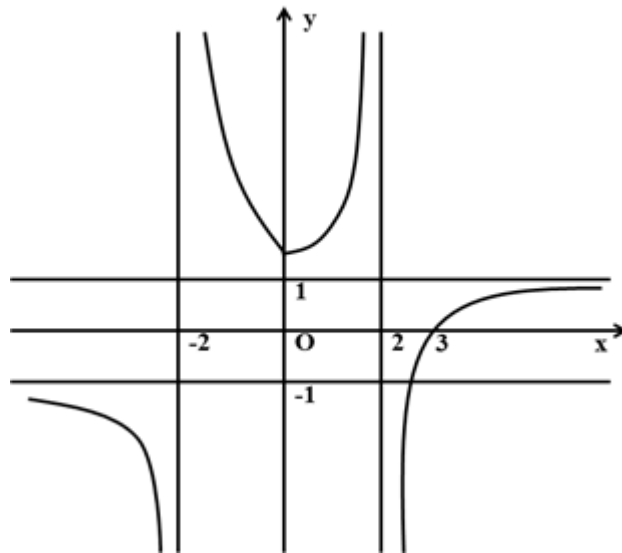


Phần 1: Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$

Dạng 1: Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên đường thẳng $y = -1$ là một đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \pm 1$.

Tương tự

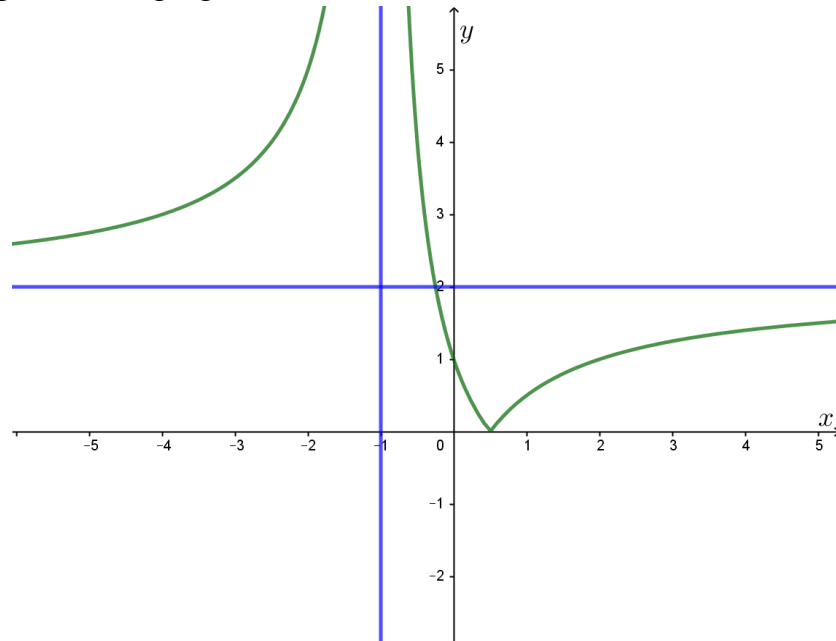
$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = \pm 2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



A. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

B. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

C. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

D. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

Lời giải

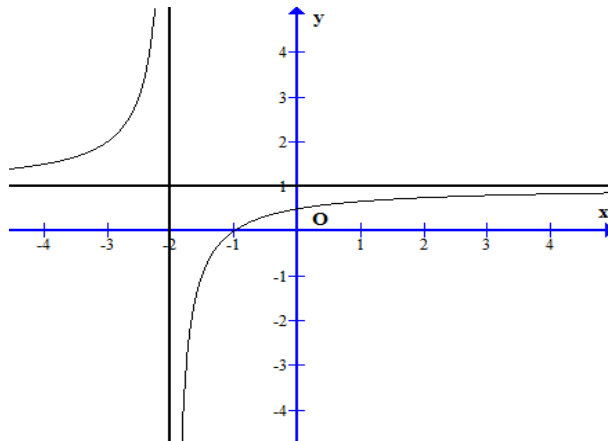
Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



A. Tiệm cận đứng $x = -2$, tiệm cận ngang $y = 1$.

B. Tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = -1$.

C. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

D. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

Lời giải

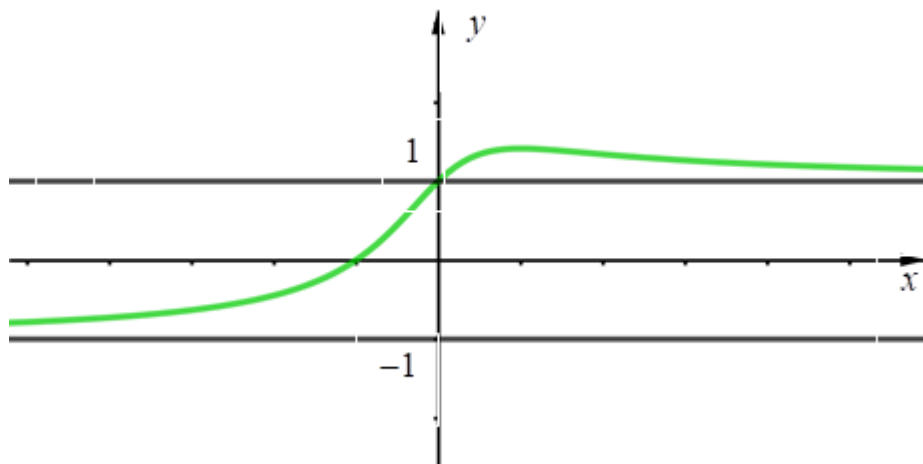
Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

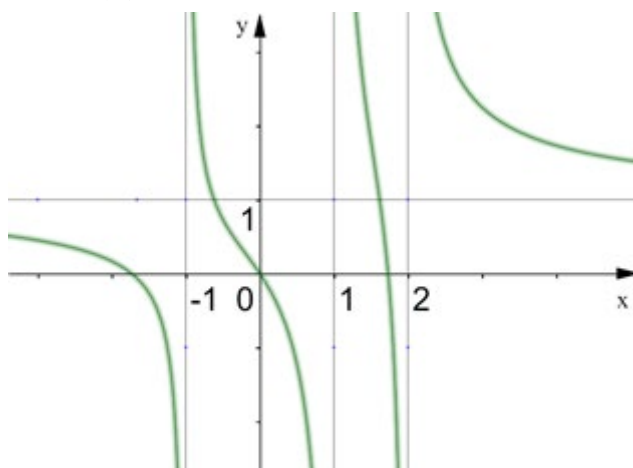
Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Tương tự $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị của hàm số ta có

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng.

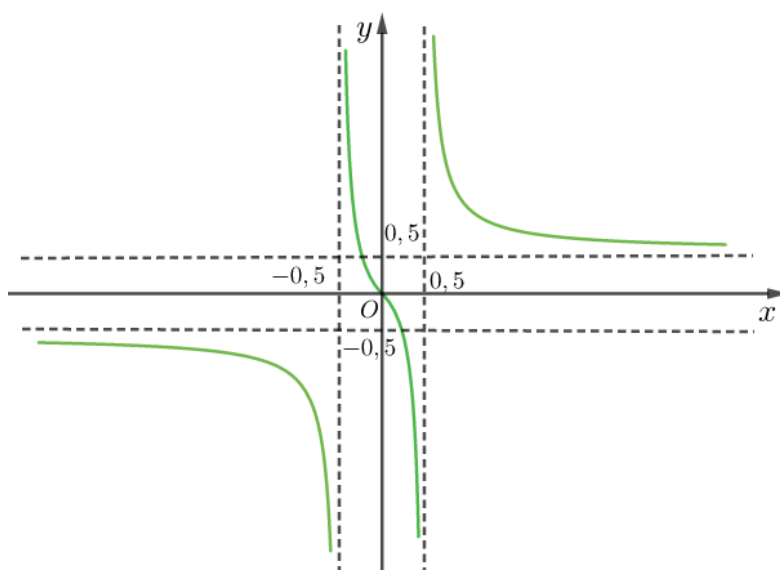
Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận đứng là $x = \pm 1$ và $x = 2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{1}{2}$.

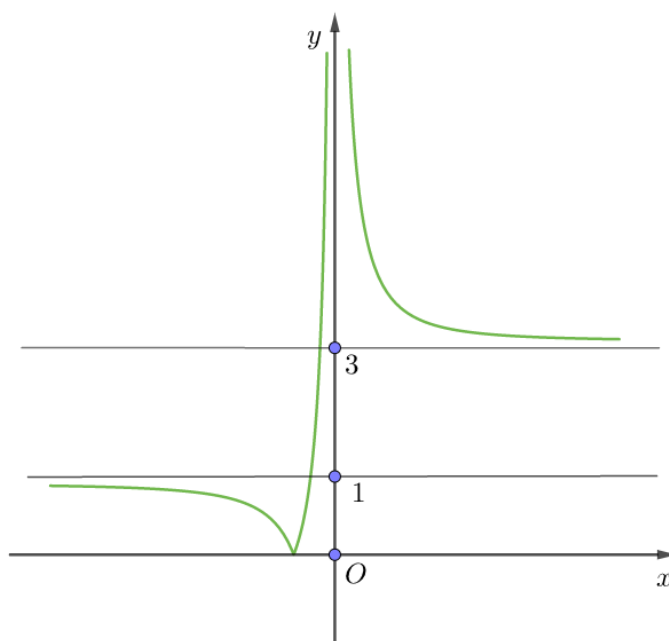
$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng là $x = \pm \frac{1}{2}$

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả 4 đường tiệm cận.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

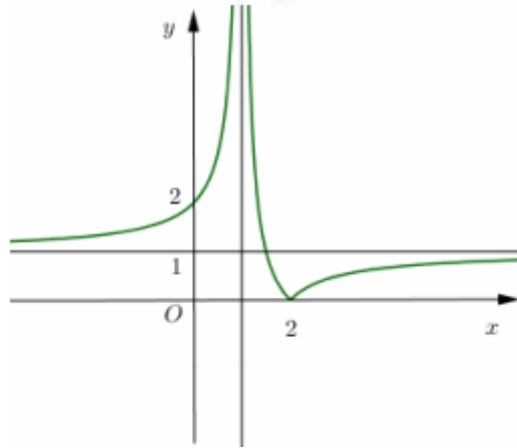
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ nên đường thẳng $y = 3$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Tổng số tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

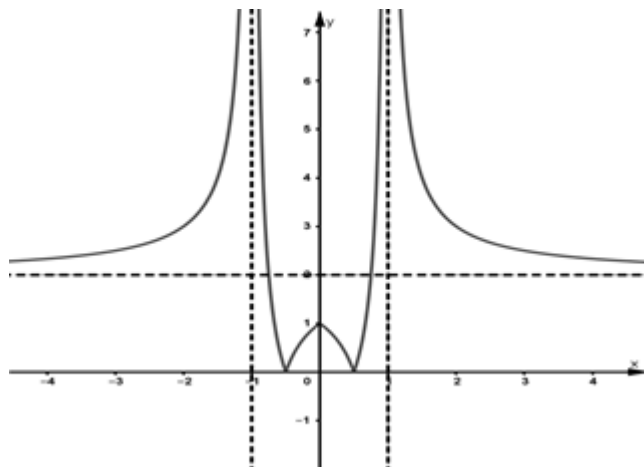
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = 1$. Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 8. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hình vẽ dưới đây.



Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

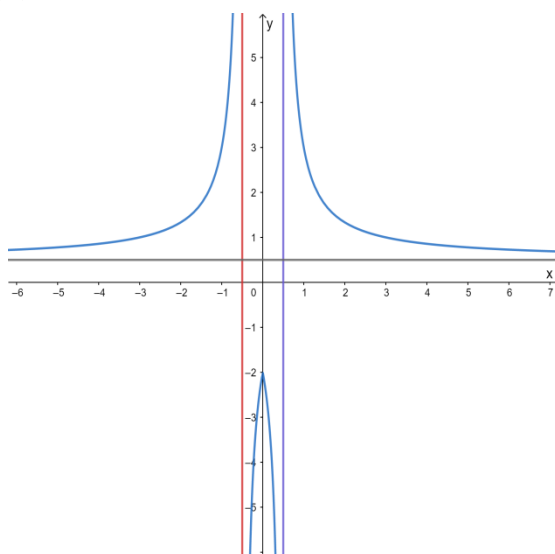
Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 2$

Lại thấy: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $x = -1; x = 1$

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi a là số đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Giá trị của biểu thức $a^2 + a$ bằng

A. 6.

B. 12.

C. 20.

D. 30.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{2}$

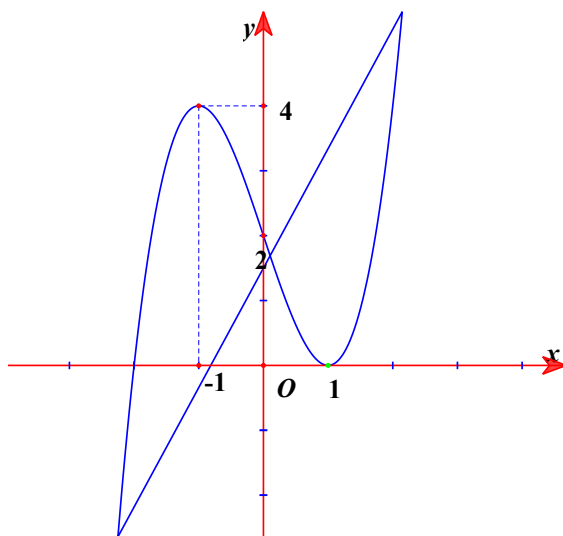
$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là

$$x = -\frac{1}{2}$$

Đồ thị hàm số có 3 tiệm cận $\Rightarrow a = 3$.

Vậy $a^2 + a = 12$

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

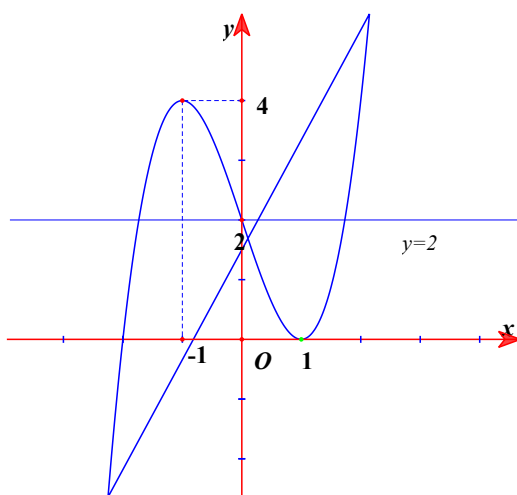
D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta xét mẫu số: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:



+) Phương trình (1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép)

$$\Rightarrow f(x) = (x-a)(x-1)^2.$$

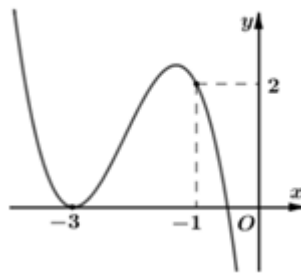
+) Phương trình (2) có nghiệm $x_3 = b \in (a; -1)$, $x_4 = 0$ và $x_5 = c > 1$

$$\Rightarrow f(x) - 2 = (x-b)x(x-c).$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } g(x) &= \frac{(x-1)(x^2-1)}{f(x)[f(x)-2]} \\ &= \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-a)(x-1)^2 \cdot (x-b)x(x-c)} = \frac{x+1}{(x-a)(x-b)x(x-c)}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đồ thị hàm $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2.

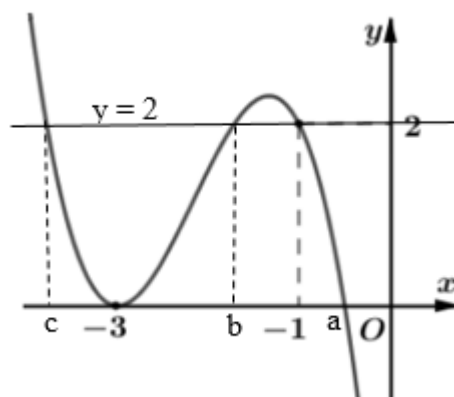
B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C



Ta thấy phương trình bậc ba $f(x=2)$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1 = c < -3$, $x_2 = b$ với $-3 < b < -1$ và $x_3 = -1$.

Và phương trình bậc ba $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = -3$ và nghiệm đơn $x = a$ với $-1 < a < 0$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+3)^2(x-a) = 0 \text{ và } f(x) = 2 \Leftrightarrow -(x-c)(x-b)(x+1) = 0.$$

$$\text{Ta có: } y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]}.$$

$$\text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x} \cdot f(x) \cdot [f(x) - 2]} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+1)\sqrt{x(x+1)}}{-x(x+3)(x-a) \cdot [f(x) - 2]} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} y = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x \cdot f(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} y = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x \cdot f(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x \cdot f(x)(x-c)(x-b)} = 0.$$

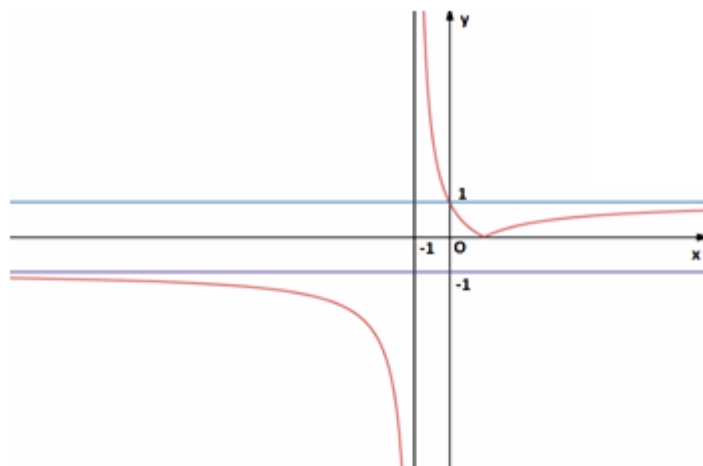
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y \text{ không tồn tại.}$$

$$\text{Vậy đồ thị hàm số } y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} \text{ có 4 đường tiệm cận đứng là } x = 0;$$

$$x = -3; x = c; x = b.$$

Dạng 2: Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x - m)$ có tiệm cận đứng là trục Oy ?



A. 0.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

Tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (m; 0)$ thì:

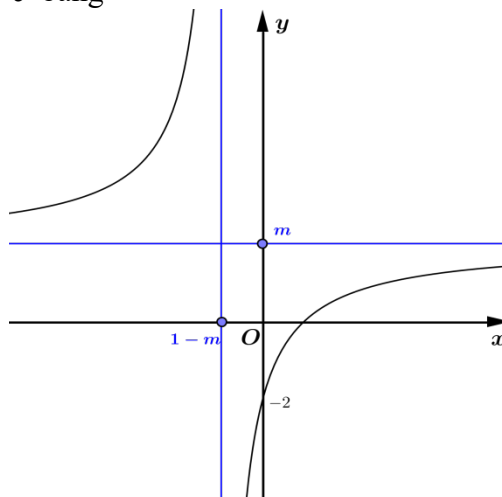
Đồ thị hàm số $y = f(x)$ biến thành đồ thị hàm số $y = f(x - m)$.

Tiệm cận $x = -1$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biến thành tiệm cận $x = -1 + m$ của đồ thị hàm số $y = f(x - m)$.

Đồ thị hàm số $y = f(x - m)$ có tiệm cận đứng là trục $Oy \Leftrightarrow -1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên.

Giá trị của $P = a + b + c$ bằng



A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq -c \\ ac - b \neq 0 \end{cases}$

Hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng: $x = -c$; tiệm cận ngang: $y = a$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta nhận xét được:

• $\begin{cases} m > 0 \\ 1 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$

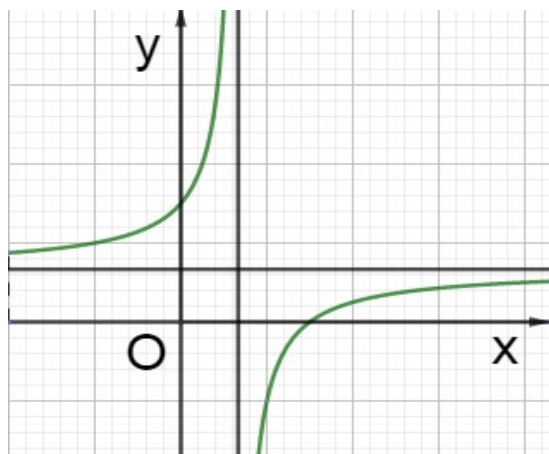
• Khi $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \frac{b}{c} = -2 \Rightarrow b = -2c$

• Tiệm cận đứng: $x = 1 - m$; tiệm cận ngang: $y = m$

Suy ra: $\begin{cases} -c = 1 - m \\ a = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = m - 1 \\ a = m \end{cases} \Rightarrow b = -2c = -2m + 2$ (thỏa điều kiện)

Nên: $P = a + b + c = m - 2m + 2 + m - 1 = 1$

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x-3}{x-m}$ có đồ thị như hình dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trong đường tròn tâm gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{2019}$?

A. 40.

B. 0.

C. 1.

D.

38.

Lời giải

Chọn C

Từ dạng đồ thị của hàm số ta suy ra

$$y' = \frac{-m(2m-1)+3}{(x-m)^2} > 0 \Rightarrow -m(2m-1)+3 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{3}{2}.$$

Khi đó dễ thấy đồ thị có hai đường tiệm cận là $x = m$, $y = 2m - 1$.

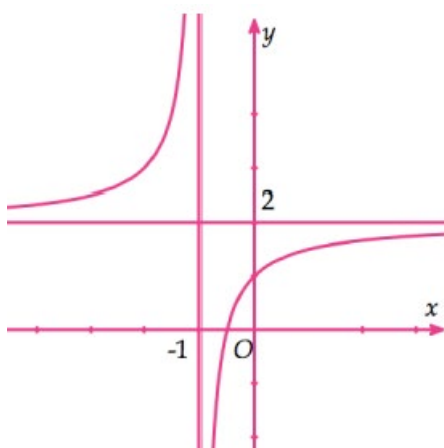
Vậy tâm đối xứng là điểm $I(m; 2m - 1)$.

Từ đồ thị và giả thiết kèm theo ta có :

$$\begin{cases} y = 2m - 1 > 0 \\ x = m > 0 \\ OI < \sqrt{2019} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > 0 \\ -19 \leq m \leq 20 \ (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện trên ta suy ra $m = 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{nx+1}{x+m}$; ($mn \neq 1$) xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ bên:



Tính tổng $m + n$?

A. $m + n = 1$.

B. $m + n = -1$.

C. $m + n = 3$.

D. $m + n = -3$.

Lời giải

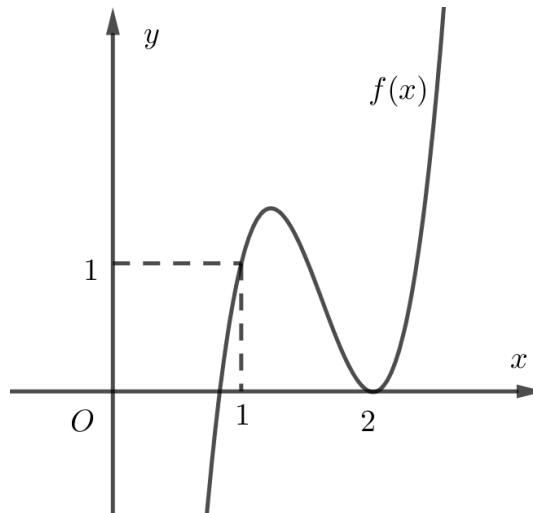
Chọn C

Đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{nx+1}{x+m}$; ($mn \neq 1$) có hai đường tiệm cận $x = -m = -1$;

$$y = n = 2 \Rightarrow m = 1; n = 2 \Rightarrow m + n = 3$$

Dạng 3: Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D.

6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét phương trình: } x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

+) Từ điều kiện $x \geq 1 \Rightarrow x = 0$ không là tiệm cận đứng.

$$\text{+) Từ đồ thị } \Rightarrow \text{phương trình } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a (a < 1) \\ x = 2 \end{cases}$$

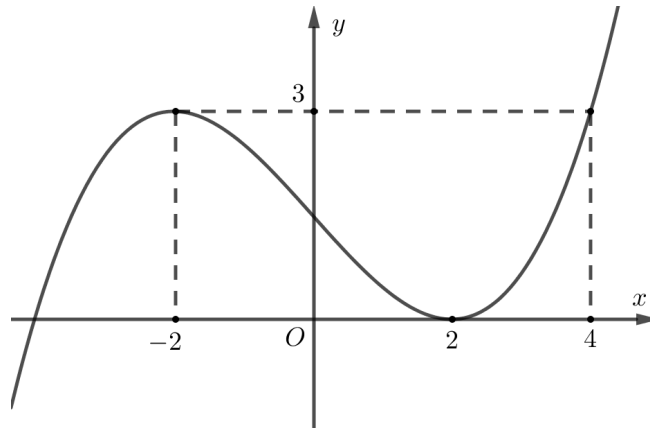
- $x = a$ không là tiệm cận đứng.
- $x = 2$ là nghiệm kép và tử số có một nghiệm $x = 2 \Rightarrow x = 2$ là một đường tiệm cận đứng.

$$\text{+) Từ đồ thị } \Rightarrow \text{phương trình } f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = b (1 < b < 2) \\ x = c (c > 2) \end{cases}$$

- $x = 1$ không là tiệm cận đứng (vì tử số có một nghiệm nghiệm $x = 1$)
- $x = b, x = c$ là hai đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và

tiệm cận ngang?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D.

5.

Lời giải

Chọn C

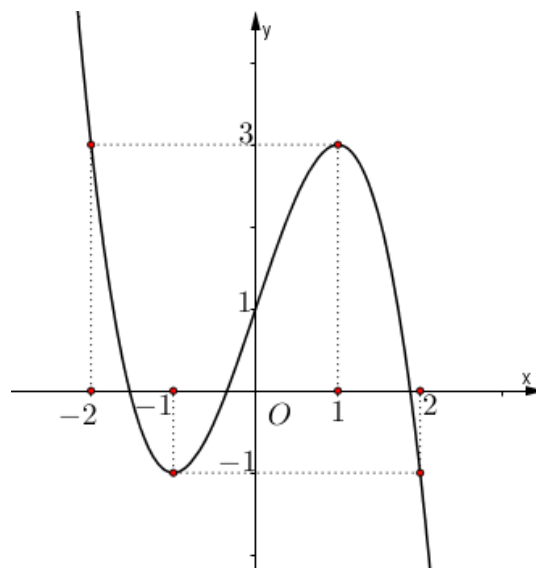
$$\text{Từ đồ thị ta có } f(4-x^2)-3=0 \Leftrightarrow f(4-x^2)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2=-2 \\ 4-x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{6} \\ x=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(4-x^2) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0 \Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f^2(x) - f(x) \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Xét } (x+1)[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f^2(x) - f(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}.$$

* Với $f(x) = 0$:

Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_3 < x_2 < 0 < x_1$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm $x = x_1$.

* Với $f(x) = 1$:

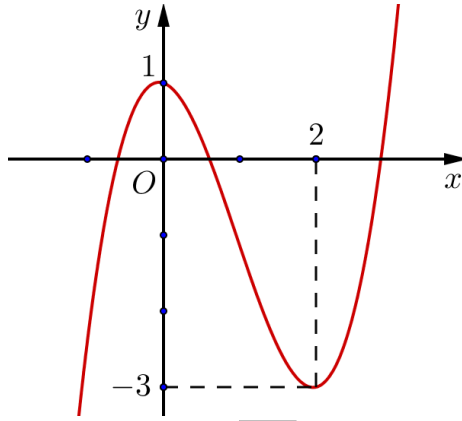
Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_6 < x_5 = 0 < x_4$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x) = 1$ có 2 nghiệm $x = x_5$ và $x = x_4$ và cả 2 nghiệm này đều khác x_1 .

Suy ra phương trình $(x+1)[f^2(x) - f(x)] = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$ có 3 tiệm cận đứng.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 2x)\sqrt{1-x}}{(x-3)[f^2(x) + 3f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận

đứng?

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện hàm số có nghĩa

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ (x-3)[f^2(x) + 3f(x)] \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \quad (*) \\ (x-3)[f^2(x) + 3f(x)] \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình } (x-3)[f^2(x) + 3f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -3 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $-1 < x_1 < x_2 < 1 < x_3$

$f(x) = -3$ có hai nghiệm $x_4 < 1$ và $x_5 = 2$

Kết hợp với điều kiện (*) phương trình $(x-3)[f^2(x) + 3f(x)] = 0$ có nghiệm

x_1, x_2, x_3 .

Và x_1, x_2, x_5 không là nghiệm của tử nên hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[(f(x))^2 - 2f(x)]}$$
 có bao nhiêu

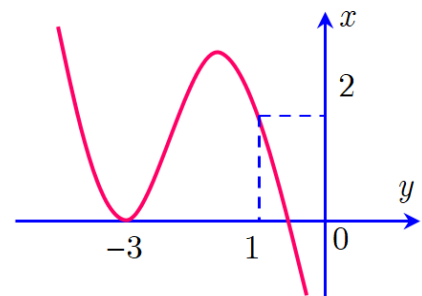
đường tiệm cận

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.



Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + x \geq 0 \\ [f(x)]^2 - 2f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq -1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = -3$ (bội 2), và nghiệm $x = x_0$; $x_0 \in (-1; 0)$ nên: $f(x) = a(x+3)^2(x-x_0)$

Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x = -1$; $x = x_1$; $x_1 \in (-3; -1)$; $x = x_2$; $(x_2 < -3)$. Nên $f(x) - 2 = a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } g(x) &= \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[(f(x))^2 - 2f(x)]} = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x \cdot f(x)[f(x) - 2]} \\ &= \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2 + x}}{x \cdot a(x+3)^2 \cdot (x-x_0) \cdot a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{a^2 x(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{a^2 \sqrt{x}(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = +\infty \text{ nên } x = 0 \text{ là}$$

một đường tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$

+) Các đường thẳng $x = -3$; $x = x_1$; $x = x_2$ đều là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$

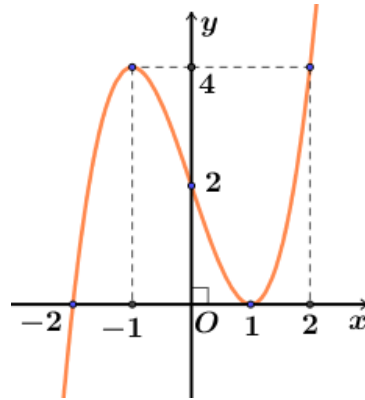
Do đó đồ thị $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

+) Hàm số $y = g(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn và bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên đồ thị $y = f(x)$ có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 đường tiệm cận.

Câu 6. Cho hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm

$$\text{số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số } y = \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{(x-1)(f^2(x) - 2f(x))}.$$



A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Dựa vào đồ thị của $y = f(x)$, ta có

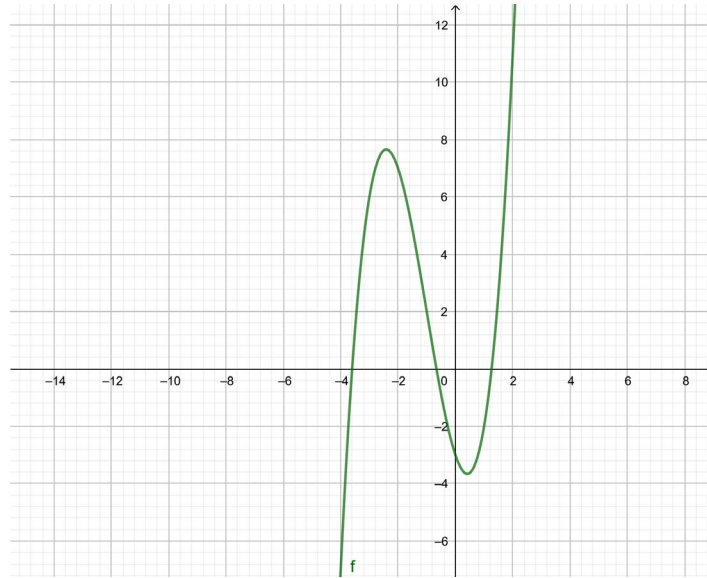
$$\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f(0) = 2 \\ f(1) = 0 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 4 \\ d = 2 \\ a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

$$\begin{aligned} \text{Xét hàm số } y &= \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{(x-1)(f^2(x) - 2f(x))} = \frac{(x^2-1)(x^2-3)}{(x-1) \cdot f(x) \cdot (f(x)-2)} \\ &= \frac{(x^2-1)(x^2-3)}{(x-1) \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot x \cdot (x^2-3)} = \frac{(x+1)}{(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot x} \end{aligned}$$

Hàm số có các đường tiệm cận đứng là $x=0$; $x=1$; $x=-2$ và đường tiệm cận ngang $y=0$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số: $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có: $f(x)+2=0 \Leftrightarrow f(x)=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a & (a < -2) \\ x=b & (-2 < b < 0) \\ x=c & (c > 0) \end{cases}$

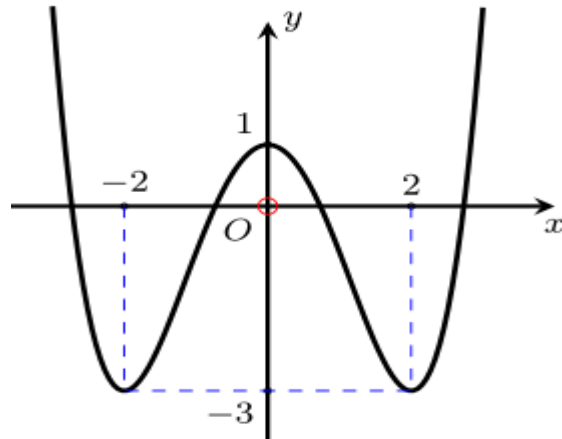
Kết hợp với điều kiện có nghĩa của $\sqrt{x}$ suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận đứng $x=c (c > 0)$.

Hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$ có bậc của tử bé hơn bậc của mẫu (Hàm số có bậc tử là

$\frac{1}{2}$ còn bậc mẫu là 3) suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận.

Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình

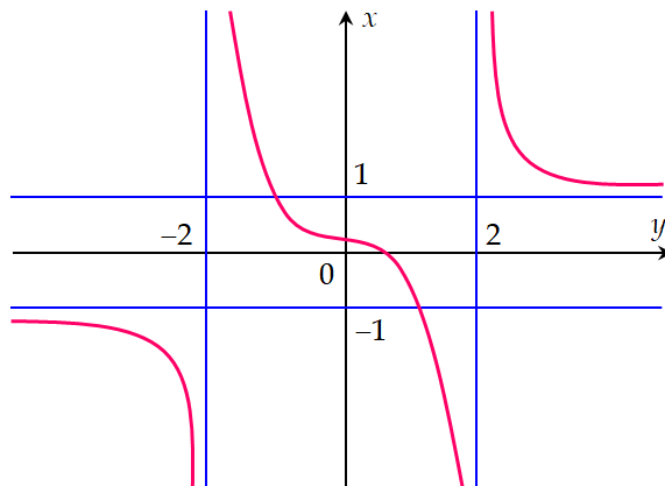
$$f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = x_1 < -2; x = x_2 > 2 \\ x = -2; x = 2 \end{cases}$$

Trong đó nghiệm $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$ đều có bội 2 và $x = x_1$ ($x_1 < -2$);

$x = x_2$ ($x_2 > 2$) là nghiệm đơn (bội 1).

So sánh bội nghiệm ở mẫu và bội nghiệm ở tử thì thấy đồ thị có các TCD là $x = 0$; $x = 2$; $x = x_1$; $x = x_2$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2}{3f(x)-2}$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{2}{3 \cdot (-1) - 2} = -\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{3 \cdot 1 - 2} = 2$$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang.

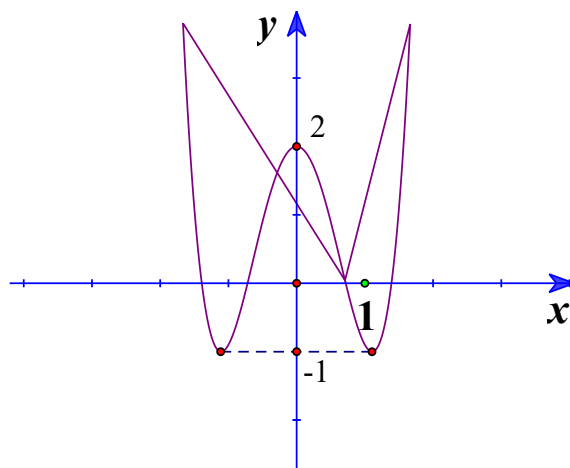
$$\text{Xét phương trình } 3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: phương trình $f(x) = \frac{2}{3}$ có duy nhất một nghiệm.

Vậy hàm số có 3 đường tiệm cận.

Dạng 4: Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020x}{f(x)[f(x)-m]}$ có tổng số 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

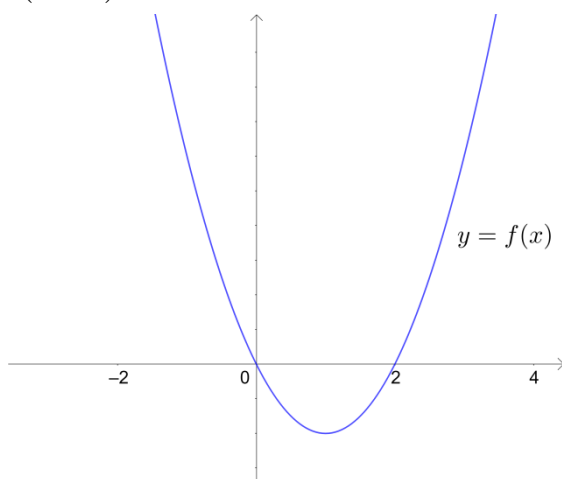
Ta có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, do đó đồ thị hàm số $g(x)$ luôn có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

$$\text{Phương trình } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1; -2 < x_1 < -1 \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (0; 1) \\ x = x_4 \in (1; 2) \end{cases}.$$

Ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt đều khác 0 nên $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, $x = x_4$ là 4 tiệm cận đứng đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy để đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) = m$ phải có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác với 4 nghiệm $x_i (i = \overline{1, 4}) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \neq 0 \end{cases}$ mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{f(x+m)}$ có số tiệm cận là số lẻ.



A. $m \neq 2$ và $m \neq 0$.

B. $m \neq -2$ và $m \neq 0$.

C. $m \neq 0$.

D. $m \neq \pm 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{f(x)}{f(x+m)} = \frac{x^2 - 2x}{(x+m)^2 - 2(x+m)}$$

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

$$(x+m)^2 - 2(x+m) = 0 \Leftrightarrow x = -m \vee x = 2-m.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{f(x+m)} = 1, \forall m \in \mathbb{R}^*$ nên hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{f(x+m)}$ luôn có 1 tiệm cận ngang là $y = 1$.

Với $m = 0$, ta có $\frac{f(x)}{f(x+m)} = 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. Suy ra đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x+m)}$$
 không có tiệm cận đứng.

Do vậy với $m = 0$, đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{f(x+m)}$ có 1 tiệm cận.

Với $m = 2$, ta có $\frac{f(x)}{f(x+m)} = \frac{x^2 - 2x}{(x+2)^2 - 2(x+2)} = \frac{x(x-2)}{x(x+2)}$ có tập xác định là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}.$$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{f(x+m)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x-2)}{x(x+2)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(x+m)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x+2} = -1.$$

Do đó đồ thị hàm số $\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận (1 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang).

Với $m = -2$, ta có $\frac{f(x)}{f(x+m)} = \frac{x^2 - 2x}{(x-2)^2 - 2(x-2)} = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)},$ có tập xác định

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}.$$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{f(x+m)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-4} = -1,$$

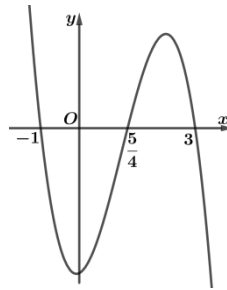
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{f(x+m)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \infty.$$

Do đó đồ thị hàm số $\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận (1 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang).

Với $m \neq 0$ và $m \neq \pm 2$, ta có $-m$ và $2-m$ không là nghiệm của $x^2 - 2x$. Suy ra đồ thị hàm số $\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận đứng là $x = -m$ và $x = 2-m$. Do vậy đồ thị hàm số $\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có 3 tiệm cận.

Vậy với $m \neq \pm 2$, đồ thị hàm số $\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có số tiệm cận là số lẻ.

Câu 3. Cho hàm số $g(x) = \frac{2018}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 2.

A. 11.

B. 10.

C. 9.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Từ đồ thị ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}$ và

($m < 0$).

Suy ra $h'(x) = 4m(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$.

Suy ra $h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx + C$. Từ đề bài ta có $C = 0$.

Vậy $h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx$.

Xét $h(x) - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$.

Xét hàm số

$$f(x) = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 13x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{35}{3}$		$\frac{7807}{768}$		-1		$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình

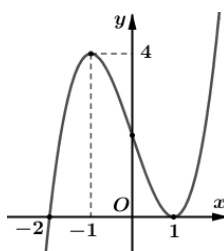
$h(x) - m^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình

$m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m < 0$ ta có $-\frac{35}{3} < m < -1$.

Do m nguyên nên $m \in \{-11; -10; \dots; -2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x^2 - 3) - m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng?

A. $m \leq 0$.

B. $-2 \leq m \leq 0$.

C. $-3 < m < -1$.

D. $0 < m < 4$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^2 - 3) \Rightarrow h'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -1 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

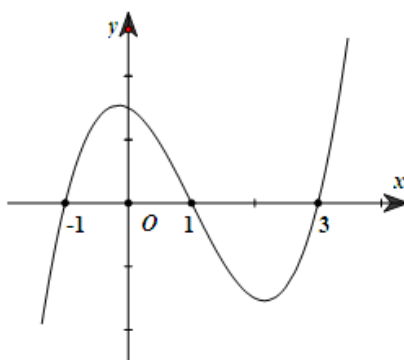
x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$2x$	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$	$ $	$+$
$x^2 - 3$	$+\infty$	1	-1	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x^2 - 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$						$+\infty$

$\swarrow$ 0 $\nearrow$ 4 $\searrow$ $f(-3) < 0$ $\nearrow$ 4 $\searrow$ 0 $\nearrow$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x^2 - 3) - m}$ có đúng 6 tiệm cận

đứng $\Leftrightarrow h(x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{2019}{f(x) - 8mx - m^2} \text{ là } 3$$

A. 31.

B. 8.

C. 9.

D. 30.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ và $m > 0$.

Suy ra $f(x) = m(x+1)(x-1)(x-3) = mx^3 - 3mx^2 - mx + 3m$.

Xét $f(x) - m^2 - 8mx = 0 \Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$						

Đề đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình

$f(x) - m^2 - 8mx = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình

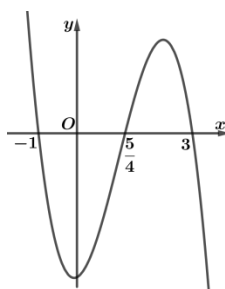
$m = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ có 3 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m > 0$ ta có $0 < m < 9$.

Do m nguyên nên $m \in \{1; 2; \dots; 8\}$. Vậy có 8 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Cho hàm số $g(x) = \frac{2018}{h(x) - m^2 - m}$ với

$h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11.

B. 10.

C. 9.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Từ đồ thị ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}$ và $(m < 0)$.

Suy ra $h'(x) = 4m(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$.

Suy ra $h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx + C$. Từ đề bài ta có $C = 0$.

Vậy $h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx$.

Xét $h(x) - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$.

Xét hàm số

$f(x) = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 13x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				$\frac{7807}{768}$				$+\infty$
			$-\frac{35}{3}$				-1		

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình

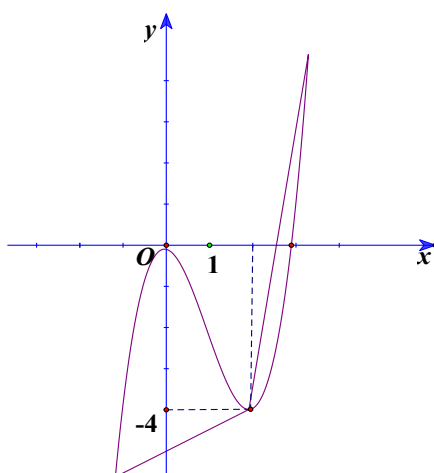
$h(x) - m^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình

$m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m < 0$ ta có $-\frac{35}{3} < m < -1$.

Do m nguyên nên $m \in \{-11; -10; \dots; -2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như sau:



Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{|f(x)| - m^2}$ có đúng ba đường tiệm cận đứng?

A. $m = 1$

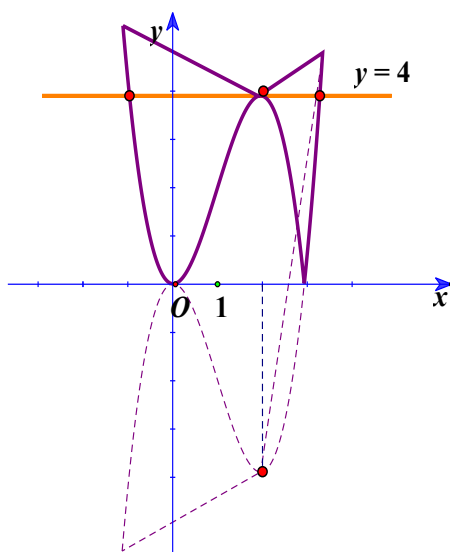
B. $m = 2$

C. $m = 0$

D. $m = \pm 2$

Lời giải

Chọn D

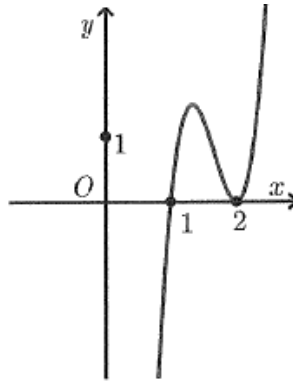


Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận đứng khi phương trình $|f(x)| - m^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m^2$ có 3 giao điểm.

Dựa vào ĐTHS đã cho suy ra $m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của $m \in [-10; 1]$ để đồ thị hàm số

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{[f(x) - m][f(x) - 1]}$$
 có đúng bốn đường tiệm cận đứng là :

A. 9.

B. 12.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

$$* x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

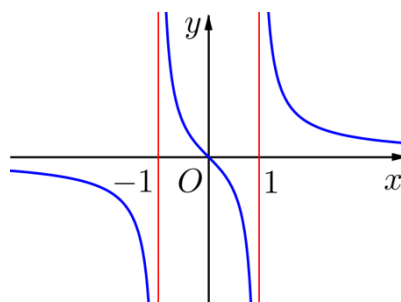
$$* (f(x) - m)(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Nhìn vào đồ thị hàm số ta có } f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (1; 2) \\ x = b \in (a; 2) \\ x = c \in (2; 3) \end{cases} \text{ (có ba tiệm cận)}$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng 4 tiệm cận đứng với $m \in [-10; 1]$ là $m \in [-10; 0]$

Do đó số giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 11 số.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2020]$ để đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$ có 5 đường tiệm cận?

A. 4038.

B. 2019.

C. 2020.

D. 4040.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $f(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ và các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

Vì hàm số $t = x^2 - 2x + m$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$

$$\text{xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \neq 1 \\ x^2 - 2x + m \neq -1 \end{cases}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 2x + m) = +\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x^2 - 2x + m) - m] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t) - m] = -m$.

Do đó đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$ có đúng một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -m$ (về cả hai phía $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

Để đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$ có 5 đường tiệm cận thì nó phải có 4 đường tiệm cận đứng.

Điều kiện cần: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = 1 \\ x^2 - 2x + m = -1 \end{cases}$ phải có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = -m+2 \\ (x-1)^2 = -m \end{cases} \text{ có 4 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Điều kiện đủ: Giả sử x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - 2x + m = 1$; x_3, x_4 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - 2x + m = -1$.

Xét đường thẳng $x = x_1$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_1^+} [f(x^2 - 2x + m) - m] = \lim_{t \rightarrow 1^+} [f(t) - m] = \pm\infty$.

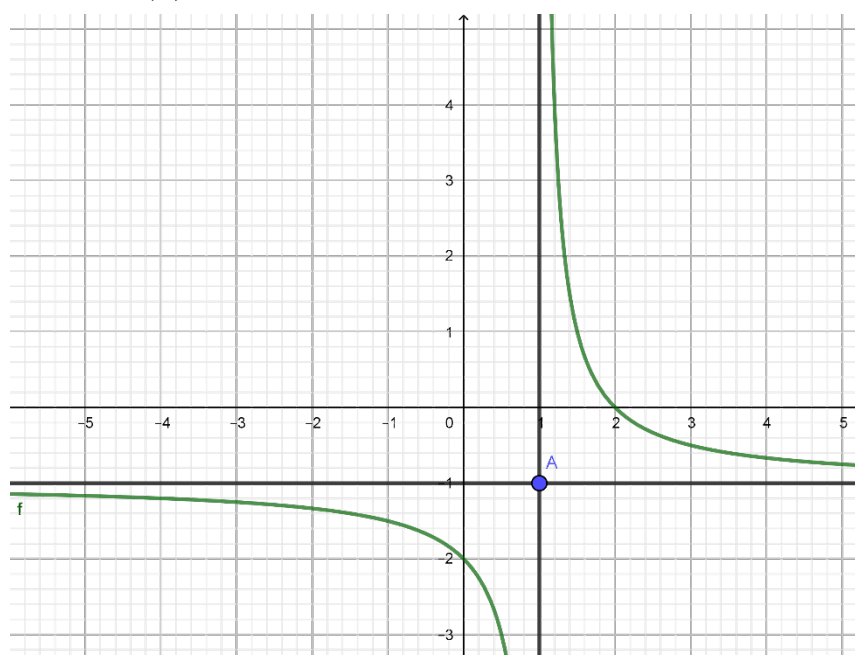
Suy ra đường thẳng $x = x_1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$.

Tương tự các đường thẳng $x = x_2, x = x_3, x = x_4$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$.

Vậy để đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 2x + m) - m$ có 5 đường tiệm cận thì $m < 0$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2019; 2020]$ nên có tất cả 2019 giá trị của m .

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = |f(x-16) + 10 - m^2|$ có tiệm cận ngang nằm phía dưới đường thẳng $d: y = 8$ (không trùng với d).

A. 8

B. 2

C. 6

D.

4

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $g(x) = f(x-16) + 10 - m^2$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp 2 phép tịnh tiến là tịnh tiến theo phương trục hoành sang phải 16 đơn vị và theo phương trục tung $(10 - m^2)$ đơn vị.

Từ hình vẽ: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x-16) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 9 - m^2$

Do vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có một tiệm cận ngang là $y = 9 - m^2$, ta có 2 TH sau:

+) TH 1: Nếu $9 - m^2 < 0$ thì tiệm cận ngang của đồ thị $y = |g(x)|$ là $y = m^2 - 9 < 8$

$$\Rightarrow 9 < m^2 < 17$$

mà $m \in \mathbb{Z}$, nên $m = \pm 4$

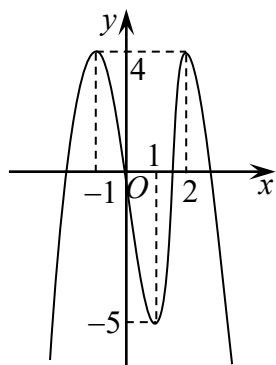
+) TH 2: Nếu $9 - m^2 \geq 0$ thì tiệm cận ngang của đồ thị $y = |g(x)|$ là $y = 9 - m^2 < 8$

$$\Rightarrow 1 < m^2 \leq 9$$

mà $m \in \mathbb{Z}$, nên $m = \pm 2$, $m = \pm 3$

+) KL: có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x) - m}$ có hai tiệm cận đứng?

- A.** $m = 4$ hoặc $m < -5$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = -5$. **D.** $-5 < m < 4$.

Lời giải

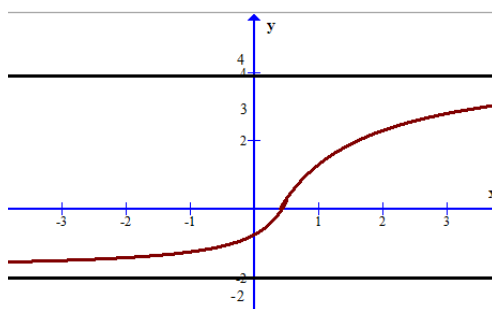
Chọn A

Ta có $f(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$.

Ta cần tìm m để phương trình trên có hai nghiệm thực.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m = 4$ hoặc $m < -5$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left| f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4 \right|$ có đúng một tiệm cận ngang?



- A.** 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

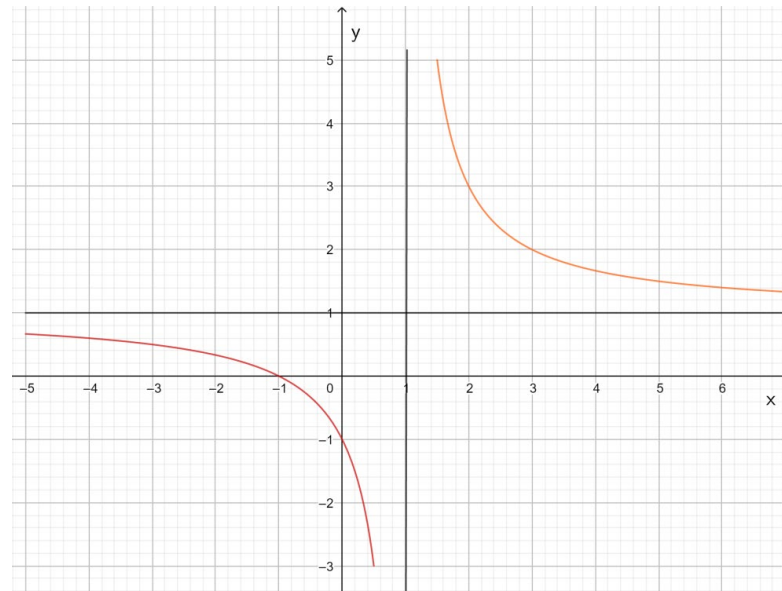
Để đồ thị hàm số $y = \left| f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4 \right|$ có đúng một tiệm cận ngang thì đồ thị hàm số $y = f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4$ có hai tiệm cận ngang đối xứng nhau qua trục hoành, khi đó từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta tịnh tiến xuống đúng 1 đơn vị. Vậy $\sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4 = -1$.

Giải $\sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} = 3$ ta đặt $u = \sqrt[3]{8-m}$; $v = \sqrt{m+1}$ ($v \geq 0$)

$$\text{Khi đó ta có hệ: } \begin{cases} u+v=3 \\ u^3+v^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u \quad (u \leq 3) \\ u^3+u^2-6u=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ u=2 \\ u=-3 \end{cases}$$

tìm được ba giá trị m là 0 ; 8 ; 35 .

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để đồ thị hàm số $y = g(x) = \left| f\left(\left|x + (m+1)^2\right|\right) - m^2 + 2m + 2 \right|$ có tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là nhiều nhất?

A. $-2 < m < 0$

B. $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$.

C. $-3 < m < -2$.

D. $-2 < m < -1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ thì đồ thị hàm số $h(x) = f\left(\left|x + (m+1)^2\right|\right)$ luôn có 1 tiệm cận ngang và có 2 tiệm cận đứng $\forall m$.

Vì đồ thị hàm số $g(x) = |h(x) - m^2 + 2m + 2|$ bảo toàn số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $h(x)$. Do đó dựa vào đồ thị hàm số $h(x)$ thì đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng và có số tiệm cận ngang $\leq 1 \quad \forall m$

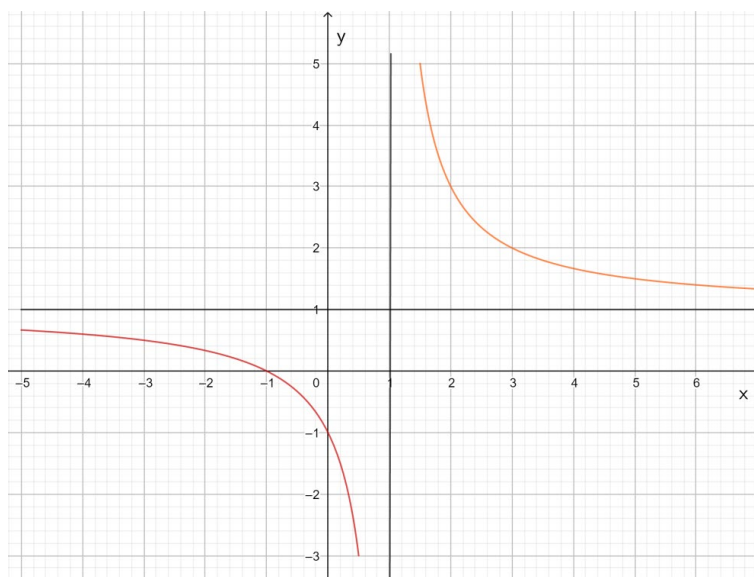
Vậy để đồ thị $y = g(x) = \left| f\left(\left|x + (m+1)^2\right|\right) - m^2 + 2m + 2 \right|$ có tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng nhiều nhất là 3

$\Leftrightarrow g(x)$ có 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang

$\Leftrightarrow h(x)$ tịnh tiến xuống dưới không quá 1 đơn vị.

$\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 2 \geq -1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x) = f\left(\left|x - m^2\right|\right) - 2020$ nhận đường thẳng $x = 5$ làm tiệm cận đứng?

A. $m = \pm 2$

B. $\begin{cases} m = \pm 2 \\ m = \pm\sqrt{6} \end{cases}$

C. $m = \pm\sqrt{6}$

D. $\begin{cases} m = 2 \\ m = \sqrt{6} \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x) = f(|x|)$ có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang, $x = 1$, $x = -1$ làm tiệm cận đứng.

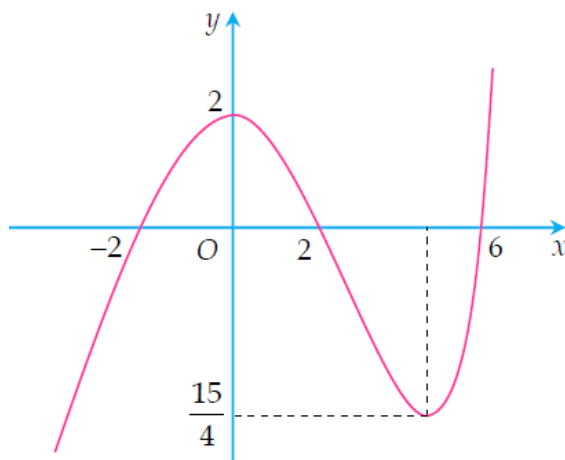
Suy ra đồ thị hàm số $u(x) = h(x - m^2) = f(|x - m^2|)$ nhận đường

thẳng $x = m^2 + 1; x = m^2 - 1$ làm tiệm cận đứng, đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x) = u(x) - 2020$ nhận đường thẳng $x = m^2 + 1; x = m^2 - 1$ làm tiệm cận đứng, đường thẳng $y = -2019$ làm tiệm cận ngang.

Theo đề bài, ta có
$$\begin{cases} m^2 + 1 = 5 \\ m^2 - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m = \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Với m, n là hai số nguyên dương, khi hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 8x + \sqrt{n-m}}{f(f(x)+m)}$ có số

tiệm cận lớn nhất là n hãy tính giá trị nhỏ nhất của $S = m^2 + n^2$

A. 14 .

B. 74 .

C. 50 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn C

Để hàm số có tiệm cận đứng thì điều kiện:

$$f[f(x)+m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+m = -2 \\ f(x)+m = 2 \\ f(x)+m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -m-2 \\ f(x) = -m+2 \\ f(x) = -m+6 \end{cases}$$

Khi đó để hàm số có có nhiều tiệm cận đứng nhất thì:

$$\begin{cases} 6-m < 2 \\ 2-m > -\frac{15}{4} \\ -2-m > -\frac{15}{4} \\ 2-m < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=5 \\ m=1 \end{cases}$$

Xét $h(x) = x^2 + 8x + \sqrt{n-m}$ có $h'(x) = 2x + 8$

nên $h(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4; +\infty)$

Khi $m = 5$ thì đường thẳng $y = -7$ gặp $f(x)$ tại điểm có hoành độ lớn hơn -4 .

Nên $h(x) > 0, \forall x \in (-4; +\infty)$. Do đó $\begin{cases} S = 74 \\ S = 50 \end{cases} \Rightarrow \min S = 50$

Phần 2: Biết BBT của hàm số $y = f(x)$

Dạng 5: Biết BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'		-	-	+
y	4	$+\infty$	2	$+\infty$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là

- A. Không tồn tại tiệm cận đứng.
C. $x = 1$

- B. $x = -2$
D. $x = -2$ và $x = 1$

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = +\infty$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng

Câu 2. Số tiệm cận đứng và số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau là

x	-2		-1		1		4		$+\infty$
y'		+		+	0	-		-	
y	0		$+\infty$		0,325		$+\infty$		1

A. 2 TCD và 2 TCN .

B. 3 TCD và 2 TCN .

C. 2 TCD và 1 TCN .

D. 3 TCD và 1 TCN .

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên $y = 1$ là TCN.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ nên $x = -1$ là TCD.

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$ nên $x = 4$ là TCD.

Vậy có 2 TCD và 1 TCN .

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$			0	
$f(x)$	3	$-\infty$	4	2

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4 .

B. 1 .

C. 2 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ là đường TCD của đồ thị hàm số

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ là đường TCN của đồ thị hàm số

+) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là đường TCN của đồ thị hàm số.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	2	$+\infty$	5

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5$ nên đường thẳng $y = 2$ và $y = 5$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'		-	+	
y		$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = -\infty$. Vậy $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$. Vậy $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	+		+	+	0	-
y	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 1$	$+\infty \nearrow 2$	$2 \searrow 3$	

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$ suy ra $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ suy ra $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị của hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	-		+	0	-
y	2			1	

Diagram illustrating the behavior of the function y as x approaches the boundaries of the domain $(-\infty, +\infty)$. The function is defined on the interval $(-\infty, +\infty)$.

The function y is defined on the interval $(-\infty, +\infty)$. The function is defined on the interval $(-\infty, +\infty)$.

The function y is defined on the interval $(-\infty, +\infty)$. The function is defined on the interval $(-\infty, +\infty)$.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có

$$+) \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty ;$$

$$+) \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 ;$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty ;$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} y = -2 .$$

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$ và đường tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'		+	0	-
y	-1	$+\infty$	2	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số bao nhiêu tiệm cận (chỉ xét các tiệm cận đứng và ngang)?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$. Vậy đường thẳng $y = -1$ là đường TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$). Vậy đường thẳng $x = 1$ là đường TCD của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng 2 đường tiệm cận. **Chọn A**

Dạng 6: Biết BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	+		+
y	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	m

A. Không có m .

B. $m = 0$.

C. $m = -\frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Từ BBT suy ra TCN của đồ thị hàm số là $y = \frac{1}{2}$ và $y = m$;

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$	3	$-\infty$

Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-20; 20)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x) - m}$ có tiệm cận ngang.

A. 187.

B. -184.

C. 186.

D. -185.

Lời giải

Chọn B

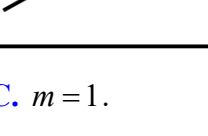
Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x) - m}$ có tiệm cận ngang nếu phương trình $f(x) = m$ có nghiệm.

Từ BBT suy ra $m \leq 3$.

Kết hợp điều kiện $m \in (-20; 20)$, $m \in \mathbb{Z}$ ta có $m \in \{-19; -18; \dots; 3\}$

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài là -184 .

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên xác định như hình. Biết rằng đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = x_0$, tiệm cận ngang là $y = y_0$ và $x_0 y_0 = 16$. Hỏi m bằng?

x	$-\infty$	m	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$ 	1	$-\infty$ 

A. $m = 8$.

B. $m = -16$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow m^+} y = -\infty$ nên $x = m$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 8$ nên $y_0 = 8$ là tiệm cận ngang.

Suy ra $8m = 16 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 4. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$ ↘ 5		$-\infty$ ↗ $m+2$

Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = x_o$ và tiệm cận ngang $y = y_o$ sao cho $x_o y_o < 30$.

A. $m < 1$.

B. $m < 10$.

C. $m < 8$.

D. $m > 8$.

Lời giải

Chọn C

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m+2$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = m+2$. Ta có

$$y_o = m+2.$$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 3$. Ta có $x_o = 3$.

$$x_o y_o < 30 \Leftrightarrow 3(m+2) < 30 \Leftrightarrow m < 8.$$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	2	-1		$+\infty$
	↗	↘		↘
		$-\infty$		m

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [0; 3]$ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là một đường tiệm cận ngang.

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m \Rightarrow y = m$ là một đường tiệm cận ngang.

□ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ là một đường tiệm cận đứng.

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận thì $m \neq 2$. Vì m nguyên và $m \in [0; 3]$ nên $m \in \{0; 1; 3\}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	+
$f(x)$	4 ↘ 1	$+\infty$ ↘ 2	$-\infty$ ↗ m^2	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-4; 4]$ để hàm số có 4 tiệm cận?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ nên $x = -2$ là một tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là một tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ nên $y = 4$ là một tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m^2$ nên $y = m^2$ là một tiệm cận ngang.

+ Để hàm số có 4 tiệm cận thì $m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ mà $m \in [-4; 4]$ nên $m \in \{\pm 4; \pm 3; \pm 1; 0\}$

Vậy có 7 giá trị m cần tìm.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	-		-	+	-
y	-1 ↘ $-\infty$	2 ↘ -4		3 ↗ m^2	

Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

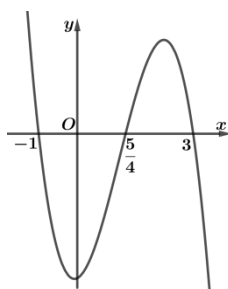
Chọn C

Qua bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m^2 \neq -1$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang: $y = -1$ và $y = m^2$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

Vậy số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 3.

Câu 8. Cho hàm số $g(x) = \frac{2018}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11.

B. 10.

C. 9.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Từ đồ thị ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}$ và $(m < 0)$.

Suy ra $h'(x) = 4m(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$.

Suy ra $h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx + C$. Từ đề bài ta có $C = 0$.

Vậy $h(x) = mx^4 - \frac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx$.

Xét $h(x) - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$.

Xét hàm số

$$f(x) = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 13x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{4} \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{7807}{768}$			$+\infty$
		$-\frac{35}{3}$			-1		

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình

$h(x) - m^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình

$m = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m < 0$ ta có $-\frac{35}{3} < m < -1$.

Do m nguyên nên $m \in \{-11; -10; \dots; -2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	0	$+\infty$	-3	$+\infty$	$(m-1)(2-m)$

Tìm tổng số các giá trị nguyên dương của tham số $m \in (-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4.

A. 42.

B. 45.

C. -3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (m-1)(2-m)$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $y = 0$ và $y = (m-1)(2-m)$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $x = -2$.

Và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $x = 2$.

Đề đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4

khi và chỉ khi $(m-1)(2-m) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Vì $m \in (-10; 10)$ và m là số nguyên dương nên $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy $3+4+5+6+7+8+9=42$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		1		2		-15		$+\infty$

Tìm số các giá trị nguyên âm của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2019}{f(x) - m}$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 3.

A. 14.

B. 17.

C. 15.

D. 16.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2019}{f(x) - m} = 0$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$ là $y = 0$.

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) - m = 0$ có số nghiệm là 2 $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = m$ có số nghiệm là 2.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(x) = m$ có số nghiệm là 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -15 < m < 1 \end{cases}.$$

Mà tham số m là số nguyên âm. Vậy $m \in \{-14; -13; -12; -11; \dots; -2; -1\}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$	
y'	-		+	0	-	+
y	$\frac{1}{m}$		-2		m	
	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
	$-\infty$	-5		-5	$-\infty$	

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số đường tiệm cận ngang và đứng là 3 ?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $m \neq 0$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng (là hai đường thẳng $x = 1$ và $x = 4$)

Cũng từ bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{m}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$ với điều kiện $m \neq 0$.

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số đường tiệm cận ngang và đứng là 3

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ có số đường tiệm cận ngang là 1

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{m} = m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m để giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là điểm $I(-1;1)$.

x	$-\infty$	$-m$	$+\infty$
y'	-		-
y	m		$+\infty$
	$\searrow$		$\searrow$
	$-\infty$		m

A. Không có m .

B. $m = 0$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

Từ BBT suy ra TCĐ là $x = -m$, TCN là $y = m$; nên giao điểm TCĐ và TCN là $I(-m; m)$.

$$\text{YCBT } I(-m; m) \equiv I(-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m = -1 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m để giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang nằm trên đường thẳng $d: y = x + 5$.

x	$-\infty$	$2m$	$+\infty$
y'	-		-
y	m	$+\infty$	$-\infty$

Arrows indicate the behavior of the function: from $y = m$ at $x = -\infty$ to $+\infty$ at $x = 2m$, and from $+\infty$ at $x = 2m$ to $-\infty$ at $x = +\infty$.

A. $m = 5$.

B. $m = -5$.

C. $m = 4$.

D. $m = -4$.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT suy ra TCĐ là $x = 2m$, TCN là $y = m$; nên giao điểm TCĐ và TCN là $I(2m; m)$.

$$\text{Giao điểm } I(2m; m) \in d: y = x + 5 \Leftrightarrow m = 2m + 5 \Leftrightarrow m = -5.$$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m và n để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$, $y = 2$ lần lượt là TCĐ và TCN thì biểu thức $9m^2 + 6mn + 36n^2$ có giá trị là

x	$-\infty$	$\frac{2-2m}{n}$	$+\infty$
y'		-	-
y	$\frac{m}{n}$	$+\infty$	$\frac{m}{n}$

A. $\frac{28}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT suy ra TCĐ là $x = \frac{2-2m}{n}$, TCN là $y = \frac{m}{n}$;

YCBT: đường thẳng $x = 2, y = 2$ lần lượt là TCĐ và TCN nên

$$\begin{cases} \frac{2-2m}{n} = 2 \\ \frac{m}{n} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2m = 2n \\ m = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2n = 2 \\ m-2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases}$$

KL: vậy $9m^2 + 6mn + 36n^2 = \frac{28}{3}$.

Dạng 7: Biết BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	+	-	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$	1

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3}.$$

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta suy ra:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f^2(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f^2(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f^2(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3} = 0.$

Do đó, đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3}$ có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Xét phương trình: $e^{f^2(x)} - 3 = 0$ (*). Ta có

$$(*) \Leftrightarrow f^2(x) = \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{\ln 3} & (1) \\ f(x) = -\sqrt{\ln 3} & (2) \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có:

- Vì $\sqrt{\ln 3} > 1$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_1 \in (1; 2)$ và $x_2 \in (2; +\infty)$.
- Vì $-\sqrt{\ln 3} < 1$ nên phương trình (2) có một nghiệm là $x_3 \in (-\infty; 1)$.

Suy ra phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3 . Khi đó:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_1^+} (e^{f^2(x)} - 3) = 0 \\ x \rightarrow x_1^+ \Rightarrow 1 < f(x) < f(x_1) \Rightarrow e^{f^2(x)} - 3 < e^{f^2(x_1)} - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3} = -\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x = x_1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3}.$$

Tương tự, ta tính được: $\lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_3^-} \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3} = +\infty$.

Suy ra các đường thẳng $x = x_2, x = x_3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3}.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 3}$ có 1 đường tiệm cận ngang và 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{x^4 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét phương trình } f^2(x) - 4f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a, a \in (-\infty; -1) \\ x = 1 \text{ (ng kép)} \\ x = -1 \text{ (ng kép)} \\ x = b, b \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow f^2(x) - 4f(x) = h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2; h(x) \neq 0$$

Do đó

$$y = g(x) = \frac{x^4 - 1}{f^2(x) - 4f(x)} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{h(x)(x-a)(x-1)(x-b)(x+1)}.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{x^4 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có 4 tiệm cận đứng.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	-1

$-\infty$

Đặt $g(x) = \frac{2f(x)-3}{f(x)-1}$. Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x)-3}{f(x)-1} = \frac{2 \cdot (-1) - 3}{(-1) - 1} = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{đường thẳng } y = \frac{5}{2} \text{ là tiệm cận}$$

ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x)-3}{f(x)-1} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 1 \Rightarrow \text{đường thẳng } y = 1 \text{ là tiệm cận ngang}$$

của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có: } f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \ (a < 1) \\ x = b \ (b > 1) \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} [f(x) - 1] = 0 \text{ và } f(x) - 1 > 0, \forall x < a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} [2f(x) - 3] = 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{2f(x)-3}{f(x)-1} = -\infty \Rightarrow \text{đường thẳng } x = a \text{ là tiệm cận đứng của đồ}$$

thị hàm số $y = g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow b^+} [f(x) - 1] = 0 \text{ và } f(x) - 1 < 0, \forall x > b.$$

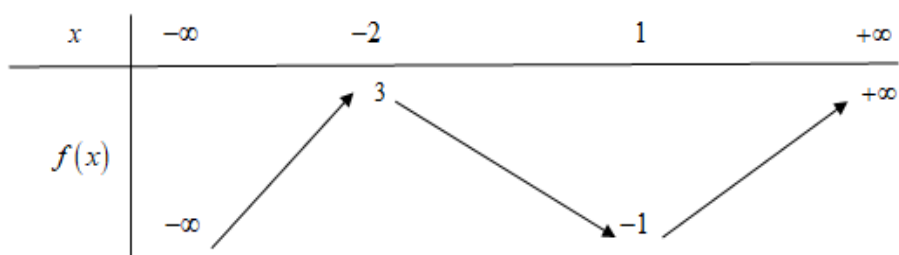
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^+} [2f(x) - 3] = 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{2f(x)-3}{f(x)-1} = +\infty \Rightarrow \text{đường thẳng } x=b \text{ là tiệm cận đứng của đồ}$$

thị hàm số $y = g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :



Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{2f(x)-1} - 1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang và tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình:

$$e^{2f(x)-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2f(x)-1} = 1 \Leftrightarrow 2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \ (a \in (-\infty; -2)) \\ x = b \ (b \in (-2; 1)) \\ x = c \ (c \in (1; +\infty)) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{2f(x)-1} - 1}$ có ba tiệm cận đứng là: $x = a; x = b; x = c$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{2f(x)-1} - 1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2f(x)-1) - 1} = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2f(x)-1} - 1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2f(x)-1) - 1} = 0$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{2f(x)-1} - 1}$ có hai tiệm cận ngang là: $y = -1; y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{2f(x)-1} - 1}$ có 5 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0 +	
$f(x)$	-2	$+\infty$	5	3 $+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{1}{f(x)-5}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = g(x)$ xác định khi $f(x)$ xác định và $f(x) \neq 5$ hay $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq a \ (a < 1) \\ x \neq b \ (b > 2) \end{cases}$.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) - 5] = 0, f(x) < 5 \text{ khi } x \rightarrow 1^+ \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) - 5] = 0, f(x) > 5 \text{ khi } x \rightarrow a^+ \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) - 5] = 0, f(x) > 5 \text{ khi } x \rightarrow b^+ \end{cases}$

nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng: $x = 1$, $x = a$, $x = b$.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{1}{7}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 đường

tiệm cận ngang: $y = 0$, $y = -\frac{1}{7}$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 5.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	2	1	-1	1

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Do đó: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3f(x)-2] = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [3f(x)-2] = +\infty$

Suy ra: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3f(x)-2} = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3f(x)-2} = 0$

Hay: Đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ có 2 tiệm cận ngang là $y = 0$, $y = 2$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra : Phương trình $3f(x)-2 = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Giả sử 4 nghiệm đó là $x_1 \in (-\infty; -1)$, $x_2 \in (-1; 0)$, $x_3 \in (0; 1)$, $x_4 \in (1; +\infty)$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra:

$\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) = 0$, $f(x) < \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{2}{3f(x)-2} = -\infty$.

Hay: $x = x_1$ là 1 tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$.

Tương tự, ta có: $\lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{2}{3f(x)-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_3^+} \frac{2}{3f(x)-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_4^+} \frac{2}{3f(x)-2} = +\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ có 4 tiệm cận đứng là $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$,

$x = x_4$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x)-2}$ có tất cả 6 tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{f(x)-2}$ bằng

A. 4 .

B. 3 .

C. 2 .

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)-2}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (với mọi)

Ta có:

+/- TCĐ : Do $f(x) > 2 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

+/- TCN : Xét

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(x)-2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x)-2} = \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{5}{3}$.

Vậy tổng số TCĐ và TCN của đồ thị hàm số bằng 1 .

Câu 8. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 2 .

B. 3 .

C. 4.

D. 5 .

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào bảng biến thiên ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - 1} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1} = 0.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = -1$;
 $y = 0$.

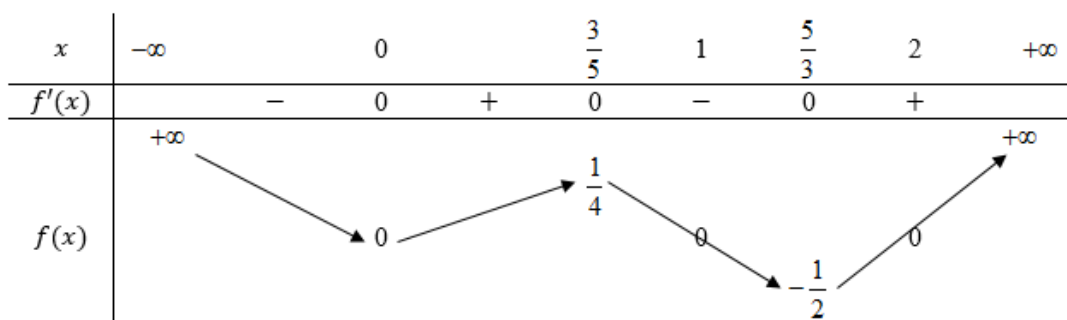
$$f(x)-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a; a < -1 \\ x=1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 1} = +\infty. \text{ Vì } f(x) > 1 \text{ khi } x \rightarrow 0.$$

Tương tự, $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)-1} = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận đứng là hai đường thẳng $x = a$; $x = 1$.

Vậy hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có 4 đường tiệm cận .

Câu 9. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :



Hỏi đồ thị $y = \frac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{[f^2(x)-2f(x)](2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $f(x) = ax^2(x-1)(x-2)$

Đặt

$$g(x) = \frac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{[f^2(x)-2f(x)](2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4)} = \frac{f(x).\sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x^2-4)(x^2-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{ax^2(x-1)(x-2)\sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x^2-4)(x^2-1)(2x+1)} = \frac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x+2)(x+1)(2x+1)}$$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 2$ có 2 nghiệm $\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$ trong

$$\text{đó } \begin{cases} a < 0 \\ b > 2 \end{cases}$$

Với điều kiện $x^2 + x \geq 0$ thì phương trình

$$[f(x)-2](x+2)(x+1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

Lại có $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x+2)(x+1)(2x+1)} = \infty$, suy ra có tiệm cận

đứng $x = -2$

$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x+2)(x+1)(2x+1)} = \infty$, suy ra có tiệm cận đứng

$x = -1$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x+2)(x+1)(2x+1)} = \infty$, suy ra có tiệm cận đứng

$x = a$

$\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{[f(x)-2](x+2)(x+1)(2x+1)} = \infty$, suy ra có tiệm cận đứng

$x = b$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ có 4 tiệm cận đứng.

Mặc khác, bậc tử của $g(x)$ nhỏ hơn bậc mẫu:

Ta suy ra: $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 \sqrt{x^2 + x}}{[f(x) - 2](x+2)(x+1)(2x+1)} = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận ngang $y = 0$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$				5		$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$y = g(x) = \frac{1}{f(x^3 + 2x) - 5}$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x^3 + 2x) - 5} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x^3 + 2x) - 5} = 0$.

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

+ Đặt $u = x^3 + 2x$, khi đó $f(x^3 + 2x) - 5 = 0$ trở thành:

$$f(u) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(u) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} u = a (a < -2) \\ u = 1 \end{cases}.$$

+ Với $u = a \Rightarrow x^3 + 2x = a$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 2x$ có $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$, mà phương trình bậc ba có ít nhất 1 nghiệm nên phương trình $x^3 + 2x = a$ có nghiệm duy nhất giả sử là x_1 .

+ Với $u = 1 \Rightarrow x^3 + 2x = 1$ do chứng minh trên nên phương trình cũng có 1 nghiệm duy nhất giả sử là $x_2 (x_2 \neq x_1)$.

+ Do x_1, x_2 không là nghiệm của tử số của $g(x)$ nên giới hạn của $g(x)$ khi x dần tới x_1 và giới hạn của $g(x)$ khi x dần tới x_2 đều là vô cực.

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là $x = x_1$ và $x = x_2$.

+ Vậy, tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 3.

Câu 11. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có BBT như sau:

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$					

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x) + 3f(x)}$ là :

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

Lời giải

Chọn C

Xét PT $f^2(x) + 3f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = -3 \end{cases}$ trong đó:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = x_1 \in (1; 2) \quad (\text{ng kép}) \\ x = x_2 \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$f(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \quad (\text{ng kép}) \\ x = x_3 \in (-\infty; -3) \quad (\text{kot / m do } x \geq -3) \\ x = x_4 \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Kiểm tra các giới hạn ta thấy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x) + 3f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng là

$$x = 0; x = 1; x = x_1; x = x_2; x = x_4$$

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	-5	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{f^2(x) + 2f(x) + 1}{f^2(x) - 9}$ có tổng số tất cả các đường tiệm cận đứng và

đường tiệm cận ngang là

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{f(x)} + \frac{1}{f^2(x)}}{1 - \frac{9}{f^2(x)}} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{f(x)} + \frac{1}{f^2(x)}}{1 - \frac{9}{f^2(x)}} = 1.$$

Suy ra đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y = g(x)$.

$$y = g(x) = \frac{(f(x) + 1)^2}{(f(x) - 3)(f(x) + 3)}.$$

$$\text{Dựa vào BBT ta có } f(x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a < -1 \\ x = b > 4 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x > 0 \Rightarrow f(x) < 3, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(f(x) + 1)^2}{(f(x) - 3)(f(x) + 3)} = -\infty \text{ suy ra đường thẳng } x = 0$$

là tiệm cận đứng.

$$\text{Với } x > a \Rightarrow f(x) < 3, \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(f(x) + 1)^2}{(f(x) - 3)(f(x) + 3)} = -\infty \text{ suy ra đường thẳng } x = a$$

là tiệm cận đứng.

$$\text{Với } x > b \Rightarrow f(x) > 3, \lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(f(x) + 1)^2}{(f(x) - 3)(f(x) + 3)} = +\infty \text{ suy ra đường thẳng } x = b \text{ là}$$

tiệm cận đứng.

$$\text{Dựa vào BBT ta có } f(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = c, 0 < c < 4 \\ x = d, d > 4 \end{cases} \text{ khi đó}$$

Với $x > c \Rightarrow f(x) < -3$, $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = c$ là tiệm cận đứng.

Với $x > d \Rightarrow f(x) > -3$, $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = d$ là tiệm cận đứng.

Vậy tổng số các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$ là 6.

Dạng 8: Biết BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$, trong bài toán tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		-	0	+	
$f(x)$	5				$+\infty$		$+\infty$		2

Số giá trị $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-10; 10]$ để đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{f(x)}{f(x) - m + 1}$ có 4 đường tiệm cận là:

A. 5.

B. 4.

C. 10.

D. 21.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f(x) - m + 1} = \frac{5}{6 - m}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x) - m + 1} = \frac{2}{3 - m}$

- Xét với $m = 6$ thì đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận đường thẳng có phương trình $y = -\frac{2}{3}$ là TCN

Khi đó phương trình: $f(x) = m - 1 = 5$ có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ ĐTHS có 2 TCĐ $\Rightarrow$ ĐTHS có 3 đường tiệm cận $\Rightarrow m = 6$ (không thỏa mãn).

- Xét $m = 3 \Rightarrow$ ĐTHS $y = g(x)$ nhận đường thẳng có phương trình $y = \frac{5}{3}$ là TCN

Khi đó phương trình: $f(x) = m - 1 = 2$ có 1 nghiệm $\Rightarrow$ ĐTHS có 1 TCD $\Rightarrow$ ĐTHS có 2 đường tiệm cận $\Rightarrow m = 3$ (không thỏa mãn).

- Với $m \neq 3$ và $m \neq 6$ thì đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận 2 đường thẳng có phương trình

$$y = \frac{5}{6-m}; y = \frac{2}{3-m} \text{ là TCN}$$

Xét phương trình: $f(x) - m + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = m - 1$ (*)

Để ĐTHS $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận thì (*) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow m \in (2; 3) \cup \{4\} \cup [6; +\infty)$$

Do ĐK nên $m \in (2; 3) \cup \{4\} \cup (6; +\infty)$

Vậy $m \in (2; 3) \cup \{4\} \cup (6; +\infty)$ do $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-10; 10]$ nên $m \in \{4; 7; 8; 9; 10\}$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	1	$+\infty$	6

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{f^2(x)}{f(x) - m}$ có đúng 3 tiệm cận đứng.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f^2(x)}{f(x) - m} = +\infty \text{ nên } \forall m, \text{ đồ thị hàm số } y = g(x) \text{ luôn có một tiệm cận đứng } x = 2.$$

Mặt khác, từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ thì phương trình $f(x) - m = 0$ tối đa 2 nghiệm. Vậy để đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng 3 tiệm cận đứng thì điều kiện cần là phương trình $f(x) = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2 $\Leftrightarrow 3 < m < 6$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow x_1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f^2(x)}{f(x) - m} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{f^2(x)}{f(x) - m} = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$.

Vậy với $3 < m < 6$ thì đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng 3 tiệm cận đứng. Do m nguyên nên có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m = 4$ và $m = 5$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -\infty$		$\nearrow +\infty$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$

Có bao nhiêu số m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{f(x) - m}$ có đúng 3 đường tiệm cận?

A. 15.

B. 6.

C. 7.

D. 14.

Lời giải

Chọn C

- Ta có $\sqrt{x+1}$ có nghĩa khi $x \geq -1$.
- Từ bảng biến thiên suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ luôn có duy nhất 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0, \forall m \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$
- Khi đó, để đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng 3 đường tiệm cận thì nó phải có 2 đường tiệm cận đứng

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = m$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\in [-1; +\infty)$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \in (3; +\infty) \cup \{-1\} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-10; 10]} m \in \{-1; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy, có tất cả 7 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$		$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow -\infty$	

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $m > 2$.

B. không tồn tại m .

C. $m \leq 2$.

D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$ là: $\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \neq m \end{cases}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$ luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$ có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số

$y = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}}{(x^2 + 1)[f(x) - m]}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

Suy ra phương trình $f(x) - m = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $(0; +\infty)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $m < 2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y						$+\infty$	2	$+\infty$	
	$-\infty$		-2		$-\infty$				

Có bao nhiêu giá trị m nguyên, khác 0 để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x) - m}{f(x) + m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng

A. 2.

B. 3.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

- TXĐ: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq -m\}$

- Với $m \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$, và nghiệm x_0 (nếu có) của phương trình $f(x) = -m$ không thể là nghiệm của phương trình $f(x) = m$.

- Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi phương trình $f(x) = -m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow -2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Ta có $m = \pm 1$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 6. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0		1		0

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{1}{(f(x))^2 - m}$ có đúng 2 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án đúng

A. $0 < m < 1$.

B. $0 < m \leq 1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $(f(x))^2 - m = 0 \Leftrightarrow (f(x))^2 = m \quad (*)$

TH1: nếu $m < 0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH2: nếu $m = 0$ thì phương trình $(*) \Leftrightarrow f(x) = 0$ vô nghiệm. Nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH3: nếu $m > 0$ thì phương trình $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{m} & (1) \\ f(x) = -\sqrt{m} & (2) \end{cases}$

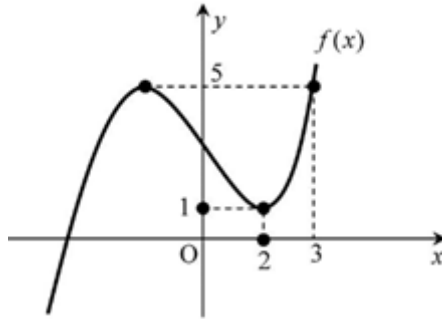
Với (1) : khi $0 < m < 1$ thì (1) có 2 nghiệm; $m = 1$ thì (1) có nghiệm duy nhất

Với (2) : do $m > 0$ nên $-\sqrt{m} < 0 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{m}$ vô nghiệm.

Vậy để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng thì $0 < m < 1$. **Chọn đáp án A**

Câu 7. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{m-x}}{f(x)-m}$ có tất cả 4 đường tiệm cận.

Số phần tử của tập S là



A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D.

Với điều kiện $x \leq m$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{m-x}}{f(x)-m}$ có 4 đường tiệm cận thì đồ thị phải có 3 đường tiệm cận đứng, suy ra phương trình $f(x) - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x thỏa mãn $x \leq m$.

Từ đồ thị, phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm khi $1 < m < 5$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4\}$.

+ Trường hợp 1: Với $m = 2$: Từ đồ thị, phương trình $f(x) - 2 = 0$ có 3 nghiệm $x_1 < x_2 < 2 < x_3$, suy ra $m = 2$ không thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: Với $m \in \{3; 4\}$: Từ đồ thị, phương trình $f(x) - m = 0$ có 3 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3 < 3$, suy ra $m = 3, m = 4$ thỏa mãn.

Vậy tập S gồm 2 phần tử.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	2	$\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$	2

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{f(x)+m}{f^2(x)-4m^2}$ có duy nhất một tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

A. $m = 2$.

B. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$.

C. $m = 1$.

D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = g(x) = \frac{f(x) + m}{f^2(x) - 4m^2}$.

Điều kiện cần:

Nếu $m \neq \pm 1$ thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) + m}{f^2(x) - 4m^2} = \frac{2 + m}{4 - 4m^2}$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{f(x) + m}{f^2(x) - 4m^2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{2 + m}{4 - 4m^2}$.

Do đó, điều kiện cần để đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{f(x) + m}{f^2(x) - 4m^2}$ không có tiệm cận ngang là

$$\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Điều kiện đủ: Phương trình $f^2(x) - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2m & (1) \\ f(x) = -2m & (2) \end{cases}$

+) Với $m = 1$, phương trình (1) vô nghiệm, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = x_0 > 1$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + m}{f^2(x) - 4m^2} = +\infty(-\infty)$ (do $f(x_0) + m = -m = -1 \neq 0$)

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{f(x) + m}{f^2(x) - 4m^2}$ có đúng 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = x_0$.

+) Với $m = -1$, phương trình (2) vô nghiệm, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = x_0 > 1$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + m}{f^2(x) - 4m^2} = +\infty(-\infty)$ (do $f(x_0) + m = -m = 1 \neq 0$)

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x) = \frac{f(x) + m}{f^2(x) - 4m^2}$ có đúng 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = x_0$.

Vậy $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		3		-1		$+\infty$

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Chọn C

phân biệt.

2 nghiệm dương t phân biệt khi $-1 < m < 3$.

trình $f(x^2) = m$ có 4 nghiệm x phân biệt.

$$f(x^2) - m$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$ 0 $-$	
$f(x)$		$+\infty$		3

$$g \cdot \dots \cdot g \cdot y \quad \dots \quad y \quad g^{(1)} \quad f(x) - m$$

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chon C

luôn khác 0 với mọi giá trị của m nên đồ thị $y = g(x)$ có nhiều nhất là 3 TCD

$$m = 1.$$

trị nguyên của m tmđb.

Phần 3: Biết giới hạn của hàm số $y = f(x)$ tại một điểm hoặc tại vô cực.

Dạng 9: Biết giới hạn của hàm số $y = f(x)$ tại một điểm hoặc tại vô cực, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 2$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

Lời giải

Chọn B

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận ngang ta suy ra được A là đáp án đúng.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $D = (0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận đứng và có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn C

Do $x = 0^+$ là một đầu mút của tập xác định và $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ (hay là trục Oy) là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $D = (0; +\infty)$, ta kiểm tra được giới hạn của hàm số tại $+\infty$ (không có giới hạn tại $-\infty$).

Theo giả thiết, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .

B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C) .

C. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .

D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C) .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{đường thẳng } y = 2 \text{ là tiệm cận ngang của } (C).$

- Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là
- A. 2.** **B. 1.** **C. 3.** **D. 0.**

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên $y = 0$, $y = 1$ là các đường tiệm cận ngang.

- Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $x = 1$ và $x = -1$.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ suy ra đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

- Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên R và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3}$ là:
- A. 3.** **B. 2.** **C. 0.** **D. 1**

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \cdot f(x) + \frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} = -2 \Rightarrow y = -2 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \cdot f(x) + \frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} = 4 \Rightarrow y = 4 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2\sqrt{10} \cdot f(-3) + 1}{x+3} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) + 1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2\sqrt{10} \cdot f(-3) + 1}{x+3} = \pm\infty$$

$\Rightarrow x = -3$ là tiệm cận đứng.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Số tiệm cận của hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{2019}{x^2 + 1}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Tập xác định của hàm số $g(x): D = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{2019}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2019}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang

$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{2019}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2019}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} + 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

Vậy có 2 đường tiệm cận.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = 1$ và hàm

số $y = g(x) = \frac{5f(x) - 1}{[f^2(x) + 1](2x - 3)}$. Trong các khẳng định sau về đồ thị hàm số $y = g(x)$,

khẳng định nào đúng:

A. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tiệm cận ngang $y = 2$ và không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tiệm cận ngang $y = 0$ và tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$.

D. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tiệm cận ngang $y = 2$ và tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5f(x)-1}{[f^2(x)+1](2x-3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5f(x)-1}{\frac{[f^2(x)+1]}{2x-3}} = 0$ suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y = g(x)$.

+) $\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^+} \frac{5f(x)-1}{[f^2(x)+1](2x-3)} = \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{2})^+} \frac{5f(x)-1}{\frac{[f^2(x)+1]}{2x-3}} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = \frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(1; +\infty)$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Xét hàm số $y = g(x) = \frac{[f(x)+1](2x+1)}{x-1} - 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.
- B. Đường thẳng $y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.
- C. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.
- D. Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{[f(x)+1](2x+1)}{x-1} - 3 \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)+1}{\frac{x-1}{2x+1}} - 3 \right) \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)+1]}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x+1}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = \frac{2+1}{\frac{1}{2}} - 3 = 3 \end{aligned}$$

Vậy đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là:

- A. 4.
- B. 3.
- C. 1.
- D. 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x) = \frac{1}{2f(x)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 0.$$

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

*) Tiệm cận đứng:

$$\text{Xét phương trình: } 2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < b < c$.

Đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a$, $x = b$ và $x = c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là bốn.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{3f(x)-1}{2f^2(x)-f(x)}.$$

Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0; x = \frac{1}{2}$.

B. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{8}{15}$.

C. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

D. Đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } g(x) = \frac{3f(x)-1}{2f^2(x)-f(x)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{2f(x)-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{2f(x)-1} \right) = 0 \text{ nên đồ thị không nhận } x = 1 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{2f(x)-1} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ nên đồ thị có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{8}{15}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $f(x) < 1$,

$\forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = \frac{2f^3(x) + f^2(x) - 2f(x) - 1}{f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) - 2}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số $g(x)$ có các đường tiệm cận ngang là $y = 2$ và $y = 0$.

B. Đồ thị hàm số $g(x)$ có các đường tiệm cận ngang là $y = -2$ và $y = 0$.

C. Đồ thị hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

D. Đồ thị hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = -2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f^3(x) + f^2(x) - 2f(x) - 1}{f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{f(x)} - \frac{2}{f^2(x)} - \frac{1}{f^3(x)}}{1 - \frac{4}{f(x)} + \frac{5}{f^2(x)} - \frac{2}{f^3(x)}} = 2 \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f^3(x) + f^2(x) - 2f(x) - 1}{f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2f(x)+1][f(x)+1][f(x)-1]}{[f(x)-1]^2[f(x)-2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2f(x)+1][f(x)+1]}{[f(x)-1][f(x)-2]} = +\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ và } f(x) < 1 \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 13. Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x^3 + 3x) - 1}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận.

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^3 + 3x \Rightarrow t' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
t'	+	
t	$-\infty$	$+\infty$

- Xét $f(x^3 + 3x) - 1 = 0$. Vì $y = f(x)$ là hàm số bậc ba nên phương trình $f(t) = 1$ có nhiều nhất 3 nghiệm t .

Từ bảng biến thiên ta suy ra với mỗi giá trị t có đúng một giá trị x .

Khi đó phương trình $f(x^3 + 3x) = 1$ có nhiều nhất 3 nghiệm x .

Do đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ có nhiều nhất 3 tiệm cận đứng.

- Xét $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x^3 + 3x) - 1} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(t) - 1} = 0$ (vì $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \pm\infty$).

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có nhiều nhất 4 đường tiệm cận.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. Hàm số $y = g(x) = f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ có bao nhiêu tiệm cận?.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3

Lời giải

Chọn B

+) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

+) Hàm số $y = g(x) = f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 2x + 3} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}} + 3$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \sqrt{3}$

Vậy có 1 tiệm cận ngang.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = x + 1$. Tìm số tiệm cận của hàm số

$$y = g(x) = 1 + \frac{\sqrt{f^2(x)+2}}{f(x)+2} + \frac{\sqrt[3]{f^3(x)+3}}{f(x)+3} + \dots + \frac{\sqrt[2020]{f^{2020}(x)+2020}}{f(x)+2020}.$$

A. 0.

B. 2.

C. 2019.

D. 2021

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -4; -5; \dots; -2021\}$

+) Với $x_i \in \{-3; -4; -5; \dots; -2021\}$ ta có $\lim_{x \rightarrow x_i^+} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_i^-} g(x) = -\infty$. Ta có đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2019 tiệm cận đứng.

+) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[k]{f^k(x)+k}}{f(x)+k} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2020$;

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[k]{f^k(x)+k}}{f(x)+k} = 1, k \text{ chẵn} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[k]{f^k(x)+k}}{f(x)+k} = -1, k \text{ lẻ} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$$

$\Rightarrow$ có 2 tiệm cận ngang

Vậy tổng số tiệm cận là 2021

Dạng 10: Biết giới hạn của hàm số $y = f(x)$ tại một điểm hoặc tại vô cực, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Có bao nhiêu giá trị

nguyên của tham số m thuộc $[-2020; 2020]$ để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{\sqrt{2f(x) - f^2(x)} + m}$

có tiệm cận ngang nằm bên dưới đường thẳng $y = -1$.

A. 4041.

B. 2019.

C. 1.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên khi $x \rightarrow +\infty$ thì $2f(x) - f^2(x) \rightarrow -\infty$ vì vậy $\sqrt{2f(x) - f^2(x)}$ không có nghĩa nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Xét $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

Trước hết $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2f(x) - f^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} [2f(x) - f^2(x)]} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)(\sqrt{x^2 + 3x} - x)}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1 \right)} = -\frac{3}{2}$$

Từ đó có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-3}{2m+2}$ nên đồ thị hàm số $g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

$$y = \frac{-3}{2m+2}.$$

Để tiệm cận ngang tìm được ở trên nằm dưới đường thẳng $y = -1$ thì điều kiện cần và đủ là

$$\frac{-3}{2m+2} < -1 \Leftrightarrow \frac{3}{2m+2} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 2m+2 \\ 2m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2} \text{ Tức có duy nhất giá trị nguyên}$$

$m = 0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Gọi S là tập hợp các giá trị

của tham số m để đồ thị của hàm số $g(x) = \frac{(x-1)[f^2(x)+3]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có tổng số tiệm cận đứng

và tiệm cận ngang bằng 2. Tính tổng các phần tử của S .

A. $-\frac{1}{2}$

B. -2 .

C. -3 .

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)[f^2(x)+3]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)[f^2(x)+3]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2} = 0$$

nên đồ thị hàm số $g(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

$$\text{Đặt } h(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2.$$

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng một tiệm cận đứng, điều này xảy ra khi và chỉ khi $h(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm

$x = 1$ hoặc $h(x) = 0$ có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ h(1) = 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2-2) > 0 \\ 1 + 2(m-1) + m^2 - 2 = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m = 1; m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy, tổng các phần tử của S là $-\frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Tập hợp tất cả các giá

trị thực của tham số m để đồ thị hàm $g(x) = \frac{f(x)+1}{\sqrt{m \cdot f^2(x)+2}}$ có hai đường tiệm cận là

A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

B. $(0; +\infty)$

C. $(-\infty; 0)$

D. $\{0\}$

Lời giải

Chọn B

TH1: $m = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)+1}{\sqrt{2}} = \pm\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

TH2: $m < 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^2(x) = +\infty$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (m \cdot f^2(x) + 2) = -\infty$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$ không tồn tại.

TH3: $m > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+1}{\sqrt{m \cdot f^2(x) + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)}{|f(x)| \sqrt{m + \frac{2}{f^2(x)}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)}{\sqrt{m + \frac{2}{f^2(x)}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)+1}{\sqrt{m \cdot f^2(x) + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)}{|f(x)| \sqrt{m + \frac{2}{f^2(x)}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)}{\sqrt{m + \frac{2}{f^2(x)}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = \frac{1}{\sqrt{m}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Tóm lại, tập hợp cần tìm là $(0; +\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong $(-2019; 2019)$ để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{4036f(x)+2}{\sqrt{mf^2(x)+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. 0.

B. 2018.

C. 4036.

D. 25.

Lời giải

Chọn B

-Với $m < 0$ ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [mf^2(x) + 3] = -\infty$, tức $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$ không tồn tại. Đồ thị hàm số $g(x)$ không có tiệm cận ngang.

-Với $m = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (4036f(x) + 2) = \pm\infty$. Đồ thị hàm số $g(x)$ không có tiệm cận ngang.

-Với $m > 0$, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D = \mathbb{R}$.

Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \left(4036 + \frac{2}{f(x)} \right)}{f(x) \sqrt{m + \frac{3}{f^2(x)}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4036 + \frac{2}{f(x)}}{\sqrt{m + \frac{3}{f^2(x)}}} = \frac{4036}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) \left(4036 + \frac{2}{f(x)} \right)}{-f(x) \sqrt{m + \frac{3}{f^2(x)}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4036 + \frac{2}{f(x)}}{-\sqrt{m + \frac{3}{f^2(x)}}} = -\frac{4036}{\sqrt{m}}.$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = \frac{4036}{\sqrt{m}}$, $y = -\frac{4036}{\sqrt{m}}$.

$$\text{Từ tất cả ở trên ta có } \begin{cases} m > 0 \\ m \in (-2019; 2019) \Leftrightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 2018\}. \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy, có 2018 giá trị nguyên của m .

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Có bao nhiêu

số nguyên dương m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(\sqrt{3x+1}-2)f(x)}{(x^2-4x+m)\sqrt{f^2(x)+1}}$ có đúng 2 đường tiệm

cận.

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$: $x \geq -\frac{1}{3}; x^2 - 4x + m \neq 0$.

Vì $x \geq -\frac{1}{3}$ nên không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

Vì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow f(x) > 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \cdot (\sqrt{3x+1}-2)}{\sqrt{f^2(x)+1} \cdot (x^2-4x+m)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{f^2(x)}}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{m}{x^2}} = 1 \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

$$\text{Ta có } g(x) = \frac{(\sqrt{3x+1}-2)f(x)}{(x^2-4x+m)\sqrt{f^2(x)+1}} = \frac{(3x-3)f(x)}{(x^2-4x+m)(\sqrt{3x+1}+2)\sqrt{f^2(x)+1}}.$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng hai tiệm cận khi và chỉ khi nó có đúng một tiệm cận đứng, tức là phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có nghiệm kép $x_0, x_0 \geq -\frac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

trong đó $x_1 = 1, x_2 \neq 1, x_2 \geq -\frac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 trong đó

$$x_3 < -\frac{1}{3}, x_4 \geq -\frac{1}{3}, x_4 \neq 1.$$

Xét bảng biến thiên của hàm số $h(x) = -x^2 + 4x$:

x	$-\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$-x^2 + 4x$	$-\frac{13}{9}$	3	4	$-\infty$

Ta có $x^2 - 4x + m = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 + 4x$ (1).

Từ bảng biến thiên suy ra $\begin{cases} m = 4 \\ m = 3 \\ m < -\frac{13}{9} \end{cases}$. Do m là số nguyên dương nên $m \in \{3; 4\}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Trên đoạn

$[-2020; 2020]$ có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x)+2}{\sqrt{(m+1) \cdot f^2(x) + 2020}}$ có

hai tiệm cận ngang.

A. 2020.

B. 2021.

C. 4041.

D. 2000.

Lời giải

Chọn B

Nếu $m+1 < 0$ thì $-\sqrt{-\frac{2020}{m+1}} < f(x) < \sqrt{-\frac{2020}{m+1}} \forall x \in \mathbb{R}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Nếu $m+1 = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)+2}{\sqrt{2020}} = \pm\infty$. Túc đồ thị hàm số $g(x)$ không có tiệm cận ngang.

$$\begin{aligned} \text{Nếu } m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+2}{\sqrt{(m+1) \cdot f^2(x) + 2020}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \left(1 + \frac{2}{f(x)}\right)}{f(x) \cdot \sqrt{m+1 + \frac{2020}{f(x)}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{f(x)}}{\sqrt{m+1 + \frac{2020}{f(x)}}} = \frac{1}{\sqrt{m+1}}. \end{aligned}$$

Do đó đường thẳng $y = \frac{1}{\sqrt{m+1}}$ là tiệm cận ngang của ĐTHS.

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)+2}{\sqrt{(m+1) \cdot f^2(x) + 2020}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) \left(1 + \frac{2}{f(x)}\right)}{-f(x) \cdot \sqrt{m+1 + \frac{2020}{f(x)}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{f(x)}}{-\sqrt{m+1 + \frac{2020}{f(x)}}} = \frac{-1}{\sqrt{m+1}}$$

Do đó đường thẳng $y = \frac{-1}{\sqrt{m+1}}$ là tiệm cận ngang của ĐTHS.

Vậy trên đoạn $[-2020; 2020]$ có 2021 số nguyên m thỏa mãn.

Phần 4: Biết biểu thức hoặc đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm tiệm cận của hàm số $y = g(x)$.

Dạng 11: Biết biểu thức hoặc đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm tiệm cận của hàm số $y = g(x)$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'		+	+	0	-
y		1	3	2	-1

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x)-m}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

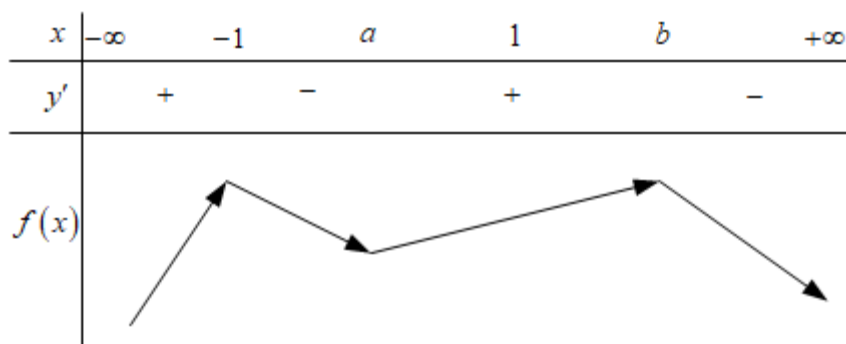
Lời giải

Chọn D

Để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) - m = 0$ phải có nghiệm.

Từ bbt của hàm số $y = f'(x)$ suy ra tồn tại a, b sao cho $\begin{cases} -1 < a < 1 < b \\ f'(a) = f'(b) = 0 \end{cases}$

Từ đó ta có bbt của hàm số $y = f(x)$ như sau

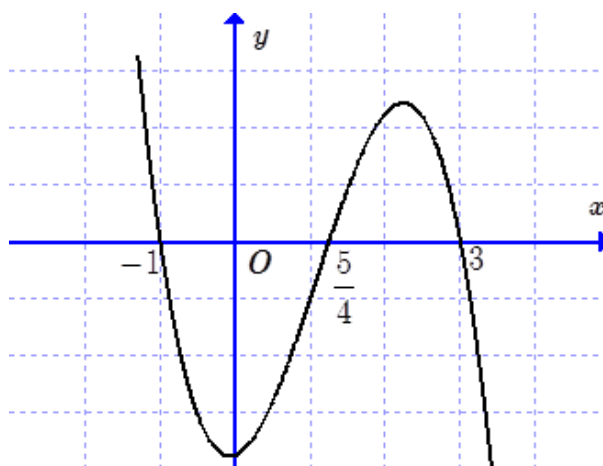


Suy ra phương trình $f(x) - m = 0$ có nhiều nhất là 4 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020}{f(x) - m}$ có nhiều nhất 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 2. Cho hàm số $g(x) = \frac{2019}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$), $h(0) = 0$.

Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng ?

A. 2 .

B. 10.

C. 71.

D. 2019.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị suy ra $h'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3) = m(4x^3 - 13x^2 - 2x + 15)$ và $m < 0$.

Ta được $h(x) = m\left(x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x\right)$.

Đồ thị $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $h(x) = m^2 - m$ có 2 nghiệm phân biệt.

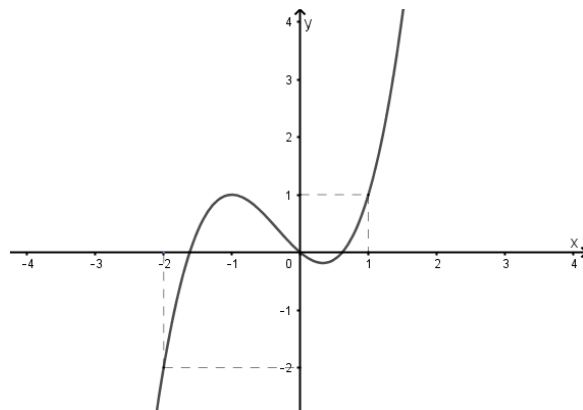
$$\Leftrightarrow f(x) = x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x = m + 1 \text{ có 2 nghiệm phân biệt.}$$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$.

x	$-\infty$	-1		$\frac{5}{4}$		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{8575}{768}$		0	$+\infty$
		$\frac{-32}{3}$					

Do đó $m + 1 \in \left(\frac{-32}{3}; 0\right) \Leftrightarrow m \in \left(\frac{-35}{3}; -1\right)$. Vậy có 10 số nguyên m .

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Xét hàm số $y = \frac{1}{f(x) - \frac{x^2}{2}}$. Đặt $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, tìm điều kiện để đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{f(x) - \frac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

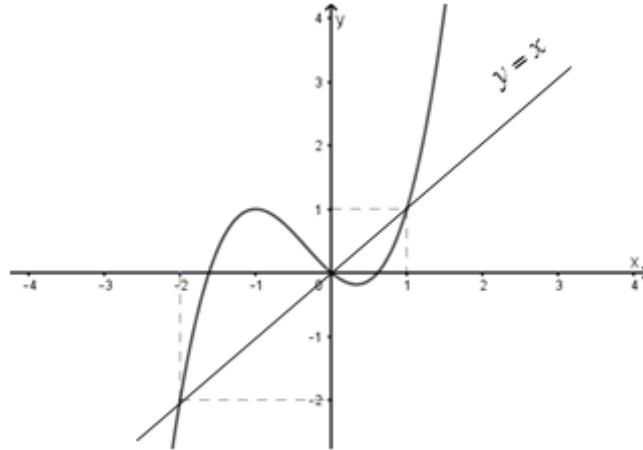
- A. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}$.
- B. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(1) \cdot g(-2) > 0 \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) > 0 \end{cases}$.
- D. $\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(-2) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x) - \frac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng $\Rightarrow$ Phương trình $f(x) - \frac{x^2}{2} = 0$ phải

có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.



Ta có: $g'(x) = f'(x) - x$.

$$g'(0) = f'(0) - 0 = 0, \quad g'(1) = f'(1) - 1 = 0, \quad g'(-2) = f'(-2) + 2 = 0.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra

- $f'(x) < x, \forall x \in (0; 1) \cup (-\infty; -2) \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0; 1) \cup (-\infty; -2)$.
- $f'(x) > x; \forall x \in (1; +\infty) \cup (-2; 0) \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (1; +\infty) \cup (-2; 0)$.

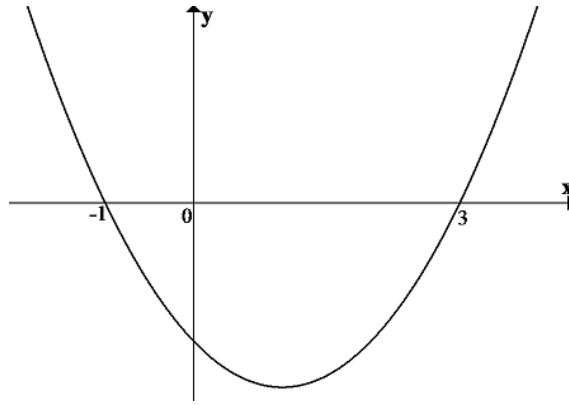
Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$		$g(-2)$	$g(0)$	$g(1)$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases} \quad \text{Vậy chọn B.}$$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 3. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ và $f(-1) < 20$.



Giá trị của m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x) - 20}{f(x) - m}$ có 4 tiệm cận là

A. $m < f(3)$.

B. $f(3) < m < f(-1)$.

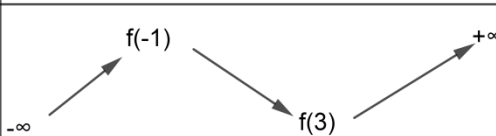
C. $m > f(-1)$.

D. $f(3) \leq m \leq f(-1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)					

ĐK: $f(x) \neq m$

Nếu $m \neq 20$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Nếu $m = 20$ thì

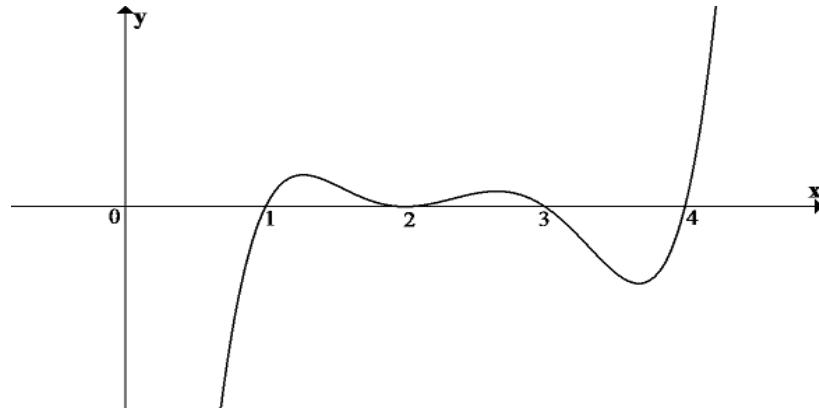
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - 20}{f(x) - m} = 1 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = 1$ là TCN của đồ thị hàm số.

Phương trình $f(x) = 20$ có một nghiệm $x = a > 3$ vì $f(-1) < 20$.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 tiệm cận khi phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt khác a .

Suy ra $f(3) < m < f(-1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(1) - 2 < 0$ và $3f(a) - a^3 + 3a > 0, \forall a > 2$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x+1}{3f(x+2)-x^3+3x}$ có có số tiệm cận đứng là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $f(x) = 20$ có một nghiệm $x = a > 3$ vì $f(-1) < 20$.

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra $f(x)$ là đa thức bậc 6 và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

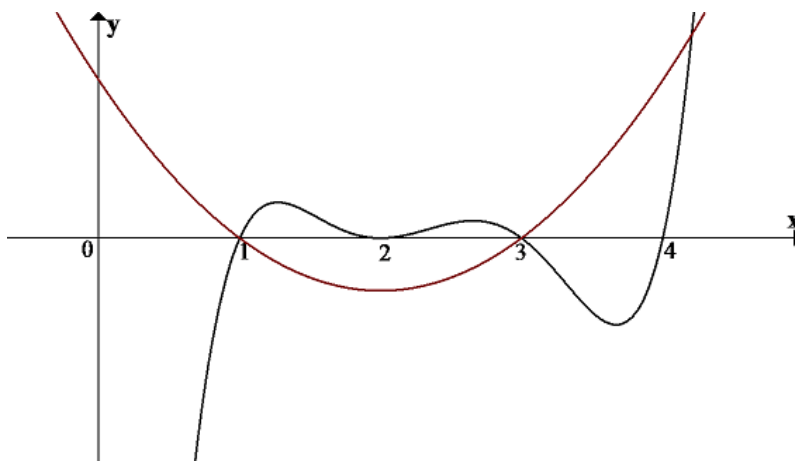
ĐK: $h(x) = 3f(x+2) - x^3 + 3x \neq 0$.

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm $g(x)$ bằng số nghiệm của $h(x)$ khác -1 .

Ta đi tìm số nghiệm của phương trình $h(x) = 0$.

$h'(x) = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3$. Đặt $t = x+2 \Rightarrow h'(x) = k(t) = 3(f'(t) - t^2 + 4t - 3)$.

Khi đó $k(t) = 3(f'(t) - t^2 + 4t - 3) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t^2 - 4t + 3 (*)$



Sử dụng đồ thị nhận thấy (*) có 3 nghiệm là $t=1; t=3; t=a > 4 \Rightarrow x=-1; x=1; x=a-2=b > 2$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau :

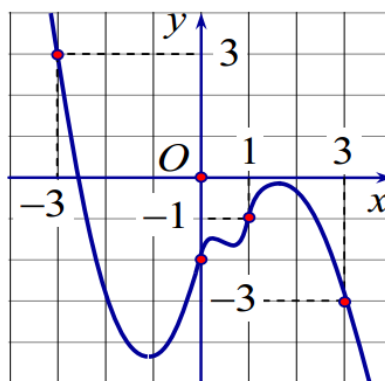
x	$-\infty$	-1	1	b	$+\infty$		
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$		$h(1)$		$h(b)$		$+\infty$

Ta có: $h(-1) = 3f(1) - 2 < 0$; $h(b) = 3f(a) - a^3 + 3a > 0$; $a > 2$.

Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$ ta thấy $h(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1 .

Vậy $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x) = \frac{3}{2f(x) + x^2 + 4}$. Biết rằng $f(1) = -24$. Hỏi trên đoạn $[-3; 3]$ đồ thị hàm số $y = h(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2 + 4 \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot (f'(x) + x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ ta được:

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	-	0	+	0
$g(x)$	$g(-3)$				$g(3)$

Gọi a là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. Ta có:

$$\int_{-3}^a |f'(x)| dx < \int_a^3 |f'(x)| dx \Leftrightarrow f(a) - f(-3) < -(f(3) - f(a)) \Leftrightarrow f(-3) > f(3) \Leftrightarrow g(-3) > g(3).$$

$$\text{Lại có: } \int_1^3 g'(x) dx < 4 \Leftrightarrow g(3) - g(1) < 4 \Leftrightarrow g(3) < g(1) + 4 \Leftrightarrow g(3) < -39 \Rightarrow g(3) < 0.$$

S_{ABCD} là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi 4 đường thẳng: $x = -3; x = 1; y = -5; y = 3$.

$$\text{Mặt khác: } \int_{-3}^1 (-g'(x)) dx < S_{ABCD} = 32 \Leftrightarrow g(-3) - g(1) < 32 \Leftrightarrow g(-3) < -11.$$

Do đó phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm, vậy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

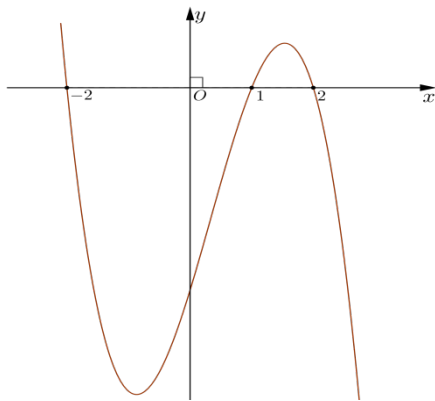
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(1) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020x}{f^2(x) + f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A.3.

B.2.

C.5.

D.4.



Lời giải

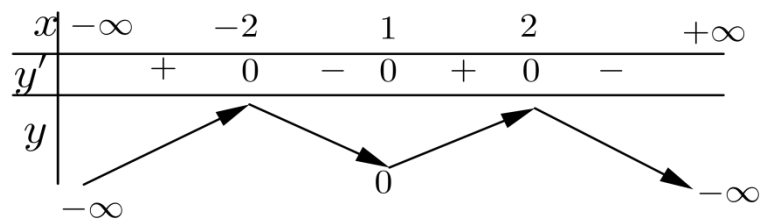
Chọn C

$$f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}, f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Ta lập được bảng biến thiên của hàm số



Từ bảng biến thiên ta có:

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0

Phương trình $f(x) = -1$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020x}{f^2(x) + f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng