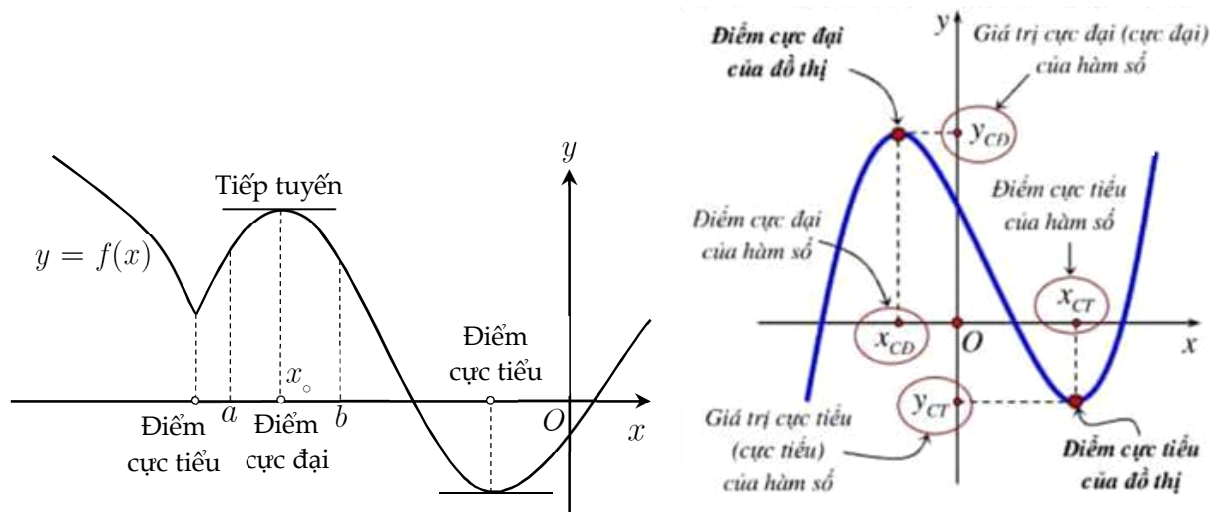


§ 2. CỘC TRÒ CỦA HÀM SỐ

☆☆☆

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khái niệm cực đại, cực tiểu



Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $(a; b)$, (có thể a là $-\infty$, b là $+\infty$) và $x_0 \in (a; b)$:

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Các định lí

1. Định lí 1 (điều kiện cần)

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

2. Định lí 2 (điều kiện đủ)

Giả sử $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Nói cách khác:

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **âm sang dương** khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **dương sang âm** khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm x_0 .

2. Định lý 3

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

- Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.
- Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Chú ý. Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm, chẳng hạn hàm số $y = |x|$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng toán 1: Tìm điểm cực đại, cực tiểu, giá trị cực đại, giá trị cực tiểu



★ **Bài toán:** Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

✎ **Phương pháp:**

- **Bước 1.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 2).

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		1		$-\infty$

- Hàm số đạt cực tiểu tại: $x = -1$.
- Hàm số đạt cực đại tại: $x = 2$.
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số: $y_{\text{CĐ}} = 1$.
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số: $y_{\text{CT}} = -3$.
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số: $M(2; 1)$.
- Điểm cực tiểu đồ thị hàm số: $N(-1; -3)$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3		-2		$+\infty$

- Hàm số đạt cực tiểu tại:
- Hàm số đạt cực đại tại:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số:
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số:
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+\infty$
			$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
				$-\infty$	$\searrow$
					$+\infty$

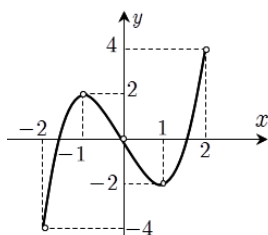
- Hàm số đạt cực tiểu tại:
- Hàm số đạt cực đại tại:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số:
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số:
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$+\infty$
			$+\infty$	$\nearrow$	4
				$-\infty$	$\searrow$
					$+\infty$

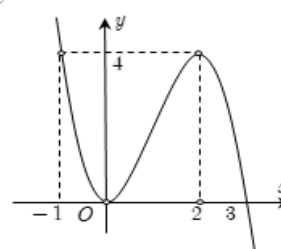
- Hàm số đạt cực tiểu tại:
- Hàm số đạt cực đại tại:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số:
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số:
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị:



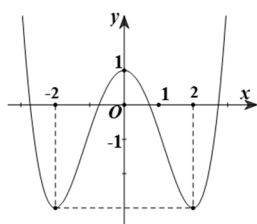
- Hàm số đạt cực tiểu tại:
- Hàm số đạt cực đại tại:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số:
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số:
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị:



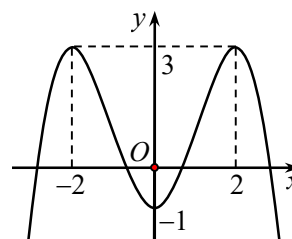
- Hàm số đạt cực tiểu tại:
- Hàm số đạt cực đại tại:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:
- Giá trị CT (cực tiểu) của hàm số:
- Điểm cực đại của đồ thị hàm số:
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị:



- Hàm số đạt cực tiểu tại:
- Hàm số đạt cực đại tại:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:

8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị:



- Hàm số đạt cực tiểu tại:
- Hàm số đạt cực đại tại:
- Giá trị CĐ (cực đại) của hàm số:

8. Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ bằng

- A. 3. B. -1.
C. 1. D. 4.

Lời giải. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Giá trị cực đại $y_{\text{CB}} = 3$. Chọn A.

9. Giá trị cực đại hàm số $y = x^3 - 12x - 1$ bằng

- A. -17. B. -2.
C. 45. D. 15.

10. Điểm cực đại của đồ thị hàm số:

$$y = -x^3 - 3x^2 + 1 \text{ là}$$

- A. $x = 0$. B. $M(-2; -19)$.
C. $N(0; 1)$. D. $x = -2$.

11. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

$$y = -x^4 + 2x^2 + 5 \text{ là}$$

- A. $A(-1; 6)$. B. $x = 0$.
C. 5. D. $B(0; 5)$.

12. Điểm cực đại của đồ thị hàm số:

$$y = x^4 - 4x^2 + 3 \text{ là}$$

- A. $(0; -1)$. B. $(0; 3)$.
C. $(\sqrt{2}; -1)$. D. $(-\sqrt{2}; -1)$.

13. Giá trị của tiểu của đồ thị hàm số

$$y = -x^4 + 2x^2 + 2 \text{ bằng}$$

- A. 2. B. $(0; 2)$.
C. $(1; 3)$. D. 3.

14. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. $x = -1$. B. $x = -2$.
C. $x = 0$. D. $(-2; -3)$.

15. Gọi M, n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$.

Giá trị của $M^2 - 2n$ bằng

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

16. Tìm giá trị cực đại y_{CD} (nếu có) của hàm số $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$.

- A. $y_{\text{CD}} = 0$. B. $y_{\text{CD}} = 2$.
C. $y_{\text{CD}} = 3$. D. $y_{\text{CD}} = \sqrt{3}$.

17. Tìm cực đại của hàm số $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 1

Câu 1. (Đề thi THPT QG năm 2019 – Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên:

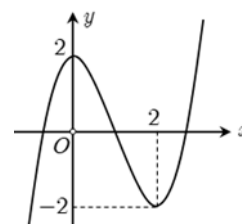
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		↗ 2		↘ -2		↗ $+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 2. (Sở GD & ĐT Tp. HCM năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào đúng ?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.
D. Hàm số có ba điểm cực trị.



Câu 3. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2018) Hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 0.
C. 2. D. 3.

Câu 4. (Sở GD & ĐT Bạc Liêu 2019) Điểm cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

- A. $x = 11$. B. $x = 3$.
C. $x = 7$. D. $x = -1$.

Câu 5. (THPT Thăng Long – Hà Nội 2018) Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. Điểm cực tiểu của hàm số là

- A. $x = 1$. B. $(0; -1)$.
C. $x = -1$. D. $x = 0$.

Câu 6. (THPT Nhân Chính Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$. Mệnh đề nào sai ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -4)$.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
D. Hàm số không có cực trị.

Câu 7. (Sở GD & ĐT Tp. HCM – CỤM 5 năm 2017) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ bằng

- A. $4\sqrt{5}$.
B. 4.
C. 8.
D. $5\sqrt{2}$.

18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x) = x^3(x-2)^2(x-9)$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = 0$. B. $x = 2$.
C. $x = 9$. D. $x = 1$.

Lời giải. Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = x^3(x-2)^2(x-9) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \\ x-9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 9 \end{cases}$$

Bảng xét dấu $f'(x)$ (mỗi ô trừ 1 điểm):

x	$-\infty$	0	2	9	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Hàm số đã cho $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 9$.

Chọn đáp án C.

19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x) = (x-1)(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm

- A. $x = 1$. B. $x = 2$.
C. $x = 3$. D. $x = 0$.

20. Cho hàm $f(x)$ có $f'(x) = x^2(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ là

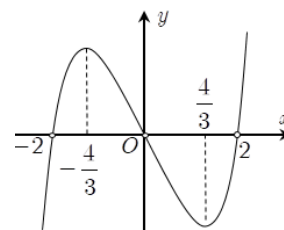
- A. $x = -2$. B. $x = 0$.
C. $x = 1$. D. $x = -3$.

21. Cho hàm số $y = f(x)$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-2)^3(2x+3)$, $\forall x$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

22. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào **đúng** ?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -4/3$.
B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.
C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \pm 2$.
D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 4/3$.



Lời giải tham khảo

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục $Ox : y = 0$ tại $x = \pm 2, x = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$.

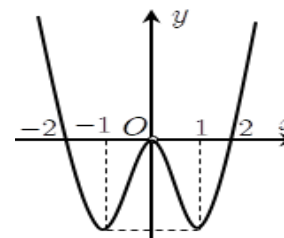
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = \pm 2$. **Chọn đáp án C.**

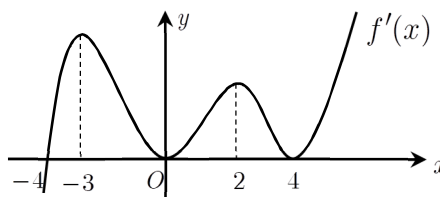
23. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào **đúng** ?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \pm 1$.
B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.
C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.
D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$.



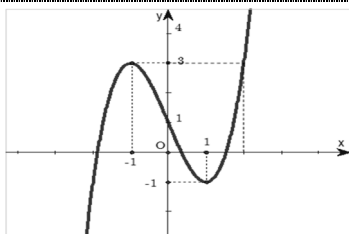
2.1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K , hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A.** 1.
B. 4.
C. 3.
D. 2.



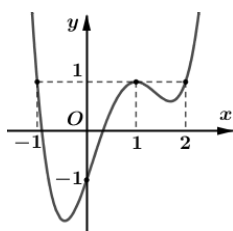
24. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x) - 3x + 2019$ có mấy điểm cực trị ?

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.



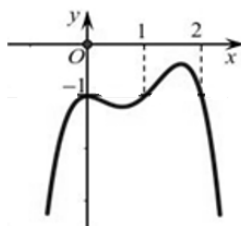
25. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ đạt cực đại tại

- A. $x = -1$.
B. $x = 0$.
C. $x = 1$.
D. $x = 2$.



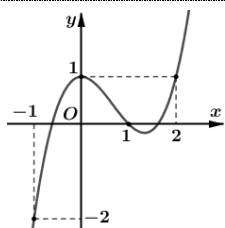
26. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xác định giá cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$.

- A. $f(1) + 1$.
B. $x = 1$.
C. $f(0)$.
D. $f(2) + 2$.



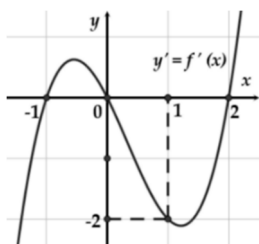
27. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình. Hỏi hàm $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại

- A. $x = -1$.
B. $x = 0$.
C. $x = 1$.
D. $x = 2$.



28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = 3f(x^2 - 2) + \frac{3}{2}x^4 - 3x^2$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm

- A. $x = -1$.
B. $x = 1$.
C. $x = 0$.
D. $x = 2$.



BÀI TẬP VỀ NHÀ 2

Câu 8. (THPT Lê Quý Đôn – Đà Nẵng 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$. Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

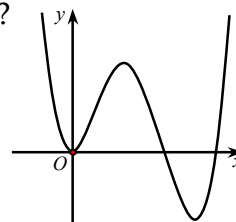
- A. $x = 2$.
- B. $x = 3$.
- C. $x = 1$.
- D. $x = 0$.

Câu 9. (THPT Chuyên Lê Thánh Tông – Quảng Nam 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2018}(x-2)^{2019}$. Khẳng định nào **đúng**?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 2$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.
- D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

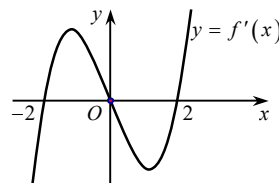
Câu 10. (THPT HOA LƯU A – Hà Nội năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ. Mệnh đề nào **đúng**?

- A. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
- B. Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
- C. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
- D. Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.



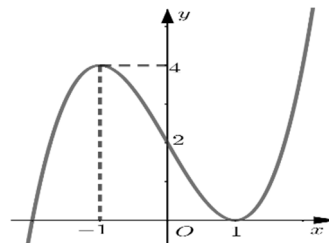
Câu 11. (Sở GD & ĐT Hậu Giang 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào **đúng**?

- A. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- B. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- C. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
- D. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = \pm 2$.



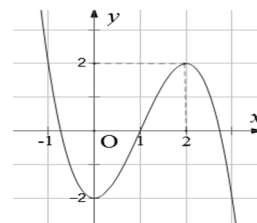
Câu 12. (THPT Chuyên Lương Văn Chánh – Phúc Yên 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

- A. 2.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 1.



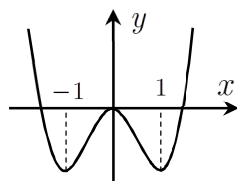
Câu 13. (THPT Mộ Đức – Quảng Ngãi năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng về cực trị của hàm số $g(x) = f(x) + x$.

- A. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- B. Hàm số không có điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- C. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- D. Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.



29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có mấy cực trị ?

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.

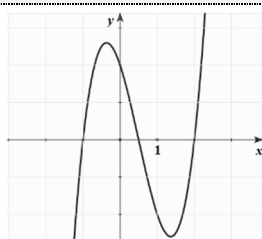


Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$. Hãy nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

-
-

30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

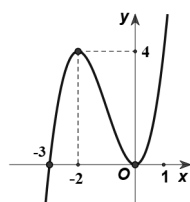
- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.



-
-
-
-

31. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có dạng như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |x^3 + 3x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.



-
-
-
-

32. (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 102 câu 42) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$			

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.

-
-
-
-

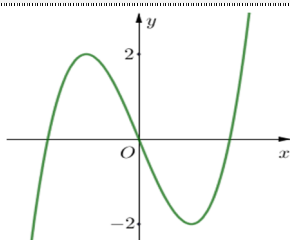
33. Cho hàm số $y = |x^4 - ax^2 - b|$ với a, b là hai số thực dương. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 3.
B. 7.
C. 6.
D. 5.

-
-
-
-

34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có mấy cực trị ?

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.

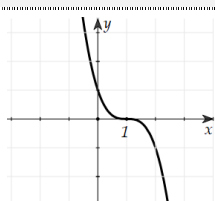


Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$. Hãy nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.

-
-

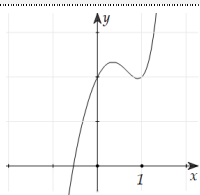
35. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ có đồ thị như hình. Đồ thị $y = -|x|^3 + 3x^2 - 3|x| + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.



36. Cho hàm số $y = x^5 - 3x^2 + 2x + 2$ có đồ thị bên. Đồ thị $y = |x|^5 - 3x^2 + 2|x| + 2$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 5.
B. 2.
C. 3.
D. 4.



37. (THPT Chuyên Đại Học Vinh 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	6	2	$+\infty$			

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 1.

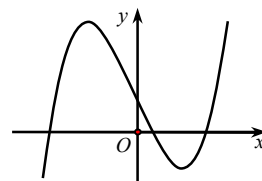
38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

- A. 2.
B. 3.
C. 5.
D. 1.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 3

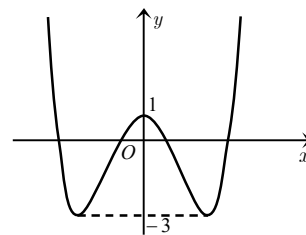
Câu 14. (THPT Hoa Lư A – Ninh Bình năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 5.
B. 3.
C. 2.
D. 4.



Câu 15. (Sở GD & ĐT Đồng Tháp 2019) Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ. Hàm số $y = |ax^4 + bx^2 + c|$ có bao nhiêu cực trị ?

- A. 3.
B. 5.
C. 6.
D. 7.



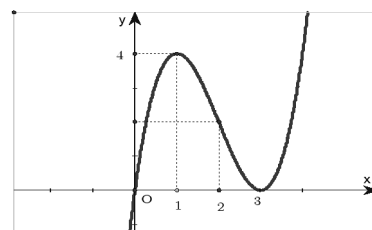
Câu 16. (Sở GD & ĐT Trà Vinh 2019) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số $y = |f(x)|$ có mấy cực trị ?

- A. 5.
B. 3.
C. 2.
D. 4.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$	

Câu 17. (Sở GD & ĐT Bình Dương 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có bảng biến thiên dưới. Hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$ có mấy cực trị ?

- A. 3.
B. 5.
C. 6.
D. 7.



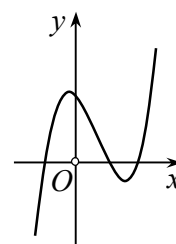
Câu 18. (Sở GD & ĐT Phú Thọ năm 2017) Cho bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x$ bên dưới. Hàm số $y = |x^3 - 3x|$ có mấy điểm cực trị ?

- A. 5.
B. 3.
C. 2.
D. 4.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 19. (Sở GD & ĐT Đồng Nai năm 2018) Cho đồ thị hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$ như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$ có mấy điểm cực trị ?

- A. 5.
B. 3.
C. 2.
D. 1.



39. Gọi A, B lần lượt là hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ và C là điểm cực đại. Tính độ dài AB và diện tích tam giác OAB với O là gốc tọa độ. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Có } y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$

```

graph LR
    A[+\infty] --> B[2]
    B --> C[3]
    C --> D[2]
    D --> E[+\infty]
  
```

Hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $A(-1;2)$, $B(1;2)$ và điểm cực đại là $C(0;3)$.

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = 2.$

- Tính diện tích ΔOAB với $O(0;0)$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (-1;2) \\ \overrightarrow{OB} = (1;2) \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |-1 \cdot 2 - 1 \cdot 2| = 2.$$

- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC :

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(0; \frac{7}{3}\right).$$

Cần nhớ:

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- I là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

- G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

- Diện tích tam giác ΔABC :

$$\text{Tính } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (a;b) \\ \overrightarrow{AC} = (c;d) \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |ad - bc|.$$

40. Gọi A, B lần lượt là hai điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 8x^2 - 2$ và C là điểm cực tiểu. Tính độ dài AB và diện tích tam giác OAB với O là gốc tọa độ. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC .

41. Gọi A, B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Tìm tọa độ trọng tâm G và diện tích của ΔOAB . Tính AB .

42. Biết $M(0;2)$ và $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

Lời giải. Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

• Do điểm $M(0;2)$ là cực trị

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ M(0;2) \in y = ax^3 + bx^2 + cx + d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \quad (1)$$

• Do điểm $N(2;-2)$ là cực trị

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ N(2;-2) \in y = ax^3 + bx^2 + cx + d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12a + 4b + c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow a = 1; b = -3; c = 0; d = 2$.

Do đó: $y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(-2) = -18$.

Cần nhớ:

Nếu $M(x_0; y_0)$ là cực trị của đồ thị hàm số

$$y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ M(x_0; y_0) \in y = f(x) \end{cases}$$

Nếu là điểm cực đại, bổ sung $y''(x_0) < 0$.

Nếu là điểm cực tiểu, bổ sung $y''(x_0) > 0$.

43. Đồ thị hàm số $y = 2x^3 + bx^2 + cx + 1$ có $M(1;-6)$ là một điểm cực trị. Tìm tọa độ điểm cực trị còn lại của đồ thị hàm số đó.

44. Biết $A\left(1; \frac{7}{2}\right)$, $B(2;3)$ là các điểm cực trị của đồ thị $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm $y(3)$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 4

- Câu 20.** (THPT Chuyên Vĩnh Phúc năm 2018) Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}$. Tọa độ trung điểm của AB là
- A. $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
C. $(0; 1)$. D. $(1; 0)$.
- Câu 21.** (THPT Hậu Lộc 2 – Thanh Hóa 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C) . Gọi A, B là các điểm cực trị của (C) . Độ dài đoạn thẳng AB bằng
- A. $2\sqrt{5}$. B. 5.
C. 4. D. $5\sqrt{2}$.
- Câu 22.** (THPT Quảng Xương – Thanh Hóa 2018) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có hai điểm cực trị A, B . Diện tích tam giác OAB với $O(0; 0)$ là gốc tọa độ bằng
- A. 2. B. $\frac{1}{2}$.
C. 1. D. 3.
- Câu 23.** (THPT Hoa Lư A – Ninh Bình năm 2018) Gọi A và B là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Diện tích của tam giác OAB (O là gốc tọa độ) bằng
- A. 2.
B. 4.
C. 1.
D. 3.
- Câu 24.** (THPT Thạch Thành – Thanh Hóa 2018) Đồ thị hàm số $y = x^4 + ax^2 + b$ có điểm cực tiểu là $M(-1; 4)$. Giá trị của $2a + b$ bằng
- A. -1. B. 1.
C. 0. D. 2.
- Câu 25.** (THPT Kim Liên – Hà Nội 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có điểm cực trị là $A(1; 3)$. Giá trị của $4a - b$ bằng
- A. 3. B. 2.
C. 4. D. 1.
- Câu 26.** (Sở GD & GD Thanh Hóa năm 2018) Đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(1; 0)$ và có điểm cực trị $M(-2; 0)$. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2 + c^2$ bằng
- A. 25.
B. -1.
C. 7.
D. 14.

Dạng toán 2. Tìm tham số m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ cho trước.
Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị

☆☆☆

★ **Bài toán.** Tìm tham số để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = x_0$?

✎ **Phương pháp:**

• **Bước 1.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$. Tính đạo hàm y' .

• **Bước 2.** Dựa vào nội dung định lý 1:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

• **Bước 3.** Với m vừa tìm, thế vào hàm số và thử lại (dựa vào định lý 2 và 3).

📖 **Lưu ý:**

— Đối với hàm số bậc ba nên thử lại bằng nội dung định lý 3 (phù hợp trắc nghiệm).

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(a; b)$.

Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

— Đối với các hàm khác chẳng hạn như bậc bốn trùng phương (thiếu b), hoặc hàm phân thức,... nên thử lại bằng định lý 2 (tính y' và xét dấu, lập bảng biến thiên).

1. Cho hàm $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$.

Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = 1$. B. $m = 5$.

C. $m \in \{1; 5\}$. D. $m > 3$.

Lời giải. Có $\begin{cases} y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4 \\ y'' = 2x - 2m \end{cases}$.

Vì $x = 3$ là cực đại $\Rightarrow \begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$.

Cần nhớ: Hàm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

• $x = x_0$ là cực đại $\Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$.

• $x = x_0$ là cực tiểu $\Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$.

2. Cho hàm $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m^2 - m + 1)x$.

Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = 2$. B. $m = 3$.

C. $m = -1$. D. $m = 0$.

3. Cho $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

- A. $m = -1$. B. $m = 5$.
C. $m = 1$. D. $m = -7$.

4. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

- A. $m < -1$. B. $m = -1$.
C. $m \leq -1$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus (-1; 1)$.

$$y' = 4x^3 - 4(m + 1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{cases}$$

- $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y			

HS đạt cực tiểu tại $x = 0$ nên nhận $m = -1$.

- $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ và có bảng xét dấu:

- $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$ và có bảng xét dấu

5. Hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$ khi

- A. $m \geq 0$. B. $-1 \leq m < 0$.
C. $m < -1$. D. $m > 0$.

6. Hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m - 5$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$ khi

- A. $m = -1$. B. $m \neq -1$.
C. $m = 1$. D. $m \neq 1$.

7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. Viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

- A. $y = 8x + 2$. B. $y = -8x - 2$.
C. $y = 8x - 2$. D. $x - 3y - 1 = 0$.

Lời giải 1. Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là đường thẳng $y = \alpha x + \beta$ với $\alpha x + \beta$ là phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y' .

Chia đa thức:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 9x + 1 \quad | \quad 3x^2 - 6x - 9 \\ - \quad x^3 - 2x^2 - 3x \quad \quad \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \\ \hline -x^2 - 6x + 1 \\ - \quad -x^2 + 2x + 3 \\ \hline \boxed{-8x - 2} \end{array}$$

Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị là $y = -8x - 2$. **Chọn đáp án B.**

Cách 2. Sử dụng casio bấm MODE 2 và

$$y - \frac{y' \cdot y''}{3y'''} \xrightarrow[m=100]{\text{CALC } x=i} \beta + \alpha i \Rightarrow y = \alpha x + \beta.$$

9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

- A. $y = x - 4$. B. $y = 2x + 2$.
C. $y = -x + 1$. D. $y = -2x + 2$.

8. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

- A. $y = -x + 2$. B. $y = x - 2$.
C. $y = -2x + 1$. D. $y = 2x - 1$.

10. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. Viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

- A. $y + 7 = 0$. B. $y = 2x + 1$.
C. $y = 2x - 1$. D. $y = 7x - 1$.

11. Tìm m để đường thẳng nối điểm cực đại với điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - x + m$ đi qua điểm $M(3; -1)$. 	12. Tìm m để đường thẳng nối điểm cực đại với điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ qua $M(0; 1)$.
13. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $d : y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Lời giải. Sử dụng casio, tìm được đường thẳng nối hai điểm cực trị là $d' : y = -2x + 1$. Vì $d \perp d' \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$ $\Leftrightarrow (2m - 1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$ Cần nhớ: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $d_1 : y = a_1x + b_1$ và $d_2 : y = a_2x + b_2$ thì $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases} \text{ và } d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 = -1.$	14. Tìm m để đường thẳng $d : y = x + 2$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m + 1)x^2 + 6mx$.
15. Tìm giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ song song với đường thẳng $d : y = -4x + 3$. 	16. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ vuông góc với đường thẳng $d : 4x + y - 3 = 0$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 5

- Câu 27.** (Đề thi THPT Quốc Gia năm 2017 – Mã đề 102 câu 32) Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.
- A. $m = 1$. B. $m = -1$.
C. $m = 5$. D. $m = -7$.
- Câu 28.** (THPT Ngô Sĩ Liên – Bắc Giang năm 2018) Biết rằng hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. Giá trị của m bằng
- A. 4. B. 3.
C. 2. D. 1.
- Câu 29.** (THPT Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng năm 2018) Tìm tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$ đạt cực đại tại điểm $x_0 = 1$.
- A. $m \neq 0, m \neq 2$. B. $m = 2$.
C. $m = 0$. D. $m = 0, m = 2$.
- Câu 30.** (THPT Kiến An – Hải Phòng năm 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- A. $m = 1$. B. $m = -4$.
C. $m = -2$. D. $m = 2$.
- Câu 31.** (THPT Việt Trì – Phú Thọ 2018) Hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 3(m - 1)^2x$. Hàm số đạt cực trị tại điểm có hoành độ $x = 1$ khi
- A. $m = 1$. B. $m = 0, m = 4$.
C. $m = 4$. D. $m = 0, m = 1$.
- Câu 32.** (THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam 2018) Hàm số $y = x^3 + 2ax^2 + 4bx - 2019$ đạt cực trị tại $x = -1$. Khi đó hiệu $a - b$ bằng
- A. -1 . B. $\frac{4}{3}$.
C. $\frac{3}{4}$. D. $-\frac{3}{4}$.
- Câu 33.** (Sở GD & ĐT Hà Nội 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- A. $m \leq 0$.
B. $m = 0$.
C. $m \geq 0$.
D. $m > 0$.
- Câu 34.** (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa 2017) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}(m - 1)x^4$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- A. $m < 1$. B. $m > 1$.
C. Không có m . D. $m = 1$.

Câu 35. (THPT Ngô Sĩ Liên – Bắc Giang năm 2018) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ là

A. $y = -\frac{16}{3}x + \frac{8}{3}$. B. $y = \frac{16}{3}x + \frac{8}{3}$.

C. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$. D. $y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$.

Câu 36. (THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh năm 2017) Tìm giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ song song với đường thẳng $d: 4x + y - 3 = 0$.

A. $m = 1$. B. $m = 2$.

C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Câu 37. (THPT Lương Văn Chánh Phú Yên 2018) Biết đường thẳng $d: y = (3m + 1)x + 3$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$. Giá trị của m bằng

A. $\frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Câu 38. (Tạp Chí Toán Học & Tuổi Trẻ năm 2018) Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. Biết có hai giá trị m_1, m_2 của tham số m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tiếp xúc với đường tròn $(C): (x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$. Tổng $m_1 + m_2$ bằng

A. 0.

B. 10.

C. 6.

D. -6.

Câu 39. (Toán Học Bắc Trung Nam) Đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2 - x + 5}{x - 2}$ có hai điểm cực trị A, B nằm trên đường thẳng d có phương trình $d: y = ax + b$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Câu 40. (THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm 2017) Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + m - 1}{2x + 1}$. Tìm tham số m để đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất trong mặt phẳng tọa độ.

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Dạng toán 3. Biện luận hoành độ cực trị (Ôn dụng & vận dụng cao)

☆☆☆

☞ **Cần nhớ:**

Biên soạn & giảng dạy: Ths. Lê Văn Đoàn - 0933.755.607

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị ? Lời giải. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 3x^2 - 6mx + 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt. $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \neq 0 \text{ (LĐ)} \\ \Delta = (-6m)^2 - 36m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$ ☛ Cần nhớ. Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có n nghiệm phân biệt. PT $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.	2. Cho hàm $y = (1 - m)x^3 - 3x^2 + 3x - 5$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị ?
3. Cho $y = -x^3 + (2m - 1)x^2 - (2 - m)x - 1$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị ? 	4. Cho $y = 2x^3 - (m - 2)x^2 + (6 - 3m)x + 1$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị ?
5. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m^2$. Tìm m để hàm số không có cực trị ? Lời giải. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = x^2 + 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \text{ (LĐ)} \\ \Delta = (2m)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 4m^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$	6. Cho $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m + 2)x + 1$. Tìm m để hàm số không có cực trị ?

7. Cho $y = (m - 1)x^3 + (m - 1)x^2 + x$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị, đồng thời điểm cực đại nằm bên trái điểm cực tiểu.

Lời giải. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số có 2 điểm cực trị, đồng thời điểm cực đại nằm bên trái điểm cực tiểu

$\Leftrightarrow y' = 3(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $a > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 > 0 \\ \Delta = [2(m - 1)]^2 - 12(m - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 4m^2 - 20m + 16 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 1 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 4.$$

Cần nhớ:

$$\bullet N : \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases} \quad \bullet H : \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases}$$

9. Cho hàm $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị và điểm cực tiểu nằm bên trái điểm cực đại.

8. Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3x + 1$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị và điểm cực đại nằm bên trái điểm cực tiểu.

10. Cho $y = (m + 6)x^3 - mx^2 + x - 1$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị và điểm cực đại nằm bên trái điểm cực tiểu.

11. Cho $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m+1)x^2 + mx - 7$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị và điểm cực tiểu nằm bên trái điểm cực đại.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

12. Cho $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 - (m-1)x^2 - x + 1$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị và điểm cực tiểu nằm bên trái điểm cực đại.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

13. Cho hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 + 4$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị ?

Lời giải. Ta có: $y' = 4x^3 + 2(m+1)x$.

$$\text{Xét } y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-m-1}{2} \end{cases}$$

H/số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow \frac{-m-1}{2} > 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Cần nhớ:

$$\begin{aligned} \bullet M: \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} & \bullet W: \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ \bullet U: \begin{cases} ab \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} & \bullet \cap: \begin{cases} ab \geq 0 \\ a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

14. Cho hàm số $y = mx^4 + (m-2)x^2 + 1$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

15. Cho hàm số $y = mx^4 + 2(m-1)x^2 + 2$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16. Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2-9)x^2 + 1$. Tìm m để hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VỀ NHÀ 6

- Câu 41.** (THPT Chuyên Hạ Long – Quảng Ninh năm 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m + 1)x + 2$ có hai điểm cực trị.
- A. $m \leq 2$. B. $m < 2$.
C. $m > 2$. D. $m < -4$.
- Câu 42.** (THPT Hồng Quang – Hải Dương năm 2018) Tìm tất cả tham số thực của m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m + 2)x^3 + x^2 + \frac{1}{3}mx - 2$ có cực đại, cực tiểu.
- A. $m \in (-3; -2) \cup (-2; 1)$. B. $m \in (-3; 1)$.
C. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. D. $m \in (-2; 1)$.
- Câu 43.** (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định năm 2018) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 2018$ không có cực trị.
- A. $m \leq -1$. B. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$.
C. $m \geq 2$. D. $-1 \leq m \leq 2$.
- Câu 44.** (THPT Nguyễn Thị Minh Khai – Tp. Hồ Chí Minh năm 2017) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có điểm cực đại nằm bên trái điểm cực tiểu.
- A. 2. B. 3.
C. Vô số. D. 0.
- Câu 45.** (THPT Chuyên Nguyễn Thượng Hiền – Tp. Hồ Chí Minh năm 2017) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m + 1)x^2 + mx - 7$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số đã cho có điểm cực tiểu nằm bên trái điểm cực đại.
- A. $m \neq 0$. B. $m < 5$ và $m \neq 0$.
C. $-\frac{1}{2} < m < 0$. D. $m < -\frac{1}{2}$ hoặc $m > 0$.
- Câu 46.** (Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc năm 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 3mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị.
- A. $m > 0$. B. $m < 0$.
C. $m \leq 0$. D. $m = 0$.
- Câu 47.** (Sở GD & ĐT Kiên Giang năm 2018) Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 - 3$ có ba cực trị.
- A. $m > 0$. B. $m > 1$.
C. $m > -1$. D. $m \geq 0$.
- Câu 48.** (THPT Ngô Quyền – Hải Phòng năm 2017) Có bao nhiêu số nguyên của m để hàm số $y = mx^4 + 2(m^2 - 5)x^2 + 4$ có đúng 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại?
- A. 2. B. 4.
C. 5. D. 3.

17. Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + (1 - m^2)x + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị nằm hai bên so với trục tung Oy. Lời giải. Để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm về hai bên so với trục tung Oy $\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 8x + 1 - m^2 = 0$ có nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 3.(1 - m^2) < 0$ $\Leftrightarrow m < -1$ hoặc $m > 1$. Cần nhớ: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm hai bên trục tung $Oy \Leftrightarrow a.c < 0$.	18. Cho $y = -x^3 + x^2 - (m^2 - 3m)x - 4$. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị nằm hai bên so Oy.
19. Cho $y = x^3 - (3m + 1)x^2 + (m^2 - m - 6)x$. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị nằm về hai phía trục tung Oy. 	20. Cho $y = mx^3 + (2m^2 - 1)x^2 + (m - 1)x$. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị nằm về 2 bên trục tung.
21. Cho $y = \frac{2}{3}x^3 + (m + 1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung. 	22. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm bên trái trục tung.

23. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 - 2m$. Tìm m để hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

Lời giải. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m^2 - 2m \\ x = 2 \Rightarrow y = m^2 - 2m - 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$m^2 - 2m$ $m^2 - 2m - 4$			$+\infty$

$$\Rightarrow y_{\text{CD}} = m^2 - 2m$$

$$\Leftrightarrow 3 = m^2 - 2m \Leftrightarrow m = -1 \text{ hoặc } m = 3.$$

24. Cho hàm $y = x^3 + 3x^2 + m^2 - 4m$. Tìm m để hàm số có giá trị đại bằng 9.

25. Tìm m , biết giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x + 1 - m$ thỏa $2y_{\text{CT}} + 9 = 0$.

26. Tìm m , biết giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 + 2m$ bằng -4.

27. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2m$ có giá trị cực tiểu và giá trị cực đại trái dấu ?

Lời giải. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y_{\text{CD}} = 2m \\ x = 2 \Rightarrow y_{\text{CT}} = 2m - 4 \end{cases}$$

Vì giá trị cực tiểu và giá trị cực đại trái dấu nên $y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} < 0 \Leftrightarrow 2m \cdot (2m - 4) < 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 8m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2.$$

Cần nhớ:

Giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số trái dấu $\Leftrightarrow y_{\text{CD}} \cdot y_{\text{CT}} < 0$.

28. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3x + 1 - m$ có giá trị cực tiểu và giá trị cực đại trái dấu ?

29. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có 2 cực trị nằm hai bên trục hoành Ox .

Cách giải 1. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y_{CB} = m \\ x = 2 \Rightarrow y_{CT} = m - 4 \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số có hai cực trị nằm hai bên trục $Ox \Leftrightarrow y_{CB} \cdot y_{CT} < 0$

$$\Leftrightarrow m(m - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Cách giải 2.

Để hàm số có hai cực trị nằm hai bên trục $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm với trục Ox : $x^3 - 3x^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -x^3 + 3x^2 = g(x)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng nằm ngang $y = m$ cắt $g(x) = 3x^2 - x^3$ tại 3 điểm $\Leftrightarrow g_{CT} < m < g_{CB}$.

Ta có: $g'(x) = -3x^2 + 6x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow g_{CT} = 0 \\ x = 2 \Rightarrow g_{CB} = 4 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 4.$$

30. Cho hàm $y = 2x^3 - (1 + 2m)x^2 + 3mx - m$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm hai bên trục Ox .

Lời giải. Để hàm số có hai điểm cực trị nằm hai bên $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số

$y = 2x^3 - (1 + 2m)x^2 + 3mx - m$ cắt trục Ox ($y = 0$) tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{PT } 2x^3 - (1 + 2m)x^2 + 3mx - m = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt.}$$

(Sử dụng casio, giải phương trình bậc 3, cho $m = 100$, được nghiệm đẹp $x = 0, 5$).

$$\Leftrightarrow \text{PT } (2x - 1)(x - mx + m) = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ và } g(x) = x^2 - mx + m = 0 : \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}m + \frac{1}{4} \neq 0 \\ m < 0 \vee m > 4 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nhận xét. Để tìm tham số m để đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm hai bên so với trục hoành Ox (giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu), có các phương pháp:

Phương pháp 1. Nếu $y' = 0$ tìm được 2 nghiệm $\begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$ thì YCBT $\Leftrightarrow y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \Rightarrow m$.

Phương pháp 2. Đồ thị cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow y = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (sử dụng được khi $y' = 0$ không nghiệm đẹp và $y = 0$ có nghiệm đẹp).

Phương pháp 3. Sử dụng khi $y' = 0$ hoặc $y = 0$ không tìm được nghiệm đẹp.

- Tìm điều kiện để hàm số có 2 cực trị ($y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt).
- Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$

Viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị $y = \alpha x + \beta \Rightarrow \begin{cases} y(x_1) = \alpha x_1 + \beta \\ y(x_2) = \alpha x_2 + \beta \end{cases}$ là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu.

- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \Leftrightarrow y(x_1) \cdot y(x_2) < 0 \Leftrightarrow (\alpha x_1 + \beta) \cdot (\alpha x_2 + \beta) < 0$, sau đó sử dụng định lý Viét với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y' = 0 \Rightarrow m$.

31. Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + m - 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm hai bên trục hoành Ox .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

32. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm hai bên trục hoành Ox .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

33. Cho hàm $y = x^3 - (m + 2)x^2 + 3mx - 2m$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm hai bên trục Ox .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

34. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm hai bên trục hoành Ox .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP VỀ NHÀ 7

- Câu 49.** (THPT Kinh Môn – Hải Dương năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m - 3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m + 4)x - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy .
- A. 4. B. 5.
C. 6. D. 7.
- Câu 50.** (Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 484) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu ?
- A. 2. B. 9.
C. 3. D. 7.
- Câu 51.** (THPT Tân Bình – Tp. Hồ Chí Minh 2019) Cho hàm số $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2m - 1$ có hai điểm cực trị $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ thỏa $x_1 > x_2$. Tìm m để $y_1 + 4y_2 = 10$.
- A. $m = -11$. B. $m = -\frac{23}{2}$.
C. $m = -\frac{21}{2}$. D. $m = -12$.
- Câu 52.** (Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 484) Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m + 1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x - 3$ có các điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm bên phải của trục tung.
- A. $-5 < m < -1$. B. $-5 < m < -3$.
C. $-3 < m < -1$. D. $m < -5$ hoặc $m > -1$.
- Câu 53.** (THPT Chuyên Quốc Học Huế năm 2019) Có mấy giá trị nguyên của $m \in (-20; 18)$ để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(m - 1)x^2 - 3mx - \frac{3m}{2}$ nằm về cùng phía Ox .
- A. 1. B. 19.
C. 20. D. 18.
- Câu 54.** (THPT Nguyễn Khuyến – Tp. HCM 2018) Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.
- A. $-\frac{1}{4} < m \neq 0$. B. $m > 0$.
C. $-\frac{1}{4} < m < 0$. D. $m < -\frac{1}{4}$.
- Câu 55.** (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ – Hòa Bình năm 2018) Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 12mx - 3m$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$.
- A. $m \neq 1$. B. $m > 1$.
C. $m < \frac{3}{2}$. D. $m > \frac{3}{2}$.

39. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B sao cho $\triangle OAB$ vuông tại O với $O(0;0)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m \Rightarrow A(0; m) \\ x = 2 \Rightarrow y = m - 4 \Rightarrow B(2; m - 4) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (0; m) \\ \overrightarrow{OB} = (2; m - 4) \end{cases} \quad (\text{ĐK: } m \neq 0).$$

Vì $\triangle OAB$ vuông tại O nên $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot 2 + m(m - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (\text{L}) \\ m = 4 & (\text{N}) \end{cases} \text{ vì } m = 0 \Rightarrow A(0;0) \equiv O.$$

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

☞ **Sai lầm thường gặp** của học sinh là quên điều kiện $m \neq 0$ như trên.

41. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - 8m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B sao cho $\triangle OAB$ vuông tại O với $O(0;0)$.

40. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B sao cho $\triangle OAB$ vuông tại O với $O(0;0)$.

42. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{20}$.

43. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $A(0;2)$, B , C thỏa mãn $BC = 2$.

Lời giải. Ta có: $y' = 4x^3 - 4m^2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị

$\Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Khi đó:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0;2) \\ x = m \Rightarrow y = 2 - m^4 \Rightarrow B(m;2 - m^4) \\ x = -m \Rightarrow y = 2 - m^4 \Rightarrow C(-m;2 - m^4) \end{cases}$$

Theo đề $BC = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-2m)^2 + 0^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

So điều kiện, suy ra $m = \pm 1$ thỏa bài toán.

44. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $A(0;1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$.

45. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A và B sao cho diện tích $\triangle OAB$ bằng 4.

46. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 4m$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

47. Cho hàm $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m + 1)x^2 + 2m + 2$.

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là O .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

48. Cho hàm số $y = x^4 - 4mx^2 + 3m - 2$.

Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm $G\left(0; -\frac{5}{3}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

49. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Cần nhớ: Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị $A \in Oy$, B , C thì luôn tạo thành tam giác cân tại A . Khi đó ta luôn có

$$\frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = \cos A.$$

Áp dụng:

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$

$$\Leftrightarrow 1.2m < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân $\Rightarrow A = 90^\circ$.

$$\Rightarrow \frac{(2m)^3 + 8.1}{(2m)^3 - 8.1} = \cos 90^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow 8m^3 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^3 = -1 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (thỏa } m < 0).$$

50. Cho hàm số $y = x^4 + (6m - 4)x^2 + 1 - m$.

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

51. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

52. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có một góc bằng 30° .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

53. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 9 + 2m^2$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nằm trên các trục tọa độ.

Lời giải.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -9 + 2m^2 \\ x = -\sqrt{m} \Rightarrow y = m^2 - 9 \\ x = \sqrt{m} \Rightarrow y = m^2 - 9 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A(0; 2m^2 - 9) \in Oy \\ B(-\sqrt{m}; m^2 - 9) \\ C(\sqrt{m}; m^2 - 9) \end{cases}$

Vì điểm $A \in Oy$ nên để ba điểm cực trị nằm trên các trục tọa độ thì $B, C \in Ox$

$\Rightarrow y_B = y_C = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Nhận xét: Để ba điểm cực trị của hàm số bậc bốn trùng phương nằm trên các trục tọa độ thì $y_{CB} = 0$ (hoặc $y_{CT} = 0$).

54. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nằm trên các trục tọa độ.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

55. Cho $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính các phần tử của S bằng

56. Biết rằng đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại ba điểm phân biệt sao cho có một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Tìm m .

57. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m - 1$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt lập có hoành độ lập thành cấp số cộng.

58. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - x - m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt, đồng thời phần diện tích phía trên Ox và diện tích phía dưới Ox , giới hạn bởi đồ thị và trục Ox bằng nhau.

BÀI TẬP VỀ NHÀ 8

- Câu 56.** (THPT Chuyên Hùng Vương – Phú Thọ 2018) Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?
- A. $m_0 \in (-1; 7)$.
B. $m_0 \in (7; 10)$.
C. $m_0 \in (-15; -7)$.
D. $m_0 \in (-7; -1)$.
- Câu 57.** (THPT Chuyên Vĩnh Phúc năm 2018) Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $|x_{CB} + x_{CT}| = 2$.
- A. $m = 1$.
B. $m = 2$.
C. $m = -1$.
D. $m = -2$.
- Câu 58.** (THPT Thăng Long – Hà Nội 2018) Biết hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 - (2m-1)x$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - 10(x_1 + x_2)$ bằng
- A. 78.
B. 1.
C. -18.
D. -22.
- Câu 59.** (THPT Thanh Miện – Hải Dương năm học 2018) Biết rằng đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?
- A. 3.
B. 1.
C. 0.
D. 2.
- Câu 60.** (THPT Chuyên Hạ Long – Quảng Ninh năm 2019) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1; -2)$ thẳng hàng.
- A. $m = \sqrt{2}$.
B. $m = -\sqrt{2}$.
C. $m = 2$.
D. $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 61. (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai năm 2018) Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ với m là tham số thực khác 0. Tìm tham số m để trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $3x + 3y - 8 = 0$.

- A. $m = 5$.
- B. $m = 2$.
- C. $m = 6$.
- D. $m = 4$.

Câu 62. (THPT Chuyên Trần Phú – Hải Phòng năm 2018) Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tích số $m_1 m_2$ bằng

- A. -15 .
- B. 12 .
- C. 6 .
- D. -20 .

Câu 63. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định 2018) Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;1), B, C$ thỏa mãn $BC = 4$?

- A. $m = \sqrt{2}$.
- B. $m = 4$.
- C. $m = \pm 4$.
- D. $m = \pm \sqrt{2}$.

Câu 64. (HKI – THPT Nguyễn Thượng Hiền – Tp. Hồ Chí Minh năm 2019) Có bao nhiêu số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB vuông tại O .

- A. 2.
- B. 1.
- C. 3.
- D. 0.

Câu 65. (HKI – THPT Trần Phú – Tp. Hồ Chí Minh năm 2019) Gọi S là tập các số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 6m^2x + 2m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho $AB = 2\sqrt{34}$. Tính tích các phần tử của S .

- A. -1 .
- B. -4 .
- C. 1 .
- D. 2 .

Câu 66. (Đề minh họa – Bộ GD & ĐT năm 2017) Cho $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính các phần tử của S bằng

- A. 27.
B. -27.
C. 9.
D. -9.

Câu 67. (Tạp Chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 485) Tìm k để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0; \frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm ?

- A. $k \in \left\{\frac{1}{3}; 1\right\}$. B. $k \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.
C. $k \in \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$. D. $k \in \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$.

Câu 68. (TT Diệu Hiền – Cần Thơ năm 2018) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có đồ thị (C) . Tìm tham số m sao cho (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $OA = BC$, trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung.

- A. $m = 0$ hoặc $m = 2$.
B. $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$.
C. $m = 3 \pm 3\sqrt{3}$.
D. $m = 5 \pm 5\sqrt{5}$.

Câu 69. (THPT Chuyên Bắc Ninh năm 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

- A. $m = 0$.
B. $m = -1, m = 0$.
C. $m = 1$.
D. $m = 0, m = 1$.

Câu 70. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc năm 2018) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + 2m$. Tìm tham số m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

- A. $m = 2\sqrt{2}$.
B. $m = \sqrt[3]{3}$.
C. $m = \sqrt[3]{4}$.
D. $m = 1$.

Câu 71. (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

- A. $m = \sqrt[3]{3}$.
B. $m = \sqrt{3}$.
C. $m = 3\sqrt{3}$.
D. $m = 1$.

- Câu 72.** (THPT Chuyên Vĩnh Phúc năm 2018) Tìm tham số thực m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.
- A. $m < 1$.
B. $0 < m < 1$.
C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$.
D. $m > 0$.
- Câu 73.** (THPT Lương Văn Chánh – Phú Yên năm 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S .
- A. 1.
B. 0.
C. 2.
D. 3.
- Câu 74.** (THPT Cổ Loa – Hà Nội năm 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^4 + 2mx^2 - \frac{3m}{2}$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị này cùng với gốc tọa độ O tạo thành bốn đỉnh của một tứ giác nội tiếp được. Tổng tất cả các phần tử của S bằng
- A. $2 - 2\sqrt{3}$.
B. $-2 - 2\sqrt{3}$.
C. -1 .
D. 0 .
- Câu 75.** (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng 2018) Cho hàm số $y = x^4 + 2(m - 4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.
- A. $m = 1$ hoặc $m = \frac{17}{2}$.
B. $m = 1$.
C. $m = 4$.
D. $m = \frac{17}{2}$.
- Câu 76.** (Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc năm 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho O, A, B, C là bốn đỉnh của một hình thoi (với O là gốc tọa độ).
- A. $m = -1$.
B. $m = 1$.
C. $m = 2$.
D. $m = 3$.

Dạng toán 4: Cực trị của hàm hợp và hàm số trị tuyệt đối (vận dụng cao)



1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	- 0 +

Hỏi trên khoảng $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ thì hàm số $g(x) = f(x^2)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây ?

A. $x = \sqrt{2}$.

B. $x = -\sqrt{2}$.

C. $x = 0$.

D. $x = 2$.

Thử điểm:

$x = 2 \in (\sqrt{2}; \sqrt{5})$ thì
 $g'(2) = 4.f'(4) > 0$.

$$g'(x) = 2x.f'(x^2), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$					

Suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$. **Chọn đáp án C.**

2. Cho hàm $y = f(x)$ có bảng biến thiên. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ đạt cực đại tại điểm nào ?

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	- 0 +

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 0$.

D. $x = 2$.

3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ có mấy điểm cực trị ?

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 6.

4. (Đề thi THPT QG năm 2019 – Câu 46 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

- A. 9. B. 3. C. 7. D. 5.

5. (Đề thi THPT QG năm 2019 – Câu 48 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

- A. 9. B. 3. C. 7. D. 5.

6. (Đề thi THPT QG năm 2019 – Câu 50 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

- A. 9. B. 3. C. 7. D. 5.

7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $g(x) = 15f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 10x^6 - 15x^4 - 60x^2$ đạt cực tiểu tại $x_0 < 0$. Chọn mệnh đề **đúng**?

- A. $x_0 \in \left(-\frac{5}{2}; -2\right)$. B. $x_0 \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. C. $x_0 \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. D. $x_0 \in (-1; 0)$.

Ta có: $g'(x) = 15 \cdot (-4x^3 + 8x) \cdot f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 60x^5 - 60x^3 - 120x$
 $= 60(-x^3 + 2x)[f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - x^2 - 1]$.

Đặt $t = -x^4 + 4x^2 - 6 = -(x^2 - 2)^2 - 2 \leq -2$ và có $f'(t) \leq 0, \forall t \leq -2$ (nhìn bảng).

$\Rightarrow f'(-x^4 + 4x^2 - 6) \leq 0 \Rightarrow f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$60(-x^3 + 2x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - x^2 - 1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-\sqrt{2})$	$g(0)$	$g(\sqrt{2})$	$+\infty$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x_0 = -\sqrt{2} \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. **Chọn đáp án C.**

8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = 15f(x^4 - 2x^2 + 3) + 10x^6 - 30x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 7. D. 5.

9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = 15f(-x^4 + 2x^2 - 2) - 10x^6 + 30x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 2. B. 3. C. 7. D. 5.

10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = 2f(-x^4 + 4x^2 - 5) + x^6 - 12x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 2. B. 3. C. 7. D. 5.

11. Cho hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + 1)$ có bảng biến thiên như sau:

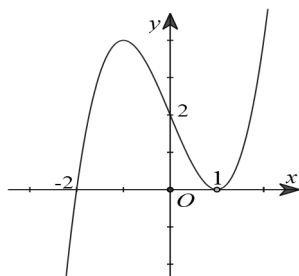
x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	2	18	2	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

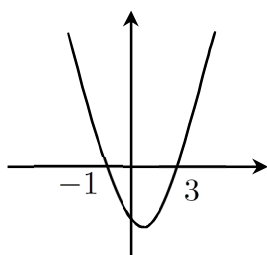
12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.

- A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.



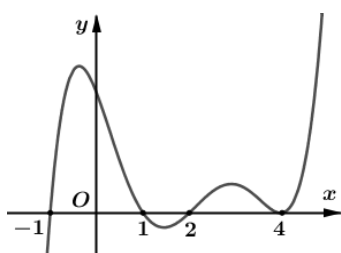
13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(1 - x^2)$ đạt cực đại tại

- A. $x = -1$.
B. $x = \pm\sqrt{2}$.
C. $x = 3$.
D. $x = 0$.



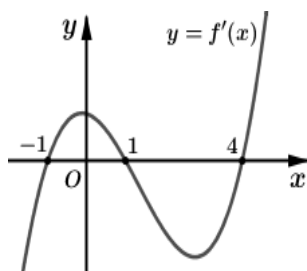
14. Cho hàm $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ có đồ thị như hình. Hàm số $y = f(1 - 2x)$ có mấy cực trị ?

- A. 4.
B. 7.
C. 3.
D. 9.



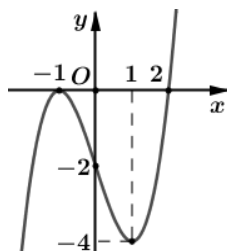
15. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ có đồ thị như hình. Hàm số $y = f(x^2)$ có mấy cực trị ?

- A. 5.
B. 7.
C. 3.
D. 9.



16. Cho hàm $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ có đồ thị như hình. Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ có mấy cực trị ?

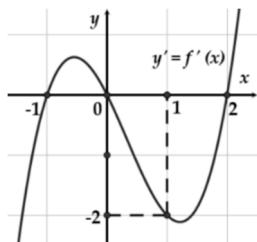
- A. 5.
B. 7.
C. 3.
D. 9.



Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Xét hàm số $g(x) = 3f(x^2 - 2) + \frac{3}{2}x^4 - 3x^2$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm

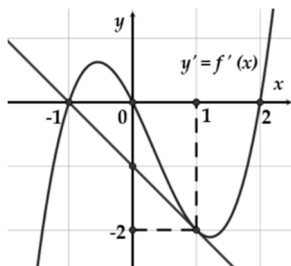
- A. $x = 0$.
B. $x = 1$.
C. $x = -1$.
D. $x = \sqrt{3}$.



Lời giải tham khảo

Ta có: $g'(x) = 6x.f'(x^2 - 2) + 6x^3 - 6x = 6x[f'(x^2 - 2) + (x^2 - 2) + 1]$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = -(x^2 - 2) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 - 2 = 1 \text{ (K)} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{xem hình vẽ})$$



Bảng biến thiên:

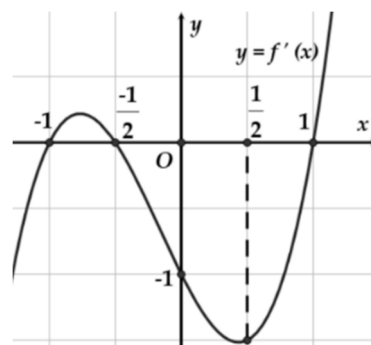
x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x		-	-	-	0	+	+
$f'(x^2 - 2) + x + 1$	+	0	+	0	-	0	+
$g'(x)$	-	0	-	0	+	0	+
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$. **Chọn đáp án A.**

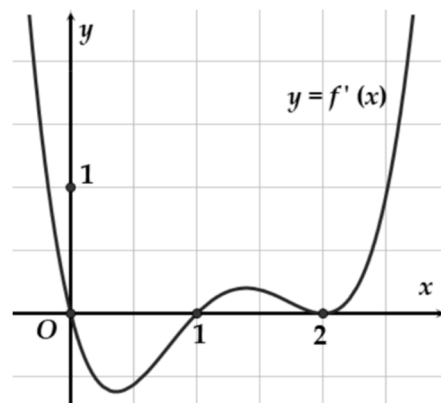
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình.

Xét hàm số $g(x) = 3f(x^2 - 2x) + \frac{3}{2}(x - 1)^4$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm

- A. $x = -1$.
B. $x = 1$.
C. $x = 3$.
D. $x = 2$.

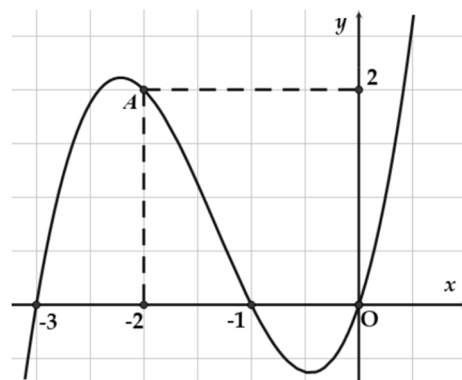


Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 1) + \frac{x^6}{3} - 2x^4 + 3x^2$. Tìm khẳng định **đúng**?



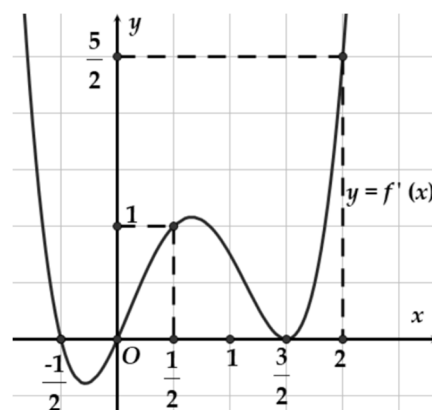
- A. Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu.
- B. Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
- C. Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
- D. Hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét $g(x) = f(x^2 + 2x) + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x^2$. Hàm số $g(x)$ có mấy điểm cực tiểu?



- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm $g(x) = f(x^2 - 2) - \frac{x^4}{2} + \frac{3x^2}{2}$. Hàm số $g(x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



- A. 4.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

- ① Hàm số $y = f(|x|)$ có $2a + 1$ với a là số cực trị dương của hàm số $y = f(x)$.
- ② Hàm số $y = |f(x)|$ có $a + b$ cực trị với a là số cực trị của hàm số $y = f(x)$ và b là số nghiệm đơn của phương trình $f(x) = 0$ (số giao điểm cắt của đồ thị $y = f(x)$ và trục Ox).

1. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$. Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4} < m < 2$.

B. $\frac{5}{4} \leq m \leq 2$.

C. $-\frac{5}{4} < m < 2$.

D. $-2 < m < \frac{5}{4}$.

Lời giải. Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Rightarrow 2a + 1 = 5 \Rightarrow a = 2$

$\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 2(2m - 1)x + 2 - m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(2m - 1)^2 - 12(2 - m) > 0 \\ 2m - 1 > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \frac{1}{2} < m < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2. \text{ Chọn đáp án A.}$$

2. Tìm số nguyên bé nhất của m để hàm số $y = |x|^3 - 2mx^2 + 5|x| - 3$ có 5 điểm cực trị.

A. -2.

B. 2.

C. 5.

D. 0.

3. Có mấy giá trị nguyên của m để hàm $y = |x|^3 - 5x^2 - (3m - 1)|x| + m$ có 5 điểm cực trị.

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.

4. Có mấy giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

A. 1.

B. 31.

C. 17.

D. Vô số.

Đặt $f(x) = x^3 - 6x^2 + m$. Để hàm $y = |f(x)|$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow a + b = 5$, với $a = 2$ là số cực trị của $y = f(x)$ và $b = 3$ là số nghiệm đơn của phương trình $f(x) = 0$.

Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -x^3 + 6x^2 = g(x)$ có:

$g'(x) = -3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$						$-\infty$

Để phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $0 < m < 32$ và do $m \in \mathbb{Z}$ nên: $m \in \{1; 2; 3; \dots; 31\}$ có $(31 - 1) + 1 = 31$. **Chọn đáp án B.**

5. Có mấy giá trị nguyên của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị ?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

6. Tính tổng các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 10.

7. Có mấy giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 7.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

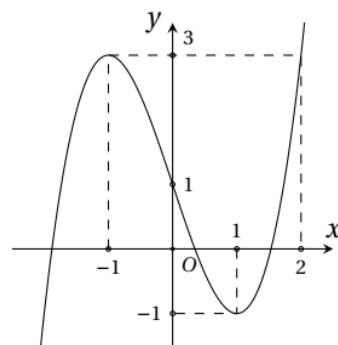
BÀI TẬP VỀ NHÀ 9

Câu 77. Hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2, -1, 0$. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 6.
- B. 5.
- C. 3.**
- D. 4.

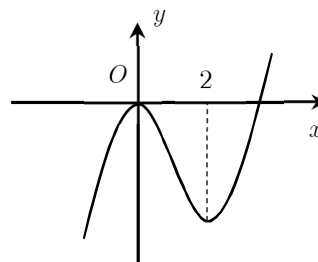
Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$, đồng thời có đồ thị như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + 1) + 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 4.
- B. 3.**
- C. 1.
- D. 2.



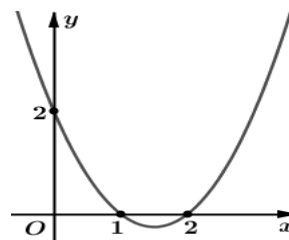
Câu 79. Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$.

- A. 5.
- B. 6.**
- C. 4.
- D. 3.



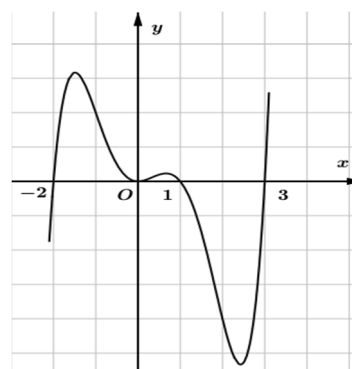
Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm $f'(x) = ax^2 + bx + c$ như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ có bao nhiêu cực trị ?

- A. 0.
- B. 1.**
- C. 2.
- D. 3.



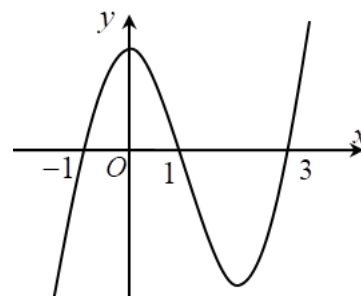
Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 4.
- B. 3.
- C. 5.**
- D. 2.



Câu 82. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là

- A. 1.
- B. 2.
- C. 4.
- D. 3.



Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$	-3	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(6 - x^2)$ là

- A. 5.
- B. 7.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

- A. 1.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 4.

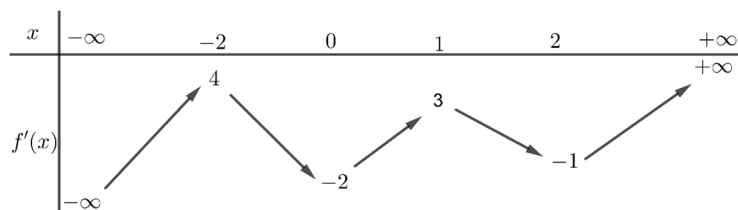
Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là

- A. 0.
- B. 1.
- C. 3.
- D. 2.

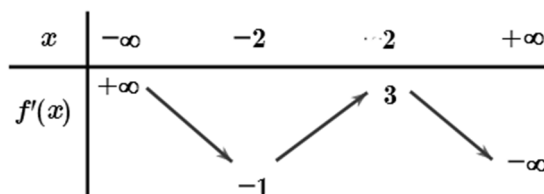
Câu 86. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của $y = f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = f(x^2 + 4x + 2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

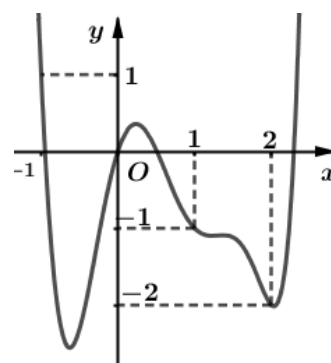
- A. 7.
- B. 8.
- C. 9.
- D. 10.

Câu 87. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của $y = f'(x)$. Hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$ có mấy điểm cực trị ?



- A. 4.
- B. 5.
- C. 6.
- D. 8.

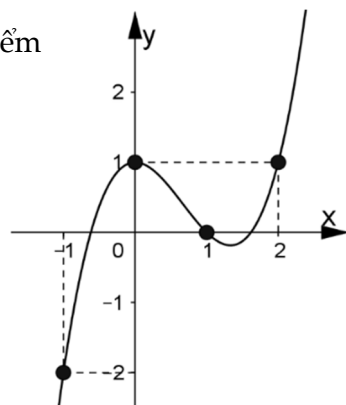
Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$ đạt cực đại tại điểm



- A. $x = -1$.
- B. $x = 0$.
- C. $x = 1$.
- D. $x = 2$.

Câu 89. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới.

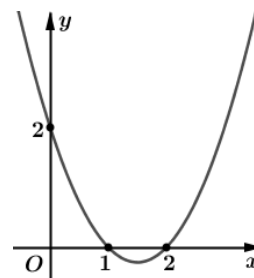
Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm



- A. $x = 1$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = 0$.
- D. $x = 2$.

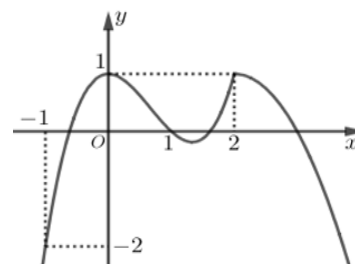
Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = 15f(-x^4 + 2x^2) - 10x^6 + 30x^2 - 20$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 0.
- B. 3.**
- C. 2.
- D. 5.



Câu 91. Cho hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2) - \frac{1}{3}x^6 + x^4 - x^2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm ?

- A. 3.
- B. 2.**
- C. 0.
- D. 1.



Câu 92. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

- A. 0.
- B. 1.**
- C. 2.
- D. 3.

Câu 93. Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + 4x$ có mấy điểm cực trị ?

- A. 0.
- B. 1.**
- C. 2.
- D. 3.

Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x^2 - 8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 6.
- B. 3.
- C. 5.**
- D. 2.

- Câu 95.** Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2m|$ có 7 điểm cực trị bằng
- A. 3.
B. 2.
C. 6.
D. 4.
- Câu 96.** Giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để hàm số $y = |x^3 + x^2 - 5x + 2m - 1|$ có 3 điểm cực trị bằng
- A. 2.
B. 4.
C. 5.
D. 7.
- Câu 97.** Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{3}(m+3)x^3 + mx^2 + (m+4)x + 3m - 2 \right|$ với m là tham số thực. Giá trị nguyên nhỏ nhất của m để hàm số đã cho có 1 điểm cực trị bằng
- A. -5.
B. -3.
C. 0.
D. 2.
- Câu 98.** Cho hàm số $y = |x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m - 3|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên không âm của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là
- A. 3.
B. 4.
C. 5.
D. 6.
- Câu 99.** Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2020$ có 5 điểm cực trị ?
- A. $m < -2$.
B. $m > -6$.
C. $m > 0$.
D. $m > 3$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4} < m < 2$.

B. $\frac{5}{4} \leq m \leq 2$.

C. $-1 < m < 2$.

D. $m > 2$.

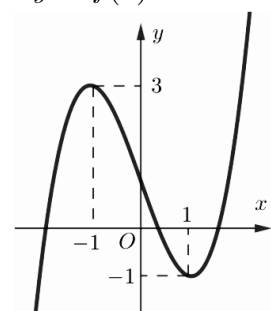
Câu 101. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-12; 12)$ sao cho hàm số $y = f(x) + mx + 12$ có đúng một điểm cực trị?

A. 5.

B. 18.

C. 20.

D. 12.



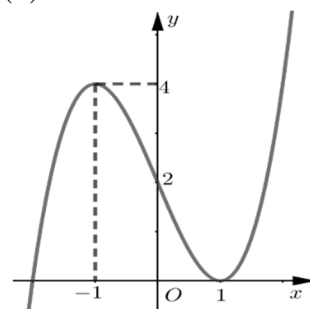
Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm m để hàm số $y = f(x) - mx$ có ba điểm cực trị?

A. $0 < m < 4$.

B. $0 \leq m \leq 4$.

C. $m > 4$.

D. $m < 0$.



Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^3 - 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 3$ có 3 điểm cực trị.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 105. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x-1)(x^2 - 2mx + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi có mấy số nguyên m không vượt quá 2018 sao cho hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 7 điểm cực trị?

A. 2019.

B. 2016.

C. 2017.

D. 2018.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

A. 0.

B. 6.

C. 3.

D. 2.

Câu 107. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$.

A. 6.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

