

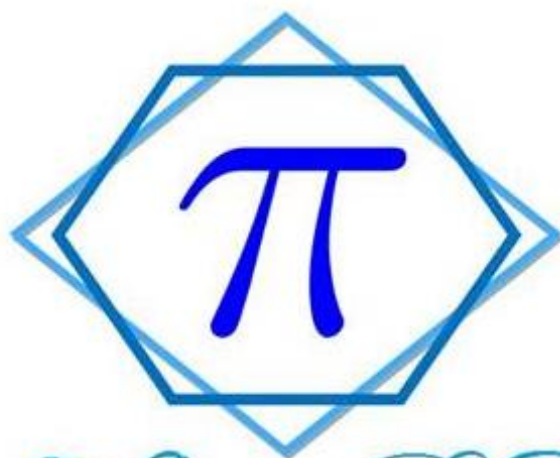
Nhóm PI

Tổng hợp câu hỏi trắc nghiệm hay môn Toán

Nguyễn Quang Hưng – Nguyễn Thành Tiến

Phần Hình học 12

Phương pháp tọa độ trong không gian



Nhóm PI
facebook.com/groups/nhompi

Năm 2017 – Tháng 5 – Ngày 10 – Thứ tư

Lời mở đầu

Đây là tài liệu đầu tiên do các thành viên NHÓM PI thực hiện .

Các bài tập được trích trong đây chủ yếu là những bài được lấy trong các đề thi thử, bài giải được làm dưới cách chi tiết, nên có một số chỗ dài hơn so với bình thường .

Nếu mọi người ai có góp ý gì về bài giải hay phát hiện sai sót nào trong tài liệu thì xin đưa lên ý kiến trong group NHÓM PI .

Link group : <https://www.facebook.com/groups/NhomPI/>

Dẫu đã cố gắng làm rất cẩn thận nhưng khó tránh khỏi sai sót, mong các bạn thông cảm .

Cảm ơn các bạn đã đọc tài liệu .

Câu 1 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) qua $M(2;3;5)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho giá trị của OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) là :

- A. $\frac{18}{\sqrt{91}}$ B. $\frac{24}{\sqrt{91}}$ C. $\frac{16}{\sqrt{91}}$ D. $\frac{32}{\sqrt{91}}$

Giải :

Theo giả thuyết ta có : $(P): \frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} = 1$.

Do a, b, c theo thứ tự là một cấp số nhân có công bội là 3 $\Rightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = 9a \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{a} + \frac{5}{9a} = 1 \Rightarrow a = \frac{32}{9}$.

$$\Rightarrow d[I; (P)] = \frac{32}{\sqrt{91}}.$$

Câu 2 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;2;3)$, gọi $(P): px + qy + rz + 1 = 0$ ($q, p, r \in \mathbb{R}$) là mặt phẳng qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trọng tâm ΔABC . Tính $T = p + q + r$:

- A. $T = -\frac{11}{18}$ B. $T = 18$ C. $T = \frac{11}{18}$ D. $T = -18$

Giải :

Do (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại $A, B, C \Rightarrow A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a.b.c \neq 0$.

$$\Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

$$\text{Do } M \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_M \\ y_A + y_B + y_C = 3y_M \\ z_A + z_B + z_C = 3z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow T = -\frac{11}{18}.$$

Câu 3 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;2;3)$, gọi $(P): px + qy + rz + 1 = 0$ ($q, p, r \in \mathbb{R}$) là mặt phẳng qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trọng tâm ΔABC . Tính $T = p + q + r$:

- A. $T = \frac{77}{3}$ B. $T = \frac{3}{7}$ C. $T = -\frac{77}{3}$ D. $T = -\frac{3}{7}$

Giải :

Do (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại $A, B, C \Rightarrow A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a.b.c \neq 0$.

$$\Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \text{véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng } (P) \text{ là } \overrightarrow{v_{(P)}} = \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c} \right).$$

Ta có $OABC$ là một tứ diện vuông tại O có H là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow AH \perp BC$.

Mặt khác : $OA \perp BC$ ($OA \perp (OBC)$).

Vậy $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OH$. Chứng minh tương tự ta có $AB \perp OH$.

$$\Rightarrow OH \perp (ABC) . \text{ Vậy từ đó ta có : } \begin{cases} M \in (P) \\ \overrightarrow{OM} // \overrightarrow{v_{(P)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=14 \\ b=7 \\ c=\frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow T = -\frac{3}{7} .$$

Câu 4 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $|\vec{a}|=3; |\vec{b}|=2; (\vec{a}, \vec{b})=120^\circ$. Gọi 2 vectơ $\vec{p}=(2\vec{a}-\vec{b}); \vec{q}=(\vec{a}+2\vec{b})$. Tính $\cos(\vec{p}, \vec{q})$.

A. $\frac{1}{4\sqrt{39}}$

B. $\frac{1}{\sqrt{39}}$

C. $\frac{1}{2\sqrt{39}}$

D. $\frac{1}{3\sqrt{39}}$

Giải :

Ta có : $\vec{p} \cdot \vec{q} = (2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 + 3\vec{a}\vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ - 2 \cdot 2^2 = 1$

$|\vec{p}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ + 2^2 = 48$.

$|\vec{q}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ + 4 \cdot 2^2 = 13$.

$\Rightarrow \cos(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| |\vec{q}|} = \frac{1}{4\sqrt{39}} \Rightarrow A$.

Câu 5 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm và mặt phẳng $(P): x+2y+3z+4=0$. Biết M, N là 2 điểm đối xứng nhau qua mặt phẳng $(P), M \in$ mặt cầu $(C): x^2+(y+4)^2+z^2=5$. Hỏi N thuộc mặt cầu nào dưới đây :

A. $x^2+y^2+z^2-\frac{8}{7}x+\frac{40}{7}y-\frac{24}{7}z+\frac{45}{7}=0$

B. $x^2+y^2+z^2-\frac{8}{7}x-\frac{40}{7}y-\frac{24}{7}z+\frac{45}{7}=0$

C. $x^2+y^2+z^2+\frac{8}{7}x+\frac{40}{7}y+\frac{24}{7}z+\frac{45}{7}=0$

D. $x^2+y^2+z^2+\frac{8}{7}x-\frac{40}{7}y-\frac{24}{7}z+\frac{45}{7}=0$

Giải :

Gọi I là tâm của mặt cầu $(C) \Rightarrow I(0; -4; 0)$.

Gọi I' đối xứng I qua $(P) \Rightarrow I'(\frac{4}{7}; -\frac{20}{7}; \frac{12}{7})$.

Theo yêu cầu bài toán ta có :

$M \in (C)$ có tâm $I(0; -4; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{5} \Rightarrow N \in (S)$ có tâm $I'(\frac{4}{7}; -\frac{20}{7}; \frac{12}{7})$ bán kính $R = \sqrt{5}$.

$\Rightarrow (S): x^2+y^2+z^2-\frac{8}{7}x+\frac{40}{7}y-\frac{24}{7}z+\frac{45}{7}=0$.

Câu 6 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$, $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$ và $M(a;b;c) \in (P)$ sao cho $S = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của $T = 3a + 2b + c$ là :

- A. $T = \frac{25}{4}$ B. $T = \frac{25}{2}$ C. $T = -\frac{25}{4}$ D. $T = -\frac{25}{2}$

Giải :

Gọi I là điểm thỏa $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow I\left(0; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } S &= 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 \\ &= 4MI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\vec{MI}(\vec{2IA} + \vec{IB} + \vec{IC}) = 4MI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2. \end{aligned}$$

Do $2IA^2 + IB^2 + IC^2 = \text{const}$ nên $S_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P) .

$$\Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right) \Rightarrow T = -\frac{25}{4}.$$

Câu 7 : Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho 2 điểm $A(1;0;2)$, $B(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$. Gọi điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (P)$ sao cho $|3\vec{MA} - 2\vec{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $A = 9x_0 + 3y_0 + 6z_0$.

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

Giải.

Gọi I là điểm thỏa $3\vec{IA} - 2\vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(-3, -2, 8)$.

$$\text{Ta có } |3\vec{MA} - 2\vec{MB}| = |3(\vec{IA} - \vec{IM}) - 2(\vec{IB} - \vec{IM})| = |3\vec{IA} - 2\vec{IB} - \vec{IM}| = |\vec{IM}| = IM.$$

Vì I cố định, $M \in (P)$ nên $|3\vec{MA} - 2\vec{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) .

Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow \text{vtcp } \vec{a}_{(d)} = \text{vtpt } \vec{n}_{(P)} = (1, 1, 1)$.

$$\Rightarrow (d): x = -3 + t, y = -2 + t, z = 8 + t.$$

$$M = (d) \cap (P) \Rightarrow M\left(\frac{-11}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{22}{3}\right) \Rightarrow A = 3.$$

Câu 8 : Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 7 = 0$ và ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(1;-2;1)$. Điểm $M(a;b;c) \in (P)$ sao cho $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tổng $A = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

- A. $A = \frac{20}{9}$ B. $A = \frac{14}{9}$ C. $A = -\frac{20}{9}$ D. $A = -\frac{14}{9}$

Giải:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MA^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c+1)^2 \\ MB^2 = (a-3)^2 + (b-1)^2 + (c+2)^2 \\ MC^2 = (a-1)^2 + (b+2)^2 + (c-1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 - MC^2 = -a^2 + 6a - b^2 - 6b - c^2 + 26 = 44 - \left[(a-3)^2 + (b+3)^2 + c^2 \right].$$

$$\text{Vậy } (MA^2 - MB^2 - MC^2)_{\max} \Leftrightarrow \left[(a-3)^2 + (b+3)^2 + c^2 \right]_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min} \text{ với } I(3; -3; 0).$$

Mà $I(3; -3; 0)$ cố định nên $MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) .

Gọi (d) là đường thẳng qua $I(3; -3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) , ta có:

$$(d): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\forall M \in (d) \Rightarrow M(3+t; -3+2t; 2t).$$

$$M \in (P) \Rightarrow (3+t) + 2(-3+2t) + 2(2t) + 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4}{9} \Rightarrow M\left(\frac{23}{9}; \frac{-35}{9}; \frac{-8}{9}\right).$$

$$\Rightarrow a + b + c = \frac{-20}{9}.$$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 1; 0)$, $B(0; 1; 1)$, $C(1; 0; 1)$. Tìm hợp tất cả các điểm M trên mặt phẳng Oxz sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}^2 = 2$.

- A. Một đường thẳng
- B. Một đường tròn
- C. Một đường elip
- D. Không xác định được

Giải:

$$\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}.$$

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) \text{ cố định và } IC^2 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}) = -IA^2 - \overrightarrow{IM} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IM^2 = -\frac{AB^2}{4} + IM^2 = -\frac{1}{2} + IM^2.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}^2 = 2 \Leftrightarrow MI^2 + MC^2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Gọi } J \text{ là trung điểm của } IC \Rightarrow J\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \text{ cố định và } MJ \text{ là đường trung tuyến của } \triangle MIC.$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} = MI^2 + MC^2 = 2MJ^2 + \frac{IC^2}{2} = 2JM^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow JM^2 = \frac{7}{8} \Rightarrow JM = \frac{\sqrt{14}}{4} = \text{const}.$$

$$\text{Mà } J \text{ cố định nên } M \text{ di động trên mặt cầu } (S) \text{ tâm } J \text{ với bán kính } R = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Mặt phẳng Oxz có phương trình $y = 0 \Rightarrow d[J, (Oxz)] = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{14}}{4} = R \Rightarrow (S) \cap (Oxz)$ là một đường tròn (C) .

Vậy M di động trên đường tròn (C) .

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2t; 2t; 0), B(0; 0; t), (t > 0)$. Cho điểm P di động thỏa: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$. Tìm giá trị t sao cho $OP_{\max} = 3$.

A. $t = \frac{3}{4}$

B. $t = \frac{4}{3}$

C. $t = \frac{2}{3}$

D. $t = \frac{3}{2}$

Giải:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 3.$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OP}^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 3. \text{ (Vì } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OP}^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OI} = 3 \text{ (với } I \text{ là điểm thứ tư của hình bình hành } AOBI \Rightarrow I(2t; 2t; t)).$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OP}^2 - 3\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OJ} = 3 \text{ (với } J \text{ thỏa } \overrightarrow{OJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OI} \Rightarrow J\left(\frac{4t}{3}; \frac{4t}{3}; \frac{2t}{3}\right)).$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}^2 - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OJ} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OJ}) = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{JP} = 1 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MO}) \cdot (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MJ}) = 1 \text{ (với } M \text{ là trung điểm của } OJ \Rightarrow M\left(\frac{2t}{3}; \frac{2t}{3}; \frac{t}{3}\right)).$$

$$\Leftrightarrow MP^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MJ} = 1 \Leftrightarrow MP^2 - MO^2 = 1 \Leftrightarrow MP^2 = 1 + MO^2 = 1 + t^2 \Leftrightarrow MP = \sqrt{1 + t^2}.$$

Vậy P di động trên mặt cầu (S) tâm M với bán kính $R = \sqrt{1 + t^2}$.

Nên $OP_{\max} \Leftrightarrow P = OM \cap (S)$ và $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}$ cùng hướng.

$$\text{Khi đó } OP_{\max} = OM + R = \sqrt{\left(\frac{2t}{3}\right)^2 + \left(\frac{2t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2} + \sqrt{1 + t^2} = t + \sqrt{1 + t^2}.$$

$$OP_{\max} = 3 \Leftrightarrow t + \sqrt{1 + t^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1 + t^2} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ 1 + t^2 = 9 - 6t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Câu 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2; -2; 1), A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách A một khoảng cách lớn nhất.

A. $\vec{u} = (4; -5; -2)$

B. $\vec{u} = (1; 0; 2)$

C. $\vec{u} = (3; 4; -4)$

D. $\vec{u} = (2; 2; -1)$

Giải:

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với d và qua M .

Gọi H là hình chiếu của A trên (P) . Gọi N là hình chiếu của H trên d .

$$\Rightarrow AN \perp (\Delta) \text{ (định lý 3 đường vuông góc)} \Rightarrow d[A; (\Delta)] = AN.$$

Ta có : $AN \leq AM$. Dấu "=" xảy ra khi $N \equiv M \Rightarrow \Delta$ là đường thẳng qua M và $\Delta \perp MH$.

Tính toán ta có : $\vec{u} = (4; -5; -2)$.

Câu 12 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2; -2; 1), A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách A một khoảng cách bé nhất .

- A. $\vec{u} = (2; 1; 6)$ B. $\vec{u} = (1; 0; 2)$ C. $\vec{u} = (3; 4; -4)$ D. $\vec{u} = (2; 2; -1)$

Giải :

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với d và qua M .

Gọi H là hình chiếu của A trên (P) . Gọi N là hình chiếu của H trên d .

$\Rightarrow AN \perp (\Delta)$ (định lí 3 đường vuông góc) $\Rightarrow d[A; (\Delta)] = AN$.

Ta có : $AN \geq AH$. Dấu "=" xảy ra khi $N \equiv H \Rightarrow \Delta$ là đường thẳng qua M, H .

Tính toán ta có : $\vec{u} = (1; 0; 2)$.

Câu 13 : Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 4; -4)$ cắt (P) tại B . Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc 90° . Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau :

- A. $J(-3; 2; 7)$ B. $H(-2; -1; 3)$ C. $K(3; 0; 15)$ D. $I(-1; -2; 3)$

Giải :

Gọi H là hình chiếu A trên $(P) \Rightarrow AH \perp (P) \Rightarrow AH \perp MB$.

Vì M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc 90° nên $AM \perp MB$.

Vậy $MB \perp (AHM) \Rightarrow MB \perp HM$.

$\Rightarrow M$ **chạy tung tăng** trên đường tròn đường kính MH ($M \neq B$) .

Vậy $MB_{\max}$ khi $M \equiv H$.

Tính toán ta có được : $(MB): \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow MB \text{ qua } I(-1; -2; 3)$.

Câu 14 : Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$

và $(d_2): \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-4}{4}$. Gọi (Δ) là đường phân giác trong của góc tù tạo bởi hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$. (Δ) có phương trình là:

$$A.(\Delta): \begin{cases} x=1+5t \\ y=6t \\ z=9t \end{cases}$$

$$B.(\Delta): \begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$$

$$C.(\Delta): \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$$

$$D.(\Delta): \begin{cases} x=1-5t \\ y=6t \\ z=9t \end{cases}$$

Giải:

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} \\ \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5} \\ \frac{y-4}{4} = \frac{z-4}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ 5y-2z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} . \text{ Ta nhận thấy } \begin{cases} A(1;0;0) \in (d_1) \\ A(1;0;0) \in (d_2) \end{cases} .$$

Vậy $A(1;0;0) = (d_1) \cap (d_2)$.

(d_1) có vtcp $\vec{a}_1 = (2; 2; 5)$, (d_2) có vtcp $\vec{a}_2 = (1; 4; 4)$.

Ta có: $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 30 > 0 \Rightarrow (\vec{a}_1; \vec{a}_2) < 90^\circ \Rightarrow (\vec{a}_1; \vec{a}_2)$ là góc nhọn $\Rightarrow (\vec{a}_1; -\vec{a}_2)$ là góc tù.

Gọi B là điểm thỏa $\vec{AB} = \vec{a}_1 \Rightarrow B(3; 2; 5) \in (d_1)$.

C là điểm thỏa $\vec{AC} = -\vec{a}_2 \Rightarrow C(0; -4; -4) \in (d_2)$.

Vậy BAC là góc tù tạo bởi hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.

Do đó (Δ) chính là đường phân giác trong của BAC .

Ta có: $AB = |\vec{a}_1| = \sqrt{33}, AC = |\vec{a}_2| = \sqrt{33} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A .

$\Rightarrow (\Delta)$ cũng là đường trung tuyến từ A của ΔABC .

$\Rightarrow (\Delta)$ đi qua $A(1; 0; 0), M\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của $BC \Rightarrow (\Delta)$ có

vtcp $\vec{a}_{(\Delta)} = \vec{AM} = \left(\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$.

(Δ) có $\vec{a}_{(\Delta)} = (1; -2; 1)$ và qua $A(1; 0; 0) \Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \mathbf{B}$.

Câu 15 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; -1), B(0; 4; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 2015 = 0$. Gọi α là góc nhỏ nhất giữa mặt phẳng (Q) đi qua 2 điểm A, B và tạo với (P) . Tính $\cos \alpha$.

A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Giải :

Theo cách hình học :

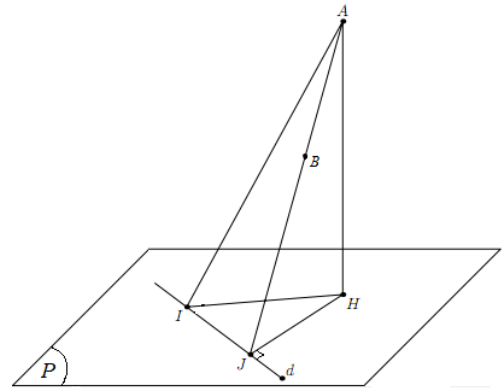
Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) , d là giao tuyến của $(P), (Q)$, I là giao điểm của AB và mặt phẳng (P) , J là hình chiếu của H trên d .

$\Rightarrow$ Góc của 2 mặt phẳng $(P), (Q)$ là góc AJH với

$$\sin AJH = \frac{AH}{AJ}.$$

$\Rightarrow$ Góc của AB và mặt phẳng (P) là góc AIH với

$$\sin AIH = \frac{AH}{AI}.$$



Để dàng chứng minh được $d \perp (AJH) \Rightarrow IJ = AJ \Rightarrow \triangle AIJ$ vuông tại J .

$\Rightarrow AJ \leq AI \Rightarrow \sin AJH \geq \sin AIH$.

Dấu "=" xảy ra khi $d \perp IH$.

Vậy $\min[(P); (Q)] = AIH$ là góc giữa AB và mặt phẳng (P) .

Cách đại số:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \text{vtcp } \vec{u}_{AB} = (-1; 2; 1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_{(Q)} = (a; b; c) \Rightarrow \vec{u}_{AB} \cdot \vec{n}_{(Q)} = 0 \Leftrightarrow a - c = 2b \\ AB \subset (Q) \end{cases}$$

$$\text{vtpt } \vec{n}_{(P)} = (2; -1; -2).$$

$$\text{Ta có } \cos \alpha \text{ là góc của } (P), (Q) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|2a - b - 2c|}{\sqrt{9}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2a^2 - 4ab + 5b^2}}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{2a^2 - 4ab + 5b^2}.$$

$$\text{Xét } b = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0$$

$$\text{Xét } b \neq 0 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2t^2 - 4t + 5} \left(t = \frac{a}{b} \right).$$

$$\text{Tính toán ta có được: } 0 < \cos^2 \alpha = \frac{1}{2t^2 - 4t + 5} \leq \frac{1}{3}.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \cos \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Nói tóm lại } \max \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 16: Cho $M(1, 2, 3), A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ trong đó a, b, c là các số dương. Tìm mặt phẳng (P) đi qua A, B, C, M sao cho V_{OABC} đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $(P): 6x + 3y + 2z - 18 = 0$

B. $(P): 6x + 3y + 2z = 0$

B. $(P): 6x + 3y + 2z - 9 = 0$

D. $(P): 6x + 3y + 2z - 36 = 0$

Giải.

Điểm M qua A, B, C có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì $M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số $\frac{1}{a}, \frac{2}{b}, \frac{3}{c}$ không âm, ta có:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{a \cdot b \cdot c}} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{27 \cdot 6}{abc} \Leftrightarrow abc \geq 162 \Leftrightarrow \frac{abc}{6} \geq 27 \Leftrightarrow V_{OABC} \geq 27.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9$.

$\Rightarrow (ABC): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow (ABC): 6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$ sao cho $OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1 + \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $V_{O.ABC}$.

A. $\max V_{O.ABC} = \frac{1}{54}$ B. $\max V_{O.ABC} = \frac{1}{162}$ C. $\max V_{O.ABC} = \frac{1}{486}$ D. $\max V_{O.ABC} = \frac{1}{108}$

Giải:

Ta có: $V_{O.ABC} = \frac{1}{6} abc$.

Theo giả thuyết ta có: $OA + OB + OC + AB + BC + CA = a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}$.

Theo nhà toán học Cauchy ta có:

- $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.
- $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \geq 3\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{abc}$.

$\Rightarrow OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1 + \sqrt{2} \geq 3(1 + \sqrt{2})\sqrt[3]{abc}$.

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow V_{O.ABC} = \frac{1}{6} abc \leq \frac{1}{162}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(a; 0; 0)$, $B(-a; 0; 0)$, $C(0; -1; 0)$, $B'(-a; 0; b)$ với $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b = 4 \end{cases}$. Khoảng cách lớn nhất giữa 2 đường thẳng $B'C$ và AC' là:

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Giải.

Gọi I là đối xứng của C qua O .

Câu 20 : Trong không gian Oxyz, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB :

- A. $S = \sqrt{7}$. B. $S = 4$. C. $S = 2\sqrt{7}$. D. $S = 2\sqrt{2}$.

Giải :

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có : $OM = 1 < R \Rightarrow M$ thuộc miền trong của mặt cầu (S) .

Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng với mặt cầu. Gọi H là chân đường cao hạ từ O của tam giác OAB .

$$\text{Gọi } x = OH \ (0 < x \leq OM = 1) \Rightarrow HA = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{8 - x^2}.$$

$$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = OH \cdot HA = x\sqrt{8 - x^2}.$$

Xét : $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ với $x \in (0;1]$.

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8 - x^2}} = \frac{8 - 2x^2}{\sqrt{8 - x^2}} > 0 \text{ với } x \in (0;1].$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \max_{(0;1]} f(x) = f(1) = \sqrt{7}.$$

Câu 21 : Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): (m^2 + m + 1)x + 2(m^2 - 1)y + 2(m + 2)z + m^2 + m + 1 = 0$ luôn chứa đường thẳng Δ cố định khi m thay đổi. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ .

- A. $d[O, (\Delta)] = \frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $d[O, (\Delta)] = \frac{2}{\sqrt{3}}$ C. $d[O, (\Delta)] = \frac{4}{\sqrt{3}}$ D. $d[O, (\Delta)] = \frac{5}{\sqrt{3}}$

Giải:

Ta có: $(m^2 + m + 1)x + 2(m^2 - 1)y + 2(m + 2)z + m^2 + m + 1 = 0 \ \forall m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x + 2y + 1)m^2 + (x + 2z + 1)m + (x - 2y + 4z + 1) = 0 \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \ (1) \\ x + 2z + 1 = 0 \ (2) \\ x - 2y + 4z + 1 = 0 \ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \\ 2x + 4z + 2 = 0 \ (3) + (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Đặt $z = t$, ta có:
$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ y + t = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}.$$

Vậy (P) luôn chứa đường thẳng cố định $(\Delta): \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ có vtcp $\vec{a} = (2; -1; 1)$ và qua điểm $A(-1; 0; 0)$.

Ta có $[\vec{a}; \vec{OA}] = (0; -1; -1) \Rightarrow d[O, (\Delta)] = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{OA}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 22: Cho đường thẳng $d_m: \frac{x-4m+3}{2m-1} = \frac{y-2m-3}{m+1} = \frac{z-8m-7}{4m+3} \left(m \neq \left\{ -1; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right\} \right)$ và $A(1; 1; 1)$.

Biết d_m luôn nằm trong một mặt phẳng (P) cố định khi m thay đổi. Tính $d[A; (P)]$.

A. $\frac{\sqrt{115}}{55}$ B. $\frac{\sqrt{110}}{55}$ C. $\frac{\sqrt{105}}{55}$ D. $\frac{\sqrt{115}}{60}$

Giải:

Đường thẳng d_m đi qua $A(4m-3; 2m+3; 8m+7)$ và có VTCP $\vec{u} = (2m-1; m+1; 4m+3)$.

Giả sử $d_m \subset (\alpha): ax + by + cz + d = 0 \left(\forall m \neq \left\{ -1; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right\} \right)$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ \vec{u}_{d_m} \cdot \vec{n}_{(\alpha)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2m-1) + b(m+1) + c(4m+3) = 0 \\ a(4m-3) + b(2m+3) + c(8m+7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a+b+4c)m - a + b + 3c = 0 \\ (4a+2b+8c)m - 3a + 3b + 7c + d = 0 \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm đúng với mọi m thì:
$$\begin{cases} 2a + b + 4c = 0 \\ -a + b + 3c = 0 \\ 4a + 2b + 8c = 0 \\ -3a + 3b + 7c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10a \\ c = -3a \\ d = -6a \end{cases}.$$

Ta chọn: $a = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 10 \\ c = -3 \\ d = -6 \end{cases}.$

Vậy $d_m \subset (\alpha): x + 10y - 3z - 6 = 0 \left(\forall m \neq \left\{ -1; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right\} \right)$.

Cách 2: đơn gian phù hợp trắc nghiệm.

Ta chọn 2 số m thỏa yêu cầu bài toán $\Rightarrow$ có đường thẳng $d \Rightarrow$ viết được mp $(\alpha) \Rightarrow$ xong bài.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt cầu $(S): (x+m)^2 + (y-2m)^2 + z^2 - 5m^2 + 4m - 1 = 0$. Biết khi m thay đổi thì (S) luôn giao với mặt phẳng (P) cố định với giao tuyến là một đường tròn (C) cố định. Tính bán kính của đường tròn đó

A. $R=1$

B. $R=\frac{4}{\sqrt{5}}$

C. $R=\frac{2}{\sqrt{5}}$

D. $R=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Giải :

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 1 + 2m(x - 2y + 2) = 0.$$

 $\Rightarrow$ Với mọi m thì mặt cầu (S) luôn giao với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2 = 0$

$$\Rightarrow (S) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} (S'): x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (P): x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (C) = (S') \cap (P).$$

$$\text{Gọi } I(0;0;0) \text{ là tâm mặt cầu } (S') \Rightarrow d[I; (P)] = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\Rightarrow R_{(C)} = \sqrt{(R_{(S')})^2 - (d[I; (P)])^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Câu 24 : Trong không gian cho 2 điểm phân biệt A, B cố định. Tập hợp các điểm M trong không gian là mặt cầu cố định bán kính $R = \frac{3}{2}AB$. Khi đó thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{m}{n} AB^2$ ($m, n \in \mathbb{N}$), $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P = (m + 2n + mn)^2$.

A. 49

B. 64

C. 36

D. 81

Giải :Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $A, B \in Ox$ và $O(0;0;0)$ là trung điểm AB . Khi đó ta có :

$$\begin{cases} A(a;0;0) \\ B(-a;0;0) \end{cases} (a > 0) \Rightarrow AB = 2a. \text{ Gọi } M(x_M; y_M; z_M) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (a - x_M; -y_M; -z_M) \\ \overrightarrow{MB} = (-a - x_M; -y_M; -z_M) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{4m}{n} a^2$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 - a^2 + y_M^2 + z_M^2 = \frac{4m}{n} a^2$$

$$\Leftrightarrow (0 - x_M)^2 + (0 - y_M)^2 + (0 - z_M)^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{4m}{n} + 1 \right)} a \right)^2.$$

$$\text{Do vế phải là 1 hằng số } \Rightarrow M \text{ thuộc tập hợp điểm đường tròn tâm } O \text{ có } R = \sqrt{\left(\frac{4m}{n} + 1 \right)} a.$$

$$\text{Ta có } \sqrt{\left(\frac{4m}{n} + 1 \right)} a = \frac{3}{2} AB = 3a \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{1}.$$

Câu 25 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$;

$$(d_2): \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{3}; (d_3): \frac{x-2}{-7} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}; (d_4): \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-2}{-2}.$$

Gọi (Δ) là đường thẳng cắt cả 4 đường thẳng đã cho. Biết vectơ chỉ phương của (Δ) là $\overrightarrow{u_{(\Delta)}} = (a; b; 1)$. Tính $T = 3a - 7b$.

A. $T = -5$

B. $T = 5$

C. $T = -4$

D. $T = 4$

Giải:

Ta có: $\vec{vtcp} \vec{u}_{d_1} = (2; 1; 3)$ và (d_1) qua $M(1; -1; 2)$, $\vec{vtcp} \vec{u}_{d_2} = (2; 1; 3)$ và (d_2) qua $N(-3; 2; 4)$.

Ta thấy $\vec{u}_{d_1} = \vec{u}_{d_2}$ và $M \notin d_2 \Rightarrow (d_1) // (d_2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa $d_1, d_2 \Rightarrow \vec{vtpt} \vec{n}_p = [\vec{MN}, \vec{u}_{d_1}] = (7; 16; -10)$ và (P) qua điểm $M(1; -1; 2)$.
 $\Rightarrow (P): 7x + 16y - 10z + 29 = 0$.

$$\text{Gọi } E = (d_3) \cap (P) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{-7} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \\ 7x+16y-10z+29=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7y-2=0 \\ y-z=0 \\ 7x+16y-10z+29=0 \end{cases} \Leftrightarrow E(-5; 1; 1).$$

$$\text{Gọi } F = (d_4) \cap (P) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-2}{-2} \\ 7x+16y-10z+29=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+y-21=0 \\ 2y-5z+8=0 \\ 7x+16y-10z+29=0 \end{cases} \Leftrightarrow F(5; -4; 0).$$

$\Rightarrow \vec{EF} = (10; -5; -1) \Rightarrow EF$ không song song d_1, d_2 .

Do $(\Delta) \cap (d_1), (d_2) \Rightarrow (\Delta) \subset (P)$. Mà $(\Delta) \cap (d_3), (d_4) \Rightarrow (\Delta)$ qua $E, F \Rightarrow \vec{u}_{(\Delta)} = (-10; 5; 1) \Rightarrow T = -5$.

Câu 26: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$. Giả sử a, b, c thay đổi nhưng luôn thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ với k cho trước thì ΔABC có diện tích lớn nhất là:

A. $S_{\max} = \frac{k^2}{2\sqrt{3}}$

B. $S_{\max} = \frac{k^2}{\sqrt{3}}$

C. $S_{\max} = \frac{k^2}{2}$

D. $S_{\max} = \frac{k^2}{2\sqrt{2}}$

Giải:

Gọi I là hình chiếu của O trên $AB \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow OI^2 = \frac{OA^2 \cdot OB^2}{OA^2 + OB^2} = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2}$.

ΔOAI vuông tại

$$O \Rightarrow IC^2 = OI^2 + OC^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} + c^2 = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow OI = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2}}.$$

ΔOAB vuông tại $O \Rightarrow AB^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot IC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = k^2 \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2 = k^4$.

$$\Leftrightarrow a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 = \frac{k^4 - (a^4 + b^4 + c^4)}{2}$$

Mà $a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3} = \frac{k^4}{3}$ nên $\frac{k^4 - (a^4 + b^4 + c^4)}{2} \leq \frac{k^4}{3}$.

Vậy $a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \leq \frac{k^4}{3} \Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{\sqrt{3}} = \frac{k^2}{2\sqrt{3}}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{k}{\sqrt{3}}$.

Câu 27 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1)$. Có bao nhiêu mặt cầu có tâm nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x+y+z=0$ và tiếp xúc với 3 đường thẳng AB, BC, CA .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Giải.

Gọi mặt cầu (S) có tâm I là mặt cầu tiếp xúc 3 cạnh AB, BC, CA .

$$\Rightarrow d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, CA).$$

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (ABC) .

M, P, C lần lượt là hình chiếu của H trên AB, BC, CA .

Ta có: $\triangle IHM = \triangle IHN = \triangle IHP$ (cạnh huyền_cạnh góc vuông).

$\Rightarrow HM = HN = HP \Rightarrow H$ là điểm thuộc mặt phẳng (ABC) và cách đều 3 cạnh AB, BC, CA .

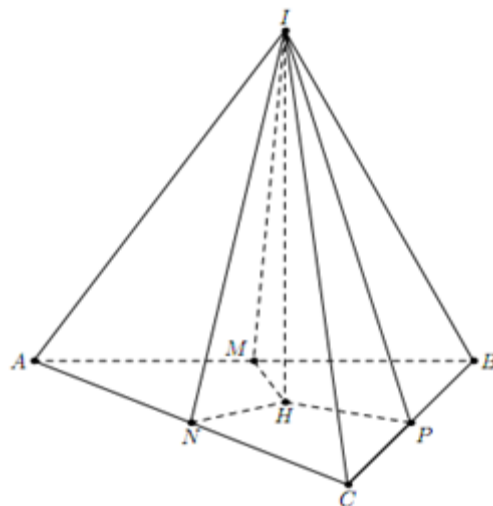
$\Rightarrow H$ có thể là tâm đường tròn nội tiếp hay một trong ba tâm đường tròn bàng tiếp của $\triangle ABC$.

Mà $IH \perp (ABC)$ nên tập hợp điểm I là những đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp hay một trong ba tâm đường tròn bàng tiếp của $\triangle ABC$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow$ Có 4 đường thẳng như thế.

Ta có $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1) \Rightarrow PTMP(ABC): x+y+z-1=0 \Rightarrow (ABC) // (\alpha)$.

Vậy tồn tại 4 giao điểm của tập hợp điểm I nêu trên và mặt phẳng (α) .

4 giao điểm đó chính là 4 tâm mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán $\Rightarrow$ Có 4 mặt cầu thỏa ycbt.



Câu 28 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + z = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z = 0$ và ba điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa giao tuyến của $(S_1), (S_2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc (P) và tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA .

A. Không có mặt cầu

B. 1

C. 4

D. Vô số mặt cầu

Bài tập tương tự, bạn đọc tự làm :))))))

Câu 29 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 11$ và $(S_2): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 17$ và hai điểm $A(3;0;0), B(0;4;0)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa giao tuyến của $(S_1), (S_2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc (P) và tiếp xúc với ba đường thẳng AO, OB, BA .

A. Không có mặt cầu

B. 1

C. 4

D. Vô số mặt cầu

Giải :

(S_1) có tâm $I_1(-2;0;1)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{11}$.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 11 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 11 \quad (1) \\ x+y=0 \quad (2) \end{cases} (\psi).$$

(2) chính là phương trình mặt phẳng $(Q): x+y=0$.

Vậy hệ (ψ) chính là tương giao giữa mặt cầu (S_1) và mặt phẳng (Q)

$$d[I_1; (Q)] = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2} < \sqrt{11} = R_1.$$

Vậy (Q) cắt (S_1) với giao tuyến là một đường tròn (C) chính là giao tuyến của $(S_1), (S_2)$.

$\Rightarrow (P) \equiv (Q): x+y=0$. Mà $(OAB): z=0 \Rightarrow (P) \perp (OAB)$.

Tập hợp tâm của những mặt cầu tiếp xúc với ba đường thẳng AO, OB, BA là bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 vuông góc mặt phẳng (OAB) và qua tâm đường tròn tiếp hoặc ba tâm đường tròn bàng tiếp của ΔOAB .

Vậy một trong bốn đường trên có thể song song hay chứa trong (P) .

Gọi $(\Delta) = (P) \cap (OAB) \Rightarrow (\Delta): x+y=0$ với ptđt (Δ) trong mặt phẳng (Oxy) .

Trong mặt phẳng Oxy , ta có $(\Delta): x+y=0$ là đường phân giác ngoài của góc O của ΔOAB .

Vậy (Δ) đi qua hai tâm bàng tiếp góc A, B .

Vậy hai trong bốn đường d_1, d_2, d_3, d_4 chứa trong $(P) \Rightarrow$ có vô số tâm mặt cầu có tâm thuộc (P) và tiếp xúc với ba đường thẳng AO, OB, BA .

Câu 30 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 17$ và $(S_2): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 11$ và hai điểm $A(3;0;0), B(0;4;0)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa giao tuyến của $(S_1), (S_2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc (P) và tiếp xúc với ba đường thẳng AO, OB, BA .

A. Không có mặt cầu

B. 1

C. 4

D. Vô số mặt cầu

Giải :

(S_1) có tâm $I_1(-2;0;1)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{17}$.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 17 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 17 \quad (1) \\ x+y=2 \quad (2) \end{cases} (\psi).$$

(2) chính là phương trình mặt phẳng $(Q): x+y-2=0$.

Vậy hệ (ψ) chính là tương giao giữa mặt cầu (S_1) và mặt phẳng (Q)

$$d[I_1; (Q)] = \frac{|-2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2} < \sqrt{17} = R_1.$$

Vậy (Q) cắt (S_1) với giao tuyến là một đường tròn (C) chính là giao tuyến của $(S_1), (S_2)$.

$\Rightarrow (P) \equiv (Q): x + y - 2 = 0$. Mà $(OAB): z = 0 \Rightarrow (P) \perp (OAB)$.

Tập hợp tâm của những mặt cầu tiếp xúc với ba đường thẳng AO, OB, BA là bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 vuông góc mặt phẳng (OAB) và qua tâm đường tròn tiếp hoặc ba tâm đường tròn bàng tiếp của ΔOAB .

Vậy một trong bốn đường trên có thể song song hay chứa trong (P) .

Gọi $(\Delta) = (P) \cap (OAB) \Rightarrow (\Delta): x + y - 2 = 0$ với ptđt (Δ) trong mặt phẳng (Oxy) .

Trong mặt phẳng (Oxy) , gọi $(d): x - y = 0, (d'): x + y = 0$ lần lượt là đường phân giác trong, phân giác ngoài tại đỉnh A của ΔOAB .

Ta có $(\Delta) // (d') \Rightarrow (\Delta)$ không đi qua tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B .

Gọi $I = (\Delta) \cap (d) \Rightarrow I(1, 1)$.

Ta có $(OA): y = 0, (OB): x = 0, 4x + 3y - 12 = 0$.

Ta xét thấy $d(I, OA) = d(I, OB) = d(I, AB) = 1 \Rightarrow I$ cách đều ba cạnh $\Delta ABC \Rightarrow I$ có thể là tâm mặt cầu nội tiếp hay tâm bàng tiếp góc O của ΔOAB .

Vậy một trong bốn đường d_1, d_2, d_3, d_4 chứa trong $(P) \Rightarrow$ có vô số tâm mặt cầu có tâm thuộc (P) và tiếp xúc với ba đường thẳng AO, OB, BA .

Câu 31 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 - 50z = 0$ (1) và mặt cong (P) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 2z$ (2). Biết $(S) \cap (P)$ có giao tuyến là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

A. 20

B. 45

C. 15

D. 25

Giải :

Từ (2) $\Leftrightarrow 50z = x^2 + \frac{25}{16}y^2$ thay vào (1) ta có :

$\frac{-9}{16}y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 4z = 0(\alpha) \\ 3y + 4z = 0(\beta) \end{cases}$. Kết hợp với (1) thì ta có được 2 mặt phẳng giao với 1 mặt cầu.

(1) có tâm là $I(0; 0; 25)$ và bán kính $R = 25$.

Ta có :

- $d[I; (\alpha)] = 20 < R \Rightarrow (\alpha) \cap (1)$ là một đường tròn có $R_{(\alpha)} = \sqrt{R^2 - (d[I; (\alpha)])^2} = 15$.
- $d[I; (\beta)] = 20 < R \Rightarrow (\beta) \cap (1)$ là một đường tròn có $R_{(\beta)} = \sqrt{R^2 - (d[I; (\beta)])^2} = 15$.

Vậy $R_{(\alpha)} = R_{(\beta)} = 15$.

Câu 32 : Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(-2;0;3)$, $M(0;0;1)$, $N(0,3,1)$, mặt phẳng (P) đi qua các điểm M, N sao cho $d[B;(P)] = 2d[A;(P)]$, có bao nhiêu mp thỏa mãn đề bài.

- A. 1 B. 2 C. vô số D. không có mặt phẳng nào.

Giải :

Ta có 4 điểm A, B, M, N là 4 điểm đồng phẳng, MN không song song AB .

Gọi $I = (P) \cap AB$ (do AB không song song (P))

Trường hợp 1 :

I nằm ngoài AB , mà $d[B;(P)] = 2d[A;(P)] \Rightarrow AI = AB$ (ta-let) $\Rightarrow I(4;0;-3)$

Trường hợp 2 :

I nằm trong đoạn AB , mà $d[B;(P)] = 2d[A;(P)] \Rightarrow IB = 2IA$ (ta-let) $\Rightarrow I(0;0;1)$.

$\Rightarrow (P)$ luôn đi qua 1 trong 2 điểm cố định trên.

Do M, N, A, B, I đồng phẳng nên $I \in MN \Rightarrow I, M, N$ thẳng hàng

$\Rightarrow$ có vô số mặt phẳng (trường hợp 2).

Câu 33 : Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho $A(2;5;-3)$, $B(-2;1;1)$, $C(2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x+4y+5z+1=0$. Gọi điểm $D(x_D; y_D; z_D)$ ($y_D > 0$) thuộc (α) sao cho có vô số mặt phẳng (P) qua C, D thỏa khoảng cách từ A đến (P) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (P) . Tính $P = x_D + y_D + z_D$.

- A. $P = -2$ B. $P = -1$ C. $P = 1$ D. $P = 2$.

Giải :

Theo đề bài ta có $d[A;(P)] = 3d[B;(P)] \Rightarrow AB$ không song song với (P) .

Xét $AB \not\subset (P)$, ta có $\exists \{I\} = AB \cap (P) \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{d[A;(P)]}{d[B;(P)]} = 3 \Rightarrow AI = 3BI$.

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{AI} = -3\overrightarrow{BI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I(-4;-1;3) \\ I(-1;2;0) \end{cases} \Rightarrow (P) \text{ đi qua một trong hai điểm cố định}$

$I(-4;-1;3)$ hay $I(-1;2;0)$.

Nếu $AB \subset (P) \Rightarrow (P)$ đi qua hai điểm cố định trên.

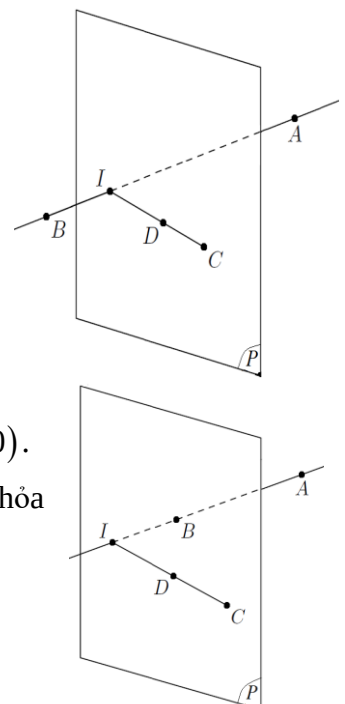
Vậy để có $d[A;(P)] = 3d[B;(P)]$ thì (P) đi qua $I(-4;-1;3)$ hay $I(-1;2;0)$.

Theo đề bài, thì có vô số mặt phẳng (P) qua C, D thỏa

$d[A;(P)] = 3d[B;(P)]$.

$\Rightarrow I, C, D$ thẳng hàng. Nói cách khác $D \in IC$.

Với $I(-4;-1;3)$, ta có $IC: \{x = 2 + 6t; y = t; z = 1 - 2t\} \Rightarrow D(2 + 6t; t; 1 - 2t)$.



Mà $D \in (\alpha) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow D(-4; -1; 3)$ loại vì $y_D = -1 < 0$.

Với $I(-1; 2; 0)$, ta có $IC: \{x = 2 + 3t; y = -2t; z = 1 + t\} \Rightarrow D(2 + 3t; -2t; 1 + t)$.

Mà $D \in (\alpha) \Rightarrow t = -2 \Rightarrow D(-4; 4; -1)$ nhận vì $y_D = 4 > 0 \Rightarrow P = -1$.

Câu 34 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; 1)$ với $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

- A. $R = \frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $R = \sqrt{6}$ C. $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $R = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Giải :

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Từ cách dựng hình ta có : $I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{1}{2}\right)$, mà $b = 1 - a \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{1-a}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow OI = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{6}}{4}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a = \frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

Câu 35 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), (a, b, c > 0)$ thỏa $\alpha a + \beta b + \delta c = k$ ($k \in \mathbb{R}, k = \text{const}$), $\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 > 0$. Khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ luôn thuộc 1 mặt phẳng cố định. Tìm phương trình mặt phẳng đó.

- A. $(P): \alpha x + \beta y + \delta z + k = 0$ C. $(P): \alpha x + \beta y + \delta z - \frac{k}{2} = 0$
B. $(P): \alpha x + \beta y + \delta z + \frac{k}{2} = 0$ D. $(P): \alpha x + \beta y + \delta z - k = 0$

Giải :

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ (bằng cách dựng hình ta dễ dàng tìm được)

$$\Rightarrow \alpha x_I + \beta y_I + \delta z_I = \frac{\alpha a + \beta b + \delta c}{2} = \frac{k}{2}.$$

Vậy tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ luôn đi động trên mặt phẳng cố định $(P): \alpha x + \beta y + \delta z - \frac{k}{2} = 0$.

Câu 36 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2; -2; 5)$ và tiếp xúc với 3 mặt phẳng $(\alpha): x - 1 = 0; (\beta): y + 1 = 0; (\delta): z - 1 = 0$. Tính bán kính mặt cầu đó.

- A. $\sqrt{33}$ B. 1 C. $3\sqrt{2}$ D. 3

Giải :

Gọi tâm mặt cầu (S) là $I(x_I; y_I; z_I)$.

Ta có $B(1; -1; 1)$ là tọa độ giao điểm của 3 mặt phẳng.

Do 3 mặt phẳng $(\alpha); (\beta); (\delta)$ đôi một cắt nhau $\Rightarrow$ 3 mặt phẳng này chia không gian làm 8 phần $\Rightarrow$ Tâm I và điểm A cùng thuộc 1 phần.

$$\text{Do } \begin{cases} x_A > 1 \\ y_A < -1 \\ z_A > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I > 1 \\ y_I < -1 \\ z_I > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x_I - 1| = |y_I + 1| = |z_I - 1| \\ |x_I - 1| = \sqrt{(x_I - 2)^2 + (y_I + 2)^2 + (z_I - 5)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -y_I \\ x_I = z_I \\ |x_I - 1| = \sqrt{(x_I - 2)^2 + (-x_I + 2)^2 + (x_I - 5)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -y_I \\ x_I = z_I \\ x_I^2 - 8x_I + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 4 \\ y_I = -4 \\ z_I = 4 \end{cases} \Rightarrow I(4; -4; 4) \Rightarrow IA = 3.$$

Câu 37: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(3; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 6), D(6; 0; -6)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua D sao cho tổng khoảng cách từ A, B, C đến Δ đạt giá trị lớn nhất. Vậy Δ đi qua điểm M nào sau đây:

A. $M(8; 3; -4)$

B. $M(8; 3; -3)$

C. $M(4; -3; -7)$

D. $M(4; -3; -6)$

Giải:

Phương trình mặt phẳng qua A, B, C có dạng: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$.

Ta nhận thấy điểm $D \in (ABC)$.

Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C trên Δ , ta có: $\Delta ADA'$ vuông tại $A' \Rightarrow AA' \leq AD = \text{const}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta \perp AD$.

Lập luận tương tự ta có: $\begin{cases} BB' \leq BD = \text{const} \\ CC' \leq CD = \text{const} \end{cases}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \perp BD \\ \Delta \perp CD \end{cases}$

Vậy $AA' + BB' + CC' \leq DA + DB + DC = \text{const}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \perp AD \\ \Delta \perp BD \\ \Delta \perp CD \end{cases} \Leftrightarrow \Delta \perp (ABCD)$.

$$\Rightarrow \text{vtcp } \vec{a}_\Delta = \text{vtpt } \vec{n}_{(ABCD)} = (2, 3, 1) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = 3t \\ z = -6 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \text{Qua } M(4; -3; -7).$$

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 5$. Tìm tọa độ điểm A thuộc tia Oy . Biết rằng ba mặt phẳng phân biệt qua A và đôi một vuông góc cắt mặt cầu theo thiết diện là ba hình tròn có tổng diện tích là 11π .

A. $\begin{cases} A(0; 2; 0) \\ A(0; 6; 0) \end{cases}$

B. $\begin{cases} A(0; 0; 0) \\ A(0; 8; 0) \end{cases}$

C. $\begin{cases} A(0; 6; 0) \\ A(0; 0; 0) \end{cases}$

D. $\begin{cases} A(0; 2; 0) \\ A(0; 8; 0) \end{cases}$

Giải:

Gọi ba mặt phẳng phân biệt qua A và đôi một vuông góc lần lượt là $(Atm), (Amp), (Apt)$.

Mặt cầu (S) cắt $(Atm), (Amp), (Apt)$ theo ba hình tròn $(C_1), (C_2), (C_3)$ có bán kính R_1, R_2, R_3 .

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 4; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi B, C, D lần lượt là hình chiếu của I trên $(Atm), (Amp), (Apt)$.

$\Rightarrow B, C, D$ lần lượt là tâm của $(C_1), (C_2), (C_3)$.

Ta có: $R_1^2 = R^2 - IB^2, R_2^2 = R^2 - IC^2, R_3^2 = R^2 - ID^2$.

Tổng diện tích ba hình tròn $(C_1), (C_2), (C_3)$ là:

$$\begin{aligned} \pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi R_3^2 &= \pi (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) = \pi [3R^2 - (IB^2 + IC^2 + ID^2)] \\ &= \pi [15 - (IB^2 + IC^2 + ID^2)] = 11\pi. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4 \Leftrightarrow IA^2 = 4 \Rightarrow IA = 2(1).$$

Vì A thuộc tia Oy nên $A(0; a; 0) (a \geq 0)$.

$$IA = 2 \Leftrightarrow (a - 4)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0; 2; 0) \\ A(0; 6; 0) \end{cases}.$$

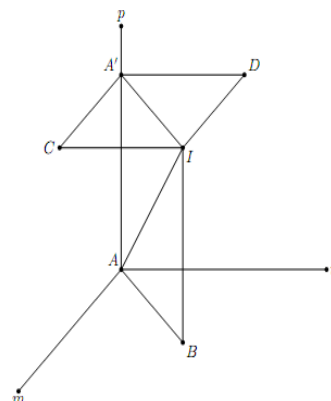
Ta chứng minh $IB^2 + IC^2 + ID^2 = IA^2$.

Gọi A' là hình chiếu của I trên Ap , chứng minh được $IDA'C$ là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow IA'^2 = IC^2 + ID^2.$$

$$\text{Đồng thời ta cũng chứng minh được } ABIA' \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow \begin{cases} IA' = AB \\ AB^2 + IB^2 = IA^2 \end{cases}.$$

Vậy ta đã chứng minh xong $IB^2 + IC^2 + ID^2 = IA^2$.



Câu 39: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt

cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 27$. Tìm điểm $M \in \Delta$ kẻ được 3 đường thẳng tiếp xúc với (S)

lần lượt tại A, B, C sao cho ΔABC và $AMB = \frac{1}{2}CMA = 60^\circ$.

- A. $\begin{bmatrix} M(-1; -2; 1) \\ M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} M(1; 2; 1) \\ M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} M(-1; -2; 1) \\ M\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} M(-1; -2; 1) \\ M\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \end{bmatrix}$

Giải:

Gọi I là tâm của (S) .

Vì MA, MB, MC là tiếp tuyến nên $MA \perp IA, MB \perp IB, MC \perp IC$.

$\Rightarrow \Delta MAI, \Delta MBI, \Delta MCI$ là các tam giác vuông có chung cạnh huyền MI .

Ta có : $IA = IB = IC = R_{(S)} \Rightarrow \Delta MAI = \Delta MBI = \Delta MCI \Rightarrow MA = MB = MC$.

$\Rightarrow M \in$ trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $A, B, C \in (C) = (M, MA) \cap (S)$ với (M, MA) là mặt cầu tâm M , bán kính MA .

Gọi J là trung điểm của $AC \Rightarrow J$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

$IA = IB = IC = R \Rightarrow I \in$ trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

$\Rightarrow M, J, I$ thẳng hàng $\Rightarrow MI, AC$ đồng phẳng.

Xét trong mặt phẳng $(AICM)$, gọi đường tròn $(C') = (S) \cap (AICM)$ có tâm I , ta có:

MA, MC là tiếp tuyến của $(C') \Rightarrow IMA = \frac{1}{2}CMA = 60^\circ$.

$$\Delta IAM \text{ vuông tại } A \text{ có } IMA = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} IM = \frac{IA}{\sin 60^\circ} = \frac{2R}{\sqrt{3}} \\ AM = IA \cdot \cot 60^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

ΔMAI vuông tại A có AJ là đường cao $\Rightarrow AJ = \frac{R}{2} = R_{(C)}$.

ΔAMB cân tại M có $AMB = 60^\circ \Rightarrow \Delta AMB$ đều $\Rightarrow AB = AM = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Vì } \begin{cases} B \in (C) \\ AB = \frac{R}{\sqrt{3}} < R = 2R_{(C)} \end{cases} \Rightarrow \text{tồn tại hai điểm } B \text{ thỏa } AMB = 60^\circ.$$

Vậy với $IM = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ sẽ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 40 : Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 1 = 0$ và $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu.

A. $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $r = \frac{2}{\sqrt{2}}$

C. $r = \frac{3}{\sqrt{2}}$

D. $r = \frac{4}{\sqrt{2}}$

Giải:

Gọi $I(a; 0; 0)$ và $R > 0$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

$$d[I, (P)] = \frac{|a+1|}{\sqrt{6}} \text{ và } d[I, (Q)] = \frac{|2a-1|}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (d[I, (P)])^2 + 2^2 = R^2 \\ (d[I, (Q)])^2 + r^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(a+1)^2}{6} + 4 = R^2 \\ \frac{(2a-1)^2}{6} + r^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{(2a-1)^2 - (a+1)^2}{6} + r^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 2r^2 - 8 = 0 \quad (1).$$

(1) là phương trình bậc hai với a là ẩn số và r là tham số.

Để có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu thì có đúng một tâm $I(a; 0; 0)$.

$$\text{Khi đó (1) có một nghiệm duy nhất: } \Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow 1 - (2r^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow r = \frac{3}{\sqrt{2}} (r > 0).$$

Vậy $r = \frac{3}{\sqrt{2}}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 41 : Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho

$A(0; y_A; z_A), B(0; y_B; z_B), C(-1; 0; 0), D(1; 0; 0)$ trong đó $y_A; y_B; z_A; z_B$ thay đổi thỏa

$y_A^2 + z_A^2 = y_B^2 + z_B^2 = 3$. Biết rằng AC, BD luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định bán kính R . Xác định bán kính mặt cầu đó.

A. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $R = \frac{1}{2}$

D. $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Giải :

Ta có :

- $x_A = x_B = 0 \Rightarrow A, B$ thuộc mặt phẳng (yOz) .
- $(0-0)^2 + (0-y_A)^2 + (0-z_A)^2 = (0-0)^2 + (0-y_B)^2 + (0-z_B)^2 = 3$
 $\Rightarrow A, B$ thuộc mặt cầu tâm O , bán kính $R = \sqrt{3}$.

Từ 2 điều trên ta có : A, B thuộc đường tròn tâm O , bán kính $R = \sqrt{3}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} OA = OB = \sqrt{3} \\ CD \perp AB \text{ (do } CD \perp (yOz)) \end{cases}.$$

Ta thấy : $\triangle OAC = \triangle OBD$ (c.g.c).

$\Rightarrow$ Đường cao hạ từ đỉnh O của 2 tam giác của bằng nhau.

$$\text{Gọi } H, K \text{ lần lượt là hình chiếu của } O \text{ trên } AC, BD \Rightarrow OH = OK = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{const}.$$

$$\text{Vậy } AC, BD \text{ luôn tiếp xúc mặt cầu tâm } O, \text{ bán kính } R = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A.$$

Câu 42 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(4;0;0), B(0;0;m), m \in \mathbb{R}$ và $C(2;4;0)$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của $O(0;0;0)$ lên đường thẳng AB . Biết rằng có một mặt cầu luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng CD tại điểm D . Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{7}$

D. 3

Giải.

Ta có $OD \perp AB \Rightarrow \angle ODA = 90^\circ$.

Mà $D \in AB \subset (Oxz)$ nên D di động trên đường tròn (C) chứa trong mặt phẳng (Oxz) có tâm J là trung điểm của OA và bán kính $R_{(C)} = JA = 2$.

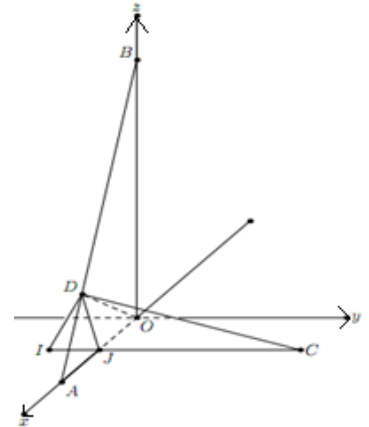
J là trung điểm $OA \Rightarrow J(2,0,0) \Rightarrow \overrightarrow{JC} = (0,4,0)$.

$\Rightarrow JC \perp (Oxz) \supset (C) \Rightarrow JC$ là trục của đường tròn (C) và $JC = 4$

Gọi I là tâm mặt cầu (S) mà CD luôn tiếp xúc tại $D \Rightarrow \begin{cases} I \in JC \\ ID \perp CD \end{cases}$.

$\triangle IDC$ vuông tại D , có JD là đường cao $\Rightarrow JD^2 = JI \cdot JC \Rightarrow JI = 1$.

Mà $\triangle IJD$ vuông tại $J \Rightarrow ID = \sqrt{JD^2 + JI^2} = \sqrt{5}$.



Câu 43 : Trong không gian với hệ toa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a trong đó $A \equiv O, B(a;0;0), D(0;a;0)$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai cạnh $BD, B'A$ sao cho $BM = B'N$. Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi đường thẳng MN với các đường thẳng $BD, B'A$. Giá trị của $A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$ bằng bao nhiêu?

A. $A = \frac{1}{2}$

B. $A = 1$

C. $A = \frac{1}{4}$

D. $A = \frac{1}{3}$

Giải:

Gọi cạnh của hình lập phương là b , ta có:

$AD = AB = BB' = b$.

Ta có $\triangle ABB'$ vuông cân tại B và $\triangle ABD$ vuông cân tại A .

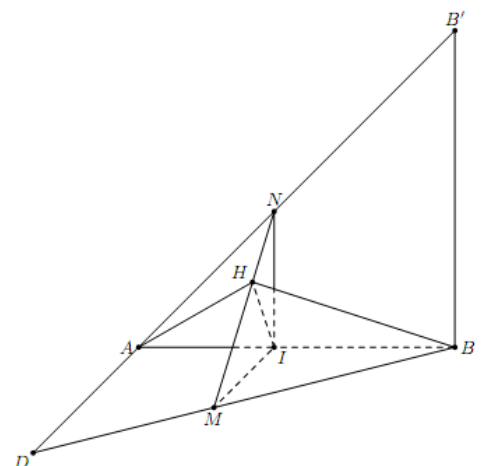
$$\Rightarrow \begin{cases} \angle B'AB = \angle AB'B = \angle ABD = \angle ADB = 45^\circ \\ BD = B'A = b\sqrt{2} \end{cases}$$

Nếu $BM = B'N = 0$ nghĩa là $M \equiv B, N \equiv B'$, thì ta có:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos \angle B'BD = \cos 90^\circ = 0 \\ \cos \beta = \cos \angle AB'B = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ **Đến đây ta có thể chọn được đáp án :))))))**

Nếu $BM = B'N = b\sqrt{2}$ nghĩa là $M \equiv D, N \equiv A$, thì ta có:



$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos ADB = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{1}{2} \\ \cos \beta = \cos DAB' = \cos 90^\circ = 0 \end{cases}$$

Nếu $BM = B'N = x\sqrt{2}$ với $x \in (0; b)$, Gọi I là hình chiếu của N trên AB , ta có:

$$\begin{cases} AN = AB' - B'N = (b-x)\sqrt{2} \Rightarrow IA = IN = b-x \\ NI \parallel BB' \Rightarrow \frac{BI}{BA} = \frac{B'N}{B'A} = \frac{BM}{BD} \quad (B'N = BM, B'A = BD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow MI \parallel AD \text{ (Thalès đảo)} \Rightarrow MI \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AB \perp (MNI) \Rightarrow AB \perp MN \\ IM = IB = x \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của I trên $MN \Rightarrow MN \perp IH \Rightarrow MN \perp (AHB) \Rightarrow \begin{cases} BH \perp HM \\ AH \perp HN \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{MH}{MB} = \frac{MH}{x\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{MH^2}{2x^2} \\ \cos \beta = \frac{NH}{NA} = \frac{NH}{(b-x)\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{NH^2}{2(b-x)^2} \end{cases}$$

$$\Delta MIN \text{ vuông tại } I \text{ có } IH \text{ là đường cao} \Rightarrow \begin{cases} MH \cdot MN = IM^2 = x^2 \\ NH \cdot NM = IN^2 = (b-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{MH}{x^2} = \frac{NH}{(b-x)^2}$$

$$\text{Vậy } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{MH^2}{2x^2} + \frac{NH^2}{2(b-x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{MH}{x^2} \cdot (MH + NH) = \frac{MH \cdot MN}{2x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Kết luận: } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{1}{2}$$

Câu 44: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 0)$, $B(2; -3; 2)$. Gọi (S) mặt cầu đường kính AB ; Ax, By là hai tiếp tuyến mặt cầu (S) và $Ax \perp By$. Gọi M, N lần lượt là điểm di động trên Ax, By sao đường thẳng MN luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) . Tính giá trị $AM \cdot BN$.

- A. $AM \cdot BN = 19$ B. $AM \cdot BN = 24$ C. $AM \cdot BN = 38$ D. $AM \cdot BN = 48$

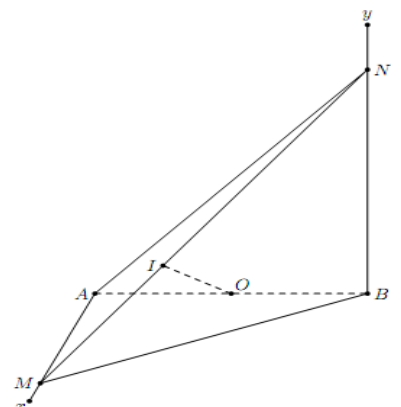
Giải:

Gọi O là tâm của mặt cầu (S) và I là tiếp điểm của MN và mặt cầu..

$$\text{Ta có } OI = OA = OB = \frac{AB}{2} \Rightarrow \begin{cases} \Delta IMO = \Delta AMO \\ \Delta INO = \Delta BNO \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MA = MI \\ NB = NI \end{cases} \Rightarrow MN = AM + BN$$

AM, BN là các tiếp tuyến của mặt cầu đường kính AB và $AM \perp BN$.



$$\Rightarrow AM \perp (ABN) \Rightarrow AM \perp AN \Rightarrow \Delta AMN \text{ vuông tại } A.$$

$$\Rightarrow MN^2 = AM^2 + AN^2 = AM^2 + (BA^2 + BN^2) \quad (\Delta ABN \text{ vuông tại } B)$$

$$\Leftrightarrow (AM + BN)^2 = AM^2 + BN^2 + AB^2 \Leftrightarrow 2AM \cdot BN = AB^2.$$

$$\Rightarrow AM \cdot BN = \frac{AB^2}{2}.$$

$$\text{Ta có } A(-1; 2; 0), B(2; -3; 2) \Rightarrow AB^2 = 38 \Rightarrow AM \cdot BN = 19.$$

Câu 45 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 18 = 0$, M là điểm di chuyển trên mặt phẳng (P) , N là điểm nằm trên tia OM sao cho $OM \cdot ON = 24$. Tính giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (P) .

A. $\min d[N; (P)] = 2$ B. $\min d[N; (P)] = 3$ C. $\min d[N; (P)] = 1$ D. $\min d[N; (P)] = 4$

Giải :

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } O \text{ trên mặt phẳng } (P) \Rightarrow \begin{cases} H(-2; -4; -4) \\ OH = 6 = \text{const} \end{cases}.$$

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm nằm trên tia } OH \text{ sao cho } OH \cdot OI = 24 \Rightarrow \begin{cases} OI = 4 = \text{const} \\ I\left(-\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có : } OM \cdot ON = OH \cdot OI \Rightarrow \frac{OM}{OI} = \frac{OH}{ON} \text{ và góc } MOH = ION \text{ nên } \Delta MOH \sim \Delta ION \text{ (c-g-c)}.$$

$$\Rightarrow \text{Góc } MHO = INO, \text{ mà } OH \perp (P) \Rightarrow OH \perp MH \Rightarrow \text{góc } MOH = 90^\circ.$$

$$\Rightarrow \text{Góc } INO = 90^\circ \Rightarrow N \text{ thuộc mặt cầu } (S) \text{ đường kính } OI \text{ cố định với tâm } K\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{là trung điểm của } OI \text{ và bán kính } R = \frac{OI}{2} = 2.$$

$$\text{Ta có : } d[K; (P)] = 4 \Rightarrow \text{Mặt cầu } (S) \text{ không giao với mặt phẳng } (P).$$

$$\Rightarrow \min d[N; (P)] = d[K; (P)] - R = 2.$$

Câu 46 : Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 1; -4), B(-6; 2; 3), M(1; 1; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M sao cho tổng khoảng cách từ A, B đến (P) là lớn nhất. Biết rằng mặt phẳng đó có dạng $(P): x + ay + bz + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $A = a + b + c$.

A. $A = -\frac{10}{3}$

B. $A = \frac{3}{4}$

C. $A = \frac{4}{7}$

D. $A = -\frac{6}{5}$

Giải :

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1; 0; -7) \\ \overrightarrow{MB} = (-7; 1; 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = MB = \sqrt{50} \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -7 \end{cases} \Rightarrow \Delta MAB \text{ cân tại } M \text{ và có } \angle AMB \text{ là góc tù.}$$

$$\text{Gọi } I\left(-2; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ là trung điểm đoạn } AB \Rightarrow MI \perp AB.$$

Gọi H, T lần lượt là hình chiếu của A, B lên mặt phẳng (P) .

Trường hợp 1: (P) không cắt đoạn AB .

Gọi L là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) . Ta chứng minh được: $IL = \frac{1}{2}(AH + BT)$.

$\triangle IML$ vuông tại $L \Rightarrow IL \leq IM = \text{const}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (P) \perp IM$ tại M .

Khi đó $(P) // AB$ nên (P) không cắt đoạn AB (thỏa điều kiện trường hợp 1).

Vậy $(AH + BT)_{\max} = 2IM \Leftrightarrow (P) \perp IM$ tại M .

Trường hợp 2: (P) cắt đoạn $AB \Rightarrow \exists \{J\} = AB \cap (P)$ với AB là đoạn thẳng.

Ta có: $\begin{cases} AH \leq AJ \\ BT \leq BJ \end{cases} \Rightarrow (AH + BT) \leq AJ + BJ = AB = \text{const}.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (P) \perp AB \Rightarrow (P) \supset IM \Rightarrow I \in (P)$.

Khi đó (P) cắt đoạn AB tại I (thỏa điều kiện trường hợp 2).

Vậy $(AH + BT)_{\max} = AB \Leftrightarrow (P) \perp AB$.

Vì $\triangle AMB$ có $\angle AMB$ là góc tù nên $AB > 2IM$.

Vậy tổng khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (P) lớn nhất là AB khi $(P) \perp AB$.

$\Rightarrow (P)$ nhận $\overrightarrow{AB} = (-8; 1; 7) // \left(1; -\frac{1}{8}; -\frac{7}{8}\right)$ làm vtpt.

(P) qua $M(1; 1; 3) \Rightarrow (P): x - \frac{1}{8}y - \frac{7}{8}z + \frac{7}{4} = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{8}; b = \frac{-7}{8}; c = \frac{7}{4} \Rightarrow A = \frac{3}{4}.$

Câu 47: Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x - \cos \alpha \cdot \sin \beta)^2 + (y - \sin \alpha \cdot \sin \beta)^2 + (z - \cos \beta)^2 = \frac{1}{4}$ với α, β là các góc thay đổi luôn thỏa mãn $\alpha, \beta \in [0; 2\pi]$. Biết (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định $(S_1), (S_2)$. Tổng thể tích của hai khối cầu $(S_1), (S_2)$ là:

A. $\frac{21\pi}{8}$

B. $\frac{14\pi}{3}$

C. 12π

D. $\frac{76\pi}{3}$

Giải:

Gọi I là tâm mặt cầu $(S) \Rightarrow I \in d: \begin{cases} x = \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ y = \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ z = \cos \beta \end{cases}.$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$\Rightarrow$ Vậy $I \in (S_{(O)}): x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến gốc tọa độ O là cố định.

$\Rightarrow$ Vậy mặt cầu (S) sẽ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong với 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$ cố định có tâm là O .

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = R_{(O)} + R_{(S)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ R_2 = R_{(O)} - R_{(S)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{14\pi}{3} \text{ (dvtt)} .$$

Câu 48 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tập hợp các điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn bất phương trình $(a - 2\sin \alpha)^2 + (b - 2\cos \alpha)^2 + c^2 \leq \frac{1}{4}$ là một khối tròn xoay thể tích bằng :

- A. $V = 2\pi^2$ B. $V = \pi^2$ C. $V = 3\pi^2$ D. $V = \frac{\pi^2}{3}$

Giải :

Xét điểm $A(2\sin \alpha; 2\cos \alpha; 0) \Rightarrow A \in (Oxy) \Rightarrow x_A^2 + y_A^2 = 4$.

Vậy tập hợp điểm A là một đường tròn (C) tâm $O(0;0;0)$ có bán kính $R = 2$ trong mặt phẳng (Oxy) .

Với mọi $M(a;b;c)$ ta luôn có $MA^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow MA \leq \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Khi điểm A chạy tung tăng trên đường tròn (C) thì tập hợp điểm M tạo thành hình một cái phao có bán kính đường tròn lớn $R_1 = R + MA = \frac{5}{2}$ và bán kính đường tròn nhỏ là $R_2 = R - MA = \frac{3}{2}$.

Áp dụng công thức thể tích cái phao ta có : $V = \frac{1}{4}\pi^2(R_1 + R_2)(R_1 - R_2)^2 = \pi^2$.

Câu 49 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P_m): (m^2 - 1)x - 2mz + 2m^2 + m - 1 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi thì (P_m) luôn tiếp xúc với 1 mặt cầu có bán kính cố định và có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(Q): y + 2 = 0$. Tính $P = a + 2b + 3c$

- A. $P = 0$ B. $P = -1$ C. $P = -2$ D. $P = -3$

Giải :

Ta có: $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu cố định luôn tiếp với (P_m) .

$$\Rightarrow d[I; (P_m)] = \frac{|(m^2 - 1)a - 2mc + 2m^2 + m - 1|}{\sqrt{(m^2 - 1)^2 + 4m^2}} = \frac{|(a + 2)m^2 + (1 - 2c)m - (a + 1)|}{(m^2 + 1)}.$$

Để $d[I; (P_m)]$ là một hằng số thì các hệ số tương ứng tỉ lệ với nhau :

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ \frac{a + 2}{1} = \frac{-(a + 1)}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; b; \frac{1}{2}\right).$$

$$I \in (Q): y+2=0 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; -2; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow P=-3.$$

Câu 50 : Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P_m): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$ và điểm $A(2; 11; -5)$. Biết rằng khi m thay đổi thì (P_m) luôn tiếp xúc với 2 mặt cầu có bán kính cố định và cùng đi qua A . Tổng bán kính 2 mặt cầu đó là:

A. $2\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $7\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{2}$

Giải :

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu cố định luôn tiếp với (P_m) .

$$\Rightarrow d[I; (P_m)] = \frac{|2ma + (m^2 + 1)b + (m^2 - 1)c - 10|}{\sqrt{4m^2 + (m^2 + 1)^2 + (m^2 - 1)^2}} = \frac{|(b + c)m^2 + 2ma + (b - c - 10)|}{(m^2 + 1)\sqrt{2}}.$$

Để $d[I; (P_m)]$ là một hằng số thì các hệ số tương ứng tỉ lệ với nhau:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \frac{b+c}{1} = \frac{b-c-10}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -5 \end{cases} \Rightarrow I(0; b; -5).$$

$$\Rightarrow d[I; (P_m)] = \frac{|b-5|}{\sqrt{2}} = \sqrt{4 + (b-11)^2} = IA \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9 \\ b = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (0; 9; -5) \\ I_2 = (0; 25; -5) \end{cases} \Rightarrow R_1 + R_2 = 12\sqrt{2}.$$

Câu 51 : Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(P): x - my + z - m = 0, (Q): mx + y - mz - 1 = 0$ gọi (Δ_1) là hình chiếu của (Δ) trên mặt phẳng (Oxy) . Biết rằng (Δ_1) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 1$ B. $R = 1,5$ C. $r = 2$ D. $r = 3$

Giải.

(P) có vtpt $\vec{n}_{(P)} = (1, -m, 1)$, (Q) có vtpt $\vec{n}_{(Q)} = (m; 1; -m)$

(Δ) có vtcp $\vec{a}_{(\Delta)} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (m^2 - 1; 2m; m^2 + 1)$.

Với $m \neq 0$. Gọi $A\left(\frac{m^2 + 1}{2m}; 0; \frac{m^2 - 1}{2m}\right) \in (\Delta)$.

Gọi (α) là mặt phẳng qua (Δ) và vuông góc với mặt phẳng (Oxy) có vtpt $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

$$\Rightarrow (\alpha) \text{ có vtpt } \vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{a}_{(\Delta)}, \vec{n}] = (2m, 1 - m^2, 0) \Rightarrow (\alpha): 2m \cdot \left(x - \frac{m^2 + 1}{2m}\right) + (1 - m^2) \cdot (y - 0) = 0.$$

$$\Rightarrow (\alpha): 2mx + (1 - m^2)y - (m^2 + 1) = 0.$$

Vậy (Δ_1) có phương trình là: $2mx + (1 - m^2)y - (m^2 + 1) = 0$ trong mặt phẳng (Oxy) .

Xét trong mặt phẳng (Oxy) , ta có:

$$\text{Xét điểm } O(0, 0) \Rightarrow d[O, (\Delta_1)] = \frac{|-(m^2 + 1)|}{m^2 + 1} = 1 = \text{const}.$$

Vậy trong mặt phẳng (Oxy) ta luôn có (Δ_1) luôn tiếp xúc với một đường tròn (C) cố định có tâm $O(0;0;0)$ với $R_{(C)} = 1 \forall m \neq 0$.

Với $m = 0$, ta có : $(\Delta) : \begin{cases} x+z=0 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=-t \end{cases} \forall t \in R \Rightarrow (\Delta) // (Oxz)$.

Vậy (Δ_1) có dạng $y=1$ trong mặt phẳng (Oxy) .

Mà $d[O, (\Delta_1)] = 1 = R_{(C)}$ nên (Δ_1) tiếp xúc với (C) .

Kết luận: (Δ_1) luôn tiếp xúc đường tròn (C) có bán kính là 1 $\forall m \in R$.

Câu 52: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(0;0;1), B(m;0;0), C(0;n;0), D(1;1;1)$ với $m > 0, n > 0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi thì tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D . Tính bán kính R của mặt cầu đó.

A. $R=1$ B. $R=\frac{3}{2}$ C. $R=2$ D. $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Giải:

Ta có : $(ABC) : \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow nx + my + mnz - mn = 0$.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán :

$$\Rightarrow d[I; (ABC)] = \frac{|na + mb + mnc - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2n^2}} = \frac{|na + mb + (c-1)mn|}{1-mn} = \frac{|(b-a)m + a + (c-1)mn|}{1-mn}.$$

Để $d[I; (ABC)]$ là một hằng số thì các hệ số tương ứng tỉ lệ với nhau :

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a=0 \\ \frac{a}{1} = -\frac{c-1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a \\ c=1-a \end{cases} \Rightarrow I(a; a; 1-a).$$

$$\Rightarrow d[I; (ABC)] = a = \sqrt{(a-1)^2 + (a-1)^2 + (-a)^2} = ID \Leftrightarrow a=1 \Leftrightarrow R=1.$$

---HẾT---