 2x \text{ là một hàm số tăng vì vậy } x \in [-1; 1] \text{ thì } t \in [-3; 3].$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$t'(x)$			+	
$t = u(x)$		-3	3	

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;3]$ ta có $\max_{[-3;3]} f(t) = 5$ và $\min_{[-3;3]} f(t) = -6$.

Từ đây ta có $\max_{[-1;1]} g(x) = \left| \max_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \right|$ hoặc $\max_{[-1;1]} g(x) = \left| \min_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \right|$



$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} \left| \max_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \right| = 8 \\ \left| \max_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \right| \geq \left| \min_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |5 + 3f(m)| = 8 \\ |5 + 3f(m)| \geq |-6 + 3f(m)| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = 1 \\ f(m) = -\frac{13}{3} \\ f(m) \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow f(m) = 1$$

Từ bảng biến thiên phương trình $f(m) = 1$ có 5 nghiệm, như vậy trường hợp này có 5 giá trị thực của m thỏa mãn.

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} \left| \min_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \right| = 8 \\ \left| \min_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \right| > \left| \max_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |-6 + 3f(m)| = 8 \\ |-6 + 3f(m)| > |5 + 3f(m)| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = -\frac{2}{3} \\ f(m) = \frac{14}{3} \Leftrightarrow f(m) = -\frac{2}{3} \\ f(m) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên phương trình $f(m) = -\frac{2}{3}$ có 6 nghiệm, như vậy trường hợp này có 6 giá trị thực của m thỏa mãn.

Vậy có tất cả là 11 giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Chọn C

$$\text{Ta có: } 3a^4 + 1 = a^4 + a^4 + a^4 + 1 \geq 4\sqrt[4]{a^4 \cdot a^4 \cdot a^4} = 4a^3$$

$$12b^4 + 1 = 4b^4 + 4b^4 + 4b^4 + 1 \geq 4\sqrt[4]{4b^4 \cdot 4b^4 \cdot 4b^4} = 4(\sqrt{2}b)^3$$

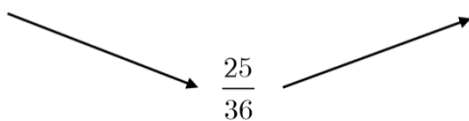
Suy ra

$$\begin{aligned} H &= \frac{3a^4 + 12b^4 + 25c^3 + 2}{(a + \sqrt{2}b + c)^3} \geq \frac{4a^3 + 4(\sqrt{2}b)^3 + 25c^3}{(a + \sqrt{2}b + c)^3} = \frac{4(a + \sqrt{2}b)(a^2 + (\sqrt{2}b)^2 - \sqrt{2}ab) + 25c^3}{(a + \sqrt{2}b + c)^3} \\ &\geq \frac{4(a + \sqrt{2}b)\left(\frac{(a + \sqrt{2}b)^2}{2} - \frac{(a + \sqrt{2}b)^2}{4}\right) + 25c^3}{(a + \sqrt{2}b + c)^3} = \frac{(a + \sqrt{2}b)^3 + 25c^3}{(a + \sqrt{2}b + c)^3} = \frac{\left(\frac{a + \sqrt{2}b}{c}\right)^3 + 25}{\left(\frac{a + \sqrt{2}b}{c} + 1\right)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x = \frac{a + \sqrt{2}b}{c}, x > 0. \text{ Xét } f(x) = \frac{x^3 + 25}{(x+1)^3} \text{ với } x \in (0; +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1)^3 - 3(x+1)^2(x^3 + 25)}{(x+1)^6} = \frac{3x^2(x+1) - 3(x^3 + 25)}{(x+1)^4} = \frac{3(x^2 - 25)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

x	0	5	$+\infty$
y'	–	0	+
y			

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có } \min_{(0; +\infty)} f(x) = \frac{25}{36}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức H là $\frac{25}{36} \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$.

Câu 34: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = \frac{mx - \sqrt{x+2019}}{x+2020}$ với $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x| \leq 2018\}$.

Đặt $t = \sqrt{x+2019} \Rightarrow t \in [1; \sqrt{2018}] \cup [\sqrt{2020}; \sqrt{4037}]$

Ta được hàm số mới: $h(t) = \frac{m(t^2 - 2019) - t}{t^2 + 1} \Rightarrow h'(x) = \frac{t^2 + 4040mt - 1}{(t^2 + 1)^2}$

$h'(t) = 0$ cho ta hai nghiệm $\begin{cases} t_1 = -2020m - \sqrt{(2020m)^2 + 1} \\ t_2 = -2020m + \sqrt{(2020m)^2 + 1} \end{cases}$

Trường hợp 1: $m \geq 0 \Rightarrow t_1 < 0; t_2 = \frac{1}{2020m + \sqrt{(2020m)^2 + 1}} \leq 1$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	t_2	1	$\sqrt{2018}$	$\sqrt{2020}$	$\sqrt{4037}$
$h'(t)$	0			+	
$h(t)$		$\frac{-2018m-1}{2}$	$\frac{-m-\sqrt{2018}}{2019}$	$\frac{m-\sqrt{2020}}{2021}$	$\frac{2018m-\sqrt{4037}}{4038}$

Theo đề, giá trị nhỏ nhất của $h(t)$ không vượt quá $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow h(t) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m + \sqrt{2018}}{2019} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{m - \sqrt{2020}}{2021} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \sqrt{2018} + \frac{2019}{2} \\ m \leq \sqrt{2020} + \frac{2021}{2} \end{cases} \Rightarrow m \leq 1055$$

Kết hợp điều kiện: $0 \leq m \leq 1055$ (1)

Trường hợp 2: $m \leq -1 \Rightarrow t_1 < 0; t_2 > \sqrt{4037}$

Ta có bảng biến thiên sau:

Chủ đề 03: Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất của hàm số

t	t_2	1	$\sqrt{2018}$	$\sqrt{2020}$	$\sqrt{4037}$
$h'(t)$	0	–			
$h(t)$		$\frac{-2018m-1}{2}$	$\rightarrow \frac{-m-\sqrt{2018}}{2019}$	$\rightarrow \frac{m-\sqrt{2020}}{2021}$	$\rightarrow \frac{2018m-\sqrt{4037}}{4038}$

Theo đề, giá trị nhỏ nhất của $h(t)$ không vượt quá $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow h(t) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-m-\sqrt{2018}}{2019} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{-m+\sqrt{2020}}{2021} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\sqrt{2018} - \frac{2019}{2} \\ m \geq \sqrt{2020} - \frac{2021}{2} \end{cases} \Rightarrow m \geq -1054$$

Kết hợp điều kiện: $-1054 \leq m \leq -1$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $-1054 \leq m \leq 1055$. Do đó tập nghiệm tổng cộng 2110 phần tử.

Câu 35: Chọn A

Ta có: $5x^2 + 2xy + 2y^2 = 9 \Leftrightarrow (2x+y)^2 + (x-y)^2 = 9$.

Đặt $2x+y=3\sin t$, $x-y=3\cos t$ với $t \in [-2\pi; 2\pi]$.

$\Rightarrow x = \sin t + \cos t$ và $y = \sin t - 2\cos t$.

$$K = \frac{6x-6}{4x-y-9} = \frac{6\sin t + 6\cos t - 6}{4(\sin t + \cos t) - \sin t + 2\cos t - 9} = \frac{6\sin t + 6\cos t - 6}{3\sin t + 6\cos t - 9}.$$

$$\Rightarrow (3K-6)\sin t + (6K-6)\cos t = 9K-6.$$

Điều kiện để phương trình trên có nghiệm là $(3K-6)^2 + (6K-6)^2 \geq (9K-6)^2 \Leftrightarrow -1 \leq K \leq 1$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t+1}{t-2}$ trên $[-1; 1]$

Ta có: $f'(t) = \frac{-5}{(t-2)^2} < 0, \forall t \neq 2$. Suy ra $\max_{[-1; 1]} f(t) = f(-1) = \frac{1}{3}$.

Câu 36: Chọn A

Đặt $t = x^2 + x$, vì $x \in [-2; 2] \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{4}; 6\right]$.

Khi đó $y = (t+m)^2$, $\forall t \in \left[-\frac{1}{4}; 6\right] \Rightarrow y' = 2(t+m)$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow t = -m$.

Biện luận theo tham số m :

Trường hợp 1 : $-m \geq 6 \Leftrightarrow m \leq -6$, khi đó y nghịch biến trên $\left[-\frac{1}{4}; 6\right]$ nên

$$\min_{\left[-\frac{1}{4}; 6\right]} y = y(6) = (6+m)^2. \text{ Ta có } (6+m)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -8 \\ m = -2 \end{cases}. \text{ Nhận } m = -8.$$

Trường hợp 2: $-m \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}$, khi đó y đồng biến trên $\left[-\frac{1}{4}; 6\right]$ nên

$$\min_{\left[-\frac{1}{4}; 6\right]} y = y\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4} + m\right)^2. \text{ Ta có } \left(-\frac{1}{4} + m\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{4} \\ m = -\frac{7}{4} \end{cases}. \text{ Nhận } m = \frac{9}{4}.$$

Trường hợp 3: $-\frac{1}{4} < -m < 6 \Leftrightarrow -6 < m < \frac{1}{4}$, khi đó y đồng biến trên $(-m; 6)$ và nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{4}; -m\right)$, nên $\min_{\left[-\frac{1}{4}; 6\right]} y = y(-m) = 0$. Do đó không $y = g(x)$ có giá trị m thỏa $\min_{\left[-\frac{1}{4}; 6\right]} y = 4$.

Vậy tổng giá trị của tham số m thỏa $\min_{[-2; 2]} y = 4$ là $-8 + \frac{9}{4} = -\frac{23}{4}$.

DẠNG 5**GTNN-GTLN của hàm số liên quan đến tích phân**

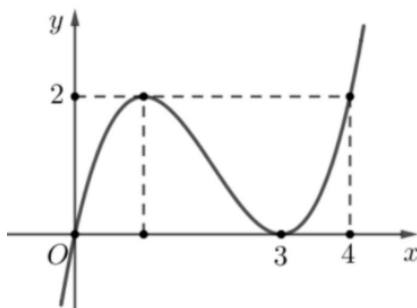
Câu 1: Cho hàm số đa thức bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	1	$\frac{7}{6}$	$-\infty$

Biết $f(-2) = -1$, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-2; 0]$ bằng

- A. 1. B. $\frac{13}{12}$. C. $\frac{1}{12}$. D. 2.

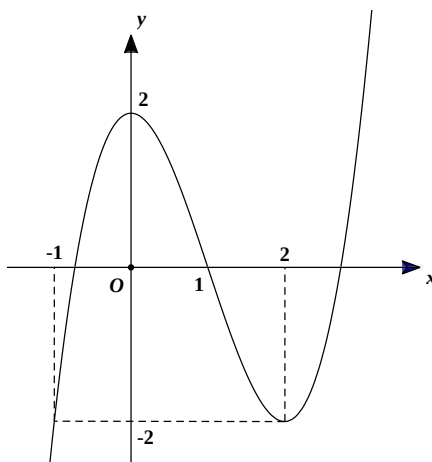
Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như sau



Hàm số $g(x) = f(x^2) - \frac{1}{16}x^4$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ bằng

- A. $f(4) - 1$. B. $f(2) - \frac{1}{4}$. C. $f\left(\frac{7}{2}\right) - \frac{49}{64}$. D. $f\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{25}{64}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên:

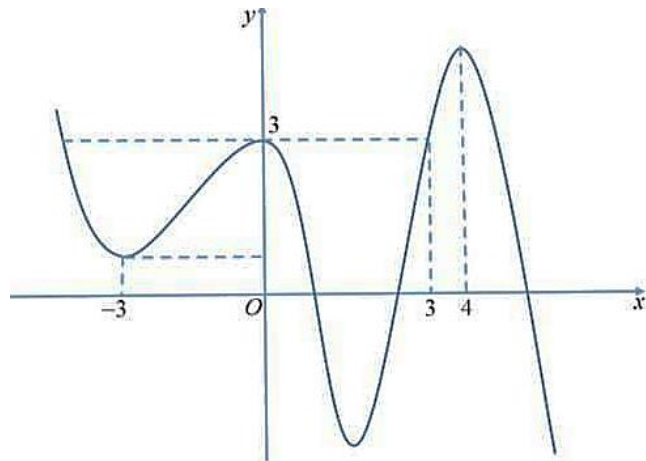


Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x^2 + 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ bằng

- A. $-\frac{63}{4}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $-\frac{15}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.

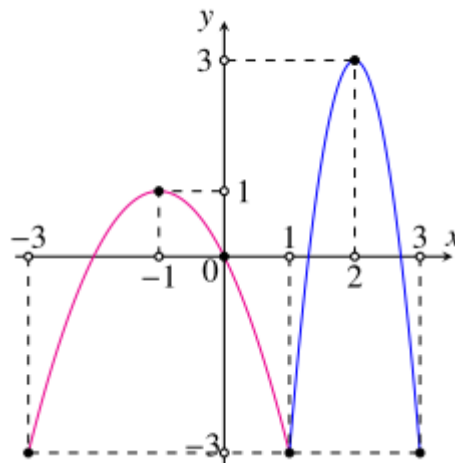
Chủ đề 03: Giá trị nhỏ nhất – Giá trị lớn nhất của hàm số

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(3x) - 9x$ trên đoạn $\left[-1; \frac{4}{3}\right]$ bằng



- A. $f(3) - 9$. B. $f(-3) + 9$. C. $f(0)$. D. $f(4) - 12$.

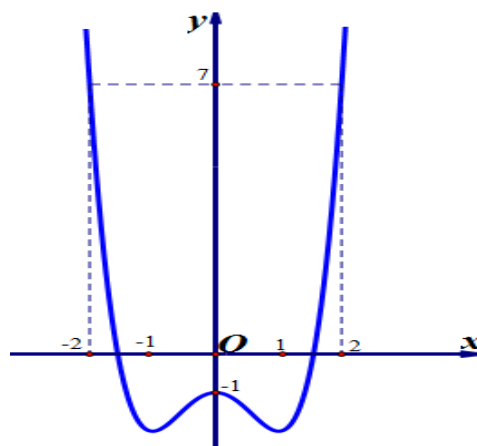
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x^2 - 6x - 2$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

- B. $f(-2) - 12$. B. $f(-1)$. C. $f(2) - 12$. D. $f(4) - 30$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{2}{3}x^3 + x$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

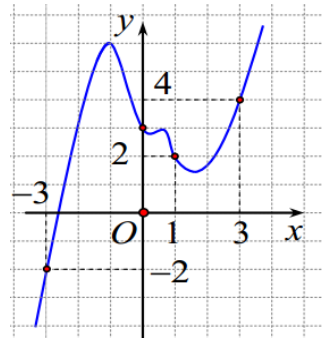
A. $g(2)$

B. $g(-2)$.

C. $g(0) + g(2)$.

D. $g(2) - g(0)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng



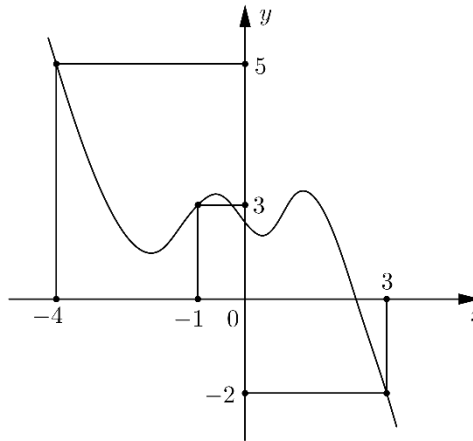
A. $f(0) - 1$.

B. $f(-3) - 4$.

C. $2f(1) - 4$.

D. $f(3) - 16$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$, biết $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 2f(x) + (x-1)^2$ trên đoạn $[-4; 3]$ là m . Kết luận nào sau đây đúng?

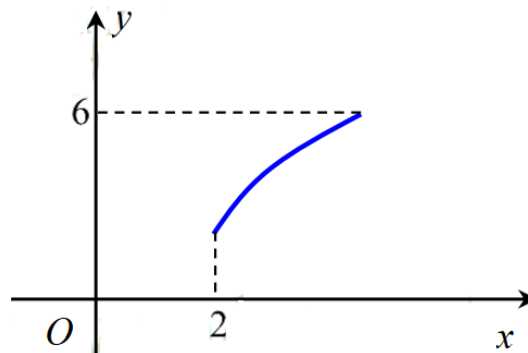
A. $m = g(-1)$.

B. $m = g(-4)$.

C. $m = g(3)$.

D. $m = g(-3)$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{x-d}$ có một phần đồ thị như hình vẽ bên dưới, biết rằng các hệ số a, b, d nguyên và $ad > 0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a + b + d$ bằng



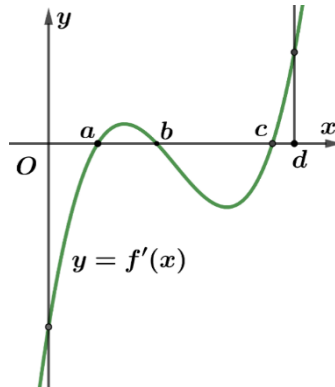
A. -1 .

B. -2 .

C. 0 .

D. 2 .

Câu 28: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0; d]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

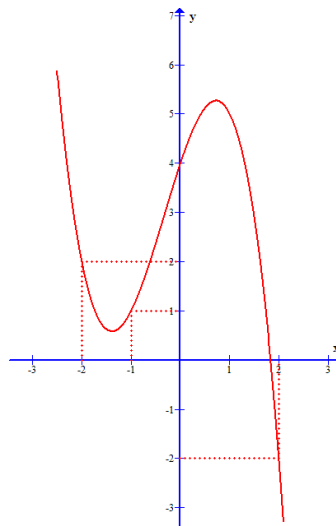


- A. $M + m = f(b) + f(a)$. B. $M + m = f(0) + f(a)$.
C. $M + m = f(0) + f(c)$. D. $M + m = f(d) + f(c)$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2) - 2x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là

- A. $f(0)$ và $f(4) - 8$. B. $f(0)$ và $f(-1) - 2$.
C. $f(4) - 8$ và $f(1) - 2$. D. $f(16) - 32$ và $f(-1) - 2$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ được cho trong hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(2x) + 2x^2 + 2x$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ bằng



- A. $f(2) + 12$. B. $f(-2)$. C. $f(-6) + 12$. D. $f(1) + \frac{3}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số đa thức bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	1	$\frac{7}{6}$	$-\infty$

Biết $f(-2) = -1$, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-2; 0]$ bằng

- A. 1. B. $\frac{13}{12}$. C. $\frac{1}{12}$. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn nên $f'(x)$ là hàm bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào BBT ta có hệ sau:

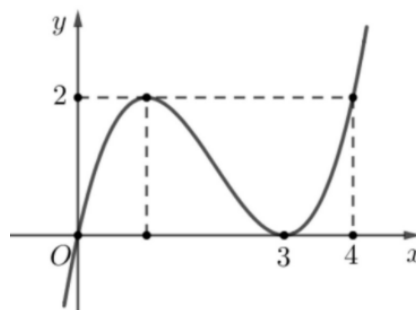
$$\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y'(-1) = 0 \\ y(-2) = 1 \\ y(-1) = \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a - 4b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ -a + b - c + d = \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = -2 \\ d = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Suy ra $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3}$. Ta có $f'(0) = \frac{1}{3}$. Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$f'(x) > 0, \forall x \in [-2; 0]. \text{ Ta có } \int_{-2}^0 f'(x) dx = f(0) - f(-2).$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-2; 0]} f(x) = f(0) = \int_{-2}^0 f'(x) dx + f(-2) = \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3} \right) dx - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như sau



Hàm số $g(x) = f(x^2) - \frac{1}{16}x^4$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ bằng

- A. $f(4) - 1$. B. $f(2) - \frac{1}{4}$. C. $f\left(\frac{7}{2}\right) - \frac{49}{64}$. D. $f\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{25}{64}$.

Lời giải

Chọn D

Chủ đề 03: Giá trị nhỏ nhất – Giá trị lớn nhất của hàm số

Đặt $t = x^2$. Vì $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ nên $t \in [0; 3]$. Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $h(t) = f(t) - \frac{1}{16}t^2$ với $t \in [0; 3]$.

Vì $f(x)$ là hàm số bậc bốn nên $f'(x)$ là hàm số bậc ba.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ có nghiệm $x = 0$ và nghiệm kép $x = 3$. Suy ra $f'(x) = ax(x-3)^2$.

Mặt khác, ta có $f'(4) = 2 \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Suy ra $f'(x) = \frac{1}{2}x(x-3)^2 = \frac{1}{2}(x^3 - 6x^2 + 9x)$.

Suy ra $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right) + C = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2 + C$.

Suy ra $f(t) = \frac{1}{8}t^4 - t^3 + \frac{9}{4}t^2 + C$.

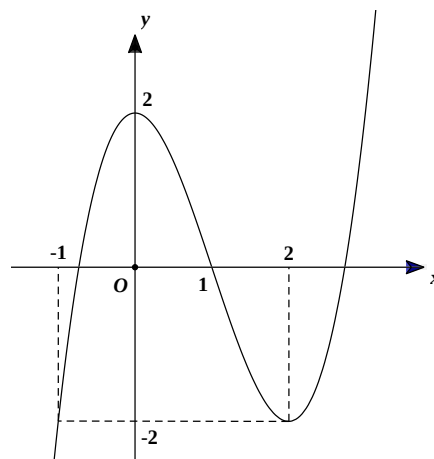
Suy ra $h(t) = \frac{1}{8}t^4 - t^3 + \frac{35}{16}t^2 + C$.

Suy ra $h'(t) = \frac{t^3}{2} - 3t^2 + \frac{35}{8}t$.

Ta có $h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$ (vì $t \in [0; 3]$).

Khi đó dễ thấy giá trị lớn nhất của hàm số $h(t)$ trên đoạn $[0; 3]$ là $h\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{25}{64}$ đạt được khi $t = \frac{5}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x^2 + 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ bằng

A. $-\frac{63}{4}$.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $-\frac{15}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2x$, $t \in [-1; 3]$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(t) = f(t) - t^2 + 2t$ trên đoạn $[-1; 3]$.

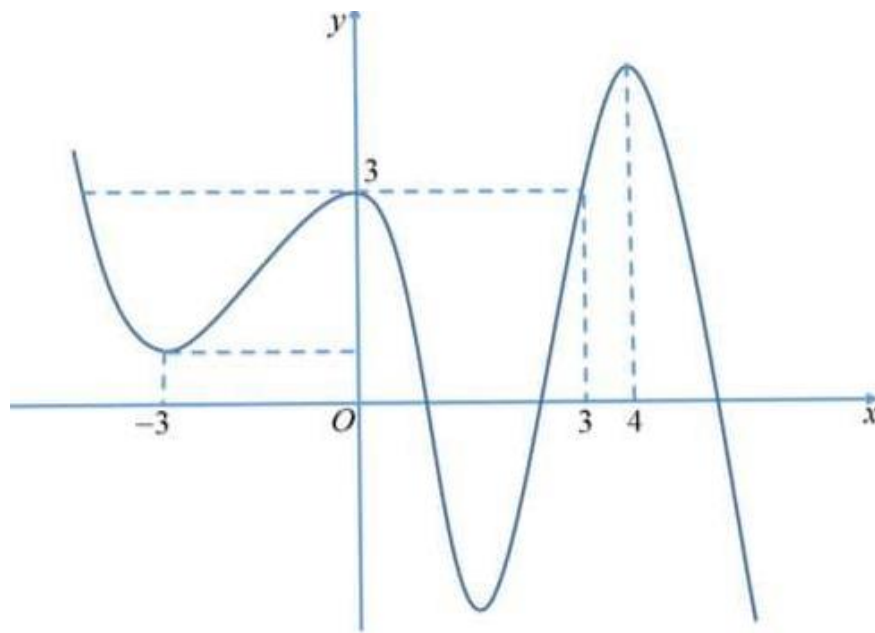
Dựa vào bốn điểm $(-1; -2)$; $(0; 2)$; $(1; 0)$; $(2; -2)$ mà đồ thị $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua

$$\text{lập hệ phương trình } \begin{cases} -a + b - c + d = -2 \\ d = 2 \\ a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \text{ nên}$$

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x, \quad f(0) = 0.$$

$$\text{Khi đó } h(t) = \frac{t^4}{4} - t^3 + 2t - t^2 + 2t \Rightarrow \min_{[-1; 3]} h(t) = h(3) = -\frac{15}{4}.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(3x) - 9x$ trên đoạn $\left[-1; \frac{4}{3}\right]$ bằng



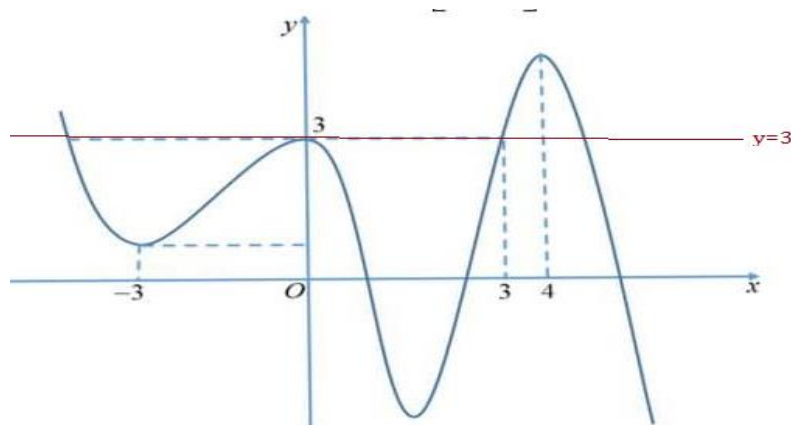
A. $f(3) - 9$.

B. $f(-3) + 9$.

C. $f(0)$.

D. $f(4) - 12$.

Lời giải

Chọn A

Chủ đề 03: Giá trị nhỏ nhất – Giá trị lớn nhất của hàm số

Đặt $t = 3x$ vì $x \in \left[-1; \frac{4}{3}\right] \Rightarrow t \in [-3; 4]$.

$\Rightarrow h(t) = f(t) - 3t$ với $t \in [-3; 4]$

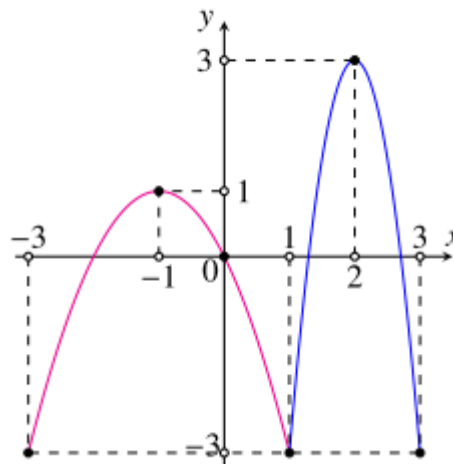
Ta có: $h'(t) = f'(t) - 3 \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a < -3(L) \\ t = 0 \\ t = 3 \\ t = b > 4(L) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	-3		0		3		4
$g'(t)$		-	0	-	0	+	
$g(t)$		$\nearrow g(3) \searrow$					

Dựa vào bảng biến thiên: $\min_{\left[-1; \frac{4}{3}\right]} h(x) = \min_{[-3; 4]} h(t) = h(3) = f(3) - 9$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên dưới.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x^2 - 6x - 2$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

- B. $f(-2) - 12$. B. $f(-1)$. C. $f(2) - 12$. D. $f(4) - 30$.

Lời giải

Chọn B

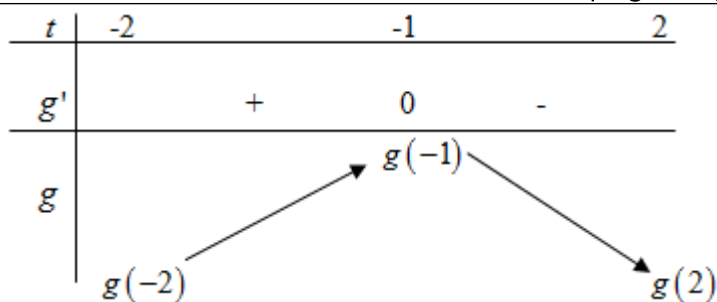
$g'(x) = 2f'(2x) - 8x - 6$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 4x + 3(*)$.

Đặt $t = 2x$. Với $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [-2; 2]$;

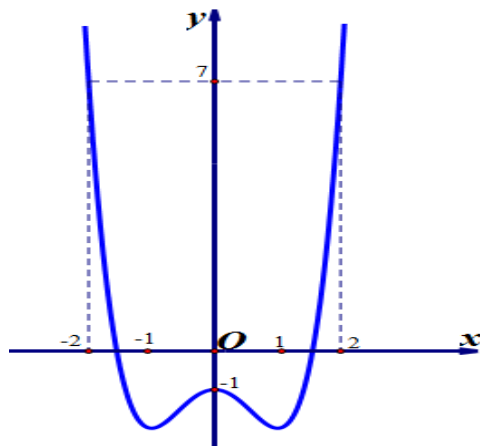
$(*) \Leftrightarrow f'(t) = 2t + 3(**)$

Số nghiệm phương trình $(**)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = 2t + 3$ dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên



$$\max_{[-2;2]} g(t) = g(-1) \Leftrightarrow \max_{[-1;1]} g(x) = g\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \max_{[-1;1]} g(x) = f(-1)$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{2}{3}x^3 + x$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng

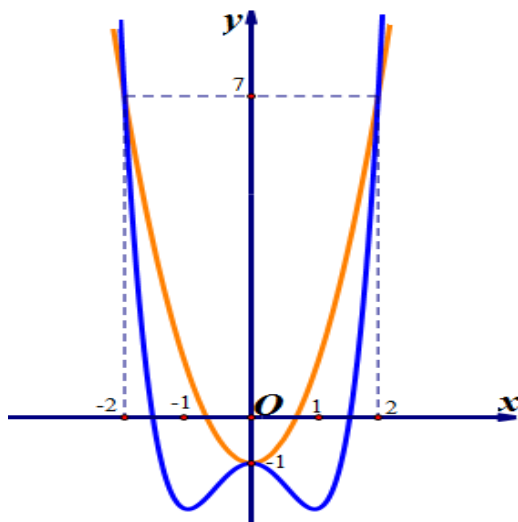
- A. $g(2)$ B. $g(-2)$. C. $g(0) + g(2)$. D. $g(2) - g(0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x^2 + 1 = f'(x) - (2x^2 - 1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x^2 - 1$. Ta có đồ thị của hàm số $y = 2x^2 - 1$ là một parabol có đỉnh $I(0; -1)$ và đi qua hai điểm $A(-2; 7)$ và $B(2; 7)$. Khi đó đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = 2x^2 - 1$ có dạng



Chủ đề 03: Giá trị nhỏ nhất – Giá trị lớn nhất của hàm số

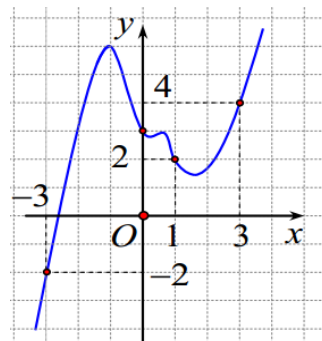
Từ đồ thị ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-2	0	2
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	$g(-2)$	$g(0)$	$g(2)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{2}{3}x^3 + x$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng $g(2)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng



A. $f(0) - 1$.

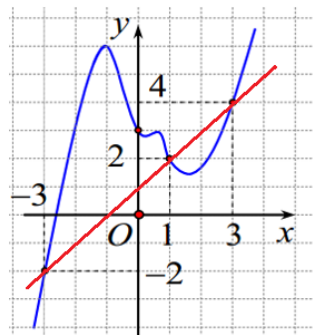
B. $f(-3) - 4$.

C. $2f(1) - 4$.

D. $f(3) - 16$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x - 2$.

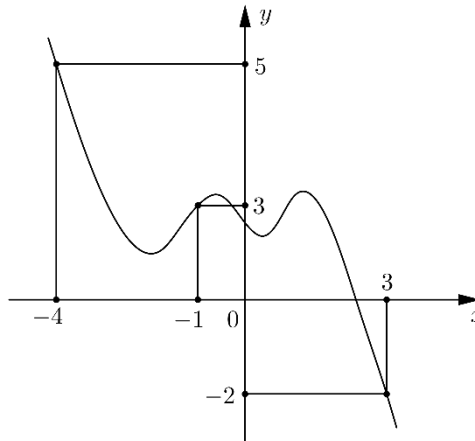
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	-3	1	3
y'	+	0	-
y	$g(-3)$	$g(1)$	$g(3)$

Từ bảng biến thiên, suy ra $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1) = 2f(1) - 4$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$, biết $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 2f(x) + (x-1)^2$ trên đoạn $[-4; 3]$ là m . Kết luận nào sau đây đúng?

A. $m = g(-1)$.

B. $m = g(-4)$.

C. $m = g(3)$.

D. $m = g(-3)$.

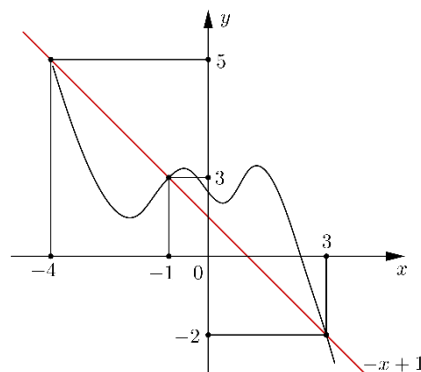
Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x) = 2f(x) + (x-1)^2$

$$\Rightarrow g'(x) = 2f'(x) + 2(x-1)$$

$$\text{Xét } g'(x) = 2f'(x) + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - (-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -4; x = -1; x = 3$$

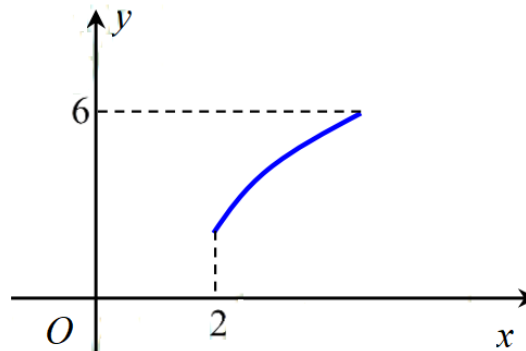


$\Rightarrow$ Ta có BBT:

x	$-\infty$	-4	-1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	The diagram shows four arrows representing the function's behavior on intervals defined by the critical points $x = -4, -1, 3$. - From $-\infty$ to -4, the arrow points up and to the right (increasing). - From -4 to -1, the arrow points down and to the right (decreasing). - From -1 to 3, the arrow points up and to the right (increasing). - From 3 to $+\infty$, the arrow points down and to the right (decreasing). A label $g(-1)$ is placed below the arrow between $x = -1$ and $x = 3$, indicating a local minimum at $x = -1$.						

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 2f(x) + (x-1)^2$ trên đoạn $[-4; 3]$ là: $g(-1)$

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{x-d}$ có một phần đồ thị như hình vẽ bên dưới, biết rằng các hệ số a, b, d nguyên và $ad > 0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a + b + d$ bằng



A. -1.

B. -2.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = \frac{-ad-b}{(x-d)^2}$.

Từ hình vẽ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng của tập xác định $\Rightarrow ad + b < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{1 - \frac{d}{x}} = a \Rightarrow \text{đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng } y = a \Rightarrow a > 0$$

Mà $ad > 0 \Rightarrow d > 0$ (1).

Từ hình vẽ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = d < 2$ (2).

Từ (1), (2) và do $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 1 \Rightarrow a + b < 0$.

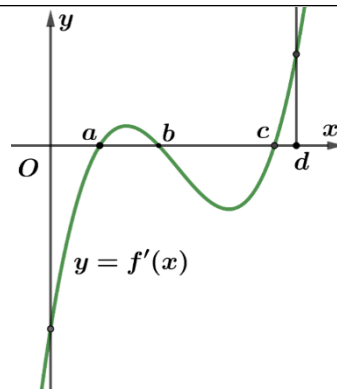
Do $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \leq -1$.

Khi đó $T = a + b + d \leq -1 + 1 \Rightarrow T \leq 0$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a + b = -1$ và $d = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a + b + d$ bằng 0.

Câu 28: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0; d]$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $M + m = f(b) + f(a)$.

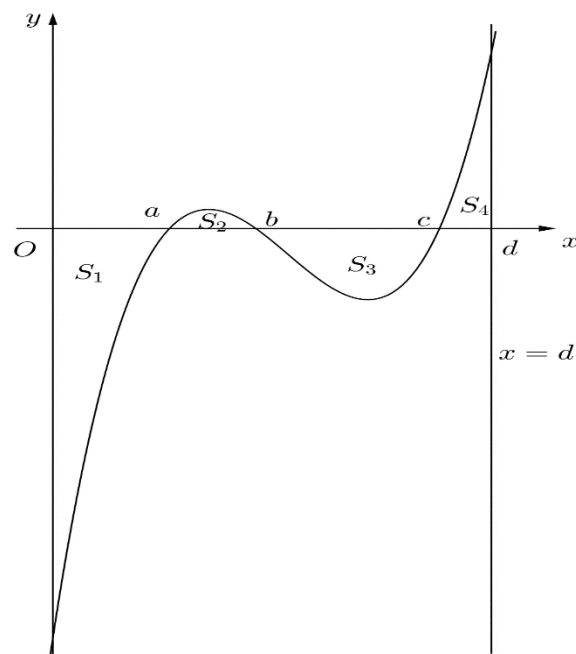
B. $M + m = f(0) + f(a)$.

C. $M + m = f(0) + f(c)$.

D. $M + m = f(d) + f(c)$.

Lời giải

Chọn C



♦ Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$

x	0	a		b		c		d
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(a)$		$f(b)$		$f(c)$		$f(d)$

♦ Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = \max\{f(0), f(b), f(d)\}$, $m = \min\{f(a), f(c)\}$

♦ Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = a$.

♦ Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

♦ Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = b$, $x = c$.

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = c$, $x = d$.

♦ Dựa vào hình vẽ ta có;

$$S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int_a^0 f'(x) dx > \int_a^b f'(x) dx \Leftrightarrow f(0) - f(a) > f(b) - f(a) \Leftrightarrow f(0) > f(b).$$

$$S_3 > S_4 \Leftrightarrow \int_c^b f'(x) dx > \int_c^d f'(x) dx \Leftrightarrow f(b) - f(c) > f(d) - f(c) \Leftrightarrow f(b) > f(d).$$

♦ Suy ra $M = f(0)$.

$$S_3 > S_2 \Leftrightarrow \int_c^b f'(x) dx > \int_a^b f'(x) dx \Leftrightarrow f(b) - f(c) > f(b) - f(a) \Leftrightarrow f(c) < f(a).$$

Suy ra $m = f(c)$.

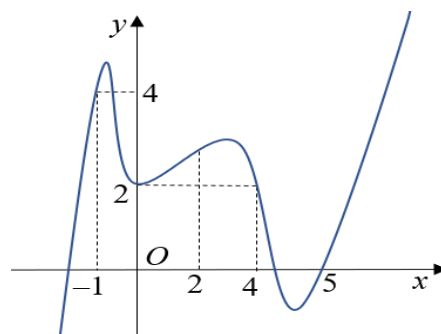
♦ Vậy $M + m = f(0) + f(c)$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2) - 2x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là

A. $f(0)$ và $f(4) - 8$. B. $f(0)$ và $f(-1) - 2$.

C. $f(4) - 8$ và $f(1) - 2$.

D. $f(16) - 32$ và $f(-1) - 2$.



Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = f(x^2) - 2x^2$ với $x \in [-1; 2] \Rightarrow x^2 \in [0; 4]$

Ta có: $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2) - 4x = 2x[f'(x^2) - 2]$.

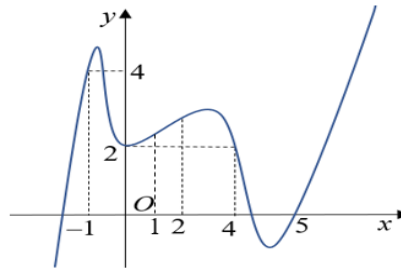
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(x^2)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=0 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \end{cases} \notin [-1; 2].$$

Với $x^2 \in [0; 4]$ thì $f'(x^2) \geq 2 \Rightarrow f'(x^2) - 2 \geq 0$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	-1	0	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$f(1)-2$	$f(0)$	$f(4)-8$

So sánh: $f(1)-2$ với $f(4)-8$



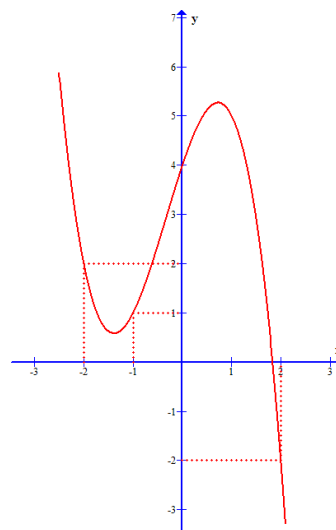
Hình phẳng (H) giới hạn bởi: $y = f'(x)$, $y = 2$, $x = 1$, $x = 4$ có diện tích là S .

$$S = \int_1^4 |f'(x) - 2| dx = \int_1^4 [f'(x) - 2] dx = (f(x) - 2x) \Big|_1^4 = f(4) - 8 - (f(1) - 2).$$

$$S > 0 \Rightarrow f(4) - 8 - (f(1) - 2) > 0 \Leftrightarrow f(4) - 8 > f(1) - 2.$$

$$\text{Vậy: } \min_{[-1;2]} g(x) = f(0) \text{ và } \max_{[-1;2]} g(x) = f(4) - 8.$$

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ được cho trong hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(2x) + 2x^2 + 2x$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-3; \frac{1}{2}\right]$ bằng



- A. $f(2)+12$. B. $f(-2)$. C. $f(-6)+12$. D. $f(1)+\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t-1=2x, \quad x \in \left[-3; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow t \in [-5; 2]$$

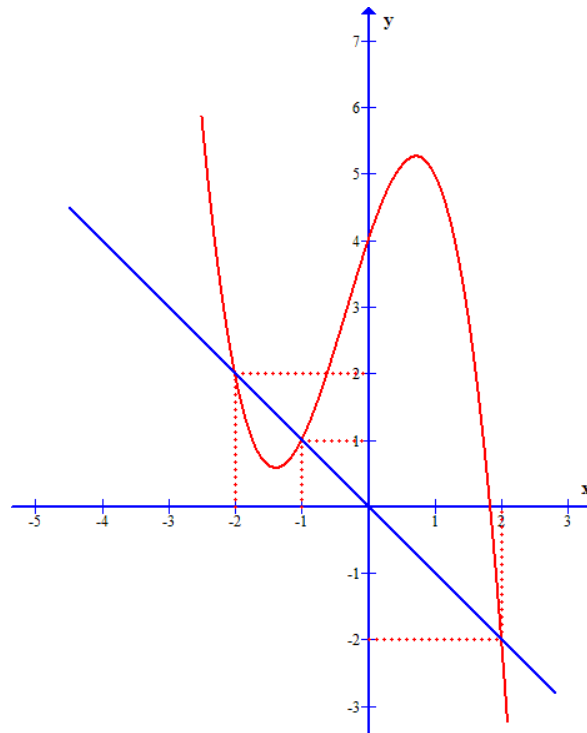
Khi đó, hàm số $g(x) = f(2x) + 2x^2 + 2x$ thành

$$h(t) = f(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} + (t-1)$$

Chủ đề 03: Giá trị nhỏ nhất – Giá trị lớn nhất của hàm số

$$h'(t) = f'(t-1) + t \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t-1) = -t$$

Xét tương giao giữa đồ thị hai hàm số $y = f'(t-1), y = -t$



$$\text{Do vậy } h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$:

t	-5	-2	-1	2			
$h'(t)$		+	0	-	0	+	0
$h(t)$							

$h(-5)$

$h(-2)$

$h(-1)$

$h(2)$

$$\text{Do vậy, } \min_{\left[-3; \frac{1}{2}\right]} g(x) = \min_{[-5; 2]} h(t) = \min \{h(-5); h(-1)\}.$$

$$\text{Trong đó } h(-5) = f(-6) + 12, h(-1) = f(-2).$$

Từ đồ thị ta cũng thấy: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f'(t-1), y = -t$ và các đường thẳng $t = -5, t = -2$ lớn hơn diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f'(t-1), y = -t$ và các đường thẳng $t = -2, t = -1$.

Do đó:

$$\begin{aligned}
& \int_{-2}^{-1} [-t - f'(t-1)] dt < \int_{-5}^{-2} [f'(t-1) + t] dt \\
& \Leftrightarrow \left[-\frac{t^2}{2} - f(t-1) \right]_{-2}^{-1} < \left[\frac{t^2}{2} + f(t-1) \right]_{-5}^{-2} \\
& \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - f(-2) + 2 + f(-3) < 2 + f(-3) - \frac{25}{2} - f(-6) \\
& \Leftrightarrow f(-2) > f(-6) + 12 \\
& \text{Vậy, } \min_{\left[-3; \frac{1}{2}\right]} g(x) = f(-6) + 12.
\end{aligned}$$

