



ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§BÀI 1.

TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa:

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng. Hàm số f xác định trên K được gọi là :

➤ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **đồng biến (tăng)** trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

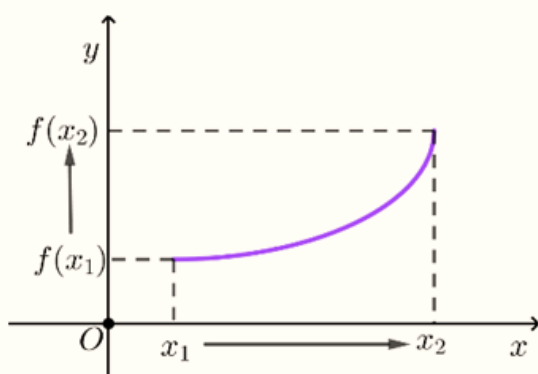
Khi đó, đồ thị của hàm số **đi lên** từ trái sang phải.

➤ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nghịch biến (giảm)** trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Khi đó, đồ thị của hàm số **đi xuống** từ trái sang phải.

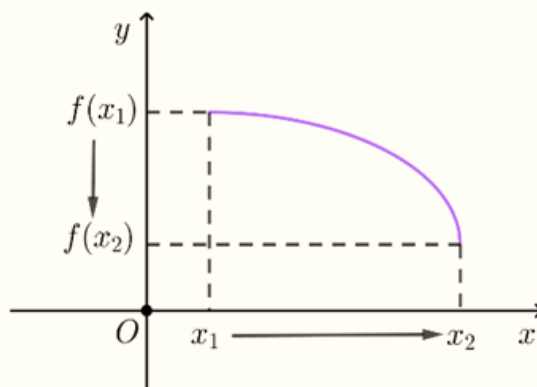
Hình ảnh minh họa sự đồng biến và nghịch biến của hàm số



Hàm số đồng biến

➤ Đồng biến (tăng) trên K nếu với mọi

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$



Hàm số nghịch biến

➤ Nghịch biến (giảm) trên K nếu với

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu :

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I

➤ Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$

➤ Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu :

3.1. Định lý :

Giả sử I là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn, f là hàm số liên tục trên I và có đạo hàm tại mọi điểm trong của I (tức là điểm thuộc I nhưng không phải đầu mút của I). Khi đó

➤ Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I

➤ Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I

➤ Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I

|| Chú ý :

- Nếu hàm số f liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số f đồng biến trên $[a;b]$
- Nếu hàm số f liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số f nghịch biến trên $[a;b]$.

3.2. Hệ quả. ta có thể mở rộng định lí trên như sau

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I .

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với $\forall x \in I$ (hoặc $f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in I$) và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I .
- Vận dụng định lí trên vào các hàm số thường gặp trong chương trình.
 - ✧ Nếu hàm số f là hàm đa thức (không kể hàm số hằng) hoặc $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x)$ là đa thức bậc hai, $Q(x)$ là đa thức bậc nhất và $P(x)$ không chia hết cho $Q(x)$) thì hàm số f đồng biến (nghịch biến) trên $K \Leftrightarrow \forall x \in K, f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).
 - ✧ Nếu hàm số f là hàm nhất biến $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực và $ad - bc \neq 0$ thì hàm số f đồng biến (nghịch biến) trên $K \Leftrightarrow \forall x \in K, f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Phương pháp .

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số f .

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm x_0 sao cho $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng xét dấu $f'(x)$, dựa vào định lí 1, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

2. Bài tập minh họa .

Bài tập 1. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

1). $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 3$

2). $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

1). $y = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1.$

2). $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 1$

[illegible]
$$1). \quad y = \frac{x-2}{x-1}$$

2). $y = \frac{2x-1}{x-1}$

[illegible]
$$1). y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$$

2). $y = \frac{4x^2 + 5x + 5}{x+1}$

.....	
.....	
.....	

Bài tập 5. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

1). $y = |x^2 - 2x - 3|$

2). $y = |x^2 - 4x + 3| + 2x + 3$

Lời giải.

Nhận xét:

- ✦ Bài toán xét tính đơn điệu của hàm số được chuyển về bài toán xét dấu của một biểu thức (y').
- ✦ Khi tính đạo hàm của hàm số có dạng $y = |f(x)|$ ta chuyển trị tuyệt đối vào trong căn thức $y = \sqrt{f^2(x)}$, khi đó tại những điểm mà $f(x) = 0$ thì hàm số không có đạo hàm.

Bài tập 6. Tìm các khoảng đồng biến , nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

1). $y = \frac{4x+5}{4x^2-4}$

2). $y = \frac{12x+1}{12x^2+2}$

3). $y = \frac{3x^2-x+1}{x^2-x+1}$

Lời giải.

Bài tập 7. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

1). $y = x + \sqrt{2x-x^2}$

2). $y = (2x+1)\sqrt{9-x^2}$

3). $y = \sqrt{x^2-x-20}$.

[illegible]

1). $y = 2 \sin x + \cos 2x$ vóri $x \in [0; \pi]$ 2). $y = \sin 2x - 2 \cos x - 2x$ vóri $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

[illegible]

[illegible]

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Câu 2. Các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^3 + 3x$ là

- A.** $(0; +\infty)$. **B.** $(0; 2)$.
C. $\mathbb{R}$. **D.** $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$

Lời giải

.....

.....

Câu 3. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

- A.** $(1;3)$. **B.** $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

.....

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

Lời giải

Câu 6. Hàm số $y = x^4 - 2$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; \frac{1}{2})$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(\frac{1}{2}; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Câu 7. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 5$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
B. Hàm số nghịch biến với mọi x .
C. Hàm số đồng biến với mọi x .
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải

Câu 8. Hàm số $y = \frac{x^4}{4} + 2x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(-1; +\infty)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Câu 9. Hàm số $y = x^2 - 4x + 4$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-\infty; 2)$.

B. $(-\infty; +\infty)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Câu 10. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$.

A. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải

Câu 12. Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Lời giải

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; -\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; -\infty)$.

Lời giải

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên tập $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $y = x^4 + x^2 + 1$.
- B. $y = x^3 + 1$.
- C. $y = \frac{4x+1}{x+2}$.
- D. $y = \tan x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^2 + x$.
- B. $y = x^4 + x^2$.
- C. $y = x^3 + x$.
- D. $y = \frac{x+1}{x+3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào không đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \sin x - 3x$.
- B. $y = \cos x + 2x$.
- C. $y = x^3 - x^2 + 5x - 1$.
- D. $y = x^5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \sin x - x$. B. $y = -x^3 + 3x^2$. C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$. D. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

Lời giải

Câu 20. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \tan x$. B. $y = x^4 + x^2 + 1$. C. $y = x^3 + 1$. D. $y = \frac{4x+1}{x+2}$.

Lời giải

Câu 21. Hàm số nào sau đây không đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = x^3 + 1$. B. $y = x + 1$. C. $y = \frac{x-2}{x-1}$. D. $y = x^5 + x^3 - 10$

Lời giải

Câu 22. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định?

- A. $y = x^4 - x^2$. B. $y = -x^3 + 3x^2$. C. $y = 2x - \sin x$. D. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

Lời giải

Mức độ 2. Thông hiểu

Câu 22. Trong các hàm sau đây, hàm số nào không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $y = -x^3 + 2x^2 - 7x$. B. $y = -4x + \cos x$. C. $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$. D. $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right)^x$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 24. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 1)$.
- B. $(1; 2)$.
- C. $(1; +\infty)$.
- D. $(0; 1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 26. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

- A. $y = -x^3 - 3x$.
- B. $y = \frac{x-1}{x-2}$.
- C. $y = \frac{x+1}{x+3}$.
- D. $y = x^3 + 3x$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 27. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. Hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$.

B. Hàm số $y = x^3 + 3x + 5$.

C. Hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 3$.

D. Hàm số $y = \tan x$.

Lời giải

Câu 28. Trong các hàm số sau, hàm số nào không đồng biến trên tập số thực?

A. $y = 4x - 3\sin x + \cos x$.

B. $y = 3x^3 - x^2 + 2x - 7$.

C. $y = 4x - \frac{3}{x}$.

D. $y = x^3 + x$.

Lời giải

Câu 30. Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \tan x$.

B. $y = \frac{x}{x+1}$.

C. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

D. $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Lời giải

Câu 31. Biết rằng các số thực a, b thay đổi sao cho hàm số luôn $f(x) = -x^3 + (x+a)^3 + (x+b)^3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 - 4a - 4b + 2$.

A. -4.

B. -2.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 32. Hàm số $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(1; 4)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(-2; 1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 33. Cho các hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$; $y = x^4 + 2x^2 + 2$; $y = -x^3 + x^2 - 3x + 1$. Trong các hàm số trên, có bao nhiêu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 34. Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

A. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

D. $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

Câu 35. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng

A. $(0;1)$.

B. $(-\infty;1)$.

C. $(1;+\infty)$.

D. $(1;2)$.

Lời giải

Câu 36. Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên tập xác định của chúng trong các hàm số sau:

(1): $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4$; (2): $y = \frac{2x-1}{2x+1}$; (3): $y = \sqrt{x^2 + 4}$

(4): $y = x^3 + x - \sin x$; (5): $y = x^4 + x^2 + 2$.

A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0;+\infty)$. Biết $f(1) = 2$. Khẳng định nào dưới đây có thể xảy ra?

A. $f(2) = 1$.

B. $f(2017) > f(2018)$.

C. $f(-1) = 2$.

D. $f(2) + f(3) = 4$.

Lời giải

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(0; 2)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

Lời giải

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(2-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Lời giải

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x+1)(5-x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(1) < f(4) < f(2)$.

B. $f(1) < f(2) < f(4)$.

C. $f(2) < f(1) < f(4)$.

D. $f(4) < f(2) < f(1)$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$.

Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(-1; 1)$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

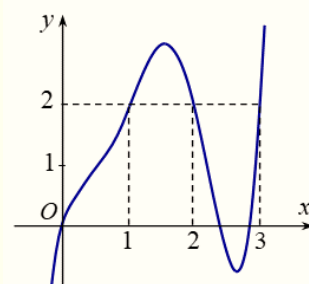
Đặt $h(x) = 3x - f(x)$. Hãy so sánh $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$?

A. $h(1) < h(2) < h(3)$.

B. $h(2) < h(1) < h(3)$.

C. $h(3) < h(2) < h(1)$.

D. $h(3) = h(2) < h(1)$.



Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

D. $(-2; 0)$.

D. $y = \sqrt[3]{-2x+5}$.

[illegible]

D. $(0;1)$.

[illegible]

DẠNG 2. Xác định tham số m để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên một khoảng.

Loại 1. Xác định tham số để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

1. Phương pháp.

① **Bước 1.** Xác định tham số để hàm số f xác định trên khoảng đã cho.

② **Bước 2.** Tính $f'(x)$, vận dụng định lí 1 vào các hàm số thường gặp trong chương trình (xem phần tóm tắt giáo khoa).

③ **Bước 3.** Để giải bài toán dạng này, ta thường sử dụng các tính chất sau.

☞ Nếu $f'(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) thì

✎ Hàm số đồng biến trên $\forall x \in \mathbb{R}$ (hay $\mathbb{R}$ bớt đi một số hữu hạn điểm) khi và chỉ khi

$$f'(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}.$$

✎ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) (hay $\mathbb{R}$ bớt đi một số hữu hạn điểm) khi và chỉ khi

$$f'(x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}.$$

☞ Nếu $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - bc \neq 0$) thì

✎ Hàm số đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ khi $ad - bc > 0$.

✎ Hàm số nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ khi $ad - bc < 0$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Bài tập 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số:

1). $y = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 - (3m-1)x + m^2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2). $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và m thuộc $[-2020; 2020]$.

3). $y = \frac{1}{3}(m^2-1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Bài tập 11. Tìm m để các hàm số sau luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

1). $y = \frac{mx + 3 - 2m}{x + m}$

2). $y = \frac{-2x^2 + (m + 2)x - 3m + 1}{x - 1}$.

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 47.(Sở GD&ĐT Bình Phước 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

A. $\begin{cases} a = b; c > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = 0; c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

Lời giải

Câu 48.(THPT Xuân Hòa 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Lời giải

Câu 49.(Chuyên Bắc Ninh 2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + 3x + 2$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

A. 2

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Câu 50.(Trần Kỳ Phong Quảng Nam-2018) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - mx + 1$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 3. B. Vô số. C. 0. D. 1.

Lời giải

Câu 51.(THPT Nguyễn Khuyến 2018) Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + 3x + 1$, với m là tham số.

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 7. B. 6. C. Vô số. D. 5

Lời giải

Câu 52.(THPT Thạch Thành-Thanh Hóa 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên tham số m , hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3

Lời giải

Câu 53.(THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa 2018) Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực

m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + (2m+3)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. B. $[-1; 3]$. C. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. D. $(-1; 3)$.

Lời giải

Câu 54.(THPT Cổ Loa-Hà Nội 2018)

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Câu 55.

(THPT Lê Quý Đôn 2020) Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Không có giá trị m thỏa mãn.

B. $m \neq 1$.

C. $m = 1$.

D. Luôn thỏa mãn với mọi m .

Lời giải

Câu 56.(SGD Ninh Bình năm 2017-2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x + 2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Câu 57.(THPT Chuyên Quốc Học-Huế 2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 6.

B. 2.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Câu 58.(THPT Sơn Tây-Hà Nội-2018)

Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 2$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

A. $m \leq 0$.

B. $m > -1$.

C. $m \leq 2$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 59.(THPT Lương Văn Chánh 2018) Cho hàm số: $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - 2x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 5.

B. 6.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 60.(THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-2018) Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100; 100]$ để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m+1)x - 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. 200.

B. 99.

C. 100.

D. 201.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 61.(THPT Hoàng Hoa Thám-2018)

Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = (4 - m^2)x^3 + (m - 2)x^2 + x + m - 1$ (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng.

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 62.(THPT Chuyên Hùng Vương 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $[-2019; 2019]$ để hàm số $f(x) = (m^2 - 4)x^3 + 3(m - 2)x^2 + 3x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 2016.

B. 2017.

C. 2019.

D. 2018

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 63.(THPT Chuyên Lương Văn Tụy 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = (m - 1)x^3 - 3(m - 1)x^2 + 3(2m - 5)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 2019.

B. 2020.

C. 2022.

D. 2021.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 64.(THPT Chuyên Hùng Vương 2018)

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Câu 65.(THPT Lục Ngạn 2018) Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Câu 66.(Lương Văn Chánh Phú yên-2018) Cho hàm số: $y = (m - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - 2x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 5.

B. 6.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Câu 67.(Chuyên Quốc Học Huế 2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 3x + \frac{m^2 + 3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Câu 68.(Sở GD&ĐT Bắc Giang 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. 5 B. 3 C. 1 D. 2

Lời giải

Câu 69.(Chuyên Thái Bình-2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm $y = \frac{x+m}{mx+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải

Câu 70.(SGD Bắc Giang-2018)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Câu 71.(THPT Chuyên Thái Bình 2018) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+m}{mx+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Câu 72.(THPT Kinh Môn 2018) Kết quả của m để hàm số sau $y = \frac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là

A. $m \leq 2$.

B. $m > 2$.

C. $m < 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải

Câu 73.(THPT Việt Trì-Phú Thọ-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của chúng.

A. 2017.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2018.

Lời giải

Câu 74.(THPT Kiến An-Hải Phòng 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

$y = \frac{2x-m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng xác định của nó.

A. $m \in (1; 2)$.

B. $m \in [2; +\infty)$.

C. $m \in (2; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 2)$

Lời giải

Câu 75.(THPT Đồng Đậu-Vĩnh Phúc 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm

số $y = \frac{m^2x-4}{x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Câu 76.(THPT Kinh Môn 2 -2018) Kết quả của m để hàm số sau $y = \frac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là

A. $m \leq 2$.

B. $m > 2$.

C. $m < 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải

Câu 77.(THPT Chuyên Thái Bình 2018)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m > 1$.

B. $m \leq -1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

Loại 2. Xác định tham số để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a; b)$, nửa khoảng $(a; +\infty)$

...

1. Phương pháp.

* **Cách 1. Biện luận** (đối với cách này phương trình $y' = 0$ có $\Delta = (cx + d)^2$)

Bước 1. Tập xác định và tính đạo hàm y' .

Bước 2. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \text{theo m} \\ x_2 = \text{theo m} \end{cases}$. (công thức $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$)

Bước 3. Lập bảng biến thiên biện luận.

* **Cách 2. Áp dụng công thức dấu của tam thức bậc hai.**

Bước 1. Tập xác định và tính đạo hàm y' .

Bước 2. Nếu y' là một tam thức bậc hai có dạng $y' = Ax^2 + BX + C$, $A \neq 0$. Khi đó,

① Nếu $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$, $(a; +\infty)$...

② Nếu $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$, $(a; +\infty)$...

③ $\Delta \geq 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , khi đó $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ A.y'(\alpha) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \geq \alpha \end{cases}$.

④ $\Delta \geq 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , khi đó $\alpha \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ A.y'(\alpha) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \leq \alpha \end{cases}$.

⑤ $\Delta \geq 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , khi đó $x_1 \leq \alpha < \beta \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A.y'(\alpha) \leq 0 \\ A.y'(\beta) \leq 0 \end{cases}$.

* **Cách 3.**

Cô lập tham số m , tức là biến đổi $f'(x, m) \geq 0$ (≤ 0) $\Leftrightarrow g(x) \geq m$ ($\leq m$).

Bước 1. Xác định tham số để hàm số f xác định trên khoảng đã cho.

Bước 2. Tính $f'(x, m)$, vận dụng định lí 1 vào các hàm số thường gặp trong chương trình.

Bước 3. Để giải bài toán dạng này, ta thường sử dụng các tính chất sau.

✎ Nếu hàm số đồng biến trên $(a; b)$ thì

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in [a; b] \xrightarrow{\text{Cô lập tham số } m} g(x) \geq h(m), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow \min_{[a; b]} g(x) \geq h(m).$$

✎ Nếu hàm số nghịch biến trên $(a; b)$ thì

$$f'(x) \leq 0, \forall x \in [a; b] \xrightarrow{\text{Cô lập tham số } m} g(x) \leq h(m), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow \max_{[a; b]} g(x) \leq h(m).$$

✎ Nếu $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - cb \neq 0$) có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ thì

☞ Hàm số đồng biến trên $(L; +\infty)$ khi $\frac{ac - bd}{(cx + d)^2} > 0, \forall x \in (L; +\infty)$

Bài tập 13. Tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ là ?

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 14. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 15. Hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

- 1). Đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó;
- 2). Đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

♦ **Bài toán:** Cho hàm số $y = f(u(x))$ xác định và có đạo hàm trên $(a;b)...$

Xác định tham số m để hàm số f đồng biến (nghịch biến) trên $(a;b)...$

♦ **Nhận xét:** đối với các bài toán đặc ẩn phụ ta sử dụng tính chất sau:

* **Tính chất:** đặt $t = u(x), \forall x \in (a;b) \Rightarrow \min_{(a;b)} t < t < \max_{(a;b)} t$ khi đó $y = f(u(x)) = f(t)$

- ① Nếu $y = f(u(x))$ đồng biến trên $(a;b)...$ và $t = u(x)$ đồng biến trên $(a;b)...$ thì $y = f(t)$ cũng đồng biến trên $\left(\min_{(a;b)} t; \max_{(a;b)} t\right)$.
- ② Nếu $y = f(u(x))$ đồng biến trên $(a;b)...$ và $t = u(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì $y = f(t)$ nghịch biến trên $\left(\min_{(a;b)} t; \max_{(a;b)} t\right)$.
- ③ Nếu $y = f(u(x))$ nghịch biến trên $(a;b)...$ và $t = u(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì $y = f(t)$ nghịch biến trên $\left(\min_{(a;b)} t; \max_{(a;b)} t\right)$.
- ④ Nếu $y = f(u(x))$ nghịch biến trên $(a;b)$ và $t = u(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì $y = f(t)$ đồng biến trên $\left(\min_{(a;b)} t; \max_{(a;b)} t\right)$.

3. Bài tập minh họa

Bài tập 16. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{-2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Bài tập 17. Tìm các giá trị m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 78.(THPT Lê Hoàn Thanh Hóa 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x + 1$ đồng biến trên các khoảng thỏa mãn $1 \leq |x| \leq 2$.

A. $\begin{cases} -1 < m < 2 \\ m > 2 \\ m < -3 \end{cases}$

B. $-1 < m < 0$.

C. $\begin{cases} m < -4 \\ m > 2 \end{cases}$

D. $m > 2$.

Lời giải

Câu 79.(Sở GD-ĐT Quảng Nam 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Câu 80.(THPT Trần Phú - Đà Nẵng-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Câu 81.(THPT NEWTON Hà Nội 2018)

Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - (2m+9)x^2 + 2(m^2 + 9m)x + 10$ nghịch biến trên khoảng $(3;6)$?

A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Câu 82.(Chuyên Hùng Vương Phú Thọ) Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $S = [-1;0]$

B. $S = \emptyset$.

C. $S = \{-1\}$.

D. $S = [0;1]$

Lời giải

Câu 83.(THTT Số 3-486-2018)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. $m > \frac{1}{3}$.

B. $m < -1$.

C. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

D. $-1 < m < \frac{1}{3}$.

Lời giải

Câu 84.(THPT Thạch Thành 2018) Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. $S = \emptyset$.

[illegible]

D. 3

[illegible]

D. 9.

[illegible]

Câu 87.(THPT Quảng Xương-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Câu 88.(THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Câu 89.(THPT Chuyên Trần Phú 2018)
 Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để trên $(-1;1)$ hàm số $y = \frac{mx+6}{2x+m+1}$ nghịch biến:

A. $-4 < m < 3$. B. $\begin{cases} -4 \leq m < -3 \\ 1 < m \leq 3 \end{cases}$. C. $1 \leq m < 4$. D. $\begin{cases} -4 < m \leq -3 \\ 1 \leq m < 3 \end{cases}$.

Lời giải

Câu 90.(THPT Mộ Đức-2018)

Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải

Câu 91.(Sở GD-ĐT Gia Lai-2018) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

A. $m \in (1;2)$.

B. $m \in [1;2)$.

C. $m \in [1;2]$.

D. $m \in (1;2]$.

Lời giải

Câu 92.(THPT Lê Quý Đôn 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. $-2 < m \leq -1$.

B. $-2 \leq m \leq -1$.

C. $-2 \leq m \leq 2$.

D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

Câu 93.(THPT Đức Thọ-2018) Cho hàm số $y = \frac{mx + 2015m + 2016}{-x - m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Tính số phần tử của S .

A. 2017. B. 2015. C. 2018. D. 2016.

Lời giải

Câu 94.(THPT Kim Liên-2018) Cho hàm số $y = \frac{mx + 2}{2x + m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S .

A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.

Lời giải

Câu 95.(Đề Chính Thức Bộ giáo Dục 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?

A. 3. B. Vô số. C. 0. D. 6.

Lời giải

Câu 96.(Chuyên Hạ Long 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$$y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m} \text{ đồng biến trên khoảng } \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right).$$

A. $-1 \leq m < 2$.

B. $m < 2$.

C. $m \geq 2$.

D. $\begin{cases} m \leq -1 \\ 0 \leq m < 2 \end{cases}$.

Lời giải

Câu 97.(THPT Kinh Môn năm 2020) Tìm tất cả các số thực của tham số m sao cho hàm số

$$y = \frac{-2 \sin x - 1}{\sin x - m} \text{ đồng biến trên khoảng } \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

A. $-\frac{1}{2} < m < 0$ hoặc $m > 1$.

B. $m > -\frac{1}{2}$.

C. $m \geq -\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$.

Lời giải

Câu 98.(THPT Phan Đình Phùng 2018) Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2 \cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $m > 1$. B. $m > \frac{1}{2}$. C. $m \geq \frac{1}{2}$. D. $m \geq 1$.

Lời giải

Câu 99.(THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu –2018) Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

A. 1. B. 2. C. 4. D. 3

Lời giải

Câu 100.(Chuyên Đại Học Sư phạm-2018)

Giá trị m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m \leq 0$.

B. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$.

C. $1 \leq m < 2$.

D. $m > 2$.

Lời giải

Câu 101.(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin x - 3}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0$ hoặc $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 3$.

B. $m \leq 3$.

C. $m \leq 0$ hoặc $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 3$.

D. $0 \leq m < 3$.

Lời giải

Câu 102.(THPT Nguyễn Đức Thuận 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m - \cos x}{\sin^2 x}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m \leq 0$. B. $m \leq 2$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq \frac{5}{4}$.

Lời giải

Câu 103.(SGD Bắc Giang-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

- A.** 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Câu 104. (THPT Chuyên Hạ Long 2018) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Câu 105.(Chuyên Vĩnh Phúc Lần 4-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Câu 106.(Chuyên KHTN-2018) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:

A. $(-\infty; 6]$.

B. $(-\infty; 3)$.

C. $(-\infty; 3]$.

D. $[3; 6]$.

Lời giải

Câu 107.(THPT Yên Lạc Vĩnh Phúc 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

A. $m \geq -2$.

B. $m \leq -3$.

C. $m \leq -1$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Câu 108.(THPT Hồng Bàng 2018) Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + (m-2)x^2 + (2m+3)x + 1$. Giá trị nguyên lớn nhất của m để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0; 3]$ là

A. 2.

B. -2.

C. -1.

D. 1.

Lời giải

Câu 109.(THPT Chuyên ĐH Vinh 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

A. 2019.

B. 2018.

C. 2020.

D. 2016.

Lời giải.

Câu 110.(THPT Yên Lạc-2018) Cho hàm số: $y = -\frac{x^3}{3} + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$. Tìm a để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 3)$

A. $a \geq \frac{12}{7}$.

B. $a < -3$.

C. $a \leq -3$.

D. $a > \frac{12}{7}$.

Lời giải

Câu 101.(THPT Việt Trì-Phú Thọ 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số

$y = x^3 + 3x^2 - (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đồng biến trên $(0; 2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

[illegible]

Câu 102. (THPT Chuyên ĐH Vinh 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số

$y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 15.

B. 6.

C. 7.

D. 16.

Lời giải

[illegible]

Câu 103. (Chuyên Đại Học Vinh 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số

$y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 15.

B. 6.

C. 7.

D. 16.

Lời giải

.....

Câu 104.(Chuyên Phan Bội Châu-2018)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Câu 105.(THPT Nguyễn Khuyến-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $[-2019; 2019]$ hàm số $y = (m^2 + m + 1)x + (m^2 - m + 1)\sin x$ luôn đồng biến trên $(0; 2\pi)$.

A. 2019.

B. 2018.

C. 2020.

D. 2016.

Lời giải

Câu 106.(THPT Hồng Lĩnh Hà Tĩnh-2018) Cho hàm số $y = (2m - 1)x - (3m + 2)\cos x$.

Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

A. -4.

B. -5.

C. -3.

D. 0.

Lời giải

Câu 107.(THPT Bình Xuyên-2018)

Tìm m để hàm số $y = 3m \sin^3 x - \sin^2 x + \sin x + m - 2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$?

- A. $m \leq -3$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq \frac{1}{3}$. D. $m \geq -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Loại 3. Xác định tham số m để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng L .

1. Phương pháp.

Xét hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Bước 1. Xác định tham số để hàm số f xác định trên khoảng đã cho.

Bước 2. Tính $f'(x, m) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Bước 3. Để giải bài toán dạng này, ta thường sử dụng các tính chất sau.

- ☞ Nếu $b^2 - 3ac \leq 0$ thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên $\mathbb{R}$ nên không thỏa mãn đề bài.
- ☞ Nếu hàm số đồng biến thì

$$\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\Delta_{y'}}}{|3a|} = L \Leftrightarrow b^2 - 3ac = \frac{9a^2 L^2}{4} \\ |x_1 - x_2| = L \end{cases}$$

- ☞ Nếu hàm số nghịch biến thì

$$\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\Delta_{y'}}}{|3a|} = L \Leftrightarrow b^2 - 3ac = \frac{9a^2 L^2}{4} \\ |x_1 - x_2| = L \end{cases}$$

2. Bài tập minh họa.

2). Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m-3$ đồng biến trên một khoảng có độ dài nhỏ hơn 1.

[illegible]

D. 8.

Câu 109.(SGD Bà Rịa Vũng Tàu 2018) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + 4x + 7$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng $2\sqrt{5}$. Tính tổng tất cả phần tử của S .

A. 4. B. 2. C. -1. D. -2.

Lời giải

Câu 110.(THPT Chuyên Hùng Vương 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Câu 111.(THPT Ngô-Quyền Hải Phòng 2020) Biết hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3(m-1)x^2 + 9x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định.

Nếu $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$ thì có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn đề bài?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

DẠNG 3. Xác định tham số m để phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, hệ bất phương trình có nghiệm.
(Cô lập tham số m)

1. Kiến thức bổ trợ:

Để làm dạng toán này ta nắm các kiến thức sau.

☞ **Tính chất 1:** Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng song song với trục $Ox : y = g(m)$.

☞ **Tính chất 2:**

☞ Bất phương trình $f(x) \geq k$ có nghiệm trên D khi và chỉ khi $\max_D f(x) \geq k$
(Nếu tồn tại $\max_D f(x)$).

☞ Bất phương trình $f(x) \leq k$ có nghiệm trên D khi và chỉ khi $\min_D f(x) \leq k$
(Nếu tồn tại $\min_D f(x)$).

☞ Bất phương trình $f(x) \geq k$ nghiệm đúng với mọi x thuộc D khi và chỉ khi $\min_D f(x) \geq k$
(Nếu tồn tại $\min_D f(x)$).

☞ Bất phương trình $f(x) \leq k$ nghiệm đúng với mọi x thuộc D khi và chỉ khi $\max_D f(x) \leq k$
(Nếu tồn tại $\max_D f(x)$).

Loại 1. Tìm m để phương trình $F(x, m) = 0$ có nghiệm trên D .

2. Phương pháp.

① **Bước 1.** Biến đổi phương trình về dạng $f(x) = g(m)$.

② **Bước 2.** Khi đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.

③ **Bước 3.** Đạo hàm $f'(x)$ và tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền D .

Khi đó nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm trên $[a; b]$ khi và chỉ khi: $\min_{[a; b]} f(x) \leq g(m) \leq \max_{[a; b]} f(x)$.

3. Bài tập minh họa.

Bài tập 18. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $2x + 1 = m\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ có nghiệm.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

1). $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} + \sqrt{-2x^2+6x+36} = m$ có nghiệm.

2). $\frac{3x^2-1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + mx$ có nghiệm.

[illegible]
$$\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2} = \sqrt{16-x^4} + m(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4+x^2}) + m$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 112.(THPT Chuyên Vĩnh Phúc-2018)

Phương trình $x^3 + x(x+1) = m(x^2 + 1)^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi

A. $-6 \leq m \leq \frac{3}{4}$.

B. $-1 \leq m \leq \frac{14}{25}$.

C. $m \leq \frac{4}{3}$.

D. $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 113.(THPT Thanh Miện 2018)

Tìm m để bất phương trình $x + 2\sqrt{(2-x)(2x+2)} > m + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2})$ có nghiệm?

A. $m < -8$.

B. $m < -1 - 4\sqrt{3}$.

C. $m < -7$.

D. $-8 < m < -7$.

Lời giải.

.....	
.....	

[illegible]

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} = \frac{m}{2}$ có nghiệm thực.

D. 2

[illegible]

Câu 115.(PTNK-ĐHQG TP HCM 2018)

Tìm m để phương trình $\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} = m$ có nghiệm.

A. $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$.

B. $0 \leq m \leq 1$.

C. $0 \leq m \leq \sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{2} \leq m \leq \sqrt{3}$.

Lời giải

Câu 116.(Sở GD & ĐT Hậu Giang 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt{m+3\cos x}} = \cos x$ có nghiệm thực?

A. 2.

B. 7.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

1. Phương pháp .

Từ bảng biến thiên suy ra số giao điểm.

2). Có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

[illegible]

Bài tập 22. Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m thì phương trình thì phương trình $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Lời giải.

Bài tập 23. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình: $mx^2 + 1 = \cos x$ có đúng một nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải.

Bài tập 24. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình : $x - 3 + |x^2 - 3x| + m = 0$

1). Có đúng 4 nghiệm thực.

2). Có đúng một nghiệm thực dương.

Lời giải.

[illegible]

Bài tập 25. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x + \sqrt{4x^2 - 1} = 2mx + \frac{1}{2} + 3x$ có đúng hai nghiệm

Lời giải.

[illegible]

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 117.(THPT Chuyên Huỳnh Mẫn Đạt) Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Tìm m để phương trình $x^2(x^2 - 2) + 3 = m$ có 2 nghiệm phân biệt ?

A. $\begin{cases} m > 3 \\ m = 2 \end{cases}$.

B. $m < 3$.

C. $\begin{cases} m > 3 \\ m < 2 \end{cases}$.

D. $m < 2$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

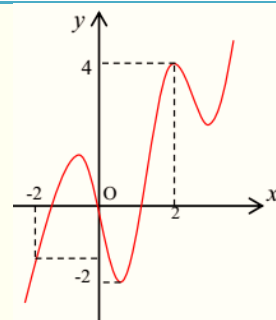
Câu 118.(THPT Số 1 Tư Nghĩa 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1; 3)$

A. $[-1; 1) \cup (2; 4]$.

B. $(1; 2) \cup [4; +\infty)$.

C. $(-\infty; -1] \cup (2; 4)$.

D. $(-1; 1] \cup [2; 4)$.



Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

[illegible]

Bài tập 28. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^3 - 6x^2 + 9x + m^2 + 5m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 1$.

[illegible]

Bài tập 29. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$\sqrt{(1+2x)(3-x)} \geq m + (2x^2 - 5x - 3) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right].$$

[illegible]

Bài tập 30. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq m - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 3$.

Lời giải.

Bài tập 31. Tìm m để bất pt $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2 - x) \leq 0$ có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$.

Lời giải.

Lời giải.

Mức độ 1. Nhân biết

D. $(-1; 2)$.

Lời giải

D. $T = 1$.

Lời giải

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. Each column contains 10 rows of these lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced and extend across the width of each respective column.

1. Phương pháp .

Bước 1. Biến đổi BĐT đã cho về dạng $f(x) > 0$ (hoặc < 0 ,...) với $x \in D$.

Cách 2:

👉 Nếu $a \geq b$ thì chứng minh $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[b; a]$.

Chú ý: Khi chứng minh bất đẳng thức có dạng $f(x) \geq k, \forall x \in [a; b]$

👉 Nếu $k = f(a)$ ta chứng minh hàm f đồng biến trên $(a; b)$

👉 Nếu $k = f(b)$ ta chứng minh hàm f nghịch biến trên $(a; b)$.

2. Bài tập minh họa.

Lời giải.

[illegible]

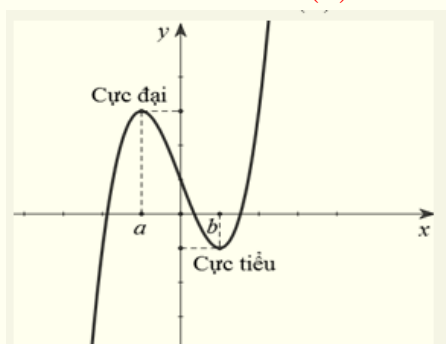
Bài tập 34. Chứng minh rằng : $|3x - x^3| \leq 2, \forall x \in [-2; 2]$.

Lời giải.

DẠNG 5. Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ hoặc bảng biến thiên $f'(x)$, hoặc công thức $f'(x)$ tìm sự đồng biến, nghịch biến của hàm $g(u(x))$.

1. Phương pháp.

XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f'(x)$



- Đồ thị hàm số đang **đi lên (đồng biến)** sau đó **đổi hướng đi xuống (nghịch biến)** tại điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

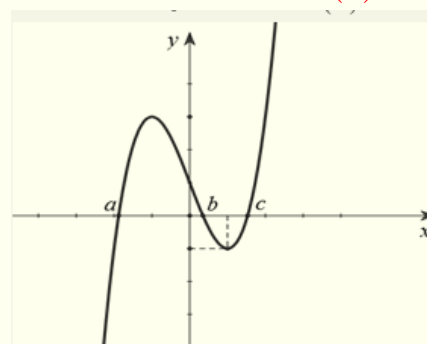
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $f(x)$.

- Đồ thị hàm số đang **đi xuống** sau đó **đổi hướng đi lên** tại điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $f(x)$.

- Hoành độ cực trị $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$

XÁC ĐỊNH CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f'(x)$



- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên D nếu:

① Đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên

Ox nên $f'(x) \geq 0$.

② Đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới

Ox nên $f'(x) < 0$.

- $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \end{cases}$ tức là ba nghiệm a, b, c

là giao của đồ thị với trục Ox

Bài toán: Xác định cực trị của hàm hợp $y = f(u(x))$ dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y = f'(x)$

➤ Tương tự phương pháp xác định tính đơn điệu của hàm hợp $y = f(u(x))$.

➤ Xét hàm số $g(x) = f(u(x))$

➤ **Bước 1:** $g'(x) = [f(u(x))]' = u'(x) \cdot f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'(u(x)) = 0 \end{cases}$

Tìm $x_1; x_2; \dots; x_i$ là nghiệm của $f'(x) = 0$.

➤ **Bước 2:** Giải phương trình $f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = x_1 \\ u(x) = x_2 \\ \dots \end{cases}$

Xét dấu $f'(u(x))$ dựa vào dấu của $f'(x)$ hoặc dựa vào bảng biến thiên dấu $f'(x)$.

Vai trò của $u(x)$ giống như của x vì dấu của $f'(u(x))$ cũng là dấu của $f'(x)$.

➤ **Bước 3:** Lập bảng xét dấu $g'(x)$.

2. Bài tập minh họa.

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 121. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 122. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm

$f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^{2017}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1; 2)$ và $(3; +\infty)$.

B. Hàm số có ba điểm cực trị.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $x = 3$.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 123. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$.
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

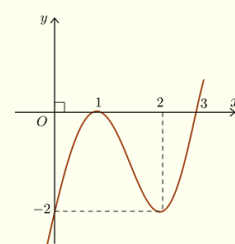
Câu 124. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(3; +\infty)$

D. $(1; 3)$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

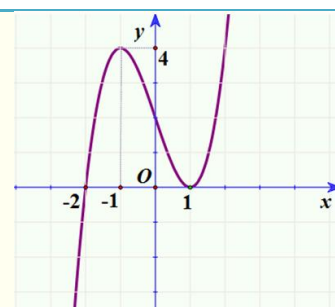
Câu 125. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.

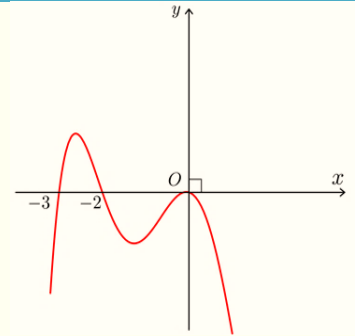
D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$



Lời giải

Câu 126. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

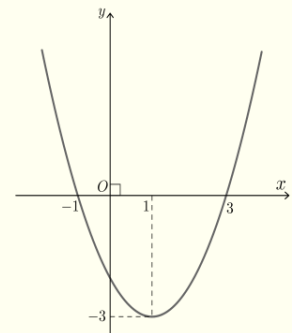
- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.



Lời giải

Câu 127. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

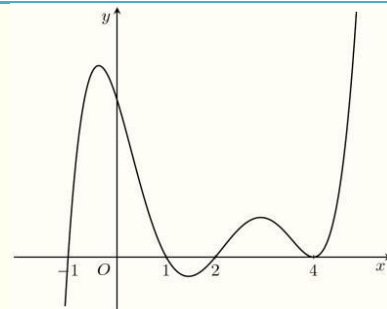
- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.



Lời giải

Câu 128. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(1-4x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;0)$. B. $(-\infty;0)$. C. $(\frac{1}{4};0)$. D. $(-\frac{1}{4};+\infty)$.



Lời giải

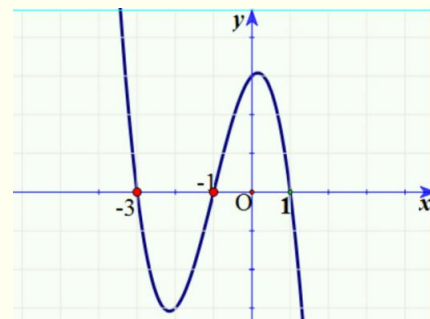
Câu 129. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Xét hàm số $y = g(x) = f(1-x)$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$
 B. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.
 C. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$
 D. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$



Lời giải

Câu 130. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Đặt hàm số $y = g(x) = f(1-x) + 1$. Mệnh đề nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải

Câu 131. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có

bảng biến thiên như sau. Đặt hàm số $y = g(x) = f(2-x) - 2$

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- B. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
- C. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		-1		-2	$+\infty$

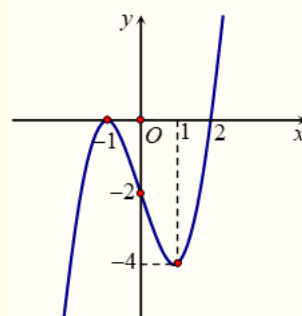
Lời giải

75

- ### Lời giải

Câu 135. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.
- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.



Lời giải

Câu 136. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$.

Khi đó hàm số $y = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 2)$.
- B. $(-\infty; -3)$.
- C. $(-3; 0)$.
- D. $(3; +\infty)$.

[illegible]

-
- This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. The left column contains ten rows of lines, and the right column also contains ten rows of lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

- 78

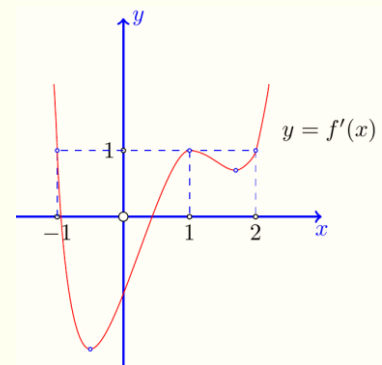
Câu 139. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Đặt $y = g(x) = f(x) - x$.

Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.



Lời giải

[illegible][illegible]

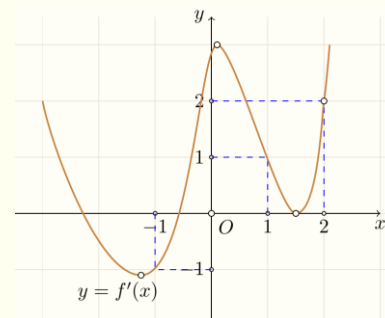
Câu 142. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Đặt $y = g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Khẳng định nào sau đây về hàm số

$y = g(x)$ là sai?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.



Lời giải

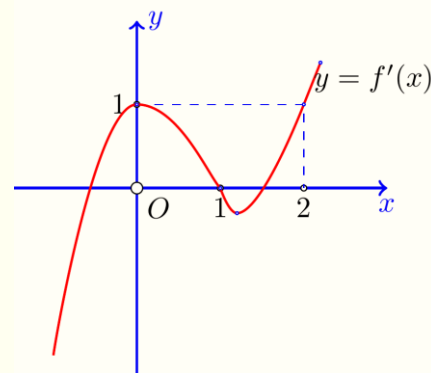
Câu 143. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Đặt $y = g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$.

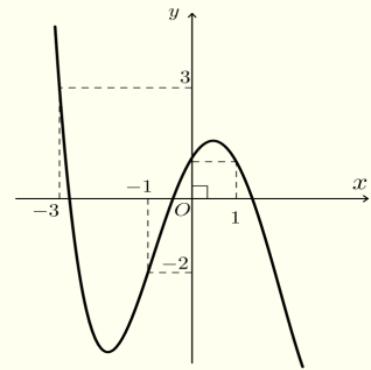
Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = g(x)$ là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.



[illegible]

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; -1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

[illegible]

A graph of the derivative function $f'(x)$ on the interval $[-1, 3]$. The x-axis is labeled with x and has tick marks at $-1, 1, 2, 3$. The y-axis is labeled $f'(x)$ and has tick marks at 2 and -1 . The function $f'(x)$ is represented by a blue line segment starting at $(-1, 2)$, decreasing linearly to $(1, -1)$, increasing linearly to $(2, 2)$, and finally increasing linearly to $(3, 4)$.

- ## Lời giải

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. Each column contains 10 rows of lines. The entire page is white, and the lines are black and evenly spaced. There are no margins or additional markings on the paper.

Lời giải

[illegible]

A. $(1; +\infty)$.

B. $(0; 3)$.

C. $(-\infty; 3)$.

D. $(3; +\infty)$

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. Each column contains ten rows of these lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced and extend across the width of their respective columns.

A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. (1; 2).

[illegible]