TRƯỜNG THPT LƯƠNG THẾ VINH

GV: NGUYỄN HOÀNG VIỆT

ĐỀ CƯƠNG ÔN THI THPT QG

NĂM 2022

MÔN

TOÁN

*** GỒM 12 CÂU CUỐI THEO ĐỀ MINH HOẠ CỦA BỘ GD&ĐT**

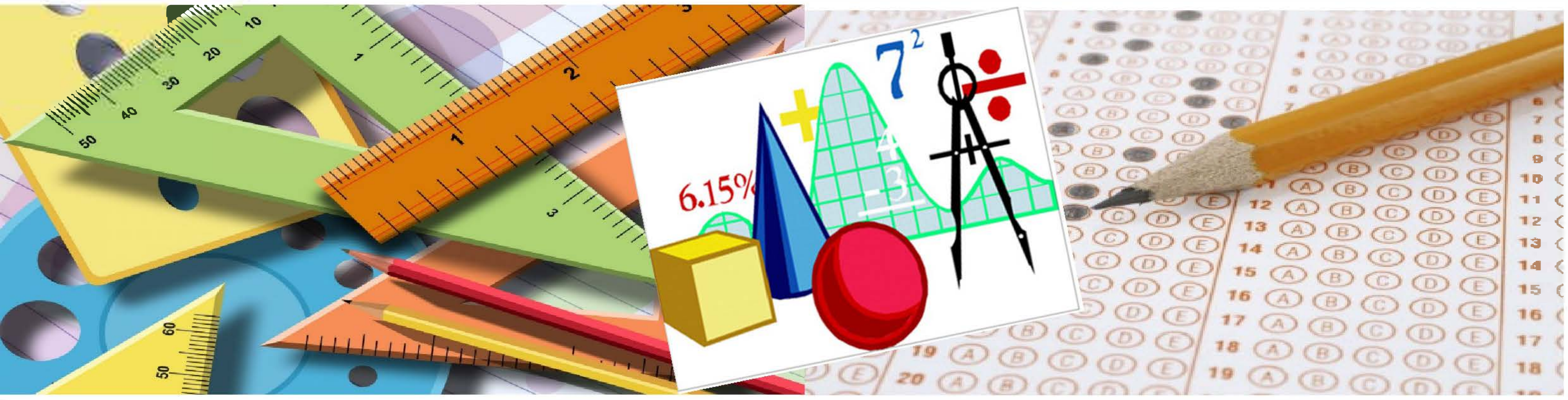
*** LỜI GIẢI CHI TIẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TỪNG DẠNG TOÁN**

*** KÈM THEO CÁC CÂU HỎI TƯƠNG TỰ VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT**

*** HƯỚNG TỚI MỨC 8+ ĐIỂM TRONG ĐỀ THI QG**

Cuốn sách này của:...

Lớp:........................... **Trường:**..



TRUNG TÂM LUYỆN THI VIỆT STAR

12 CÂU CUỐI ĐỀ MINH HOẠ ÔN THI THPT QG NĂM 2022

CÂU 39 ĐỀ MINH HỌA

Câu 39

Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(4^x - 5.2^{x+2} + 64)\sqrt{2 - \log(4x)} \geq 0$?

A 22. B 25. C 23. D 24.

Lời giải.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 39

Câu 1

Tập nghiệm của bất phương trình $(4^x - 65 \cdot 2^x + 64)\sqrt{4 - \log_3(x+3)} \leq 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên dương?

A 7. B 8. C 10. D Vô số.

Lời giải.

Câu 2

Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2-13} - 27\right)\sqrt{8 - \log_2 x} \leq 0$?

A 9. B 4. C 5. D 6.

Lời giải.

Câu 3

Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81\right)\sqrt{4 - \log_2 x} \geq 0$?

(A) 15. (B) 14. (C) 13. (D) 12.

Lời giải.

Câu 4

Bất phương trình $(x^3 - 9x)\ln(x+5) > 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

(A) 4. (B) 7. (C) 6. (D) Vô số.

Lời giải.

Câu 5

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(2^{x^2} - 4^x\right)[\log_2(x+14) - 4] \leq 0$ là

A. 14.
B. 13.
C. 12.
D. 15.

Lời giải.

Câu 6

Có bao nhiêu giá trị của m để bất phương trình $\left(3^{x^2-x} - 9\right)\left(2^{x^2} - m\right) \leq 0$ có đúng 5 nghiệm nguyên phân biệt?

A. 65021.
B. 65024.
C. 65022.
D. 65023.

Lời giải.

Câu 7

Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thoả mãn $\left[\log_2\left(x^2+1\right)-\log_2(x+31)\right]\left(32-2^{x-1}\right)\geq 0$?

A. 27. B. 25. C. 26. D. 28.

Lời giải.

Câu 8

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0$ chứa không quá 10 số nguyên?

A. 9844. B. 9843. C. 9842. D. 9841.

Lời giải.

Câu 9

Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[2 - \log_3\left(x^2 - 12x + 36\right)\right]\sqrt{2 - \log_5 x} \leq 0$?

Ⓐ 10. Ⓑ 15. Ⓒ 20. Ⓓ 25.

Lời giải.

Câu 10

Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2\left(x^2 - 8x + 20\right) - 3\right]\sqrt{2 - \log 5x} \geq 0$?

Ⓐ 17. Ⓑ 18. Ⓒ 19. Ⓓ 20.

Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Câu 11

Cho hàm số $f(x) = \ln(ax^2 + bx)$ có đồ thị (C), biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 của đồ thị (C) có phương trình $y = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{4}{5} + \ln 20$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = \ln 10$. B. $f(1) = \ln 11$. C. $f(1) = \ln 20$. D. $f(1) = \ln 22$.

Lời giải.

Câu 12

Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = 2^{\ln(2x^3 - 3x^2 + 100 - m)}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 98. B. 99. C. 100. D. 101.

Lời giải.

Câu 13

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(20-\sqrt{x+2022}\right)+1<0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 2022.
B. 2002.
C. 400.
D. 324.

Lời giải.

Câu 14

Bất phương trình $(\log_3^2 x-6\log_3 x+5)\sqrt{2^x-512}\leq 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 235.
B. 234.
C. 240.
D. 241.

Lời giải.

Câu 15

Bất phương trình $\log_7 x < \log_4\left(\sqrt{x} + 3^{\log_7 x}\right)$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 56. B. 50. C. 48. D. 49.

Lời giải.

Câu 16

Bất phương trình $\dfrac{\log x - 4}{\log^2 x - 3\log x + 2} \leq 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 9900. B. 9009. C. 9909. D. 9990.

Lời giải.

Câu 17

Cho các số thực x, y dương thỏa mãn $\log_{49}(2x+y) = \log_{14} x = \log_4 y$. Tính $\dfrac{x}{y}$.

A. $1+\sqrt{2}$. B. $2-\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}-1$. D. $2+\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 18

Cho các số thực x, y dương thỏa mãn $\log_{30}\left(4x - \dfrac{3}{2}y\right) = \log_{25} x = \log_{36} y$. Tính $T = \dfrac{x^3+x^2y+3y^2}{x^3-xy^2+9y^3}$.

A. $\dfrac{29}{39}$. B. $\dfrac{19}{39}$. C. $\dfrac{27}{37}$. D. $\dfrac{17}{37}$.

Lời giải.

Câu 19

Bất phương trình $(2^x - 17\cdot 2^x + 16)\left[5 + \log_{\frac{1}{2}}(x+4)\right] > 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

Ⓐ 26. Ⓑ 27. Ⓒ 28. Ⓓ Vô số.

Lời giải.

Câu 20

Bất phương trình $(3^{7+x} - 1)\left[2 + \log_{\frac{1}{12}}(x^2 - 25)\right] < 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên nhỏ hơn 100?

Ⓐ 91. Ⓑ 99. Ⓒ 93. Ⓓ Vô số.

Lời giải.

CÂU 40 ĐỀ MINH HỌA

Câu 40

(Đề minh họa 2022) Cho hàm số $y = (x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

A 3. B 4. C 5. D 6.

Lời giải.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 40

a) DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán xác định nghiệm, biện luận số nghiệm phương trình khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số.

b) HƯỚNG GIẢI:

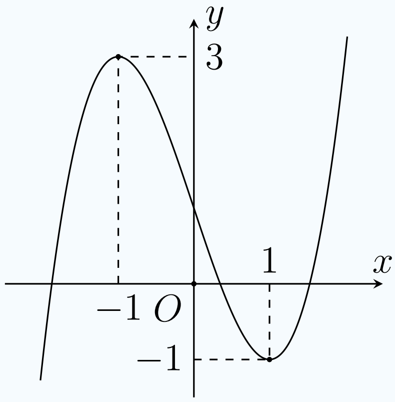
- **Bước 1:** Từ phương trình $f'(f(x)) = 0$, ta xác định được các nghiệm u của phương trình $f'(u) = 0$.
- **Bước 2:** Dựa vào bảng biến thiên $y = f(x) \Rightarrow$ giá trị của $f(x) = x_i$ (ước lượng các giá trị).
- **Bước 3:** Xác định tiếp số giao điểm của phương trình $f(x) = x_i$. Kết luận số giao điểm (số nghiệm) của phương trình đã cho.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 40

Dạng 1. Sự tương giao biết đồ thị hàm $f(x)$ - loại không có tham số m]

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

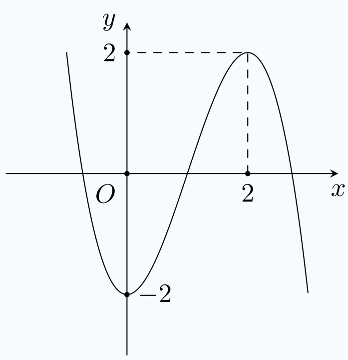
Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

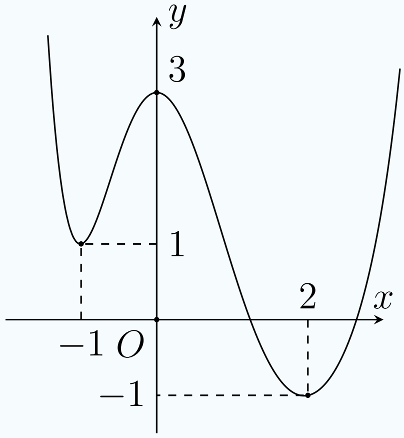
Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.



Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau



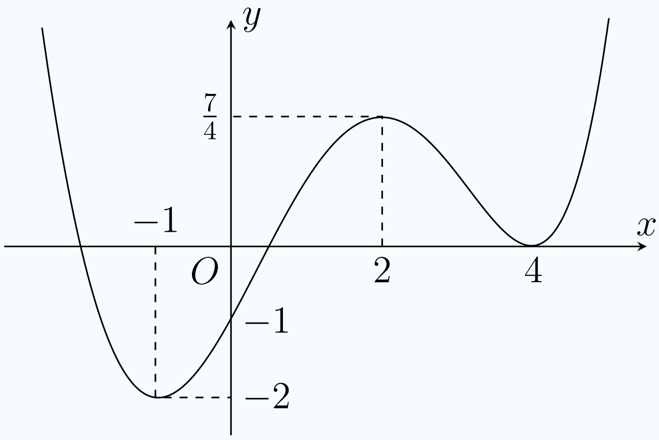
Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như sau



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) \cdot f'(f(x)) = 0$ là

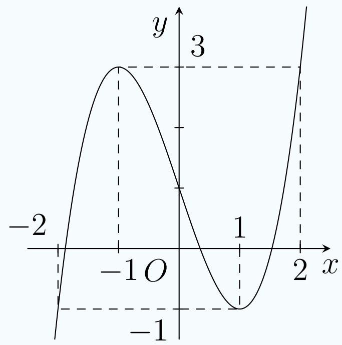
A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $|f(|x^2 - 2x|)| = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

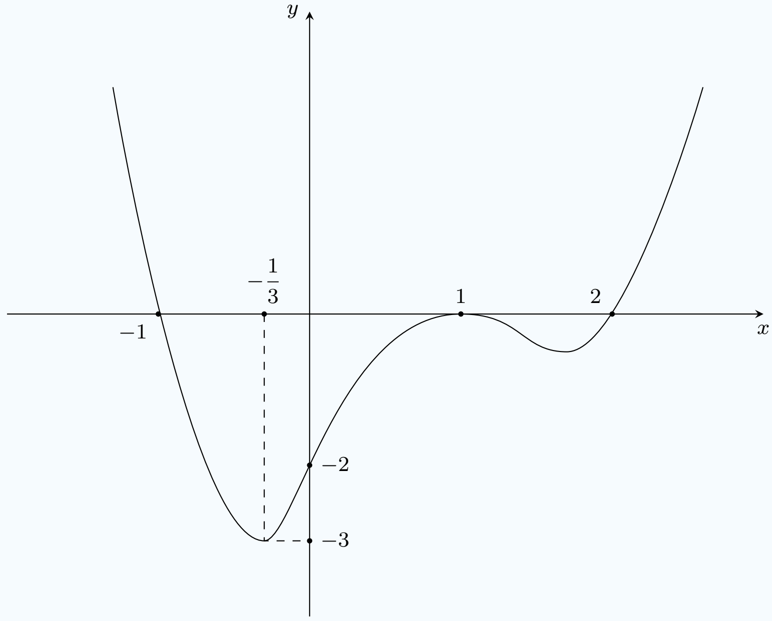
(A) 9. (B) 7. (C) 6. (D) 8.



Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



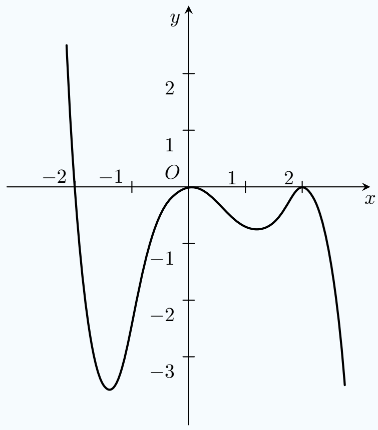
Đặt $g(x) = f\left(f'(x) - 1\right)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

A. 10 .
B. 9 .
C. 6 .
D. 8.

Lời giải.

Câu 7

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f\left(f(x)\right)$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?

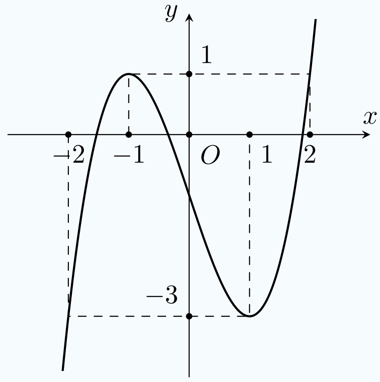


A. 14.
B. 10.
C. 8.
D. 12.

Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu thực phân biệt?



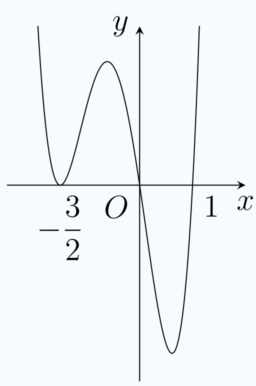
(A) 6. (B) 5. (C) 7. (D) 4.

Lời giải.

Dạng 2. Sự tương giao biết đồ thị hàm $f(x)$ - Loại có tham số m

Câu 9

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0$; $f(0) = 3$; $f(1) = 0$; $f(2) > 3$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Với $m \in (0; 3)$ số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 - 3\right) = m$; ($m$ là tham số thực), là

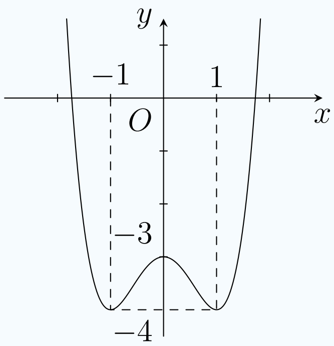


(A) 3. (B) 4. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Câu 10

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong như hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.



A. $-4 < m < -3$.

B. $0 < m < 3$.

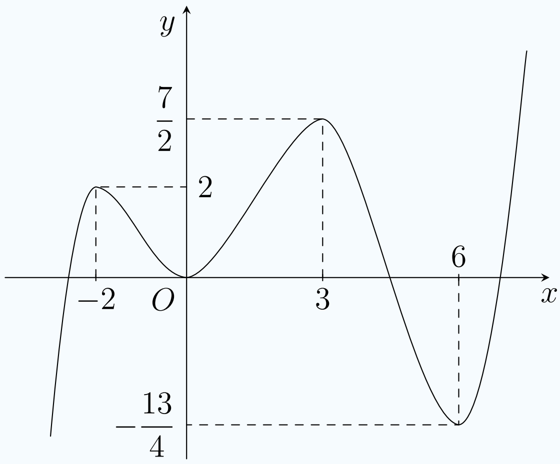
C. $m > 4$.

D. $3 < m < 4$.

Lời giải.

Câu 11

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3 - 6x + 2\right) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



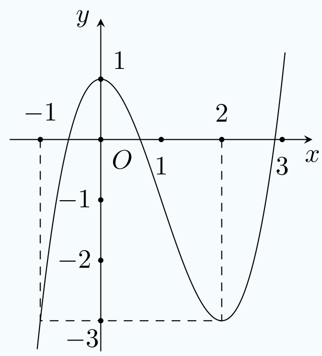
Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Câu 12

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^3 - 3x^2 + m\right) + 3 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$?



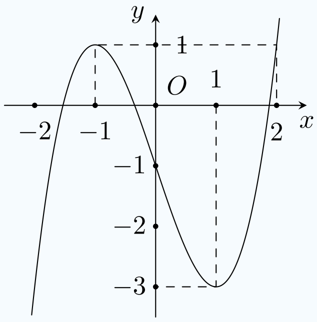
Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ 10. Ⓓ 5.

Lời giải.

Dạng 3. Sự tương giao biết đồ thị hàm $f(x)$ - Loại có chứa hàm lượng giác

Câu 13

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(f(\cos x)-1)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?

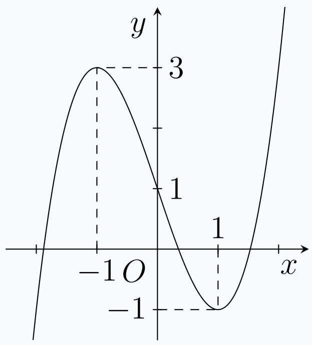


A 2. B 5. C 4. D 6.

Lời giải.

Câu 14

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -9.
B. -10.
C. -6.
D. -5.

Lời giải.

Dạng 4. Sự tương giao biết bảng biến thiên hàm số $f(x)$ - Loại không có tham số m

Câu 15

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			4				4		
	$-\infty$				$-\dfrac{65}{4}$				$-\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(f(x)\right) = 0$ là

A. 9. B. 10. C. 8. D. 11.

Lời giải.

Câu 16

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-7	$\nearrow$	1

Số nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$ của phương trình $2f\left(x^2-2x\right)+1=0$ là

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải.

Câu 17

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)-1)=0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Lời giải.

Câu 18

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	1

Số nghiệm thuộc nửa khoảng $(-\infty;2020]$ của phương trình $2f\left(f(2x-1)\right)+3=0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Lời giải.

Câu 19

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm dương của phương trình $2f\left(f(x-1)\right)+3=0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Lời giải.

Câu 20

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm dương của phương trình $2f\left(\sqrt{x^2-2x}\right)-5=0$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Lời giải.

Câu 21

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f^2(x) + 4f(x) = 0$ là

A 2. B 3. C 4. D 5.

Lời giải.

Câu 22

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

A 12. B 13. C 10. D 11.

Lời giải.

Câu 23

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f^2(x)\right) - 4 = 0$ là

A 3. **B** 5. **C** 7. **D** 9.

Lời giải.

Câu 24

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

A 6. **B** 7. **C** 8. **D** 9.

Lời giải.

Câu 25

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f^2(x) - f(x) - 2 = 0$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Câu 26

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 0$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

. . . .

Câu 27

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

A 4. **B** 5. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

. . . .

Câu 28

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

A 6. **B** 8. **C** 9. **D** 7.

Lời giải.

Câu 29

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ ↘		-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

A 8. B 7. C 9. D 6.

Lời giải.

Câu 30

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(2f(x)) = 0$ là

A 6. B 4. C 3. D 5.

Lời giải.

....

Dạng 5. Sự tương giao biết bảng biến thiên hàm số $f(x)$ - Loại có tham số m

Câu 31

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-2		-1		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			3				1
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	0				-1		

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(3\cos x + 1) = -\dfrac{m}{2}$ có nghiệm?

A 8. **B** 6. **C** 7. **D** 9.

Lời giải.

....

Câu 32

Cho hàm hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$				10		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-3				$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|f\left(x^2+1\right)\right| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

(A) 12. (B) 198. (C) 6. (D) 190.

Lời giải.

Câu 33

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		¦	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	5	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Phương trình $f\left(|x^2-2|-3\right)=m$, với m là tham số, có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

(A) 10. (B) 5. (C) 12. (D) 8.

Lời giải.

Câu 34

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số giá trị nguyên của m để phương trình $|f(2x-3)| - m = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ 1	↘	3	↗	$+\infty$

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Dạng 6. Sự tương giao biết bảng biến thiên hàm số $f(x)$ - Có chứa hàm số lượng giác

Câu 35

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

A. 4. B. 6. C. 3. D. 8.

Lời giải.

Câu 36

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 3\pi]$ của phương trình $2f(\cos x) + 3 = 0$ là

A. 6. B. 8. C. 3. D. 10.

Lời giải.

CÂU 41 ĐỀ MINH HỌA

Câu 41

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

Ⓐ -3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 7.

Lời giải.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 41

Đây là câu hỏi ở mức vận dụng về nguyên hàm & tích phân. Để làm được những câu dạng này, học sinh cần nắm được các kiến thức cơ bản về nguyên hàm & tích phân, các phương pháp đổi biến và tích phân từng phần.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 41

Dạng 7. Tính nguyên hàm & tích phân sử dụng tính chất và nguyên hàm cơ bản

- Sử dụng tính chất của nguyên hàm & tích phân.
- Sử dụng nguyên hàm cơ bản.

Câu 1

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 6x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = 2$, khi đó $F(2)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{37}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{37}{2}$. Ⓒ $\dfrac{2}{37}$. Ⓓ $-\dfrac{2}{37}$.

Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 12x^2 + 6x + 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(-1) = -5$. Biết hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = -8$. Tính $F(-1)$.

A. -10. B. 10. C. -14. D. 8.

Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 - 2x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(1) = -1$, khi đó $F(2)$ bằng

A. $\dfrac{41}{30}$. B. $-\dfrac{41}{30}$. C. $\dfrac{21}{10}$. D. $\dfrac{26}{15}$.

Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 18x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và thỏa mãn $f(0) = F(0) = 0$. Khi đó $F(1)$ bằng

A. 5. B. -5. C. 2. D. -2.

Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 4x^3 + 4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Khi đó $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{4}{15}$. (B) $\dfrac{26}{15}$. (C) $\dfrac{-4}{15}$. (D) 0.

Lời giải.

Câu 6

Cho số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $f(0) = F(1) = 0$. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = F(x)$ và trục Ox.

(A) $S = \dfrac{64}{15}$. (B) $S = \dfrac{116}{15}$. (C) $S = \dfrac{576}{5}$. (D) $S = \dfrac{32}{15}$.

Lời giải.

Câu 7

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^*$ có đạo hàm đến cấp hai thỏa mãn $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(-3) = \ln 3$. Giá trị $f(-2)$ bằng

(A) $4\ln 2$. (B) $2\ln 2$. (C) $1 + 2\ln 2$. (D) $\ln 2$.

Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \sin x + \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(\pi) = 0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(2\pi) = 3$, khi đó $F(3\pi)$ bằng

A. $\pi - 1$.
B. $\pi + 5$.
C. $3\pi - 1$.
D. $3\pi + 5$.

Lời giải.

Câu 9

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 6x^2 - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$, khi đó $F(2)$ bằng

A. 2.
B. 4.
C. 6.
D. 8.

Lời giải.

Câu 10

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^3 + 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(-1) = 3$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = -1$, khi đó $F(-1)$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$.
B. $-\dfrac{14}{15}$.
C. $\dfrac{1}{15}$.
D. $\dfrac{-3}{5}$.

Lời giải.

Dạng 8. Tính nguyên hàm & tích phân bằng phương pháp đổi biến

- **Đổi biến dạng 1.** Đặt $u = u(x)$...
- **Đổi biến dạng 2.** Đặt $x = u(t)$...

Chú ý: Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ thì $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, $(a \neq 0)$.

Câu 11

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 2\sin^2 x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = f(0) = 1$, khi đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 + 4\pi + 3}{16}$.

B. $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 + 4\pi + 12}{16}$.

C. $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 + \pi + 3}{16}$.

D. $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 + \pi + 12}{16}$.

Lời giải.

Câu 12

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ và $f(0) = 0$, $f(2) = 2$. Khi đó $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $2 - \ln 2$.

B. $2 + \ln 2$.

C. 2.

D. $2 + 2\ln 2$.

Lời giải.

Câu 13

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \sin x - 9\cos 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. -2π.
B. $2 - 2\pi$.
C. 2π.
D. $2 + 2\pi$.

Lời giải.

Câu 14

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = 2e^{2x} + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{3}{2}$, khi đó $F(2)$ bằng

A. $\frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} + 4$.
B. $\frac{e^4}{2} + \frac{e^2}{2} + 4$.
C. $\frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} - 4$.
D. $\frac{e^4}{2} + \frac{e^2}{2} - 4$.

Lời giải.

Câu 15

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thoả mãn $f'(x) = \frac{2x-5}{x-1}$, $f(3) = 2$ và $f(0) = 4$. Giá trị của biểu thức $f(-3) - 2f(5)$ bằng

(A) -14. (B) $6-3\ln 2$. (C) $-2-6\ln 2$. (D) 14.

Lời giải.

Câu 16

Cho hàm số $y=f(x)$có đạo hàm là $f'(x)=24\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=12\mathrm{e}^{2}+\mathrm{e}$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=6\mathrm{e}^{2}+\mathrm{e}+3$, khi đó $F(0)$ bằng

(A) 9. (B) 10. (C) 11. (D) 12.

Lời giải.

Câu 17

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\sin 3x+\mathrm{e}^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=3$, khi đó $F(\pi)$ bằng

(A) $-\mathrm{e}^{-\pi}+2$. (B) $\mathrm{e}^{-\pi}+2$. (C) $\mathrm{e}^{-\pi}-2$. (D) $-\mathrm{e}^{-\pi}-2$.

Lời giải.

Câu 18

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$; $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Tính $P=f(-1)+f(3)$.

A. $P=3+\ln 3$. B. $P=3+\ln 5$. C. $P=3+\ln 15$. D. $P=3-\ln 15$.

Lời giải.

Câu 19

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\dfrac{13}{4}$. Tính $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

A. $\dfrac{\pi+2\sqrt{2}+48}{16}$. B. $\dfrac{\pi}{16}$. C. $\dfrac{\pi-\sqrt{2}-8}{16}$. D. $\dfrac{\pi-2\sqrt{2}+48}{16}$.

Lời giải.

Câu 20

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2022$, khi đó $F(1)$ bằng

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}+\dfrac{4035}{2}$. B. $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}+\dfrac{4037}{2}$. C. $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+\dfrac{4037}{2}$. D. $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+2020$.

Lời giải.

Dạng 9. Tích phân từng phần

- Cho u là hàm số theo biến x thì $\mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x$.
- Các biểu thức vi phân hay sử dụng
- Thứ tự ưu tiên đặt u: Nhất log – nhì đa – tam lượng – tứ mũ, thành phần còn lại đặt là $\mathrm{d}v$.

Đặt $\begin{cases} u = \ldots \\ \mathrm{d}v = v'\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x \\ v = \displaystyle\int \mathrm{d}v. \end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int u\mathrm{d}v = u\cdot v - \int v\mathrm{d}u$ và $\displaystyle\int_a^b u\cdot \mathrm{d}v = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$

Câu 21

Cho hai hàm số liên tục $f(x)$ và $g(x)$ có nguyên hàm lần lượt là $F(x)$ và $G(x)$ trên đoạn $[0;2]$. Biết $F(0)=0$, $F(2)=1$, $G(0)=-2$, $G(2)=1$ và $\displaystyle\int_0^2 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\displaystyle\int_0^2 f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$

A. 3. B. 0. C. -2. D. 4.

Lời giải.

Câu 22

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 12$. B. $I = 8$. C. $I = -12$. D. $I = -8$.

Lời giải.

Câu 23

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;\pi]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\pi} \sin x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tích phân $\int\limits_0^{\pi} \cos x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1.
B. -1.
C. 0.
D. 2.

Lời giải.

Câu 24

Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tính $I = \int\limits_0^{1} f'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$.
B. $I = 2$.
C. $I = 0$.
D. $I = -1$.

Lời giải.

Câu 25

Cho $F(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Biết $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}} f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{b\mathrm{e}^2}$ (với a, b, $c\in\mathbb{R}$, $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính $P=a+c-b$.

A. $P=1$.
B. $P=2$.
C. $P=0$.
D. $P=-2$.

Lời giải.

Câu 26

Cho $F(x)=(x-1)\cdot\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot\mathrm{e}^{2x}$. Tính

$$I=\int\limits_0^2 f'(x)\cdot\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x.$$

Ⓐ $I = 1$. Ⓑ $I = -1$. Ⓒ $I = 0$. Ⓓ $I = 2$.

Lời giải.

Câu 27

Cho $F(x) = \dfrac{-1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Biết $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{be^3}$ (với a, b, $c \in \mathbb{R}$, $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tính $P = a + c - b$.

Ⓐ $P = 1$. Ⓑ $P = 2$. Ⓒ $P = 0$. Ⓓ $P = -2$.

Lời giải.

Câu 28

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^2f''(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$.
B. 2.
C. 3.
D. $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Câu 29

Biết kết quả tích phân $I = \int\limits_0^1 (3-x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \dfrac{ae^2-b}{c}$ $\left(a,\ b,\ c \in \mathbb{Z},\ \dfrac{a}{c}\text{ tối giản}\right)$. Tính $P = 3a - 3b + c$.

A. $P = 2$.
B. $P = 1$.
C. $P = -1$.
D. $P = -2$.

Lời giải.

Câu 30

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;\mathrm{e}]$ và $f(\mathrm{e})=1$; $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln(x)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Tính $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

(A) $I=\frac{1}{3}$. (B) $I=0$. (C) $I=\frac{1}{4}$. (D) $I=\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Dạng 10. Tích phân hàm ẩn

- Đổi biến
- Từng phần
- Phương trình vi phân cơ bản

Câu 31

Cho biết tích phân $\int\limits_0^1 f(2x+1)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^1 f(4x+3)\,\mathrm{d}x=3$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_1^2 f(6x-5)\,\mathrm{d}x$ tương ứng bằng

(A) 5. (B) -1. (C) $\frac{8}{3}$. (D) 6.

Lời giải.

Câu 32

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 x \cdot f'(x+1)\,\mathrm{d}x = 3$; $f(2) = 4$. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2.
B. 7.
C. -1.
D. 1.

Lời giải.

Câu 33

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 x^2 \cdot f''(x)\,\mathrm{d}x = 5$; $f'(1) = 2f(1) + 3$. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 8.
B. 1.
C. 2.
D. 15.

Lời giải.

Câu 34

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $x \cdot f\left(x^2+1\right) - 2f(x+1) = x^3 - x - 2$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{9}{4}$.
B. 1.
C. $\dfrac{3}{2}$.
D. $\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Câu 35

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $f(3x+1)+2f(4-3x)=21-6x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 6. **B** 12. **C** $\dfrac{15}{2}$. **D** 18.

Lời giải.

Câu 36

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức $x^2 \cdot f\left(x^3+1\right) - 3f(2-x) + x \cdot f'(x+1) = x^5 - x^2 + 4x - 6$. Giá trị của $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$.
B. 1.
C. 0.
D. $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Câu 37

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=xg(x)$ với $\forall x\in(0;+\infty)$.

Biết rằng $\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x=10$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^{\sqrt{a}}\frac{f\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x}{x}$

A. 1. B. 2. C. 5. D. 11.

Lời giải.

Câu 38

Cho hàm số $f(x)$ liên tục thỏa mãn $[f(x)]^3 + 2f(x) = 2x - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,dx$ bằng

A. 1.
B. -1.
C. 0.
D. 2.

Lời giải.

Câu 39

Cho hàm số $f(x)$ liên tục thỏa mãn $[f(x)]^5 + 3f(x) = x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_{0}^{4} [f(x)]^2\,dx$ bằng

A. $\dfrac{12}{7}$.
B. -3.
C. 8.
D. $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Câu 40

Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f(\sin 2x)\, dx = 6$. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$ bằng

A. 24π.

B. $\frac{24}{\pi}$.

C. 48π.

D. $\frac{48}{\pi}$.

Lời giải.

CÂU 42 ĐỀ MINH HỌA

Câu 42

Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 4a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}a^3$. (B) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}a^3$. (C) $16a^3$. (D) $\dfrac{16}{3}a^3$.

Lời giải.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 42

Câu 1

Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{16\sqrt{6}}{3}a^3$. (B) $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}a^3$. (C) $16a^3$. (D) $\dfrac{16}{3}a^3$.

Lời giải.

Câu 2

Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 45°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{16\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}a^3$. (B) $\dfrac{8\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}a^3$. (C) $16a^3$. (D) $\dfrac{16}{3}a^3$.

Lời giải.

Câu 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình thành tâm O, $AB = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm O. Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau, thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{6}a^3$.   B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$.   C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$.   D. $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Câu 4

Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Biết hình chiếu của điểm A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của AD. Góc giữa mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt $(ABCD)$ là 30°. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $4a^3$.   B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.   C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.   D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Câu 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ và $SA \perp (ABCD)$, hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3}{3}$.
B. $\dfrac{2}{3}a^3$.
C. $\dfrac{4}{3}a^3$.
D. $\dfrac{8}{3}a^3$.

Lời giải.

Câu 6

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'A = A'B = A'C$. Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = 2a$. Hai mặt phẳng $(A'ABB')$ và $(A'B'C)$ vuông góc nhau. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Câu 7

Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, có $AC = a\sqrt{2}$. Biết $C'O \perp (ABCD)$, hai mặt phẳng $(C'AB)$ và $(C'CD)$ vuông góc với nhau. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $4a^3$. B. $\dfrac{a^3}{6}$. C. a^3. D. $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Câu 8

Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O có $AB = 2a$, $AC = 4a$ và $A'A = A'B = A'C$. Biết hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(DA'C')$ tạo với nhau góc 30°. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $6\sqrt{3}a^3$.
B. $12\sqrt{2}a^3$.
C. $6\sqrt{2}a^3$.
D. $12\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Câu 9

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $\triangle ABC$ vuông cân tại A, $AB = a$, $AA' = AB' = AC'$. Cạnh BC' hợp với đáy góc 60°. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{\sqrt{30}a^3}{4}$.
B. $\dfrac{\sqrt{30}a^3}{6}$.
C. $\dfrac{\sqrt{15}a^3}{6}$.
D. $\dfrac{\sqrt{15}a^3}{2}$.

Lời giải.

Câu 10

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Góc giữa $B'D$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 45°. Tính thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

Ⓐ $a^3\sqrt{6}$. Ⓑ $a^3\sqrt{3}$. Ⓒ a^3. Ⓓ $6a^3$.

Lời giải.

Câu 11

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi M, N là điểm thuộc cạnh SA, AC sao cho $\dfrac{AM}{SA} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{CN}{AC} = \dfrac{2}{3}$. Biết góc giữa hai đường thẳng MN và SD bằng 60°, thể tích khối chóp $S.ABC$ là

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.

Câu 12

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30°, O là trọng tâm của tam giác ABC. Một hình chóp đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60° sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA',OB', OC'. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối $S.ABC$ và $O.A'B'C'$, V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{9}{16}$.
B. $\dfrac{1}{4}$.
C. $\dfrac{27}{64}$.
D. $\dfrac{9}{64}$.

Lời giải.

Câu 13

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB) là $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc H của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{1}{12}$. B. $\dfrac{1}{36}$. C. $\dfrac{1}{24}$. D. $\dfrac{1}{48}$.

Lời giải.

CÂU 43 ĐỀ MINH HỌA

Câu 43

Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

(A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 43

Dạng 11. Tham số m của phương trình bậc hai

Phương pháp giải

Câu 1

Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 2(m+1)z + 12m - 8 = 0$ (m là tham số thực), có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1| = |z_2 + 1|$?

(A) 7. (B) 8. (C) 10. (D) 11.

Lời giải.

Câu 2

Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $z^2 - 2z + m^2 + 9m = 0$ có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0| = \sqrt{10}$?

A 2. B 3. C 4. D 6.

Lời giải.

Câu 3

Trong tập số phức, cho phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 + 3m - 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong đoạn $[-2022; 0]$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

A 2022. B 2023. C 0. D 1.

Lời giải.

Câu 4

Cho S là tập hợp các số nguyên của tham số m để phương trình $z^2 - (m-3)z + m^2 + m = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$. Số phần tử của S là

A 4. B 3. C 2. D 1.

Lời giải.

Câu 5

Cho phương trình $2z^2 - 3mz + 2m - 1 = 0$ trong đó m là tham số thực. Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 \leq 5$ là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Dạng 12. Phương trình đưa về bậc hai

Phương pháp giải

Câu 6

Cho phương trình phức $z^2 - (11 - 4i)z + 5 - 8i = 0$. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình. Giá trị của biểu thức $T = |(z_1 + 3i - 1)(z_2 + 3i - 1)|$ bằng

A. $\sqrt{298}$. B. $\sqrt{205}$. C. $\sqrt{533}$. D. $\sqrt{391}$.

Lời giải.

Câu 7

Cho phương trình phức $z^2-(3-2i)z+4-i=0$. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình. Phần ảo của số phức $T=\dfrac{1}{z_1-i}+\dfrac{1}{z_2-i}$ bằng

(A) $\dfrac{8}{17}$. (B) $\dfrac{19}{17}$. (C) $-\dfrac{8}{17}$. (D) $-\dfrac{19}{17}$.

Lời giải.

Câu 8

Cho phương trình bậc hai $z^2+(5i-6)z+3-15i=0$. Gọi z_1 là nghiệm phức của phương trình và có phần ảo lớn hơn nghiệm kia. Giá trị $|z_1|$ bằng

(A) $\sqrt{17}$. (B) $\sqrt{13}$. (C) $\sqrt{41}$. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Câu 9

Cho phương trình bậc hai $z^2-(7-6i)z+7-19i=0$. Gọi z_1 là nghiệm phức của phương trình và có phần thực lớn hơn nghiệm kia. Giá trị $|z_1|$ bằng

(A) $\sqrt{13}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{26}$. (D) $\sqrt{41}$.

Lời giải.

Câu 10

Cho hai nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 + az + b = 0$ lần lượt là $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 1 + 4i$. Giá trị của biểu thức $T = |a + 2ib|$ bằng

(A) $2\sqrt{37}$. (B) $4\sqrt{71}$. (C) $4\sqrt{61}$. (D) 12.

Lời giải.

Câu 11

Cho phương trình bậc hai $z^2 + az + 2a - i = 0$, với a là số phức, có một nghiệm là $z_1 = 2 - 5i$. Giá trị của $|a|$ bằng

(A) $\dfrac{36}{41}$. (B) $2\sqrt{41}$. (C) $\sqrt{29}$. (D) $\dfrac{21\sqrt{82}}{41}$.

Lời giải.

Dạng 13. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải

Câu 12

Có bao nhiêu số phức z thỏa điều kiện z^5 và $\dfrac{1}{z^2}$ là hai số phức liên hợp của nhau?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Câu 13

Trong mặt phẳng phức, cho A, B, C, D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 1 + 4i$, $z_3 = 5$, z_4. Biết rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn, khi đó số phức z_4 là

(A) $z_4 = 2 - 2i$.
(B) $z_4 = 4 - 2i$.
(C) $z_4 = 4 - i$.
(D) $z_4 = 3 + 3i$.

Lời giải.

Câu 14

Tìm số phức z sao cho biểu thức $P = |z-2|^2 + |z+1-i|^2 + |z-2-5i|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, biết rằng số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z-1-2i| = |3i+1-2\overline{z}|$.

(A) $z = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}i$.
(B) $z = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}i$.
(C) $z = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}i$.
(D) $z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}i$.

Lời giải.

Câu 15

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn hệ thức $(z+1)(\overline{z}-2+i)=2+3i$.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Câu 16

Tìm số phức z sao cho $(1+2i)z$ là số thuần ảo và $|2z-\overline{z}|=\sqrt{13}$.

A. $z=2+i$ hoặc $z=-2-i$. B. $z=-2-i$.

C. $z=-i$. D. $z=-2-2i$.

Lời giải.

Dạng 14. Tính toán các yếu tố của số phức (mức vận dụng)

Câu 17

Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z|-2\overline{z}=-7+3i+z$. Tính mô-đun của số phức $\omega=1-z+z^2$.

(A) $|\omega|=\sqrt{37}$. (B) $|\omega|=\sqrt{457}$. (C) $|\omega|=\sqrt{425}$. (D) $|\omega|=\sqrt{445}$.

Lời giải.

Câu 18

Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn $z-4=(i+1)|z|-(3z+4)i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $|z|\in(6;9)$. (B) $|z|\in(4;6)$. (C) $|z|\in(1;4)$. (D) $|z|\in(0;1)$.

Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Câu 19

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_1 + z_2| = 3$ và $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$. Giá trị của biểu thức $\left|(z_1\overline{z_2})^3 + (\overline{z_1}z_2)^3\right|$ bằng

A. 1458.
B. 324.
C. 729.
D. 2196.

Lời giải.

Câu 20

Cho số phức z (không là số thực) thỏa mãn $\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là một số thực. Tìm mô-đun của z.

A. $|z| = \sqrt{2}$.
B. $|z| = 1$.
C. $|z| = \sqrt{3}$.
D. $|z| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Câu 21

Cho hai số phức $z \neq 0$, $w \neq 0$ và $z + 2w \neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{z+2w}$, biết $|w| = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < |z| < 1$.
B. $1 < |z| < 2$.
C. $2 < |z| < 3$.
D. $3 < |z| < 4$.

Lời giải.

Câu 22

Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z, iz và $2z$. Biết diện tích tam giác ABC bằng 4. Mô-đun số phức z bằng

Ⓐ $\sqrt{2}$. Ⓑ 8. Ⓒ 2. Ⓓ $2\sqrt{2}$.

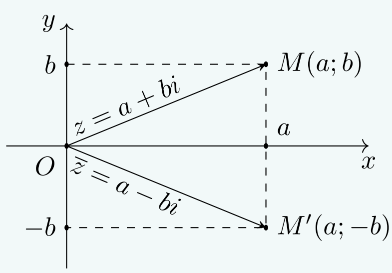
Lời giải.

Dạng 15. Bài toán tập hợp điểm

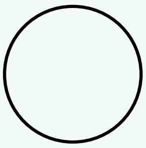
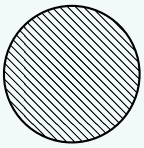
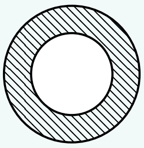
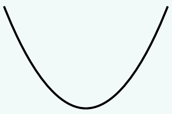
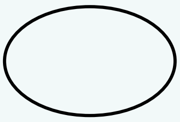
Các kiến thức cơ bản cần nắm vững như sau:

a) Số phức $z = a + bi$ có phần thực là a, phần ảo là b.

b) Số phức liên hợp $\overline{z} = a - bi$ và cần nhớ $i^2 = -1$.



- Số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a;b)$. Số phức liên hợp $\overline{z} = a - bi$ có điểm biểu diễn $M'(a;-b)$. Hai điểm M và M' đối xứng nhau qua trục hoành Ox.
- Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x;y)$
$Ax+By+C=0$	Là đường thẳng $d: Ax+By+C=0$.
$\left[\begin{array}{l}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\x^2+y^2-2ax-2by+c=0\end{array}\right.$ 	Là đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$\left[\begin{array}{l}(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2\\x^2+y^2-2ax-2by+c\le 0\end{array}\right.$ 	Là hình tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$ (đường tròn kể cả bên trong).
$R_1^2\le (x-a)^2+(y-b)^2\le R_2^2$ 	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2.
$y=ax^2+bx+c,(a\ne 0)$ 	Là một Parabol (P) có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \begin{cases}MF_1+MF_2=2a\\F_1F_2=2c<2a\end{cases}$ 	Là một Elip có độ dài trục lớn $2a$, độ dài trục bé $2b$ và tiêu cự là $2c=2\sqrt{a^2-b^2},(a>b>0)$.

Câu 23

Cho z thỏa $|z-i|=|z+3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1-2i)z-1$ là đường thẳng có dạng

A. $2x+y+7=0$. B. $2x+y-7=0$. C. $x+2y-7=0$. D. $x+2y+7=0$.

Lời giải.

Câu 24

Cho số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có bán kính bằng

A. $\dfrac{9}{2}$.
B. $3\sqrt{2}$.
C. 3.
D. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Câu 25

Cho các số phức z thỏa $|z|=4$. Biết tập hợp biểu diễn số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 4.
B. 5.
C. 20.
D. 22.

Lời giải.

Câu 26

Cho các số phức thỏa $|z|=4$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $w=\dfrac{z-i}{z+2}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.
B. $\dfrac{1}{3}$.
C. $\dfrac{2}{3}$.
D. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.

Câu 27

Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = \dfrac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

(A) $2\sqrt{3}$. (B) 12. (C) 20. (D) $2\sqrt{5}$.

Lời giải.

CÂU 44 ĐỀ MINH HỌA

Câu 44

Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \dfrac{1}{|z| - z}$ có phần thực bằng $\dfrac{1}{8}$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2$, giá trị lớn nhất của $P = |z_1 - 5i|^2 - |z_2 - 5i|^2$ bằng

A 16. B 20. C 10. D 32.

Lời giải.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 44

1) Đẳng thức mô-đun

a) $|mz_1 + nz_2|^2 = m^2|z_1|^2 + n^2|z_2|^2 + mn(z_1.\overline{z}_2 + \overline{z}_1.z_2)$ với $m, n \in \mathbb{R}$ và $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

b) $|z + z_1|^2 + |z + z_2|^2 = 2\left[\left|z + \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right|^2 + \left|\dfrac{z_1 - z_2}{2}\right|^2\right]$ với $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

c) $|z_1 + z_2| = \left|\dfrac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + \dfrac{|z_1|}{|z_2|}z_2\right|$ với z_1, z_2 là các số phức khác 0.

2) Những BĐT mô-đun hay dùng

a) $|z+z_1|+|-z-z_2|\geq |z_1-z_2|$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}z+z_2=0\\ \begin{cases}z+z_2\neq 0\\ \exists k\in\mathbb{R},\ k\geq 0: z+z_1=k\left(-z-z_2\right)\end{cases}\end{array}\right.\\ \exists k\in\mathbb{R},\ 0\leq k\leq 1: z+z_1=k\left(z_1-z_2\right).\end{array}\right.$

b) $\left||z+z_1|-|-z-z_2|\right|\leq |z_1-z_2| \Leftrightarrow |z+z_1|+|z+z_2|\geq 2\left|z+\dfrac{z_1+z_2}{2}\right|$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}z+z_2=0\\ \begin{cases}z+z_2\neq 0\\ \exists k\in\mathbb{R},\ k\leq 0: z+z_1=k\left[-z-z_2\right]\end{cases}\end{array}\right.\\ \exists k\in\mathbb{R},\ k\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty): z+z_1=k\left(z_1-z_2\right).\end{array}\right.$

3) Tập hợp điểm biểu diễn số phức

a) Trong mặt phẳng phức, số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bằng

- Điểm $M(x;y)$, kí hiệu $M(z)$.
- Véc-tơ $\overrightarrow{OM}=(x;y)$.
- Véc-tơ $\vec{u}=(x;y)$.

b) Biểu diễn hình học của z_1+z_2, z_1-z_2, kz_1 $(k\in\mathbb{R})$.
Gọi M, $\vec{u}$ lần lượt biểu diễn số phức z_1 và N, $\vec{v}$ lần lượt biểu diễn số phức z_2. Ta có

- $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$ và $\vec{u}+\vec{v}$ biểu diễn số phức z_1+z_2.
- $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$ và $\vec{u}-\vec{v}$ biểu diễn số phức z_1-z_2.
- $k\overrightarrow{OM}$ và $k\vec{u}$ biểu diễn số phức kz_1.

c) Với M, A, B lần lượt biểu diễn số phức z, z_1, z_2 thì $OM=|z|$, $AB=|z_2-z_1|$.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 44

Dạng 16. Bài toán min, max với quỹ tích là đường tròn (Phương pháp hình học)

Phương pháp giải

- Tìm điểm biểu diễn cho số phức z.
- Sử dụng phương pháp hình học để tìm min, max.

Câu 1

Cho số phức z thỏa $|z-1+i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=|2z-4+i|+|-2z+1-5i|$.

(A) 4. (B) 5. (C) $\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Câu 2

Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z} = \dfrac{2z}{z-2}$ và $T = 2|z-4+3i| - |z-2-4i|$ đạt giá trị lớn nhất. Biết giá trị lớn nhất của T bằng $a\sqrt{b}, a, b \in \mathbb{Z}$ và b là số nguyên tố. Tính a^2+b^2.

A. 41. B. 40. C. 34. D. 52.

Lời giải.

Câu 3

Cho hai số phức z, w thỏa $|z-2+i| = |w-1+3i| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |3z-2w|$ bằng

A. 10. B. 15. C. 9. D. 11.

Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Câu 4

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 3 - 3i| = 2\sqrt{2}$ và $|z_2 - m - (m-4)\,i| = \sqrt{2}, m \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{2}$.
B. $\sqrt{2}$.
C. $3\sqrt{2}$.
D. 3.

Lời giải.

Câu 5

Xét các số phức z và w thoả mãn $z(1-w) = 2+2wi$. Gọi S là tập các số phức z sao cho tập hợp các điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng toạ độ Oxy là tia Oy. Giá trị lớn nhất của $P = |z_1 - 3 + i| - |(1+i)z_2 - 4 - 2i|$ với z_1 ; $z_2 \in S$ là

A. 2. B. $4-\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $2-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 6

Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \dfrac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng $\dfrac{1}{8}$. Xét các số phức $z \in S$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z-2|^2 + |z+2i|^2$ bằng

A. 16. B. $40-16\sqrt{2}$. C. $40+16\sqrt{2}$. D. 32.

Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Câu 7

Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(6 - z)(8i + \overline{z})$ là số thuần ảo. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $20 - 4\sqrt{22}$.
B. $5 - \sqrt{21}$.
C. $20 - 4\sqrt{21}$.
D. $5 - \sqrt{22}$.

Lời giải.

Câu 8

Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-2+3i| = 2\sqrt{2}$ và biểu thức $T = |z+7+2i| + |z-1-6i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $S = |z-(2021-2022i)|$.

A $S = 2023\sqrt{2}$. B $S = 2022\sqrt{2}$. C $S = 2018\sqrt{2}$. D $S = 2017\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 9

Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-1+i| = 2$. Xét các số phức z_1, z_2 thuộc S thỏa mãn $|z_2 - z_1| = 2\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 - 2 + 2i|^2 - |z_2 - 2 + 2i|^2$ bằng

A 6. B 12. C 8. D 9.

Lời giải.

Câu 10

Cho số phức z thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-3i|^2+|z-4-i|^2$.

A. $24+4\sqrt{10}$. B. 36. C. $24-4\sqrt{10}$. D. $24+12\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 11

Cho số phức $z = a+bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1+3i}{1-i\sqrt{3}}\right| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = 3a-2b$ khi biểu thức $P = 2|z-i| + |z-5+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 2. B. 5. C. -3. D. -2.

Lời giải.

Câu 12

Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| = |z^2|$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-5-2i|$ bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{5}+3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}+5\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}+3\sqrt{5}$. D. $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Câu 13

Cho các số phức $z_1 = -3i$, $z_2 = 4+i$ và z thỏa mãn $|z-i| = 2$. Khi biểu thức $T = |z-z_1|+2|z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng phần thực và phần ảo của z là

A. $\dfrac{5+10\sqrt{13}}{17}$.

B. $\dfrac{5-10\sqrt{13}}{17}$.

C. $\dfrac{1+2\sqrt{13}}{17}$.

D. $\dfrac{1-2\sqrt{13}}{17}$.

Lời giải.

Dạng 17. Bài toán min, max với quỹ tích là đường tròn (Phương pháp đại số)

Phương pháp giải

- Tìm điểm biểu diễn cho số phức z.
- Sử dụng phương pháp đại số để tìm min, max.

Câu 14

Cho hai số phức $z_1; z_2$ là nghiệm của phương trình $|z-1-2i| = \left|\frac{1}{2}z - 2 - 4i\right|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |iz_1 + 1|^2 - |iz_2 + 1|^2$.

A. $\sqrt{2}$. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Câu 15

Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ sao cho $|z_1-z_2|=1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z_1+3|^2-|z_2+3|^2$. Giá trị của biểu thức $2M-3m$ bằng

A. $-4\sqrt{5}$.
B. $2\sqrt{5}$.
C. $20\sqrt{5}$.
D. 0.

Lời giải.

Câu 16

Gọi S là tập hợp tất cả các số phức $z \notin \mathbb{R}$ sao cho số phức $w=\dfrac{z}{z^2+4}$ là số thực. Xét các số phức z_1, z_2 thuộc S sao cho $|z_1-z_2|=2$. Giá trị lớn nhất của $T=|z_1-2-2i|^2-|z_2-2-2i|^2$ bằng

A. $8\sqrt{2}$.
B. $4\sqrt{2}$.
C. 16.
D. $6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 17

Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \dfrac{1}{z - |z|i}$ có phần ảo bằng $\dfrac{1}{8}$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2$, giá trị lớn nhất của $P = |z_1 - 7i|^2 - |z_2 - 7i|^2$ bằng

A. 16.
B. 28.
C. 14.
D. 56.

Lời giải.

Câu 18

Gọi S là tập hợp các số phức $w = (3+4i)z + (1+i)^2$ sao cho $|\overline{z}| = 1$. Xét các số phức $z_1,\ z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2$, giá trị lớn nhất của $P = |z_1 - i|^2 - |z_2 - i|^2$ bằng

A. 4. B. 5. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 19

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+i| + |z-2-i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$. B. $\max T = 4$. C. $\max T = 2\sqrt{2}$. D. $\max T = 8$.

Lời giải.

Câu 20

Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |2+z| + 3\,|1-z|$ bằng

(A) 9. (B) $3\sqrt{11}$. (C) $4\sqrt{11}$. (D) $2\sqrt{11}$.

Lời giải.

Câu 21

Xét hai số phức $z_1,\ z_2$ thay đổi thỏa mãn $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2 - 1 - 2i| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$. Giá trị của biểu thức $M + m$ là

(A) $8\sqrt{5}$. (B) -37. (C) $4\sqrt{5}$. (D) 37.

Lời giải.

Câu 22

Gọi S là tập hợp tất cả các số phức $w = 2z - 5 + i$ sao cho số phức z thỏa mãn $(z - 3 + i)(\overline{z} - 3 - i) = 36$. Xét các số phức $w_1, w_2 \in S$ thỏa mãn $|w_1 - w_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $P = |w_1 - 5i|^2 - |w_2 - 5i|^2$ bằng

A. 20. B. $4\sqrt{37}$. C. $7\sqrt{13}$. D. $5\sqrt{17}$.

Lời giải.

Câu 23

Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 3 + 4i$ và $|z_1 - z_2| = 2$, tìm giá trị lớn nhất của $A = |z_1| + |z_2|$.

A. $2\sqrt{29}$. B. $\sqrt{29}$. C. $\sqrt{25}$. D. $\sqrt{28}$.

Lời giải.

Câu 24

Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $|iz - 1 + i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + 1 + 2i|$ có dạng $a + \sqrt{b}$. Khi đó $a^2 + b$ có giá trị là

A. 18. B. 15. C. 19. D. 17.

Lời giải.

Dạng 18. Bài toán min, max với quỹ tích là đường thẳng (Phương pháp hình học)

Phương pháp giải

- Tìm điểm biểu diễn cho số phức z.
- Sử dụng phương pháp hình học để tìm min, max.

Câu 25

Cho số phức $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z^2 + 1| = |(z + i)(z + 2)|$. Khi z có mô-đun nhỏ nhất hãy tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + 2y$.

A. $P = -\dfrac{6}{25}$. B. $P = -\dfrac{4}{25}$. C. $P = \dfrac{6}{25}$. D. $P = \dfrac{4}{25}$.

Lời giải.

Câu 26

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z-3-2i| = |\overline{z}-1|$, $|z_1-z_2| = 2\sqrt{2}$. Số phức w thỏa mãn $|w-2-4i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_2-2-3i| + |z_1-w|$ bằng

Ⓐ $\sqrt{17}-1$. Ⓑ 4. Ⓒ $\sqrt{26}$. Ⓓ $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Câu 27

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$, $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ là

A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Câu 28

Cho các số phức z_1, z_2, z thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $M = |z_1 - z_2|$ khi $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 6. B. $\sqrt{41}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 8.

Lời giải.

Dạng 19. Bài toán min, max với quỹ tích là đường thẳng (Phương pháp đại số)

Phương pháp giải

- Tìm điểm biểu diễn cho số phức z.
- Sử dụng phương pháp đại số để tìm min, max.

Câu 29

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\dfrac{5}{2}-i\right|=\left|z+\dfrac{3}{2}+2i\right|$. Biết biểu thức $Q=|z-2-4i|+|z-4-6i|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$. Tính $P=a-4b$.

A. $P=\dfrac{691}{272}$. B. $P=-1$. C. $P=-\dfrac{911}{460}$. D. $P=-2$.

Lời giải.

Câu 30

Cho các số phức z_1 và z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1 - i| = |z_1 - 1 + i|$ và $|z_2 - 1| = |z_2 + 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 3| + |z_2 - 3|$?

A. $P_{\min} = 4\sqrt{3}$.
B. $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.
C. $P_{\min} = 4\sqrt{2}$.
D. $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Câu 31

Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i| = |z-3+2i|$, đồng thời $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = |w - z_1| + |w - z_2|$, trong đó $w = 1+3i$.

A. $\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$.
B. $\dfrac{3\sqrt{85}}{5}$.
C. $\dfrac{\sqrt{1165}}{5}$.
D. $\dfrac{\sqrt{1105}}{5}$.

Lời giải.

Câu 32

Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là hai giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+|z-1-3i|$. Tìm M, m.

A. $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}; m=3\sqrt{2}$.
B. $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}; m=\sqrt{2}$.
C. $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}; m=3\sqrt{2}$.
D. $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}; m=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Dạng 20. Bài toán min, max với quỹ tích là đường tròn, đường thẳng (Phương pháp hình học)

Phương pháp giải

- Tìm điểm biểu diễn cho số phức z_1, z_2.
- Sử dụng phương pháp hình học để tìm min, max.

Câu 33

Cho hai số phức $z_1; z_2$ thoả mãn $|z_1 - 1 - 3i| = 1$ và $|z_2 + 1 - i| = |z_2 - 5 + i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_2 - 1 - i| + |z_2 - z_1|$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5} - 1$. B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5} + 1$. C. $\dfrac{2\sqrt{85}}{5} + 1$. D. $\dfrac{2\sqrt{85}}{5} - 1$.

Lời giải.

Câu 34

Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z-2+3i|=2$ và $|z'-2+i|=|z'+2-5i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z'+1+3i|+|z-z'|$ bằng

(A) $5\sqrt{5}-2$. (B) $\sqrt{10}+2$. (C) $3\sqrt{10}-2$. (D) $\sqrt{85}-2$.

Lời giải.

Câu 35

Cho 2 số phức z, w thõa mãn $|z+w| = 2\sqrt{5}$; $w = (1+i)z - 3 - 4i$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z-2i|^2 - |z-2+i|^2$. Tính $T = M + m$.

(A) $8\sqrt{13}$. (B) $2+4\sqrt{13}$. (C) $3+4\sqrt{13}$. (D) 2.

Lời giải.

Câu 36

Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng

(A) $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{13}$. (B) $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{11}$. (C) $P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$. (D) $P_{\min} = 5 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Câu 37

Gọi z và w lần lượt là hai số phức thỏa mãn $|z-8|=3$ và $|w-3i|=|w+2-i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|w-4-2i|+|z-w|$.

(A) $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$. (B) $\dfrac{7\sqrt{2}+4\sqrt{5}-6}{2}$. (C) $3\sqrt{10}-3$. (D) $\sqrt{5}+3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 38

Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $|z_2 - 5 + i| = |\overline{z_2} - 7 + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - iz_2|$.

(A) $\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$.

(B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

(C) $2\sqrt{2}$.

(D) $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Dạng 21. Bài toán min, max với quỹ tích là elip

Phương pháp giải

- Tìm điểm biểu diễn cho số phức z.
- Sử dụng phương pháp hình học - đại số để tìm min, max.

Câu 39

Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+2|+|(1+i)z-2|=4\sqrt{2}$. Gọi $m=\max|z|$, $n=\min|z|$ và số phức $v=m+ni$. Tính $|v|^{2022}$?

A. 2^{1011}. B. 2^{2022}. C. 6^{1011}. D. 6^{2022}.

Lời giải.

Câu 40

Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|+|z-3-4i|=10$. Tính giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=|\overline{z}-1+2i|$.

A. $P_{\min}=2\sqrt{10}$. B. $P_{\min}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$. C. $P_{\min}=\sqrt{34}$. D. $P_{\min}=\sqrt{17}$.

Lời giải.

Câu 41

Xét số phức z thỏa mãn $|z+4+i|+|z-4-3i|=10$. Giá trị lớn nhất của $|z+3-7i|$ bằng

Ⓐ $4\sqrt{5}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{71}}{4}$. Ⓒ $2\sqrt{5}$. Ⓓ $\dfrac{5\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải.

Dạng 22. Bài toán min, max với quỹ tích là pararbol

Phương pháp giải

- Tìm điểm biểu diễn cho số phức z.
- Sử dụng phương pháp hình học - đại số để tìm min, max.

Câu 42

Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa $|z_1+\overline{z_1}|^2=2|z_1-\overline{z_1}|$ và $|\overline{z_2}+3|=1$. Khi đó $|z_1-z_2|$ có giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{m}-n$ $(m;n\in\mathbb{N})$. Giá trị $m+n$ là

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 10.

Lời giải.

Câu 43

Các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $w = \dfrac{z_1 + 2 - i}{(z_1 + \overline{z_1})\, i + 1}$ là số thực và $|4z_2 + 8 + 13i| = 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$ bằng

A. $\dfrac{21}{16}$.

B. $\dfrac{\sqrt{37}}{4}$.

C. 0.

D. $\dfrac{\sqrt{37} - 4}{4}$.

Lời giải.

Câu 44

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $2|\overline{z}_1 + i| = |\overline{z}_1 - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - i - 10| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$.

A. $\sqrt{\sqrt{101} - 1}$.
B. $3\sqrt{5} - 1$.
C. $\sqrt{\sqrt{101} + 1}$.
D. $\sqrt{10} + 1$.

Lời giải.

Dạng 23. Bài toán min, max với quỹ tích là hyperbol

Phương pháp giải

- Tìm điểm biểu diễn cho số phức z.
- Sử dụng phương pháp hình học - đại số để tìm min, max.

Câu 45

Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $w = \dfrac{z_1 - 2 + i}{z_1 + \overline{z_1} + 1 - 2i}$ là một số thực và $\left|z_2 + \dfrac{3i}{2}\right| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z_1 - z_2|$

(A) $\dfrac{2\sqrt{5} - \sqrt{2} - 2}{2}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{5} + \sqrt{2} - 2}{2}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1}{2}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{5} - \sqrt{2} - 1}{2}$.

Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

CÂU 45 ĐỀ MINH HỌA

Câu 45

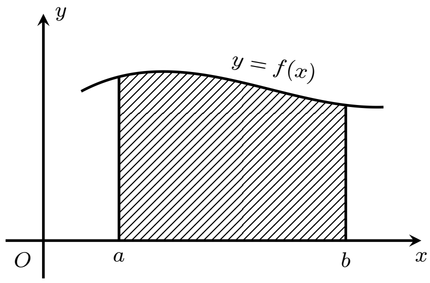
Cho hàm số $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có ba điểm cực trị là $-2, -1$ và 1. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

(A) $\dfrac{500}{81}$. (B) $\dfrac{36}{5}$. (C) $\dfrac{2932}{405}$. (D) $\dfrac{2948}{405}$.

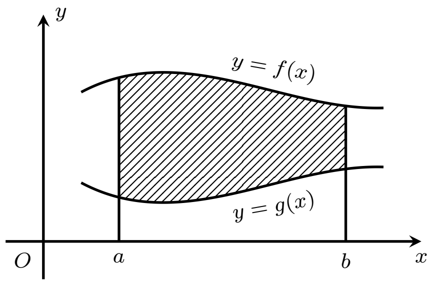
Lời giải.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 45

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.



b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.



c) Để phá bỏ trị tuyệt đối ta dựa vào đồ thị để bỏ giá trị tuyệt đối.

Lưu ý.

a) Để giải bài toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số cần tìm ra hai cận a, b và hàm số $f(x) - g(x)$.

b) Khi đó thế vào công thức và dùng máy tính cầm tay tính kết quả cuối cùng.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 45

Dạng 24. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, $g'(x)$ khi biết các cực trị của hàm số $f(x) - g(x)$ hoặc các cực trị của hàm số $f'(x) - g'(x)$

Để tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $f'(x)$ và $g'(x)$ ta thực hiện như sau

- Tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $f'(x) = g'(x)$. (*)
- Xếp thứ tự các nghiệm của (*) ta được nghiệm nhỏ nhất là a và nghiệm lớn nhất là b.

- Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int\limits_a^b |f'(x) - g'(x)|\,\mathrm{d}x$.

Câu 1

Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - x$, với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. B. $\dfrac{71}{9}$. C. $\dfrac{71}{6}$. D. $\dfrac{64}{9}$.

Lời giải.

Câu 2

Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2, 3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. B. $\dfrac{16}{3}$. C. $\dfrac{71}{12}$. D. $\dfrac{71}{6}$.

Lời giải.

Câu 3

Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$.   B. $\dfrac{71}{9}$.   C. $\dfrac{71}{6}$.   D. $\dfrac{64}{9}$.

Lời giải.

Dạng 25. Tính diện tích hình phẳng dựa vào tính chất đồ thị và các hoành độ tiếp điểm

Cho đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ ($f(x)$ và $g(x)$ không biết phương trình), biết $f(x_0) = y_1$, $g(x_0) = y_2$ (với y_1, y_2 là các giá trị đề bài cho hoặc ta có thể suy ra từ đồ thị ở đề bài). Đồ thị các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại các điểm có hoành độ x_1, x_2, ..., x_n. Yêu cầu bài toán là tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = x_1$, $x = x_n$.

Để giải quyết bài toán ta xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ \ldots \\ x = x_n. \end{array}\right.$

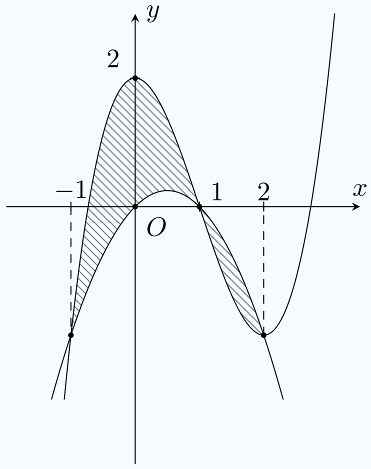
Suy ra $f(x) - g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$. $(*)$

Thay $x = x_0$ vào phương trình $(*)$ ta tính được hệ số a.

Do đó, diện tích hình phẳng cần tìm là $\displaystyle\int_{x_1}^{x_n} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{x_1}^{x_n} |a(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)|\, dx$.

Câu 4

Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm của hình vẽ có diện tích bằng

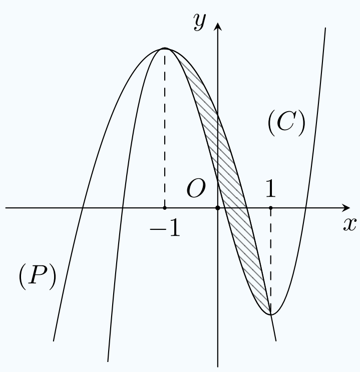


Ⓐ $\dfrac{37}{12}$. Ⓑ $\dfrac{7}{12}$. Ⓒ $\dfrac{11}{12}$. Ⓓ $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải.

Câu 5

Cho hai hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y = mx^2 + nx + p$, $(m, n, p \in \mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

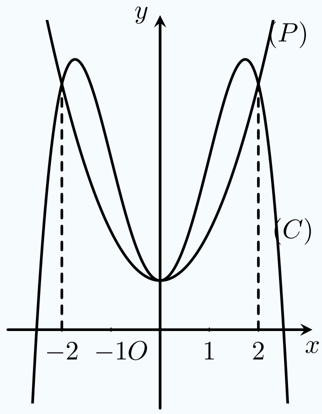


Ⓐ $(0; 1)$. Ⓑ $(1; 2)$. Ⓒ $(3; 4)$. Ⓓ $(2; 3)$.

Lời giải.

Câu 6

Cho hai hàm số $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + ax^2 + b, (a; b \in \mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $g(x) = mx^2 + nx + p, (m; n; p \in \mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A $(4,2; 4,3)$. B $(4,3; 4,4)$. C $(4,1; 4,2)$. D $(4; 4,1)$.

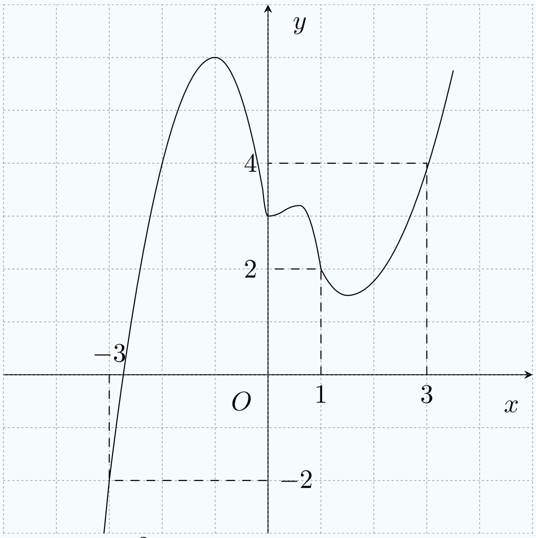
Lời giải.

Dạng 26. Ứng dụng diện tích hình phẳng để so sánh giá trị hàm số

Cho đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta cần lập bảng biến thiên của hàm hợp $y = f(u)$.
Để giải quyết bài toán ta so sánh các diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'(x)$ và các đường thẳng (hoặc đường cong) tùy theo yêu cầu bài toán.
Từ đó xác định được bảng biến thiên của hàm số $y = f(u)$.

Câu 7

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $[-3; 3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Biết $f(1) = 6$ và $g(x) = f(x) - \dfrac{(x+1)^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3; 3]$.

B. Phương trình $g(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $[-3; 3]$.

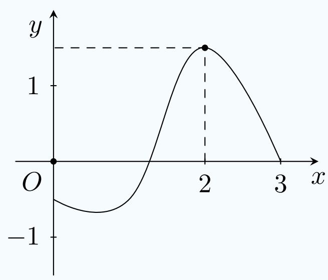
C. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3; 3]$.

D. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3; 3]$.

Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ như hình vẽ ở bên. Hãy so sánh $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.

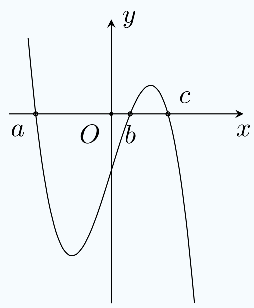


A. $f(0) < f(2) < f(3)$.
B. $f(0) < f(3) < f(2)$.
C. $f(3) < f(0) < f(2)$.
D. $f(2) < f(0) < f(3)$.

Lời giải.

Câu 9

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ a, b, c như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A $f(c) > f(a) > f(b)$.

B $f(b) > f(a) > f(c)$.

C $f(c) > f(b) > f(a)$.

D $f(a) > f(c) > f(b)$.

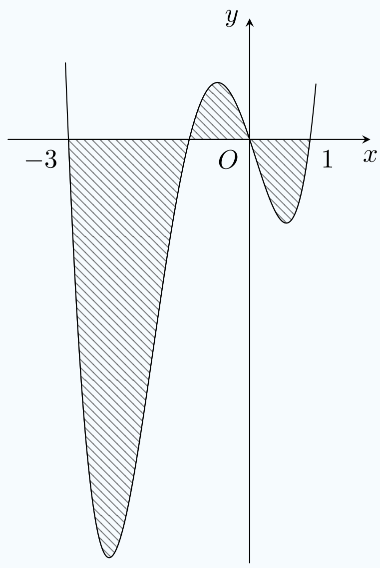
Lời giải.

Dạng 27. Ứng dụng diện tích hình phẳng để tính tích phân

Phương pháp : Áp dụng kiến thức về diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường và liên kết với tích phân cần tính.

Câu 10

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-3; 1]$ như hình vẽ. Diện tích các phần A, B, C trên hình vẽ có diện tích lần lượt là 8, $\dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{4}{5}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-2}^{0} [f(2x+1)+3]\, \mathrm{d}x$.

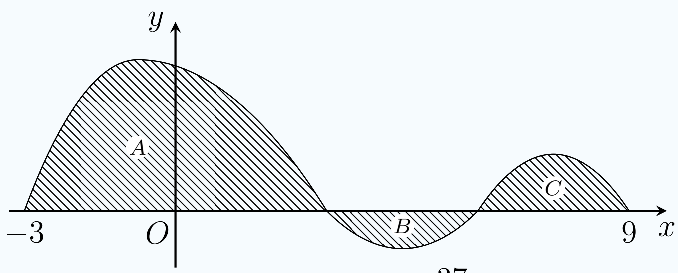


Ⓐ $-\dfrac{41}{5}$. Ⓑ $-\dfrac{42}{5}$. Ⓒ $-\dfrac{21}{5}$. Ⓓ $-\dfrac{82}{5}$.

Lời giải.

Câu 11

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-3; 9]$ như hình vẽ bên. Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là 30; 3 và 4. Tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{2} [f(4x+1)+x]\, \mathrm{d}x$ bằng



Ⓐ $\dfrac{45}{2}$. Ⓑ 41. Ⓒ 37. Ⓓ $\dfrac{37}{4}$.

Lời giải.

CÂU 46 ĐỀ MINH HỌA

Câu 46

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4;-3;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$. Đường thẳng đi qua A, cắt trục Oz và song song với (P) có phương trình là

(A) $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-3}{-7}$.

(B) $\dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

(C) $\dfrac{x+4}{-4}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

(D) $\dfrac{x+8}{4}=\dfrac{y+6}{3}=\dfrac{z-10}{-7}$.

Lời giải.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 46

Dạng 28. Lập đường thẳng đi qua một điểm A, cắt đường thẳng d_1 và song song với mặt phẳng (P).

Phương pháp giải

B1. Tìm một điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc đường thẳng d_1.

B2. Vec-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(a;b;c)$ với $\vec{u}\perp\vec{n}_{(P)}$.

B3. Viết PTTS của d là $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ trong đó t là tham số.

Câu 1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$, $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{5}$.

D. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

Lời giải.

Câu 2

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;\ 2;\ 10)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=3-t \\ y=1-2t \\ z=3+4t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, $d_2: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M, cắt đường thẳng d_1 và vuông góc với đường thẳng d_2.

A. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+10}{-3}$.

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-10}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-10}{-3}$.

D. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+10}{3}$.

Lời giải.

Câu 3

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;2)$ và hai đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$,

$d' : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm M, cắt d và vuông góc với d'?

A $\begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = 1 + 7t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$.

B $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$.

C $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$.

D $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$.

Lời giải.

Câu 4

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P) : x - y - z - 1 = 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;\ 1;\ -2)$, song song với (P) và cắt d_1 là

A $\dfrac{x+1}{8} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{5}$.

B $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{5}$.

C $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{13}$.

D $\dfrac{x-8}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-5}{-2}$.

Lời giải.

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, viết đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;2)$, song song với mặt phẳng $(P) : x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$.

A $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}$.

B $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$.

C $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}$.

D $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$.

Lời giải.

Câu 6

3 Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=3+t\\y=3+3t\\z=2t\end{cases}$, mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+3=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ qua điểm A, cắt d và song song với (α) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(3;-2;1)$. B. $N(3;-2;-3)$. C. $P(3;-2;1)$. D. $Q(2;-2;0)$.

Lời giải.

Câu 7

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;\ 2;\ -1)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $x+y-3z+3=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm của mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-3)^2+z^2=9$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+3y+2z-1=0$. Đường thẳng đi qua điểm A, cắt d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

D. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Dạng 29. Lập đường thẳng d đi qua M, vuông góc với d_1 và cắt d_2.

Phương pháp giải

B1. Chuyển phương trình đường thẳng d_2 về dạng tham số t.

B2. Gọi $A = d \cap d_2 \Rightarrow A \in d_2$. Tọa độ A theo tham số t.

B3. Tính $\overrightarrow{AM}$. Tìm véctơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u_1}$.

B4. Do $d \perp d_1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{u_1} \Rightarrow t$. Suy ra $\overrightarrow{AM}$.

B5. Đường thẳng d đi qua M và có VTCP $\overrightarrow{AM}$.

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$, $d_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{-5}$.

B. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-5}$.

C. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{5}$.

D. $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-5}$.

Lời giải.

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;\ 2;\ 10)$ và hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, $d_2 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M, cắt đường thẳng d_1 và vuông góc với đường thẳng d_2.

A. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z+10}{-3}$.

B. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-10}{3}$.

(C) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-10}{-3}$.

(D) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+10}{3}$.

Lời giải.

Câu 10

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;2)$ và hai đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $d':\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm M, cắt d và vuông góc với d'?

(A) $\begin{cases}x=-1-7t\\y=1+7t\\z=2+7t\end{cases}$.

(B) $\begin{cases}x=-1+3t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$.

(C) $\begin{cases}x=1+3t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$.

(D) $\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+t\\z=2\end{cases}$.

Lời giải.

Dạng 30. Lập đường thẳng - yêu cầu tìm vectơ chỉ phương thông qua giao điểm

Từ giả thiết bài toán ta tìm được tọa độ của hai điểm thuộc đường thẳng. Từ đó viết phương trình đường thẳng cần tìm.

Câu 11

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng d: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

(A) $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2t\\z=3t\end{cases}$.

(B) $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+2t\end{cases}$.

(C) $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2t\\z=t\end{cases}$.

(D) $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+3t\end{cases}$.

Lời giải.

Câu 12

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\,(2;1;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+4t \\ z=3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=3+3t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+3t \\ z=3+2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+3t \\ z=2t \end{cases}$.

Lời giải.

Câu 13

Trong không gian $Oxyz$, cho $M(2;3;-1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-3}{1}$. Đường thẳng qua M vuông góc với d và cắt d có phương trình là

A. $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z+1}{32}$.

B. $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z+1}{32}$.

C. $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{-6}=\dfrac{z+1}{32}$.

D. $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+1}{-32}$.

Lời giải.

Câu 14

Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=-3t \\ y=t \\ z=-1-3t \end{cases}$.

Lập phương trình đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng d_1 và d_2

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-4}{-2}$.

B. $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

D. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải.

Dạng 31. Lập đường thẳng - yêu cầu tìm vectơ chỉ phương thông qua tích có hướng

Từ giả thiết bài toán, ta xác định được hai vectơ có giá vuông góc với đường thẳng cần tìm. Sử dụng tích có hướng của hai vectơ đó để tìm ra vectơ chỉ phương của đường thẳng.

Câu 15

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-4t \\ z=-3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+4t \\ z=2+t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-4t \\ z=2-3t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2+6t \\ z=2+t \end{cases}$.

Lời giải.

Câu 16

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases}$.

Ⓑ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-t \\ z=2t \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=2+3t \end{cases}$.

Ⓓ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$.

Lời giải.

Câu 17

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$.

Ⓑ $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Ⓓ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+5}{1}$.

Lời giải.

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

Câu 18

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng qua $M(1;2;-1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-8=0$, $(Q)\colon 2x-y+5z-3=0$ có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-7}=\dfrac{z+1}{-3}$.

B. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z+1}{-3}$.

C. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z+1}{3}$.

D. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Lời giải.

CÂU 47 ĐỀ MINH HỌA

Câu 47

Cho khối nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $2a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. (B) $4\sqrt{6}\pi a^3$. (C) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. (D) $8\sqrt{2}\pi a^3$.

Lời giải.

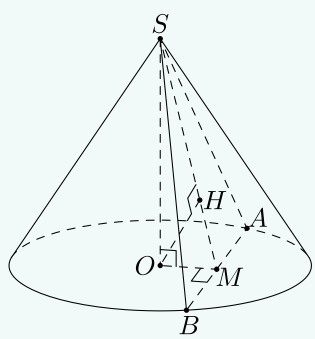
PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 47

....

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 47

Dạng 32. Khối nón bị cắt bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh và không qua trục

Gọi M là trung điểm của AB.
Dựng $OH \perp SM$ tại H.
Sử dụng định lí Py-ta-go, hệ thức lượng trong tam giác để tìm h, r.



Câu 1

Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = 5a$ và bán kính đáy $r = 4a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy bằng $3a$. Diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình nón là

Ⓐ $\dfrac{25\sqrt{31}}{16}a^2$. Ⓑ $\dfrac{5\sqrt{31}}{8}a^2$. Ⓒ $\dfrac{5\sqrt{41}}{16}a^2$. Ⓓ $\dfrac{25\sqrt{41}}{32}a^2$.

Lời giải.

Câu 2

Cho hình nón tròn xoay đỉnh S có chiều cao bằng bán kính đáy. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2a$. Tính khoảng cách từ tâm đường tròn đáy đến (P), biết thể tích khối nón là $V = a^3\pi\sqrt{3}$.

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. Ⓑ $a\sqrt{5}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải.

Dạng 33. Khối nón nội tiếp, ngoại tiếp khối tròn xoay hoặc khối đa diện

Bán kính của khối nón bằng bán kính đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp đa giác đáy.
Đường cao dựa vào dữ kiện bài toán: khoảng cách điểm đến mặt phẳng,...để tính.

Câu 3

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, góc giữa cạnh bên và đáy bằng $30°$, khoảng cách giữa GC và SA bằng $\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$. Thể tích của khối nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

(A) $\dfrac{\pi a^3}{18}$. (B) $\dfrac{\pi a^3}{3}$. (C) $\dfrac{\pi a^3}{27}$. (D) $\dfrac{\pi a^3}{9}$.

Lời giải.

Câu 4

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng a. Thể tích của khối nón đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. B. $\sqrt{3}\pi a^3$. C. $3\sqrt{3}\pi a^3$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$.

Lời giải.

Dạng 34. Khối trụ bị cắt bởi một mặt phẳng song song với trục

Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng song song với trục là hình chữ nhật.

Câu 5

Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $2a$, chiều cao bằng $4a$. Mặt phẳng (α) song song và cách trục của hình trụ một khoảng bằng a. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $2a^2\sqrt{2}$. B. $4a^2\sqrt{3}$. C. $8a^2\sqrt{3}$. D. $4a^2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 6

Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O', chiều cao $h = a\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho OA vuông góc với $O'B$ và $AB = 2a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AB và song song với OO'. Tính khoảng cách từ OO' đến mặt phẳng (α) ?

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

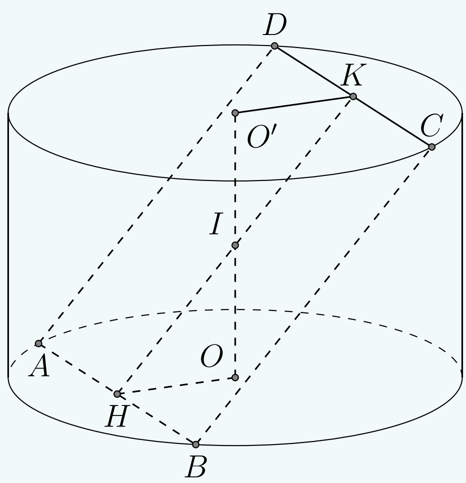
Dạng 35. Khối trụ bị cắt bởi mặt phẳng cắt qua trục

Cho thiết diện cắt qua trục giao với đường tròn đáy tâm O tại hai điểm A, B và giao với đường tròn đáy O' tại hai điểm C,D.

Gọi H,K là trung điểm của AB,CD và I là giao điểm của OO' với HK.

Khi biết các yếu tố của hình đa giác $ABCD$ ta tìm lại bán kính và chiều cao khối trụ.

Chú ý tam giác đồng dạng $IO'K$ và IOH



Câu 7

Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh $2a$. Hai đỉnh liên tiếp A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai, mặt phẳng $ABCD$ tạo với đáy một góc $45°$. Thể tích khối trụ là

(A) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}\pi}{2}$. (B) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}\pi}{8}$. (C) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}\pi}{5}$. (D) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}\pi}{4}$.

Lời giải.

Câu 8

Cho hình trụ bán kính bằng 3 với hai đường tròn đáy tâm O và O' biết chiều cao hình trụ gấp đôi bán kính đáy. Gọi (α) là mặt phẳng cắt qua trung điểm của OO' sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng 1. Diện tích đa giác tạo bởi các giao điểm của hai đường tròn đáy và mặt phẳng (α) là

A. $\dfrac{9\sqrt{7}}{2}$. B. $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$. C. $\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$. D. $\dfrac{27\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải.

Dạng 36. Khối trụ nội tiếp ngoại tiếp khối đa diện hoặc khối tròn xoay

Chiều cao của khối trụ bằng chiều cao của khối lăng trụ là h.
Bán kính của khối trụ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp hoặc nội tiếp đa giác đáy.

Câu 9

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4$, $AD = 3$ và $AB' = 6$. Diện tích toàn phần của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}(4\sqrt{5}+5)\pi$. B. 576π. C. $5\left(4\sqrt{11}+4\right)\pi$. D. $10\left(2\sqrt{11}+5\right)\pi$.

Lời giải.

Câu 10

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $3a$ chiều cao gấp đôi cạnh đáy. Thể tích của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn nội tiếp ABC và $A'B'C'$ bằng

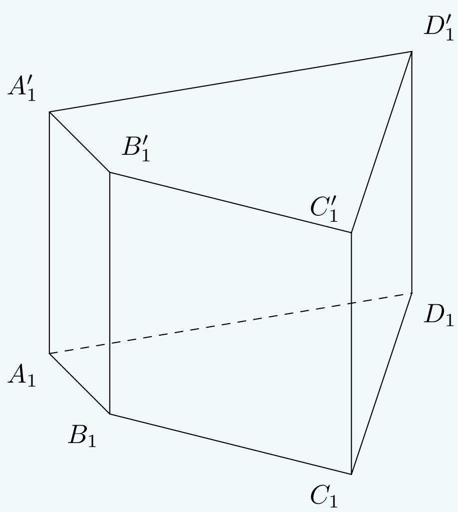
(A) 9π. (B) $\dfrac{9a^3\pi}{2}$. (C) $a^3\sqrt{3}\pi$. (D) $3a^3\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Dạng 37. Mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ

Xét lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A_1'A_2'A_3'...A_n'$, trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A_1'A_2'A_3'...A_n'$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

- **Tâm:** I với I là trung điểm của OO'.
- **Bán kính:** $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n' = \sqrt{R^2_{\text{đáy}} + \left(\dfrac{AA'}{2}\right)^2}$.
  Trong đó $R_{\text{đáy}}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và AA' là chiều cao khối lăng trụ.



Câu 11

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = 6$, $AC = 8$ chiều cao $AA' = 10$. Bán kính khối cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'l$

(A) $3\sqrt{2}$. (B) 5. (C) 3. (D) $5\sqrt{2}$.

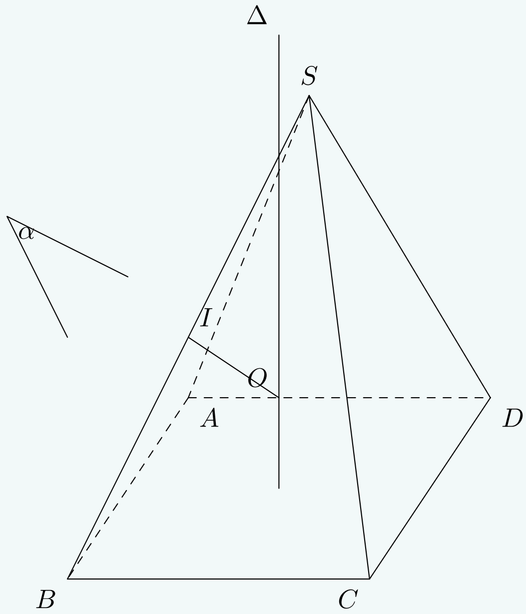
Lời giải.

Dạng 38. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

Khối cầu ngoại tiếp khối chóp

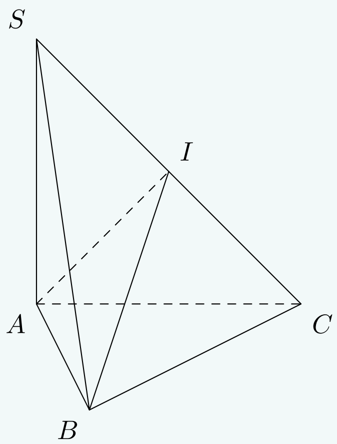
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:

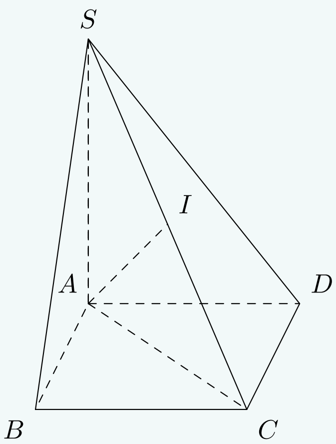
Bước 1: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác.
Bước 2: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên. Lúc đó



- Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = O$
- Bán kính: $R = SA(= SO)$. Tùy vào từng trường hợp.

Dạng 1 : Có SA vuông góc với đáy và các cạnh nhìn cạnh còn lại dưới 1 góc vuông.





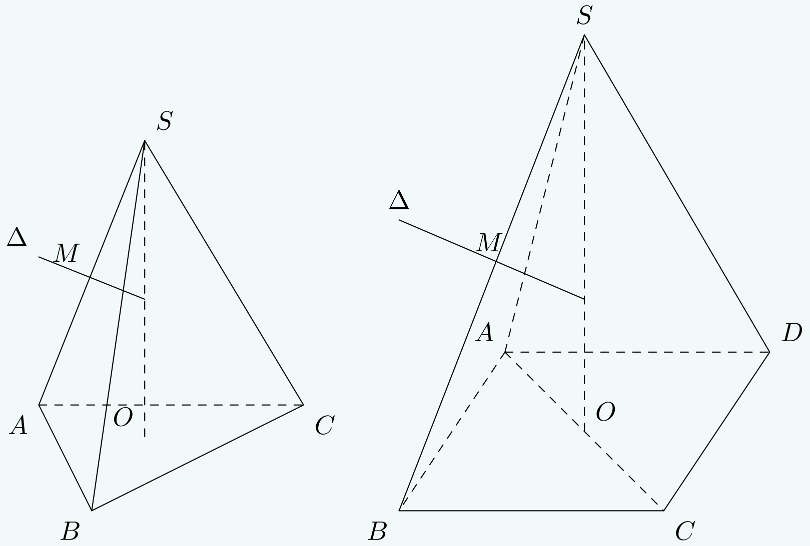
Ví dụ 1: Hình chóp S.ABC có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^0$.

- Tâm: I là trung điểm của SC.
- Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC$.

Ví sụ 2:Hình chóp S.ABCD có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^0$

- Tâm: I là trung điểm của SC.
- Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.

Dạng 2 : Khối chóp đều.

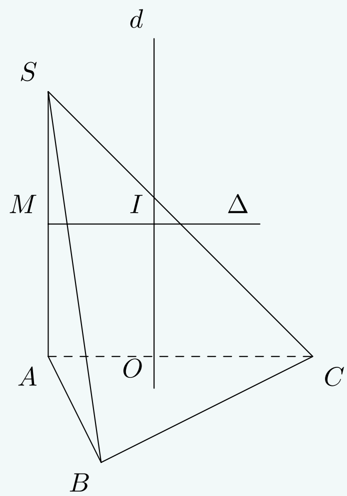


Ví dụ 3: Cho hình chóp đều $S.ABC$ hoặc $S.ABCD$

- Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.
- Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như mp (SAO), ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại I, $\Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.
  Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOA \Rightarrow \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA}$
  $\Rightarrow$ bán kính: $R = IS = \dfrac{SM.SA}{SO} = \dfrac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = ...$

Dạng 3 : Cạnh bên SA vuông góc đáy Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC...$ có cạnh bên $SA \perp (ABC...)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O.
Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC...$ được xác định như sau:

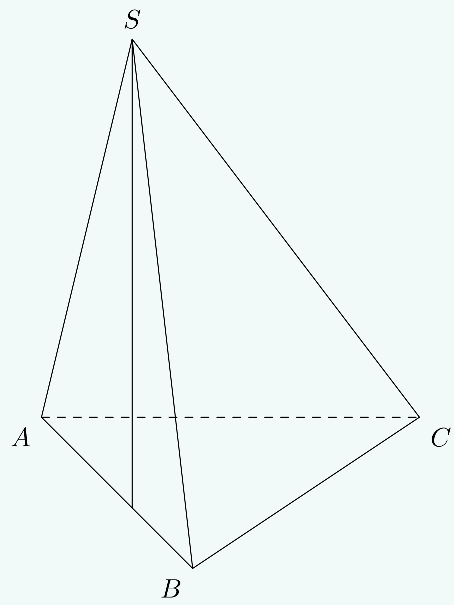
- Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với mp $(ABC...)$ tại O.
- Trong mp (d, SA), ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại I, $\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = ...$
- Tìm bán kính
  Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật.
  Xét $\triangle MAI$ vuông tại M có: $R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + (\dfrac{SA}{2})^2}$.



Dạng 4: Mặt bên vuông góc đáy.

Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và có giao tuyến AB. Khi đó, ta gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và ABC.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \dfrac{AB^2}{4}$



Câu 12

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy (ABC). Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp bằng

(A) $\dfrac{a}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{15}}{4}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

Lời giải.

Câu 13

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{\pi a^3}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. (C) $\dfrac{\pi a^3}{6}$. (D) $\dfrac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}$.

Lời giải.

Câu 14

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh bên SB và SC. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp chóp $A.HKCB$ bằng

Ⓐ $\sqrt{2}\pi a^3$. Ⓑ $\dfrac{\pi a^3}{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Lời giải.

Câu 15

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với $AD = DC = CB = 1$, $AB = 2$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của OA. Đường thẳng SC tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

Ⓐ $\dfrac{17\pi\sqrt{59}}{54}$. Ⓑ $\dfrac{21\pi\sqrt{61}}{81}$. Ⓒ $\dfrac{31\pi\sqrt{51}}{162}$. Ⓓ $\dfrac{61\pi\sqrt{61}}{162}$.

Lời giải.

CÂU 48 ĐỀ MINH HỌA

Câu 48

Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b \in (-12; 12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b} \leq 3^{b-a} + 65$?

A. 4. B. 6. C. 5. D. 7.

Lời giải.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 48

Dạng 39. Phương trình, bất phương trình có thể chuyển về dạng $f(A) = f(B)$ hoặc $f(A) \leq f(B)$, trong đó $f(x)$ là hàm số đơn điệu.

Câu 1

Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $e^x - 1 = m\ln(mx+1)$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[-10; 10]$?

A. 2201. B. 2020. C. 2021. D. 2202.

Lời giải.

Câu 2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2021; 2021)$ để phương trình $2^{x-1} = \log_4(x + 2m) + m$ có nghiệm?

(A) 2020. (B) 4041. (C) 0. (D) 2021.

Lời giải.

Câu 3

Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $4(x^2+y^2+4)+\log_2\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}\right)=(xy-4)^2$. Khi $x+4y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. 2.
B. $\dfrac{1}{2}$.
C. 4.
D. $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Câu 4

Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $(x+y)\left(5^z - 25^{\frac{1}{x+y}}\right) = xz + yz - 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\sqrt{5}} z + \log_5\left(4x^2 + y^2\right)$ bằng

(A) $1 - \log_2 3$. (B) $1 + \log_2 3$. (C) $5 - \log_2 3$. (D) $-1 + 2\log_5 4$.

Lời giải.

Câu 5

Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $3^{x^2+y^2-2}\cdot\log_2(x-y)=\dfrac{1}{2}\left[1+\log_2(1-xy)\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=2(x^3+y^3)-3xy$.

A. 7.
B. $\dfrac{13}{2}$.
C. 3.
D. $\dfrac{17}{2}$.

Lời giải.

Câu 6

Cho bất phương trình $8^x + 3x4^x + (3x^2 + 2)2^x \leq (m^3 - 1)x^3 + 2(m - 1)x$. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có đúng năm nghiệm nguyên dương phân biệt là

A 5. B 3. C 4. D 6.

Lời giải.

Câu 7

Có bao nhiêu số nguyên dương b sao cho ứng với mỗi b, có đúng 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn $\log_2 \dfrac{2^a + a}{ab} + 2^a \leq a(b - 1)$?

A 1. B 2. C 3. D 0.

Lời giải.

Câu 8

Có bao nhiêu số nguyên y thuộc đoạn $[-2022; 2022]$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $12\sqrt[3]{3y + 12 \cdot 2^x} = 2^{3x} - 3y$?

A. 2028. B. 2027. C. 2021. D. 2022.

Lời giải.

Câu 9

Có bao nhiêu số nguyên a $(a \geq 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$\ln\left(a^{\log x^4} + 4a^{\log x^2} + 4\right) = \frac{\ln(x-2)}{\log a}?$$

A. 3. B. 1. C. 9. D. 2.

Lời giải.

Câu 10

Có bao nhiêu số nguyên a $(a \geq 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$\left(a^{\log x} + 2\right)^{\log a} = x - 2?$$

Ⓐ 8. Ⓑ 9. Ⓒ 1. Ⓓ Vô số.

Lời giải.

Câu 11

Giả sử $(x;y)$ là cặp số nguyên thỏa mãn đồng thời $8 \leq x \leq 2022$ và $2^y - \log_2\left(x + 2^{y-1}\right) = 2x - y$. Tổng các giá trị của y bằng

A. 63. B. 60. C. 2022. D. 49.

Lời giải.

Câu 12

Giả sử $(x;y)$ là cặp số nguyên thỏa mãn đồng thời $8 \leq x \leq 2022$ và $2^y - \log_2\left(x + 2^{y-1}\right) = 2x - y$. Tổng các giá trị của y bằng

A. 63. B. 60. C. 2022. D. 49.

Lời giải.

Dạng 40. Phương trình, bất phương trình $f(x,y) = 0$ hoặc $f(x,y) \geq 0$ có hàm số $f(x,y)$ đơn điệu theo biến x hoặc biến y.

Câu 13

Gọi S là tập các số nguyên y sao cho với mỗi $y \in S$ có đúng 10 số nguyên x thỏa mãn $2^{y-x} \geq \log_3(x + y^2)$. Tính tổng các phần tử thuộc S.

A. 7. B. -4. C. 1. D. -1.

Lời giải.

Câu 14

Có bao nhiêu số nguyên n sao cho ứng với mỗi số n tồn tại ít nhất hai số nguyên dương m thỏa mãn $3^{n^2+m} \leq 2^{m-n} + 90 - 3^m \log_2 m$?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Câu 15

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi y luôn tồn tại không quá 15 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $\log_{2021}(x+y^2) + \log_{2022}(y^2+y+16) \geq \log_2(x-y)$?

(A) 2021. (B) 4042. (C) 2020. (D) 4041.

Lời giải.

Câu 16

Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất ba số nguyên $b \in (-8; 8)$ thỏa mãn $5^{a^2+b} \leq 2^{b-a} + 25$?

A 4. B 5. C 6. D 7.

Lời giải.

Câu 17

Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất 7 số nguyên $b \in (0; 10)$ thỏa mãn $\log_5(b^2+16) + \log_3 b\sqrt{13-a} - \log_7(a-3) \geq 4$?

A. 9. B. 8. C. 11. D. 1.

Lời giải.

Câu 18

Có bao nhiêu giá trị nguyên lớn hơn 2 của y sao cho với mỗi y tồn tại đúng 3 số nguyên dương x thỏa mãn $3^x - y \leq 2\log_2(3^x-2)$?

A. 16. B. 51. C. 68. D. 66.

Lời giải.

Câu 19

Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi số y có tối đa 15 số nguyên x thỏa mãn

$$4^{-x} - 3x + \log_4(y - x) \leq 2y - 2?$$

Ⓐ 13. Ⓑ 12. Ⓒ 14. Ⓓ 15.

Lời giải.

Câu 20

Có bao nhiêu số nguyên y sao cho với mỗi y không có quá 50 số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $2^{y-3x} \geq \log_3(x+y^2)$?

A 15. B 11. C 19. D 13.

Lời giải.

Câu 21

Có tất cả bao nhiêu số b nguyên dương sao cho tồn tại đúng hai số thực a thỏa mãn đẳng thức

$$b \cdot 2^{a^2-6a-1} + b^2 \cdot 2^{2a^2-12a-1} - 3 = 7 \cdot \log_2(a^2 - 6a + \log_2 b)?$$

A 1024. B 1023. C 2047. D 2048.

Lời giải.

Câu 22

Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để phương trình

$$2^{3^m} \cdot 5^{x^2-2x} + 5^{3^m} \cdot 2^{x^2-2x} = 10^{3^m}\left(5x^2 - 10x + 2 - 5 \cdot 3^m\right)$$

có bốn nghiệm phân biệt, trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1.

(A) 20. (B) 15. (C) 36. (D) 30.

Lời giải.

Dạng 41. Phương trình, bất phương trình dạng $f(x,y)=0$ hoặc $f(x,y)\geq 0$, trong đó hàm số $f(x,y)$ có đạo hàm cấp hai theo biến x hoặc biến y không đổi dấu.

Câu 23

Có bao nhiêu giá trị nguyên của y để phương trình $\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2-xy}=\log_2(2+xy)$ có nghiệm x thuộc $(1;5)$?

A. 3. B. 4. C. 5. D. 7.

Lời giải.

Câu 24

Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $m\left(e^x - 1\right) \cdot \ln(mx + 1) + 2e^x = e^{2x} + 1$ có 2 nghiệm phân biệt không lớn hơn 5?

A. 26. B. 29. C. 28. D. 27.

Lời giải.

Dạng 42. Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli hoặc $a^x \leq mx + n, \forall x \in [\alpha; \beta]$.

Câu 25

Cho $x, y, z \in [0; 2]$ và thỏa mãn $x + 2y + z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3^{2x-x^2} + 5^{2y-y^2} + 3^z + 2x^2 + 4y^2$.

A. $\max P = 25$.
B. $\max P = 27$.
C. $\max P = 26$.
D. $\max P = 30$.

Lời giải.

Câu 26

Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a^3 + b^3 + c^3 - 3\left(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c\right).$$

A. $3 \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$.
B. 6.
C. 4.
D. 3.

Lời giải.

CÂU 49 ĐỀ MINH HỌA

Câu 49

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-4)^2+(y+3)^2+(z+6)^2=50$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành, với hoành độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d?

A 29. B 33. C 55. D 28.

Lời giải.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 49

Dạng 43. Các bài toán tìm điểm

Phương pháp giải

Câu 1

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ thuộc d (với $a<0$) sao cho từ M kẻ được các tiếp tuyến MA, MB, MC đến (S) (với A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB}=60^\circ$, $\widehat{BMC}=90^\circ$, $\widehat{CMA}=120^\circ$. Tính $a+b+c$.

A 1. B $\dfrac{10}{3}$. C -2. D 2.

Lời giải.

Câu 2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4z+2=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ thuộc d (với $c<4$) sao cho từ M kẻ được các tiếp tuyến MA, MB, MC đến (S) (với A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn tứ diện $MABC$ là tứ diện đều. Tính $a+3b+c$.

A. 8. B. 6. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Câu 3

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-4y-2z+3=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành có hoành độ âm sao cho từ M kẻ được các tiếp tuyến MA, MB, MC đến (S) (với A, B, C là các tiếp điểm) và các tiếp tuyến đó đôi một vuông góc với nhau.

Ⓐ $M(0;0;0)$. Ⓑ $M(-4;0;0)$. Ⓒ $M(-2;0;0)$. Ⓓ $M(-6;0;0)$.

Lời giải.

Câu 4

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)$ (với $a>0$) nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (với A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB}=60^\circ$, $\widehat{BMC}=90^\circ$, $\widehat{CMA}=120^\circ$. Tính $a^3+b^3+c^3$.

Ⓐ $a^3+b^3+c^3=\dfrac{173}{9}$. Ⓑ $a^3+b^3+c^3=\dfrac{112}{9}$.

Ⓒ $a^3+b^3+c^3=\dfrac{23}{9}$. Ⓓ $a^3+b^3+c^3=-8$.

Lời giải.

Dạng 44. Các bài toán lập phương trình mặt cầu

Phương pháp giải

Câu 5

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; 2; -3)$ và điểm $M\,(-1; -2; 1)$ sao cho từ M có thể kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ$, $\widehat{BMC} = 90^\circ$, $\widehat{CMA} = 120^\circ$. Phương trình mặt cầu (S) là

- **A** $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 13 = 0$.
- **B** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 13 = 0$.
- **C** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 1 = 0$.
- **D** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$.

Lời giải.

Câu 6

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x - z + 6 = 0$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z + 7 = 0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

A. $\frac{7}{3}\pi$.
B. $\frac{7}{9}\pi$.
C. $\frac{9}{7}\pi$.
D. $\frac{7}{6}\pi$.

Lời giải.

Câu 7

Trong không gian $Oxyz$, cho $(P) x+2y-2z+5=0$ và 2 mặt cầu (S_1): $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=1, (S_2):(x+4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Gọi M, A, B lần lượt thuộc mặt phẳng (P) và hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S=MA+MB$.

A. $S_{\min}=11$.
B. $S_{\min}=2\sqrt{14}-3$.
C. $S_{\min}=\sqrt{15}-3$.
D. $S_{\min}=3\sqrt{6}-3$.

Lời giải.

Dạng 45. Các bài toán lập phương trình mặt phẳng

Phương pháp giải

Câu 8

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=9$, điểm A nằm trên mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z+15=0$. Từ A kẻ 3 tiếp tuyến AB, AC, AD với mặt cầu (S) (với B, C, D là các tiếp điểm. Điểm cố định mà mặt phẳng (BCD) luôn đi qua là

A. $M\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5}\right)$.

B. $M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{3}{5};-\dfrac{6}{5}\right)$.

C. $M\left(-\dfrac{250}{9};-\dfrac{125}{9};\dfrac{250}{9}\right)$.

D. $M\left(-\dfrac{25}{27};-\dfrac{125}{27};\dfrac{25}{27}\right)$.

Lời giải.

Câu 9

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z+11=0$. Xét điểm M di động trên (P), các điểm A, B, C phân biệt di động trên (S) sao cho AM, BM, CM là các tiếp tuyến của (S). Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

B. $(0;-1;3)$.

C. $\left(\dfrac{3}{2};0;2\right)$.

D. $(0;3;-1)$.

Lời giải.

Câu 10

Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = AB = 3\sqrt{2}$, đường thẳng AB có phương trình $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+1}{-1}$ và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Khi ba điểm A, B, C cùng với ba trung điểm của ba cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ nằm trên một mặt cầu thì mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $y + z + 1 = 0$.

B. $x + y - 4z - 14 = 0$.

C. $x - 2y - 7z - 8 = 0$.

D. $x + y - 4z + 14 = 0$.

Lời giải.

Câu 11

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;0;-2)$, $C(2;-1;0)$, $D(-2;2;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng song song với AB, CD và cắt 2 đường thẳng AC, BD lần lượt tại M, N thỏa mãn
$\left(\dfrac{BN}{AM}\right)^2 = AM^2 - 1$.

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải.

Câu 12

Cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2=6$ và $(S_2): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$. Biết rằng mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+6=0,\ (a>0)$ vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon 3x+2y+z-1=0$ đồng thời tiếp xúc với cả hai mặt cầu đã cho. Tích abc bằng

A. -2. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải.

Câu 13

Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q) có phương trình $x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2 + c_1c_2$.

A. 7.
B. -9.
C. -7.
D. 9.

Lời giải.

CÂU 50 ĐỀ MINH HỌA

Câu 40

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(x^4 - 8x^2 + m\right)$ có **đúng 9 điểm cực trị?**

Ⓐ 16. Ⓑ 9. Ⓒ 15. Ⓓ 10.

Lời giải.

PHÁT TRIỂN TƯƠNG TỰ CÂU 50

Dạng 46. Tìm cực trị của hàm số hợp $g(x) = f[u(x)]$ khi biết đồ thị hàm số $f(x)$ hay BBT hàm số $f(x)$

Kiến thức bổ trợ

a) **Bài toán bổ trợ 1:** Cho đồ thị hàm số $f(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f(x)$. Tìm nghiệm phương trình $f[u(x)] = 0$.
Phương pháp :

- Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $f(x)$ để tìm các nghiệm $x = x_i$ của phương trình $f(x) = 0$.(Giao điểm của đồ thị với trục hoành)
- Khi đó phương trình $f[u(x)] = 0 \Leftrightarrow u(x) = x_i$. Giải các phương trình $u(x) = x_i$ ta tìm được các nghiệm của phương trình $f[u(x)] = 0$.
  Nhận xét: Đôi khi chỉ tìm ra được các nghiệm gần đúng x_i hoặc chỉ tìm ra được số nghiệm của phương trình $f[u(x)] = 0$.

b) **Bài toán bổ trợ 2:** Cho đồ thị hàm số $f(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f(x)$. Tìm nghiệm phương trình $f[u(x)] + p(x) = 0$.
Phương pháp :

- Đặt $t = u(x)$, biểu diễn $p(x) = \varphi(t)$.
- Biến đổi phương trình $f[u(x)] + p(x) = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\varphi(t)$
- Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $f(x)$ để tìm các nghiệm $x = x_i$ từ phương trình $f(x) = -\varphi(x)$.(Chú ý ta đổi vai trò x thành t rồi dựa vào đồ thị $f(x)$).
- Khi đó phương trình $f[u(x)] + p(x) = 0 \Leftrightarrow t = u(x) = x_i$. Giải các phương trình $u(x) = x_i$ ta tìm được các nghiệm của phương trình $f[u(x)] = 0$.

Xét sự biến thiên của hàm số hợp $y = f[u(x)]$ ta làm như sau:

1. Đạo hàm của hàm số hợp

- $g(x) = f[u(x)] \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)]$.
- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'(x) = 0 \\ f'[u(x)] = 0. \end{array}\right.$ (Dựa vào đồ thị để suy ra nghiệm của pt $f'(x) = 0$)

Giả sử $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{array}\right. \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = a \\ \vdots \\ u = b. \end{array}\right. \quad (*)$

Chú ý đề cho

- Bảng xét dấu của $f'(x)$ thì ta nhìn những vị trí $f'(x) = 0$.Suy ra (*)
- Đồ thị của $f'(x)$ thì ta nhìn những vị trí đồ thị cắt trục Ox.Suy ra (*)
- Đồ thị của $f(x)$ thì ta chiếu các điểm cực trị xuống trục Ox.Suy ra (*)

2. Lập bảng biến thiên của hàm số

3. Nêu kết luận của hàm số

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

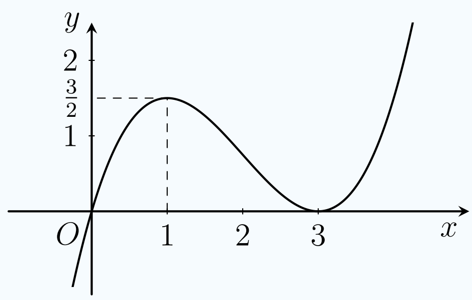
A. 16. B. 18. C. 15. D. 17.

Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \left|f^2(x+2) + 4f(x+2) + m + 1\right|$ có đúng 5 điểm cực trị bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 2.



Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(|x^3+5x|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6. B. 7. C. 5. D. 4.

Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$, biết hàm số có ba điểm cực trị $x = -3$, $x = 3$, $x = 5$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $g(x) = f\left(e^{x^3+3x^2} - m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-2)(x^2-3x+2)(x-3)^3$ Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = f(x^2-6x+m)$ có 3 điểm cực trị phân biệt là nửa khoảng $[a; b)$. Giá trị của $a+b$ bằng:

(A) 21. (B) 23. (C) 22. (D) 20. .

Lời giải.

Dạng 47. Tìm tham số để hàm số chứa giá trị tuyệt đối đạt giá trị lớn nhất trên một đoạn

Câu 6

Cho hàm số $f(x) = |4x^4 - ax^2 + b|$, trong đó a, b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1\,;\,1]$ bằng $\dfrac{1}{2}$. Tính $a + b$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) 4. (C) $\dfrac{7}{2}$. (D) $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Dạng 48. Tìm tham số để hàm số hợp có số điểm cực trị cho trước

Câu 7

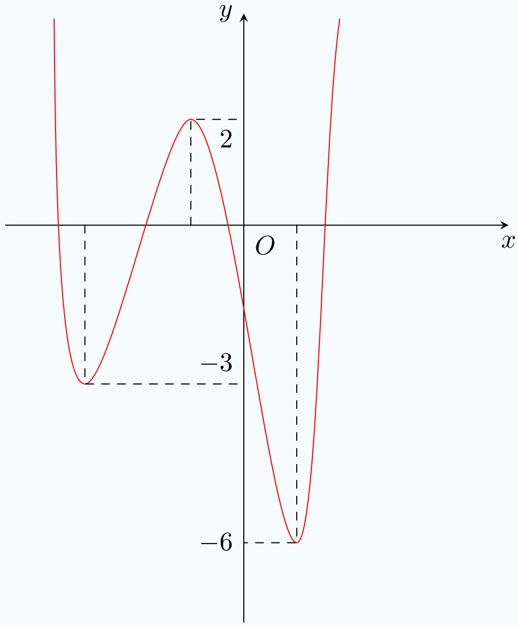
Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x(x+1)(x^2-2mx+1), \forall x\in\mathbb{R}$ với m là tham số thực. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên m không vượt quá 2022 sao cho hàm số $g(x)=f(x^2-1)$ có 7 điểm cực trị?

A. 2020. B. 2023. C. 2021. D. 2022.

Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x+1)+m|$ có 7 cực trị?

A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Câu 9

Cho hàm số $f(x) = x^4 - (m+2)x^2 + m$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên của $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $y = |f(x)|$ có số điểm cực trị nhiều nhất là

A. 2021. B. 2020. C. 2023. D. 2022.

Lời giải.

Câu 10

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 15. B. 16. C. 17. D. 18.

Lời giải.

MỤC LỤC