

Câu 1: (5,0 điểm) Cho dãy số (x_n) dương sao cho
$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ \frac{x_{n-1}x_{n+1}}{x_n^2} + \frac{n(n+1)x_{n+1}^2}{x_{n-1}x_n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Xác định công thức số hạng tổng quát của (x_n) .

b) Đặt $u_n = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^n x_i$. Tính $\lim (u_n)^{(n+1)!}$.

Câu 2: (5,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương lẻ (a, b) , $a, b < 2^{2023}$ thỏa mãn $a^b + b : 2^{2023}$ và $b^a + a : 2^{2023}$.

Câu 3: (5,0 điểm) Tam giác nhọn không cân ABC có trực tâm H và đường tròn ngoại tiếp (O) , đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại K . Điểm Q nằm trên đường tròn (O) sao cho $AQ \perp QK$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAQH cắt AC, AB lần lượt tại Y, Z . Gọi T là giao điểm của BY và CZ , P là giao điểm của YZ và BC .

a) Chứng minh rằng $\frac{PY}{PZ} = \frac{BH}{HC}$.

b) Chứng minh rằng $TH \perp KA$.

Câu 4: (5,0 điểm) Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 2 + \frac{1}{a+b+c}.$$

----- HẾT -----

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Chữ ký cán bộ coi thi số 1:; Chữ ký cán bộ coi thi số 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM

A. HƯỚNG DẪN CHẤM

- Nếu học sinh giải theo cách khác đáp án mà bài giải vẫn đúng thì giám khảo xem xét cho điểm tương ứng.

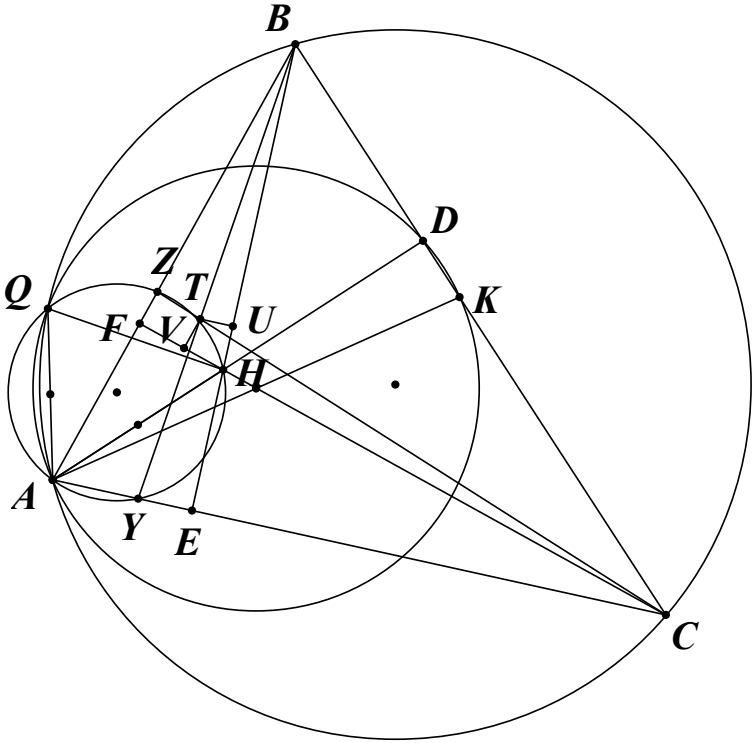
- Điểm số toàn bài, mỗi câu, mỗi ý **không làm tròn**, giám khảo có thể thống nhất đáp án chia các ý đến 0,25 điểm.

B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Câu	HƯỚNG DẪN CHẤM	Biểu điểm
Câu 1	Cho dãy số (x_n) dương sao cho $\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ \frac{x_{n-1}x_{n+1}}{x_n^2} + \frac{n(n+1)x_{n+1}^2}{x_{n-1}x_n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ a) Xác định công thức số hạng tổng quát của (x_n). b) Đặt $u_n = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^n x_i$. Tính $\lim(u_n)^{(n+1)!}$.	
	a) Ta chứng minh bằng quy nạp $x_n = \frac{1}{n!} (*)$	0,5
	Ta có $(*)$ đúng với $n=0; n=1$. Giả sử $(*)$ đúng đến $k, k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ $\frac{x_{k-1}x_{k+1}}{x_k^2} + \frac{k(k+1)x_{k+1}^2}{x_{k-1}x_k} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{k+1}(k+1)!x_{k+1} + \frac{1}{k+1}[(k+1)!x_{k+1}]^2 = 1$	0,75
	Đặt $y_{k+1} = (k+1)!x_{k+1}$ ta có $\frac{k}{k+1}y_{k+1} + \frac{1}{k+1}(y_{k+1})^2 = 1 \Leftrightarrow (y_{k+1}-1)(k+1+y_{k+1}) = 0 \Leftrightarrow y_{k+1} = 1 \Leftrightarrow x_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$ Suy ra đpcm	0,75
	b) Đặt $\sum_{i=0}^n x_i = v_n \Rightarrow \lim v_n = e$ (theo khai triển Taylor).	0,5
	Ta có: $\lim(u_n)^{(n+1)!} = \lim \left(\frac{v_n}{e} \right)^{(n+1)!} = \lim \frac{(v_n)^{(n+1)!}}{(e)^{(n+1)!}}$ $= \lim \frac{(e)^{(n+1)! \ln v_n}}{(e)^{(n+1)!}} = \lim e^{(n+1)! \ln v_n - (n+1)!} = e^{\lim(n+1)!(\ln v_n - 1)}$	0,5
	Tính $\lim(n+1)!(\ln v_n - 1)$, đặt $a_n = \ln v_n - 1; b_n = \frac{1}{(n+1)!}$ Xét thấy $\lim a_n = \lim b_n = 0(1); (b_n)$ giảm thực sự (2)	0,5

	Mặt khác: $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{\ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)}{\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!}}$ $= \lim \frac{\ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)}{\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!}} = \lim \frac{v_n (n+1)! \ln \left(1 + \frac{1}{v_n (n+1)!} \right)}{-v_n \frac{n+1}{n+2}}$ Do $\lim v_n (n+1) = +\infty \Rightarrow \lim v_n (n+1)! \ln \left(1 + \frac{1}{v_n (n+1)!} \right) = 1$.	1,0
	Suy ra $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{-1}{v_n} = -\frac{1}{e}(3)$. Từ (1);(2);(3) và áp dụng stolz ta được $\lim (n+1)! (\ln v_n - 1) = -\frac{1}{e}$. Vậy $\lim (u_n)^{(n+1)!} = e^{-\frac{1}{e}}$.	0,5
Câu 2	Tìm tất cả các cặp số nguyên dương lẻ (a, b), $a, b < 2^{2023}$ thỏa mãn $a^b + b : 2^{2023}$ và $b^a + a : 2^{2023}$.	
	Nhận xét: Với mọi số nguyên dương lẻ c và số nguyên dương chẵn n theo bổ đề nâng lũy thừa LTE ta có: $v_2(c^n - 1) = v_2(c - 1) + v_2(c + 1) + v_2(n) - 1$ - Nếu $a = 1$ từ đó ta có $b + 1 : 2^{2023} \Rightarrow b = 2^{2023} - 1$ (bởi vì $b < 2^{2023}$) - Nếu $b = 1$ từ đó ta có $a + 1 : 2^{2023} \Rightarrow a = 2^{2023} - 1$ (bởi vì $a < 2^{2023}$)	0,5
	Nếu $a, b > 1$ Đặt $S = a + b$, vì $a^b - a = a(a^b - 1) : (a^2 - 1) \Rightarrow a^b - a : 4$ Từ đó suy ra $S = a^b + b - (a^b - a) : 4$ Không mất tổng quát giả sử rằng $S = (a - 1) + (b + 1)$ với $(a - 1) : 4$ và $(b + 1) : 4$ Đặt $a - 1 = 2^k A$; $b + 1 = 2^m B$ (với $k, m \geq 2, A, B \in \mathbb{Z}^+$ lẻ)	0,5
	Theo bổ đề nâng lũy thừa LTE ta có $v_2(a^{b-1} - 1) = v_2(a - 1) + v_2(a + 1) + v_2(b - 1) - 1 = k + 1 + 1 - 1 = k + 1$ $v_2(b^{a-1} - 1) = v_2(b - 1) + v_2(b + 1) + v_2(a - 1) - 1 = m + 1 + k - 1 = k + m$ Do đó $a^b - a = a(a^{b-1} - 1) = 2^{k+1}x$, (với x là số nguyên dương lẻ) và $b^a - b = b(b^{a-1} - 1) = 2^{k+m}y$, (với y là số nguyên dương lẻ)	1,0
	Kết hợp với giả thiết ta có $(2^{k+1}x + S) : 2^{2023} \quad (1) \text{ và } (2^{k+m}y + S) : 2^{2023} \quad (2)$ Mặt khác $a = 2^k A + 1 < 2^{2023} \Rightarrow k \leq 2022 \quad (3)$ Từ (1) : $(2^{k+1}x + S) : 2^{2023} : 2^{k+1} \Rightarrow S : 2^{k+1}$	1,0

	Nếu $\nu_2(S) > k+1$ ta suy ra $2023 = \nu_2(2^{2023}) \leq \nu_2(2^{k+1}x + S) = k+1 \Rightarrow k \geq 2022$ (4) Nếu $\nu_2(S) = k+1$ với mọi $m \geq 2$ ta suy ra $2023 = \nu_2(2^{2023}) \leq \nu_2(2^{k+m}x + S) = k+1 \Rightarrow k \geq 2022$ (5). Từ (3) (4) và (5) suy ra $k = 2022$.	1,0
	Khi đó $a = 2^{2022}A + 1 < 2^{2023} \Rightarrow A = 1$ hay $a = 2^{2022} + 1$ Mà $S : 2^{k+1} = 2^{2023} \Leftrightarrow 2^{2023} \leq S = a + b < 2 \cdot 2^{2023} = 2^{2024} \Rightarrow a + b = 2^{2023}$ hay $b = 2^{2023} - a$ $\Leftrightarrow b = 2^{2022} - 1$. Các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn yêu cầu bài toán gồm $\{(2^{2023} - 1, 1), (1, 2^{2023} - 1), (2^{2022} - 1, 2^{2022} + 1), (2^{2022} + 1, 2^{2022} - 1)\}$	1,0
Câu 3	Tam giác nhọn không cân ABC có trực tâm H và đường tròn ngoại tiếp (O), đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại K. Điểm Q nằm trên đường tròn (O) sao cho $AQ \perp QK$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAQH cắt AC, AB lần lượt tại Y, Z. Gọi T là giao điểm của BY và CZ, P là giao điểm của YZ và BC. a) Chứng minh rằng $\frac{PY}{PZ} = \frac{BH}{HC}$. b) Chứng minh rằng $TH \perp KA$.	
		0,5

	Gọi AA_1 là đường kính của (O). Gọi AD, BE, CF là các đường cao trong tam giác ABC. AK cắt (O) ở $M \neq A$. Lấy G đối xứng với M qua BC. Ta chứng minh Q nằm trên MD Thật vậy, có $\widehat{AQK} = 90^\circ$, vì vậy Q nằm trên A_1K. Do đó $\widehat{KQM} = \widehat{A_1QM} = \widehat{A_1AM} = \widehat{KAD} = \widehat{KQD}$ hay ta có điều phải chứng minh.	0,5
	Lưu ý rằng $\widehat{YQZ} = \widehat{YAZ} = \widehat{CAB}$, và $\widehat{QYZ} = \widehat{QAZ} = \widehat{QAB} = \widehat{QCB}$, vì vậy $\Delta QYZ \sim \Delta QBC$. Xác định điểm R sao cho $\Delta QBR \sim \Delta QZP$. Vì $\widehat{QZY} = \widehat{QBC}$, ta có được R nằm trên BC. Bởi $\Delta QYZ \sim \Delta QCB$ và $\Delta QZP \sim \Delta QBR$, ta có $\frac{PY}{PZ} = \frac{RB}{RC}$.	1,0
	Gọi AH cắt (O) tại $A_2 \neq A$. Ta thấy rằng $QPBZ$ là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{QRK} = \widehat{QPZ} = \widehat{QPB} = \widehat{QMK}$ hay $QRMK$ nội tiếp. Ta có $\overline{DR} \cdot \overline{DK} = \overline{DQ} \cdot \overline{DM} = \overline{DA} \cdot \overline{DA_2}$, nên ARA_2K là tứ giác nội tiếp. Vì vậy $\widehat{AA_2R} = \widehat{AKB} = \widehat{ACM} = 180^\circ - \widehat{AA_2M}$, nên R nằm trên MA_2. Bởi vì MA_2 và HG đối xứng qua BC, nên R nằm trên HG. Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{RB}{RC} = \frac{BH}{HC}$.	1,0
b)	 Chứng minh : Gọi U và V là hình chiếu của T trên BE và CF tương ứng. Thấy rằng $\frac{TU}{EY} = \frac{BT}{BY}$ và $\frac{TV}{FZ} = \frac{CT}{CZ}$ nên $\frac{TU}{TV} = \frac{BT}{BY} \cdot \frac{CZ}{CT} \cdot \frac{EY}{FZ}$. Bởi vì $\widehat{HEY} = \widehat{HFZ} = 90^\circ$ và $AZHY$ nội tiếp nên ta có $\Delta HEY \sim \Delta HFZ$. Do đó ta có $\frac{EY}{FZ} = \frac{HE}{HF} = \frac{CH}{BH}$ nên $\frac{TU}{TV} = \frac{BT}{BY} \cdot \frac{CZ}{CT} \cdot \frac{PY}{PZ}$	1,0

	Từ đó có được $TU = TV$ do theo định lý Menelaus cho tam giác ΔTYZ ta có $\frac{BT}{BY} \cdot \frac{CZ}{CT} \cdot \frac{PZ}{PY} = 1$. Do đó HT là phân giác góc $\widehat{BHC}$, hay T, H, G thẳng hàng. Từ đây, ta có ngay điều phải chứng minh.	1,0
Câu 4	Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 2 + \frac{1}{a+b+c}$	
	Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca = 1, r = abc$ Khi đó (*) $\Leftrightarrow \frac{p^2 + q}{pq - r} \geq 2 + \frac{1}{p}$ $\Leftrightarrow \frac{p^2 + 1}{p - r} \geq 2 + \frac{1}{p}$ $\Leftrightarrow p^3 + p \geq 2p(p - r) + p - r$ $\Leftrightarrow p^3 - 2p^2 + 2pr + r \geq 0 \quad (1)$	1,0
	Ta có: $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Leftrightarrow p^2 \geq 3 \Rightarrow p \geq \sqrt{3}$	1,0
	TH1: $p \geq 2 \Rightarrow VT \geq 0$ (đpcm)	0,5
	TH2: $\sqrt{3} \leq p < 2$ Theo BĐT Schur ta có: $r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9} = \frac{p(4 - p^2)}{9}$	0,5
	Do đó $VT(1) \geq p^3 - 2p^2 + \frac{2p^2(4 - p^2)}{9} + \frac{p(4 - p^2)}{9}$	0,5
	Ta cần chứng minh $p^3 - 2p^2 + \frac{2p^2(4 - p^2)}{9} + \frac{p(4 - p^2)}{9} \geq 0$ (**)	0,5
	Thật vậy (**) $\Leftrightarrow p(2 - p)(p - 1)^2 \geq 0$, đúng do $\sqrt{3} \leq p < 2$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c) = (1, 1, 0)$ và hoán vị	1,0

----- HẾT -----

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP QUỐC GIA
NĂM HỌC 2023 - 2024**

Môn thi: TOÁN

*Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 01 trang, gồm 03 câu)*

Ngày thi thứ hai: 29/8/2023

Câu 1. (6,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(xf(y)) + f(y^{2023}f(x)) = xy + xy^{2023}, \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Câu 2. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F . Biết AI cắt BC tại S và cắt (O) tại điểm thứ hai là M . Các đường tròn ngoại tiếp tam giác BSM, CSM cắt MF, ME tương ứng tại L và K (K, L khác M).

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, L, S, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi T là giao điểm thứ hai của MD với (O) . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL tiếp xúc với (O) .

Câu 3. (7,0 điểm)

Cô giáo có tất cả 2278 viên kẹo thuộc về k loại kẹo khác nhau. Cô chia cho các học sinh của mình mỗi người một số viên kẹo và không có học sinh nào nhận nhiều hơn một viên kẹo ở cùng một loại kẹo. Cô yêu cầu hai học sinh khác nhau bất kỳ so sánh các viên kẹo mình nhận được và viết số loại kẹo mà cả hai cùng có lên bảng. Biết rằng mỗi cặp học sinh bất kỳ đều được lên bảng đúng một lần. Gọi tổng các số được viết lên bảng là M . Xác định giá trị nhỏ nhất của M trong mỗi trường hợp sau:

a) $k = 67$.

b) $k = 68$.

----- HẾT -----

***Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.***

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Chữ ký cán bộ coi thi số 1:; Chữ ký cán bộ coi thi số 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM

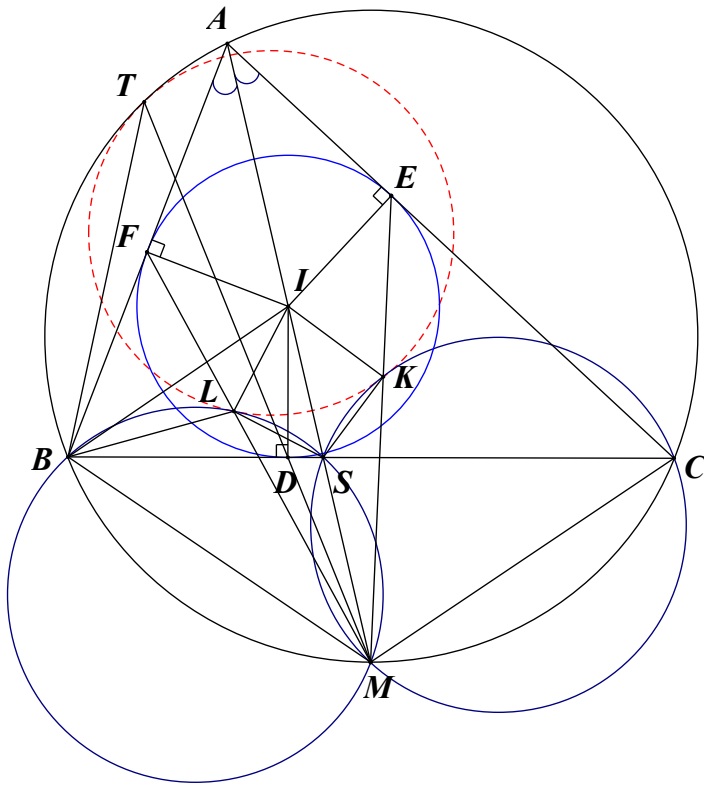
A. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Nếu học sinh giải theo cách khác đáp án mà bài giải vẫn đúng thì giám khảo xem xét cho điểm tương ứng. Câu 2 phải có hình vẽ mới chấm điểm.

- Điểm số toàn bài, mỗi câu, mỗi ý **không làm tròn**, giám khảo có thể thống nhất đáp án chia các ý đến 0,25 điểm.

B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Câu	Nội dung	Điểm
1 (6,0 điểm)	Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn $f(xf(y)) + f(y^{2023}f(x)) = xy + xy^{2023}, \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$	
	Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán $f(xf(y)) + f(y^{2023}f(x)) = xy + xy^{2023}, \quad \forall x, y \in (0; +\infty) \quad (1).$ Thay $x = y = 1$ vào (1), ta được $f(f(1)) = 1$. Thay $y = 1$ vào (1), ta được $f(xf(1)) + f(f(x)) = 2x, \quad \forall x \in (0; +\infty) \quad (2).$	0,5
	Thay $y = f(1)$ vào (1) và sử dụng $f(f(1)) = 1$, ta được: $f(xf(f(1))) + f(f^{2023}(1)f(x)) = xf(1) + xf^{2023}(1)$ $\Leftrightarrow f(x) + f(f^{2023}(1)f(x)) = xf(1) + xf^{2023}(1), \quad \forall x \in (0; +\infty) \quad (3).$	0,5
	Với mọi $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ và $f(x_1) = f(x_2)$, ta thay x lần lượt bởi x_1 và x_2 vào (3) ta có: $f(x_1) + f(f^{2023}(1)f(x_1)) = x_1f(1) + x_1f^{2023}(1) \quad (4).$ $f(x_2) + f(f^{2023}(1)f(x_2)) = x_2f(1) + x_2f^{2023}(1) \quad (5).$ Do $f(x_1) = f(x_2)$ và $f(1) > 0$ nên từ (4) và (5) ta có $x_1 = x_2$. Vậy f là đơn ánh.	0,5
	Trong (2), cho $x = f(1)$, ta được: $f(f^2(1)) + f(f(f(1))) = 2f(1)$ $\Leftrightarrow f(f^2(1)) + f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(f^2(1)) = f(1) \text{ mà } f \text{ là đơn ánh và } f(1) > 0 \text{ nên ta có } f(f^2(1)) = f(1) \Leftrightarrow f^2(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$	1,0
	Với $f(1) = 1$ kết hợp với (2) ta thu được: $f(x) + f(f(x)) = 2x, \quad \forall x \in (0; +\infty) \quad (6).$	0,5

	Với mỗi $x \in (0; +\infty)$ cố định, xét dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_0 = x > 0; u_1 = f(x); u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}.$	0,5
	Do $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ nên từ cách xác định dãy số (u_n) như trên ta có $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (*). Khi đó, từ (6) ta thu được $u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}$.	0,5
	Ta có phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ có hai nghiệm $\lambda = 1$ và $\lambda = -2$. Suy ra $u_n = a + b \cdot (-2)^n$, trong đó a, b thỏa mãn: $\begin{cases} x = a + b \\ f(x) = a - 2b \end{cases}$ Suy ra $a = \frac{2x + f(x)}{3}; b = \frac{x - f(x)}{3}$.	0,5
	TH1: Nếu $b > 0$, ta chọn $k \in \mathbb{N}$ sao cho $a + b \cdot (-2)^{2k+1} < 0$ thì $u_{2k+1} < 0$, mâu thuẫn với (*). TH2: Nếu $b < 0$, ta chọn $k \in \mathbb{N}$ sao cho $a + b \cdot (-2)^{2k} < 0$ thì $u_{2k} < 0$, mâu thuẫn với (*). Vậy nên $b = 0$, suy ra $f(x) = x$ với mọi $x \in (0; +\infty)$.	1,0
	Thử lại: Ta thấy $f(x) = x, \forall x \in (0; +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện giả thiết. Kết luận: Có một hàm số thỏa mãn bài toán là $f(x) = x, \forall x \in (0; +\infty)$.	0,5
2 (7,0 điểm)	Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Biết AI cắt BC tại S và cắt (O) tại điểm thứ hai là M. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác BSM, CSM cắt MF, ME tương ứng tại L và K (K, L khác M). a) (4,0 điểm) Chứng minh rằng bốn điểm I, L, S, K cùng nằm trên một đường tròn.	
		

	Ta có: $\widehat{BLM} = \widehat{BSM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BM}$) $\widehat{BSM} = \widehat{SBA} + \widehat{BAS} = \widehat{SBA} + \widehat{MBS} = \widehat{ABM}$, từ đó, $\widehat{BLM} = \widehat{ABM}$ (1).	1,0
	$\widehat{BFM} = 180^\circ - (\widehat{ABM} + \widehat{BMF})$ và $\widehat{MBL} = 180^\circ - (\widehat{BLM} + \widehat{BMF})$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BFM} = \widehat{MBL}$ nên MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFL.	1,0
	Do đó $MB^2 = ML.MF$ (3). Mặt khác tam giác MBI cân tại M do $\widehat{MBI} = \widehat{MIB} \left(= \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2} \right)$ nên $MB = MI$ (4).	0,5
	Từ (3) và (4) suy ra $MI^2 = ML.MF$ từ đó ta thu được MI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ILF.	0,5
	Khi đó, $\widehat{ILF} = \widehat{AIF} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$, mặt khác $\widehat{MLS} = \widehat{MBS} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ nên ta có $\widehat{ILS} = 90^\circ$.	0,5
	Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{IKS} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{ILS} + \widehat{IKS} = 180^\circ$, suy ra tứ giác $ILSK$ nội tiếp đường tròn đường kính IS hay bốn điểm I, L, S, K cùng thuộc đường tròn đường kính IS.	0,5
	<i>b) (3,0 điểm) Gọi T là giao điểm thứ hai của MD với (O). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL tiếp xúc với (O).</i>	
	Từ $\widehat{BTM} = \widehat{MBC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$, suy ra MB là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp tam giác TBD.	0,5
	Khi đó, MB là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp tam giác TBD và tam giác BFL; MI là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp tam giác ILF và tam giác IKE nên ta có:	0,5
	$MB^2 = MI^2 = MC^2 = MD.MT = MF.ML = ME.MK$.	0,5
	Xét phép nghịch đảo tâm M, phương tích $k = MI^2 = MB^2 = MC^2$ ta có $I_M^k : B \mapsto B; C \mapsto C; D \mapsto T; E \mapsto K; F \mapsto L$.	0,5
	Vậy qua phép nghịch đảo I_M^k đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF biến thành đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL, đường thẳng BC biến thành đường tròn (O).	0,5
	Vì đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF tiếp xúc với BC tại D, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL tiếp xúc với đường tròn (O) tại T.	0,5
3 (7,0 điểm)	Cô giáo có tất cả 2278 viên kẹo thuộc về k loại kẹo khác nhau. Cô chia cho các học sinh của mình mỗi người một số viên kẹo và không có học sinh nào nhận nhiều hơn một viên kẹo ở cùng một loại kẹo. Cô yêu cầu hai học sinh khác nhau bất kỳ so sánh các viên kẹo mình nhận được và viết số loại kẹo mà cả hai cùng có lên bảng. Biết rằng mỗi cặp học sinh bất kỳ đều được lên bảng đúng một lần. Gọi tổng các số được viết lên bảng là M. Xác định giá trị nhỏ nhất của M trong mỗi trường hợp sau: a) (4,0 điểm) $k = 67$.	

Phân tích: Hai viên kẹo cùng loại sẽ thuộc về hai học sinh khác nhau, mà hai học sinh đó chắc chắn sẽ lên bảng và viết số kẹo giống nhau mà họ có. Từ đây ta nhận thấy yếu tố học sinh không quan trọng mà chủ yếu là số cặp kẹo giống nhau. Với mỗi $i \in \{1; 2; \dots; k\}$, gọi a_i là số viên kẹo của loại kẹo thứ i thì ta thấy rằng: $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2278$. Ngoài ra	1,0
$M = C_{a_1}^2 + C_{a_2}^2 + \dots + C_{a_k}^2 = \frac{a_1 \cdot (a_1 - 1)}{2} + \frac{a_2 \cdot (a_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{a_k \cdot (a_k - 1)}{2}$ $= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2}{2} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2}{2} - 1139.$ $\Rightarrow M = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2}{2} - 1139.$	1,0
Bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $P = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2$. - Với $k = 67$ ta nhận thấy $2278 = 34 \cdot 67$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:	1,0
$P = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2}{k} = \frac{2278^2}{67} = 34^2 \cdot 67$ $\Rightarrow M_{\min} = \frac{34^2 \cdot 67}{2} - 1139 = 37587, \text{ đạt được khi } a_1 = a_2 = \dots = a_{67} = 34.$	1,0
b) (3,0 điểm) $k = 68$.	
Với $k = 68$, ta nhận thấy $2278 = 33 \cdot 68 + 34$ nên ta không thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz để tìm GTNN của P. Trước hết, ta chứng minh nhận xét sau: “Nếu P đạt giá trị nhỏ nhất với bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ thì trong bộ này không có hai số nào hơn kém nhau 2 đơn vị trở lên”.	0,5
Thật vậy, nếu tồn tại i, j phân biệt thuộc tập $\{1; 2; \dots; k\}$ sao cho $a_i - a_j \geq 2$ thì ta đặt $b_i = a_i - 1$ và $b_j = a_j + 1$ để có $a_i + a_j = b_i + b_j$	0,5
Khi đó, $b_i^2 + b_j^2 = (a_i - 1)^2 + (a_j + 1)^2 = a_i^2 + a_j^2 - 2(a_i - a_j) + 2 < a_i^2 + a_j^2$ từ đó P không đạt giá trị nhỏ nhất tại $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, mâu thuẫn. Do đó, ta có $a_i - a_j \leq 1$ với mọi $i, j = \overline{1, k}$ và nhận xét được chứng minh.	0,5
Theo nhận xét trên, tồn tại t nguyên không âm sao cho $a_i \in \{t; t+1\}$ với mọi $i = \overline{1, k}$.	0,5
Từ đây, dễ dàng tìm được $t = \left\lfloor \frac{2278}{68} \right\rfloor = 33$ và giá trị của P khi ấy là $34 \cdot 33^2 + 34 \cdot 34^2$, đạt được khi các số $a_1, a_2, \dots, a_k$ có 34 số bằng 33 và 34 số còn lại bằng 34.	0,5
Như vậy ta có giá trị nhỏ nhất của M cần tìm là: $M_{\min} = \frac{34 \cdot 33^2 + 34 \cdot 34^2}{2} - 1139 = 17(33^2 + 34^2) - 1139 = 37026$	0,5