Sở Giáo dục và Đào tạo Đồng Nai
Trường THPT chuyên Lương Thế Vinh
Mã đề 121
(*Đề kiểm tra có 6 trang*)

ĐỀ THI THỬ THPTQG, LẦN II
Môn Toán – Lớp 12
Năm học 2017 – 2018
Thời gian làm bài: ***90 phút***

Họ và tên: ....
Số báo danh: ....

Câu 1. Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int_{-1}^{7} f(t)\,\mathrm{d}t = 9$. Giá trị của $\int_{2}^{7} f(z)\,\mathrm{d}z$ là

A 7. **B** 3. **C** 11. **D** 5.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - z - 1 = 0$. Một vectơ pháp tuyến của (P) có toạ độ là

A $(1;1;-1)$. **B** $(1;-1;0)$. **C** $(1;0;-1)$. **D** $(1;-1;-1)$.

Câu 3. Phần ảo của số phức $\dfrac{1}{1+i}$ là

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $-\dfrac{1}{2}$. **C** $-\dfrac{1}{2}i$. **D** -1.

Câu 4. Điểm $M(2;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nào?

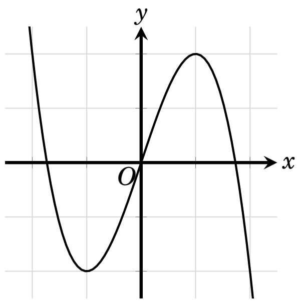
A $y = -2x^3 + 6x^2 - 10$. **B** $y = x^4 - 16x^2$. **C** $y = -x^2 + 4x - 6$. **D** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 5. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là điểm tuỳ ý trên cạnh AA'. Thể tích của khối đa diện $M.BCC'B'$ tính theo V là

A $\dfrac{V}{2}$. **B** $\dfrac{V}{6}$. **C** $\dfrac{V}{3}$. **D** $\dfrac{2V}{3}$.

Câu 6.
Biết đồ thị của một trong bốn phương án **A**, **B**, **C**, **D** như hình vẽ. Đó là hàm số nào?

A $y = -x^3 + 3x$. **B** $y = x^3 - 3x$. **C** $y = x^4 - 2x^2$. **D** $y = -x^4 - 3x$.



Câu 7. Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là các số thực âm. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\log_a(-x^2y) = -2\log_a x + \log_a y$. **B** $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\log_a(-x)}{\log_a(-y)}$.

C $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. **D** $\log_a\left(x^4y^2\right) = 2\left(\log_a x^2 + \log_a |y|\right)$.

Câu 8. Hàm số nào trong các hàm số sau ***không*** liên tục trên khoảng $(-1;1)$?

A $y = \cos x$. **B** $y = \sin x$.

C $y = \tan x$. **D** $y = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \geqslant 0, \\ \cos x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ là

A $\sin x - \cos x + C$. **B** $\sin x + \cot x + C$. **C** $\cos x - \sin x + C$. **D** $\sin x + \cos x + C$.

Câu 10. Số tập hợp con gồm ba phần tử của tập hợp có mười phần tử là

A C_{10}^3. **B** 10^3. **C** A_{10}^3. **D** 3^{10}.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(\mathscr{S})$ có phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0.$$

Toạ độ tâm T của $(\mathscr{S})$ là

(A) $T(1;2;3)$. (B) $T(2;4;6)$. (C) $T(-2;-4;-6)$. (D) $T(-1;-2;-3)$.

Câu 12. Gieo ba con súc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất để số chấm xuất hiện trên ba mặt lập thành một cấp số cộng với công sai bằng 1 là

(A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{1}{36}$. (C) $\frac{1}{9}$. (D) $\frac{1}{27}$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

$$(\mathscr{S}):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=81$$

tại điểm $P(-5;-4;6)$ là

(A) $7x+8y+67=0$. (B) $4x+2y-9z+82=0$. (C) $x-4z+29=0$. (D) $2x+2y-z+24=0$.

Câu 14. Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x)=4\sqrt{x}-x$ và $f(4)=0$.

(A) $f(x)=\frac{8x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{40}{3}$. (B) $f(x)=\frac{8x\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{88}{3}$.

(C) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2}+1$. (D) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-1$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(8;9;2)$, $B(3;5;1)$, $C(11;10;4)$. Số đo góc A của tam giác ABC là

(A) $150°$. (B) $60°$. (C) $120°$. (D) $30°$.

Câu 16. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc

$$a(t)=6t+12t^2\ (\text{m/s}^2).$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

(A) $\frac{4300}{3}$ m. (B) 4300 m. (C) $\frac{98}{3}$ m. (D) 11100 m.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị của tham số m thoả mãn đồ thị hàm số $y=\frac{x+3}{x^2-x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

(A) Bốn. (B) Hai. (C) Một. (D) Ba.

Câu 18. Cho hai khối nón $(\mathscr{N}_1)$, $(\mathscr{N}_2)$. Chiều cao khối nón $(\mathscr{N}_2)$ bằng hai lần chiều cao khối nón $(\mathscr{N}_1)$ và đường sinh khối nón $(\mathscr{N}_2)$ bằng hai lần đường sinh khối nón $(\mathscr{N}_1)$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối nón $(\mathscr{N}_1)$, $(\mathscr{N}_2)$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

(A) $\frac{1}{16}$. (B) $\frac{1}{8}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) $\frac{1}{4}$.

Câu 19. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-3$ song song với trục hoành là

(A) một. (B) ba. (C) hai. (D) không.

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $y=\log_2(1+\sqrt{x})$ là

(A) $y'=\frac{\ln 2}{2\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})}$. (B) $y'=\frac{1}{(1+\sqrt{x})\cdot\ln 2}$.

(C) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})\cdot\ln 2}$. (D) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})\cdot\ln 4}$.

Câu 21. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng 2, độ dài đường chéo của các mặt bên bằng $\sqrt{5}$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (A_1BC) và (ABC) là

(A) $45°$.　(B) $90°$.　(C) $60°$.　(D) $30°$.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^2(m-x)-m$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

(A) Hai.　(B) Một.　(C) Không.　(D) Vô số.

Câu 23. Các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt là

(A) $m < -1$.　(B) $m > -5$.

(C) $m < -5$ hoặc $m > -1$.　(D) $-5 < m < -1$.

Câu 24. Cho số phức z thoả $z - |z| = -2 - 4i$. Môđun của z là

(A) 3.　(B) 25.　(C) 5.　(D) 4.

Câu 25. Tập nghiệm của phương trình $9^{x+1} = 27^{2x+1}$ là

(A) $\varnothing$.　(B) $\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.　(C) $\{0\}$.　(D) $\left\{-\dfrac{1}{4};0\right\}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng qua ba điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;1)$ được viết dưới dạng $ax + by - 6z + c = 0$. Giá trị của $T = a + b - c$ là

(A) -11.　(B) -7.　(C) -1.　(D) 11.

Câu 27. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thoả mãn $\log_a b = \dfrac{3}{2}$, $\log_c d = \dfrac{5}{4}$. Nếu $a - c = 9$, thì $b - d$ nhận giá trị nào?

(A) 85.　(B) 71.　(C) 76.　(D) 93.

Câu 28. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau: $|z - 10 + 2i| = |z + 2 - 14i|$ và $|z - 1 - 10i| = 5$?

(A) Vô số.　(B) Một.　(C) Không.　(D) Hai.

Câu 29. Giả sử $(1 - x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$. Đặt $s = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$, khi đó, s bằng

(A) $\dfrac{3^n+1}{2}$.　(B) $\dfrac{3^n-1}{2}$.　(C) $\dfrac{3^n}{2}$.　(D) $2^n + 1$.

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB là

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.　(B) a.　(C) $\dfrac{a}{2}$.　(D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31. Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ có phương trình là

(A) $y = 9x - 7$.　(B) $y = -2x + 4$.　(C) $y = 6x - 4$.　(D) $y = 2x$.

Câu 32. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geqslant 2$ là

(A) $3 \leqslant x \leqslant \dfrac{13}{4}$.　(B) $3 < x \leqslant \dfrac{13}{4}$.　(C) $x \leqslant \dfrac{13}{4}$.　(D) $x \geqslant \dfrac{13}{4}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) lớn nhất có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b;4)$. Giá trị của tổng $a + b$ là

(A) 2.　(B) -1.　(C) 6.　(D) 3.

Câu 34. Với n là số nguyên dương, đặt

$$S_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}.$$

Khi đó, $\lim S_n$ bằng

(A) 1. (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (C) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. (D) $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(\mathscr{S})$ có phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y+8z-599=0.$$

Biết rằng mặt phẳng $(\alpha): 6x-2y+3z+49=0$ cắt $(\mathscr{S})$ theo giao tuyến là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là điểm $P(a;b;c)$ và bán kính đường tròn $(\mathscr{C})$ là r. Giá trị của tổng $S=a+b+c+r$ là

(A) $S=-13$. (B) $S=37$. (C) $S=11$. (D) $S=13$.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0;2018]$ sao cho ba số

$$5^{x+1}+5^{1-x}, \quad \frac{a}{2}, \quad 25^x+25^{-x},$$

theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

(A) 2007. (B) 2018. (C) 2006. (D) 2008.

Câu 37. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=4$, $BC=6$; chiều cao của lăng trụ bằng 10. Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BB_1, A_1B_1, BC. Thể tích khối tứ diện C_1KMN là

(A) 15. (B) 5. (C) 45. (D) 10.

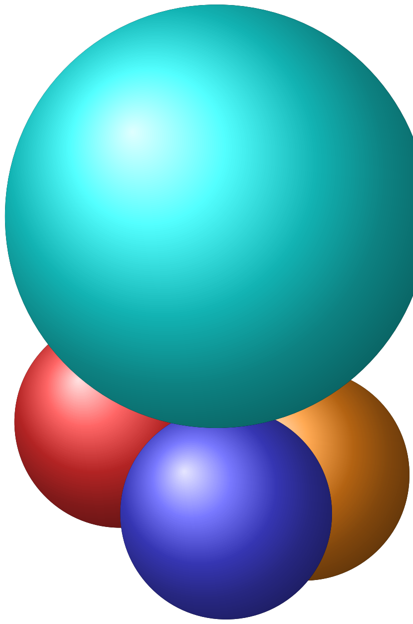
Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=3$, $BC=4$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=4$. Gọi AM, AN lần lượt là chiều cao các tam giác SAB và SAC. Thể tích khối tứ diện $AMNC$ là

(A) $\frac{128}{41}$. (B) $\frac{256}{41}$. (C) $\frac{768}{41}$. (D) $\frac{384}{41}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA=2$, $SB=6$, $SC=9$. Độ dài cạnh SD là

(A) 7. (B) 11. (C) 5. (D) 8.

Câu 40. Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P). Mặt cầu $(\mathscr{S})$ bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kì trên $(\mathscr{S})$, MH là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P). Giá trị lớn nhất của MH là



(A) $3+\dfrac{\sqrt{30}}{2}$. (B) $3+\dfrac{\sqrt{123}}{4}$. (C) $3+\dfrac{\sqrt{69}}{3}$. (D) $\dfrac{52}{9}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác OAB với $O(0;0;0)$, $A(-1;8;1)$, $B(7;-8;5)$. Phương trình đường cao OH của tam giác OAB là

(A) $\begin{cases} x=8t, \\ y=-16t, \\ z=4t, \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$ (B) $\begin{cases} x=6t, \\ y=4t, \\ z=5t, \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$

(C) $\begin{cases} x=5t, \\ y=-4t, \\ z=6t, \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$ (D) $\begin{cases} x=5t, \\ y=4t, \\ z=6t, \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB=BC=CA=4$, $AD=5$, $CD=6$, $BD=7$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

(A) 60°. (B) 120°. (C) 30°. (D) 150°.

Câu 43. Cho tứ diện đều $ABCD$ có mặt cầu nội tiếp là $(\mathscr{S}_1)$ và mặt cầu ngoại tiếp là $(\mathscr{S}_2)$. Một hình lập phương ngoại tiếp $(\mathscr{S}_2)$ và nội tiếp trong mặt cầu $(\mathscr{S}_3)$. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các mặt cầu $(\mathscr{S}_1)$, $(\mathscr{S}_2)$, $(\mathscr{S}_3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{r_2}{r_3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (B) $\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{r_2}{r_3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(C) $\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{r_2}{r_3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (D) $\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{r_2}{r_3}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Câu 44. Từ các chữ số thuộc tập hợp $\mathscr{S}=\{1,2,3,\dots,8,9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có chín chữ số khác nhau sao cho chữ số 1 đứng trước chữ số 2, chữ số 3 đứng trước chữ số 4 và chữ số 5 đứng trước chữ số 6?

(A) 22680. (B) 45360. (C) 36288. (D) 72576.

Câu 45. Khẳng định nào sau đây là đúng về phương trình

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{80}{x^2+32x+332}\right)=0?$$

(A) Số nghiệm của phương trình là 8. (B) Tổng các nghiệm của phương trình là 48.

(C) Phương trình có vô số nghiệm thuộc $\mathbb{R}$. (D) Tổng các nghiệm của phương trình là 8.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\forall x \in [0; 2018]$, ta có $f(x) > 0$ và $f(x) \cdot f(2018 - x) = 1$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{2018} \frac{1}{1 + f(x)} \mathrm{d}x$ là

(A) 2018. (B) 0. (C) 1009. (D) 4016.

Câu 47. Cho x, y là các số thực thoả mãn $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1}$ là

(A) $2\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{114}{11}$. (D) 3.

Câu 48. Cho số phức z thoả điều kiện $|z+2| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$$

được viết dưới dạng $\left(a + b\sqrt{17}\right)/\sqrt{2}$ với a, b là các hữu tỉ. Giá trị của $a+b$ là

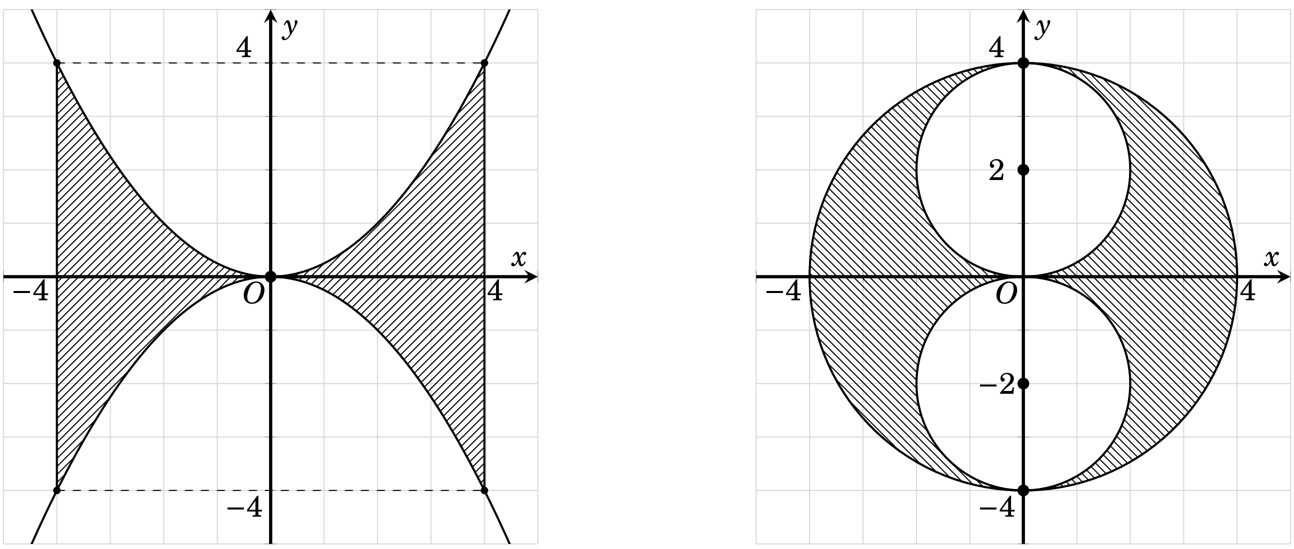
(A) 4. (B) 2. (C) 7. (D) 3.

Câu 49. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi $(\mathscr{H}_1)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{-x^2}{4}, \quad x = -4, \quad x = 4$$

và $(\mathscr{H}_2)$ là hình gồm tất cả các điểm $(x; y)$ thoả

$$x^2 + y^2 \leqslant 16, \quad x^2 + (y-2)^2 \geqslant 4, \quad x^2 + (y+2)^2 \geqslant 4.$$



Cho $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $V_1 = \dfrac{1}{2}V_2$. (B) $V_1 = V_2$. (C) $V_1 = \dfrac{2}{3}V_2$. (D) $V_1 = 2V_2$.

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(\mathscr{C})$ và hai trục toạ độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thoả mãn $S = 1$?

(A) Hai. (B) Ba. (C) Một. (D) Không.

HẾT

ĐÁP ÁN

BẢNG ĐÁP ÁN CÁC MÃ ĐỀ

Mã đề thi 121

1 A	**6** A	**11** A	**16** D	**21** D	**26** C	**31** C	**36** A	**41** D	**46** C
2 C	**7** D	**12** C	**17** B	**22** D	**27** D	**32** B	**37** A	**42** A	**47** D
3 B	**8** D	**13** D	**18** B	**23** C	**28** B	**33** D	**38** A	**43** C	**48** D
4 D	**9** A	**14** A	**19** C	**24** C	**29** A	**34** A	**39** A	**44** B	**49** B
5 D	**10** A	**15** A	**20** D	**25** B	**30** C	**35** C	**40** C	**45** B	**50** A

Mã đề thi 122

1 A	**6** C	**11** B	**16** B	**21** C	**26** C	**31** B	**36** A	**41** C	**46** C
2 B	**7** D	**12** D	**17** A	**22** C	**27** A	**32** B	**37** D	**42** D	**47** A
3 D	**8** D	**13** D	**18** A	**23** B	**28** B	**33** A	**38** A	**43** B	**48** A
4 B	**9** D	**14** D	**19** D	**24** B	**29** D	**34** C	**39** C	**44** D	**49** D
5 B	**10** D	**15** A	**20** A	**25** A	**30** C	**35** D	**40** C	**45** C	**50** C

Mã đề thi 123

1 B	**6** A	**11** D	**16** D	**21** D	**26** C	**31** D	**36** D	**41** D	**46** A
2 C	**7** A	**12** B	**17** C	**22** B	**27** D	**32** D	**37** D	**42** A	**47** B
3 A	**8** C	**13** D	**18** A	**23** C	**28** A	**33** D	**38** D	**43** B	**48** C
4 A	**9** B	**14** C	**19** D	**24** C	**29** B	**34** A	**39** D	**44** D	**49** A
5 C	**10** B	**15** D	**20** D	**25** D	**30** C	**35** D	**40** A	**45** B	**50** D

Mã đề thi 124

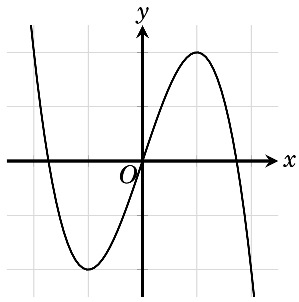
1 A	**6** C	**11** A	**16** A	**21** D	**26** C	**31** C	**36** A	**41** C	**46** D
2 D	**7** C	**12** A	**17** D	**22** C	**27** A	**32** D	**37** C	**42** D	**47** B
3 D	**8** C	**13** A	**18** A	**23** D	**28** A	**33** B	**38** D	**43** A	**48** C
4 D	**9** C	**14** D	**19** A	**24** C	**29** B	**34** A	**39** B	**44** A	**49** B
5 C	**10** A	**15** D	**20** D	**25** D	**30** D	**35** A	**40** D	**45** A	**50** B

Sở Giáo dục và Đào tạo Đồng Nai
Trường THPT chuyên Lương Thế Vinh
(Đề kiểm tra gồm 2 trang)
Mã đề test

ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA LẦN II
Môn Toán
Năm học 2017 – 2018
Thời gian làm bài: ***90 phút***

1 Câu hỏi chính thức

Câu 1.
Biết đồ thị của một trong bốn phương án **A**, **B**, **C**, **D** như hình vẽ. Đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = -x^4 - 3x$. **D.** $y = x^4 - 2x^2$.

Câu 2. Điểm $M(2;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **B.** $y = -2x^3 + 6x^2 - 10$. **C.** $y = x^4 - 16x^2$. **D.** $y = -x^2 + 4x - 6$.

Câu 3. Cho $0 < a \neq 1$ và x, y là các số thực âm. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\log_a(-x)}{\log_a(-y)}$. **B.** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a(-x^2y) = -2\log_a x + \log_a y$. **D.** $\log_a\left(x^4y^2\right) = 2\left(\log_a x^2 + \log_a |y|\right)$.

Câu 4. Cho $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(t)\,\mathrm{d}t = 9$. Giá trị của $\displaystyle\int_{2}^{7} f(z)\,\mathrm{d}z$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ là

A. $\sin x + \cos x + C$. **B.** $\sin x + \cot x + C$. **C.** $\cos x - \sin x + C$. **D.** $\sin x - \cos x + C$.

Câu 6. Phần ảo của số phức $\dfrac{1}{1+i}$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}i$. **D.** -1.

Câu 7. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là điểm tuỳ ý trên cạnh AA'. Thể tích của khối đa diện $M.BCC'B'$ tính theo V là

A. $\dfrac{2V}{3}$. **B.** $\dfrac{V}{3}$. **C.** $\dfrac{V}{6}$. **D.** $\dfrac{V}{2}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - z - 1 = 0$. Một vectơ pháp tuyến của (P) có toạ độ là

A. $(1;0;-1)$. **B.** $(1;-1;-1)$. **C.** $(1;1;-1)$. **D.** $(1;-1;0)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(\mathscr{S})$ có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0.$$

Toạ độ tâm T của $(\mathscr{S})$ là

A. $T(2;4;6)$. **B.** $T(1;2;3)$. **C.** $T(-1;-2;-3)$. **D.** $T(-2;-4;-6)$.

Câu 10. Số tập hợp con gồm ba phần tử của tập hợp có mười phần tử là

A. A_{10}^3. **B.** 3^{10}. **C.** C_{10}^3. **D.** 10^3.

Câu 11. Hàm số nào trong các hàm số sau ***không*** liên tục trên khoảng $(-1;1)$?

A. $y = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \geqslant 0, \\ \cos x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$ **B.** $y = \sin x$.

C. $y = \cos x$. **D.** $y = \tan x$.

Câu 12. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ song song với trục hoành là

A. không. **B.** một. **C.** hai. **D.** ba.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị của tham số m thoả mãn đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x^2 - x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. Một. **B.** Hai. **C.** Ba. **D.** Bốn.

Lời giải.

- Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+3}{x^2-x-m}$, nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.
- Điều kiện cần đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là phương trình $x^2 - x - m = 0$ có đúng một nghiệm $x = -3$ hay có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là -3. Tức $3^2 + 3 - m = 0$ hoặc $\Delta = 0$. Từ đây $m = 12$ hoặc $m = -\dfrac{1}{4}$
- Với $m = 12$, hàm số thành $y = \dfrac{x+3}{x^2-x-12} = \dfrac{x+3}{(x+3)(x-4)}$. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là $y = 0$ và $x = 4$.
- Với $m = -\dfrac{1}{4}$, hàm số thành $y = \dfrac{x+3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là $y = 0$ và $x = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^2(m - x) - m$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. Không. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.

Lời giải.

- $y = -x^3 + mx^2 - m$. $y' = -3x^2 + 2mx = x(-3x + 2m)$.
- $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{2m}{3}$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$ khi và chỉ khi $0 < 1 < 2 \leqslant \dfrac{2m}{3} \Leftrightarrow m \geqslant 3$.

Chọn đáp án D

Câu 15. Các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt là

A. $-5 < m < -1$.

B. $m < -5$ hoặc $m > -1$.

C. $m < -1$.

D. $m > -5$.

Câu 16. Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ có phương trình là

A. $y = 9x - 7$.

B. $y = 6x - 4$.

C. $y = 2x$.

D. $y = -2x + 4$.

Câu 17. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(1+\sqrt{x})$ là

A. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\ln 4}$.

B. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\ln 2}$.

C. $y' = \dfrac{\ln 2}{2\sqrt{x}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

D. $y' = \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\ln 2}$.

Câu 18. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thoả mãn $\log_a b = \dfrac{3}{2}$, $\log_c d = \dfrac{5}{4}$. Nếu $a - c = 9$, thì $b - d$ nhận giá trị nào?

A. 93.

B. 76.

C. 85.

D. 71.

Lời giải.

- Ta có $b = a^{3/2}$, $c = d^{5/4}$. Giả sử $a = x^2$, $b = y^4$, với x, y là các số nguyên dương.
- Ta có
$$a - c = x^2 - y^4 = (x - y^2)\cdot(x + y^2) = 9.$$
Suy ra $(x - y^2; x + y^2) = (1;9)$. Dễ dàng suy ra $x = 5$, $y = 2$.
- Do đó, $b - d = x^3 - y^5 = 93$.

Chọn đáp án A

Câu 19. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geqslant 2$ là

A. $3 < x \leqslant \dfrac{13}{4}$.

B. $x \geqslant \dfrac{13}{4}$.

C. $x \leqslant \dfrac{13}{4}$.

D. $3 \leqslant x \leqslant \dfrac{13}{4}$.

Câu 20. Tập nghiệm của phương trình $9^{x+1} = 27^{2x+1}$ là

A. $\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.

B. $\left\{-\dfrac{1}{4}; 0\right\}$.

C. $\{0\}$.

D. $\varnothing$.

Câu 21. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc
$$a(t) = 6t + 12t^2 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$
Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

A. 11100 m.

B. $\dfrac{4300}{3}$ m.

C. $\dfrac{98}{3}$ m.

D. 4300 m.

Câu 22. Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$ và $f(4) = 0$.

A. $f(x) = \dfrac{8x\sqrt{x}}{3} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{88}{3}$.

B. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{x^2}{2} + 1$.

C. $f(x) = \dfrac{8x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{40}{3}$.

D. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1$.

Câu 23. Cho số phức z thoả $z-|z|=-2-4i$. Môđun của z là

A. 5. **B.** 25. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau: $\left|z-10+2i\right|=\left|z+2-14i\right|$ và $\left|z-1-10i\right|=5$?

A. Một. **B.** Hai. **C.** Không. **D.** Vô số.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn cho z, ta có hệ

$$\begin{cases} 3x-4y+12=0, \\ (x-1)^2+(y-10)^2=25. \end{cases}$$

Để ý đường thẳng $3x-4y+12=0$ tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2+(y-10)^2=25$, nên chỉ có một số phức. Chọn đáp án A

Câu 25. Cho hai khối nón $(\mathcal{N}_1)$, $(\mathcal{N}_2)$. Chiều cao khối nón $(\mathcal{N}_2)$ bằng hai lần chiều cao khối nón $(\mathcal{N}_1)$ và đường sinh khối nón $(\mathcal{N}_2)$ bằng hai lần đường sinh khối nón $(\mathcal{N}_1)$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối nón $(\mathcal{N}_1)$, $(\mathcal{N}_2)$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(8;9;2)$, $B(3;5;1)$, $C(11;10;4)$. Số đo góc A của tam giác ABC là

A. 150°. **B.** 30°. **C.** 120°. **D.** 60°.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng qua ba điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;1)$ được viết dưới dạng $ax+by-6z+c=0$. Giá trị của $T=a+b-c$ là

A. -7. **B.** -11. **C.** -1. **D.** 11.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x+3y-6z+6=0$. Chọn đáp án C

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

$$(\mathcal{S}):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=81$$

tại điểm $P(-5;-4;6)$ là

A. $4x+2y-9z+82=0$. **B.** $2x+2y-z+24=0$. **C.** $7x+8y+67=0$. **D.** $x-4z+29=0$.

Câu 29. Gieo ba con súc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất để số chấm xuất hiện trên ba mặt lập thành một cấp số cộng với công sai bằng 1 là

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{36}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{27}$.

Lời giải.

- Số phần tử không gian mẫu là $6^3=216$.

- Các bộ ba số lập thành một cấp số cộng là $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$, $(4,5,6)$. Bốn trường hợp trên với các hoán vị sẽ có $4\cdot 6$.
- Xác suất cần tìm là $\dfrac{24}{216}=\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án A

Câu 30. Giả sử $(1-x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$. Đặt $s=a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$, khi đó, s bằng

A. 2^n+1. **B.** $\dfrac{3^n+1}{2}$. **C.** $\dfrac{3^n-1}{2}$. **D.** $\dfrac{3^n}{2}$.

Lời giải.

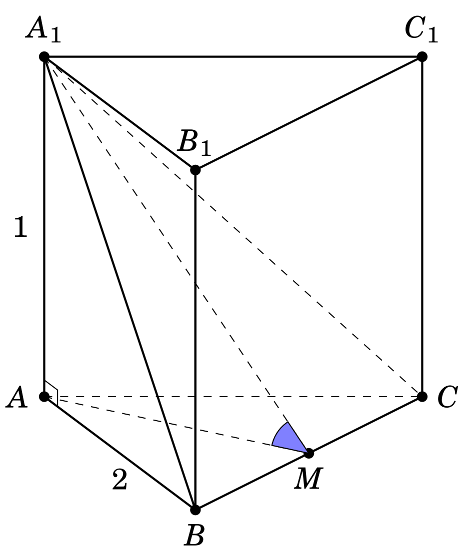
- Thay $x=1$ vào giải thiết đã cho, ta được
$$a_0+a_1+a_1+\cdots+a_{2n}=1. \tag{1}$$
- Thay $x=-1$ vào giải thiết đã cho, ta được
$$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2n}=3^n. \tag{2}$$
- Cộng (1) và (2), ta có
$$3^n+1=2(a_0++a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$$
hay $s=\dfrac{3^n+1}{2}$

Chọn đáp án B

Câu 31. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng 2, độ dài đường chéo của các mặt bên bằng $\sqrt{5}$. Số đo góc giữa hai mặt phẳng (A_1BC) và (ABC) là

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải.



- Gọi M là trung điểm cạnh BC, thì góc cần tìm là $\widehat{A_1MA}$.
- Trong tam giác A_1AC, ta có
$$A_1A=\sqrt{A_1C^2-AC^2}=\sqrt{5-4}=1.$$
- Trong tam giác A_1AM, ta có
$$\tan A_1MA=\frac{A_1A}{AM}=\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$
- Góc cần tìm bằng 30°.

Chọn đáp án C

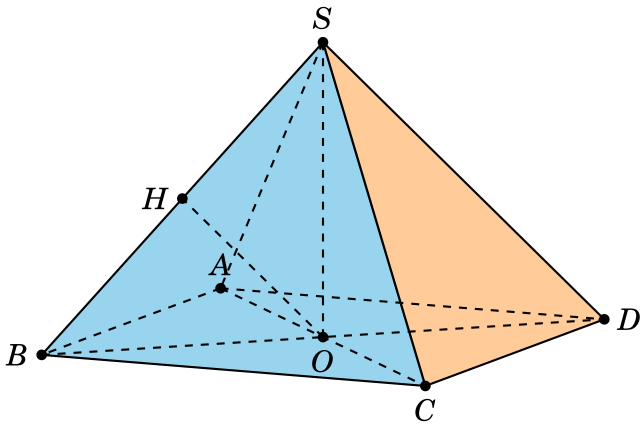
Câu 32. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB là

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) tại O. Kẻ OH vuông góc SB, thì OH là khoảng cách cần tìm. Tam giác SOB vuông cân tại O, nên

$$OH = \frac{SB}{2} = \frac{a}{2}.$$



Chọn đáp án A

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 4$, $BC = 6$; chiều cao của lăng trụ bằng 10. Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BB_1, A_1B_1, BC. Thể tích khối tứ diện C_1KMN là

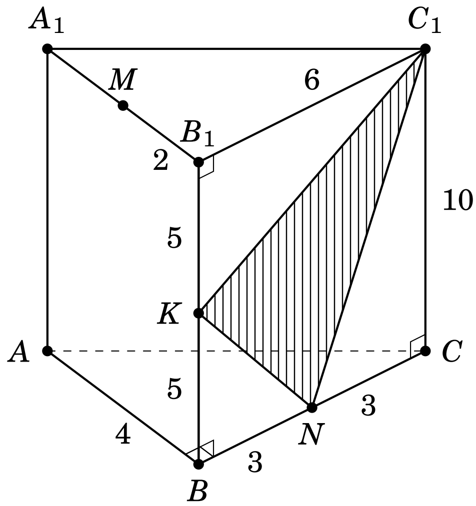
A. 15. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 45.

Lời giải.

- Ta có $V_{C_1KMN} = V_{M.C_1KN}$.
- MB_1 vuông góc (BCC_1B_1), nên

$$V_{MC_1KN} = \frac{1}{3} \cdot MB_1 \cdot S_{C_1KN}.$$

$$S_{C_1KN} = S_{BCC_1B_1} - S_{KB_1C_1} - S_{NCC_1} - S_{KBN}$$
$$= 60 - 15 - 15 - \frac{15}{2}$$
$$= \frac{45}{2}.$$



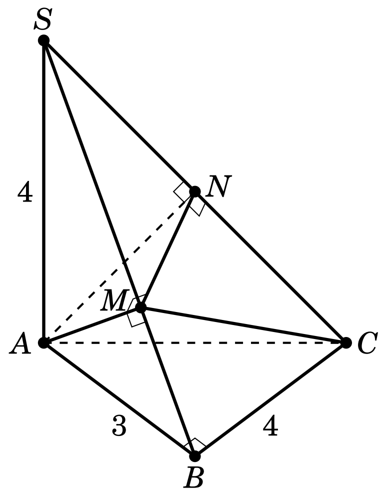
- $V_{MC_1KN} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{45}{2} = 15.$

Chọn đáp án A

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3$, $BC = 4$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 4$. Gọi AM, AN lần lượt là chiều cao các tam giác SAB và SAC. Thể tích khối tứ diện $AMNC$ là

A. $\frac{768}{41}$. **B.** $\frac{128}{41}$. **C.** $\frac{256}{41}$. **D.** $\frac{384}{41}$.

Lời giải.



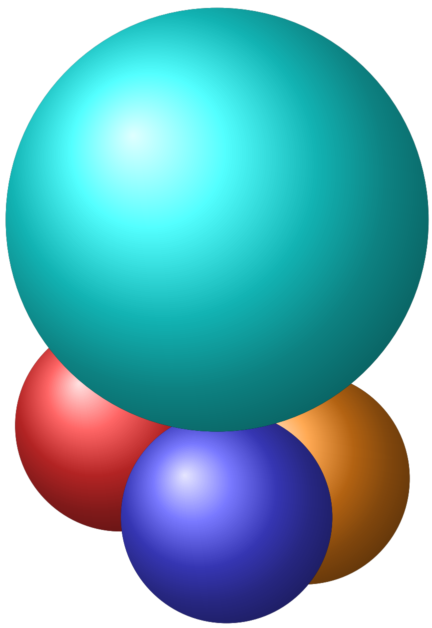
- Ta có $AM \perp (SBC)$, nên $V_{AMNC} = \frac{1}{3} \cdot AM \cdot S_{MNC}$.
- $SC \perp (AMN)$, nên tam giác MNC vuông tại N. Do đó

$$V_{AMNC} = \frac{1}{6} \cdot AM \cdot MN \cdot NC = \frac{1}{6} \cdot AM \cdot \sqrt{AN^2 - AM^2} \cdot \sqrt{AC^2 - AN^2},$$

ở đây $AM = \frac{12}{5}$, $AN = \frac{20\sqrt{41}}{41}$, $AC = 5$.

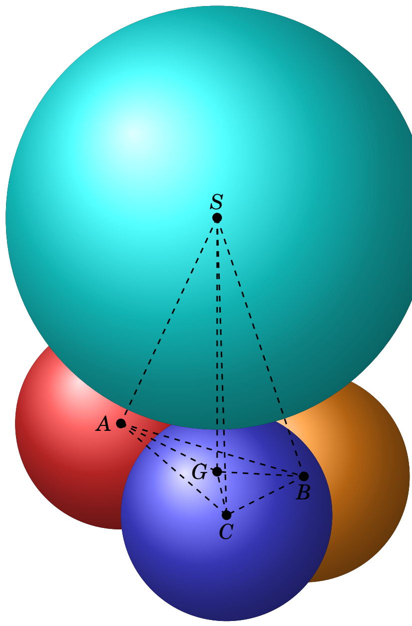
Chọn đáp án (B)

Câu 35. Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P). Mặt cầu $(\mathscr{S})$ bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kì trên $(\mathscr{S})$, MH là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P). Giá trị lớn nhất của MH là



A. $3+\dfrac{\sqrt{30}}{2}$. **B.** $3+\dfrac{\sqrt{69}}{3}$. **C.** $3+\dfrac{\sqrt{123}}{4}$. **D.** $\dfrac{52}{9}$.

Lời giải.



Gọi A, B, C là tâm của các mặt cầu bán kính bằng 1 và S là tâm của mặt cầu bán kính bằng 2. Ta có

$$AB = BC = CA = 2, \quad SA = SB = SC = 1+2 = 3.$$

Do đó, hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, thì $SG \perp (ABC)$. Ta có

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{69}}{3}.$$

Khoảng cách lớn nhất là

$$\frac{\sqrt{69}}{3} + 2 + 1 = \frac{\sqrt{69}}{3} + 3.$$

Chọn đáp án B

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác OAB với $O(0;0;0)$, $A(-1;8;1)$, $B(7;-8;5)$. Phương trình đường cao OH của tam giác OAB là

A. $\begin{cases} x = 5t, \\ y = -4t, \\ z = 6t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

B. $\begin{cases} x = 8t, \\ y = -16t, \\ z = 4t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

C. $\begin{cases} x = 6t, \\ y = 4t, \\ z = 5t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

D. $\begin{cases} x = 5t, \\ y = 4t, \\ z = 6t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Để ý rằng OH nằm trong mặt phẳng (OAB) và OH vuông góc với AB, nên một vectơ chỉ phương của OH là tích có hướng của $\overrightarrow{AB}$ và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OAB). Chọn đáp án D

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) lớn nhất có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;4)$. Giá trị của tổng $a+b$ là

A. -1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.

- Mặt phẳng cần tìm sẽ vuông góc với (ABM). Một vectơ pháp tuyến của nó là tích có hướng của vectơ pháp tuyến mặt phẳng (ABM) và $\overrightarrow{AB}$.
- Cũng có thể làm như sau: Khoảng cách lớn nhất là MH với H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng AB. Ta tìm được $H(3;-3;-10)$.

Chọn đáp án D

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc đoạn $[0;2018]$ sao cho ba số

$$5^{x+1}+5^{1-x},\quad \frac{a}{2},\quad 25^x+25^{-x},$$

theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng?

A. 2007. **B.** 2008. **C.** 2006. **D.** 2018.

Lời giải.

- Ba số đã cho lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$25^x+25^{-x}+5^{x+1}+5^{1-x}=a. \tag{3}$$

- Đặt $t=5^x+5^{-x}$, $t\geqslant 2$, (3) trở thành

$$t^2+5t-2=a. \tag{4}$$

- Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)=t^2+5t-2$ trên nửa khoảng $[2;+\infty)$, (4) có nghiệm khi và chỉ khi $a\geqslant 12$.

Chọn đáp án A

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB=BC=CA=4$, $AD=5$, $CD=6$, $BD=7$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $120°$. **B.** $30°$. **C.** $150°$. **D.** $60°$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB\cdot CD}\\ &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)}{AB\cdot CD}\\ &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot CD}\\ &= \frac{AB^2+AD^2-BD^2-(AB^2+AC^2-BC^2)}{2\cdot AB\cdot CD}\\ &= \frac{AD^2+BC^2-AC^2-BD^2}{2\cdot AB\cdot CD}\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy góc cần tìm bằng 60°. Chọn đáp án D

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA = 2$, $SB = 6$, $SC = 9$. Độ dài cạnh SD là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải.

Cách 1. Gọi O là tâm của đáy. Ta có

$$SA^2 + SC^2 = 2\cdot SO^2 + \frac{AC^2}{2}$$

và

$$SB^2 + SD^2 = 2\cdot SO^2 + \frac{BD^2}{2}.$$

Do $ABCD$ là hình chữ nhật, nên $AC = BD$. Từ những điều trên, ta có

$$SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2.$$

Cách 2. Gọi SH là chiều cao của hình chóp $S.ABC$. Đường thẳng qua H và song song với các cạnh AB, BC cắt các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, P, N, Q như hình vẽ. Đặt $SH = h$, $BP = x$, $PC = y$, $CN = z$, $ND = t$. Ta có

$$SA^2 = SH^2 + AH^2 = h^2 + x^2 + t^2,$$

$$SB^2 = SH^2 + BH^2 = h^2 + x^2 + z^2,$$

$$SC^2 = SH^2 + CH^2 = h^2 + y^2 + z^2,$$

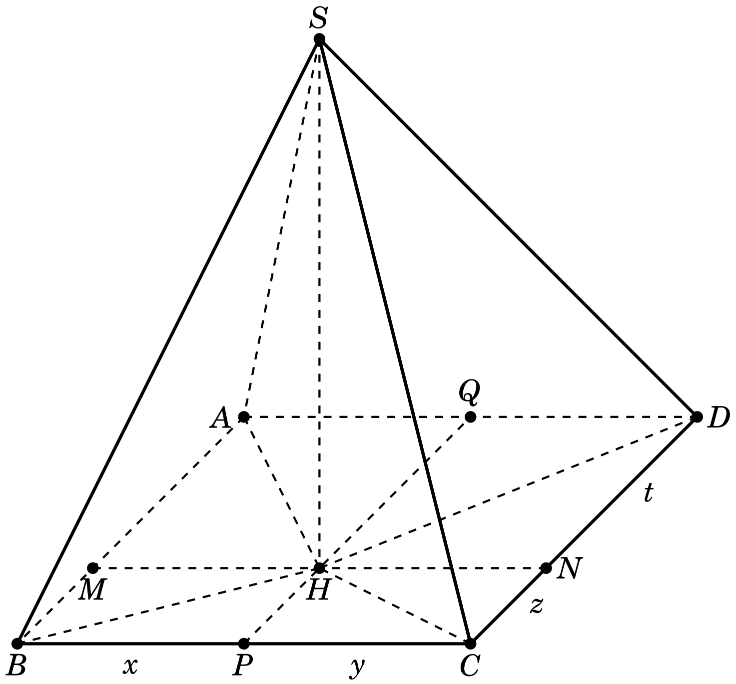
$$SD^2 = SH^2 + DH^2 = h^2 + y^2 + t^2.$$

Do đó,

$$SA^2 + SC^2 = 2h^2 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = SB^2 + SD^2.$$

Chú ý. Cách chứng minh cho trường hợp này cũng đúng khi H nằm ngoài miền của hình chữ nhật.

Lời bình. Có lẽ, việc xét hình chóp với SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) dễ dàng cho ta nhận xét là $SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$. Chọn đáp án A



Câu 41. Với n là số nguyên dương, đặt

$$S_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}.$$

Khi đó, $\lim S_n$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$.

Lời giải.

- Chú ý với mọi số nguyên dương k, ta có

$$\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Lần lượt thay $k = 1, 2, \ldots, n$, cộng lại ta được

$$S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Do đó, $\lim S_n = 1$.

Chọn đáp án A

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(\mathscr{S})$ có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 8z - 599 = 0.$$

Biết rằng mặt phẳng $(\alpha): 6x - 2y + 3z + 49 = 0$ cắt $(\mathscr{S})$ theo giao tuyến là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là điểm $P(a; b; c)$ và bán kính đường tròn $(\mathscr{C})$ là r. Giá trị của tổng $S = a + b + c + r$ là

A. $S = -13$. **B.** $S = 37$. **C.** $S = 11$. **D.** $S = 13$.

Lời giải.

Tâm $T(-5; -1; -7)$, bán kính $r = 24$. Chọn đáp án C

Câu 43. Cho x, y là các số thực thoả mãn $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3y^2+4xy+7x+4y-1}{x+2y+1}$ là

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

- Từ giả thiết ta có $6x+2y=x^2+y^2+5$. Do đó,

$$P=\frac{x^2+4xy+4y^2+x+2y+4}{x+2y+1}=x+2y+\frac{4}{x+2y+1}.$$

- Đặt $t=x+2y$, $P=t+\dfrac{4}{t+1}$. Theo bất đẳng thức B.C.S, ta có

$$[(x-3)+2(y-1)]^2\leqslant 5\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]=25.$$

Suy ra

$$-5\leqslant (x-3)+2(y-1)\leqslant 5\Rightarrow 0\leqslant t\leqslant 10.$$

- Theo bất đẳng thức Cauchy

$$t+1+\frac{4}{t+1}\geqslant 4\Rightarrow P\geqslant 3.$$

- Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$t+1=\frac{4}{t+1}\Leftrightarrow t=1.$$

Khi đó

$$\begin{cases}x+2y=1,\\(x-3)^2+(y-1)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow (x=1\wedge y=0)\vee\left(x=\frac{17}{5}\wedge y=-\frac{6}{5}\right).$$

Chọn đáp án A

Câu 44. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi $(\mathscr{H}_1)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y=\frac{x^2}{4},\quad y=\frac{-x^2}{4},\quad x=-4,\quad x=4$$

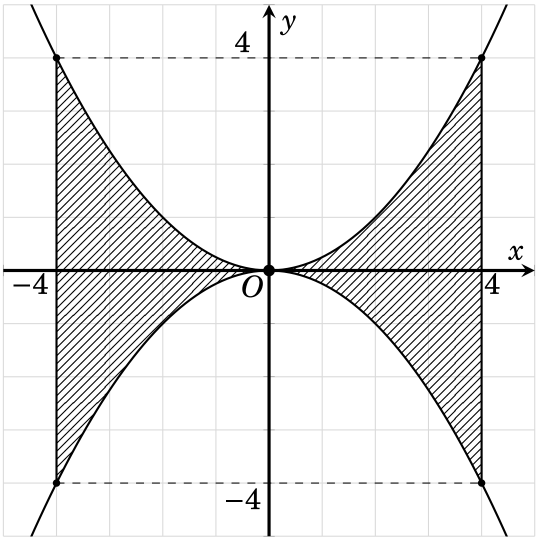
và $(\mathscr{H}_2)$ là hình gồm tất cả các điểm $(x;y)$ thoả

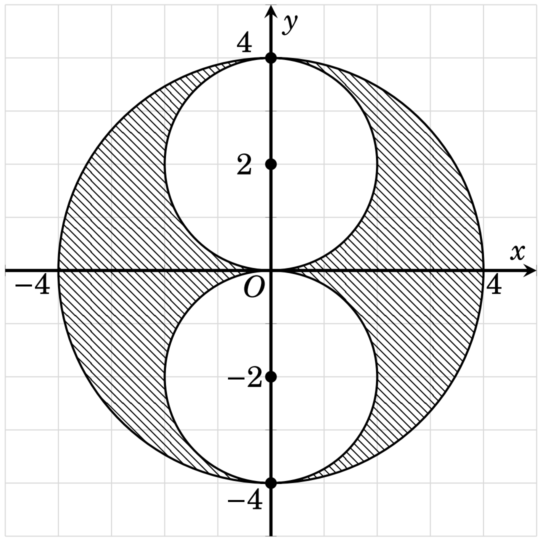
$$x^2+y^2\leqslant 16,\quad x^2+(y-2)^2\geqslant 4,\quad x^2+(y+2)^2\geqslant 4.$$

Cho $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $V_1=\dfrac{1}{2}V_2$. **B.** $V_1=\dfrac{2}{3}V_2$. **C.** $V_1=V_2$. **D.** $V_1=2V_2$.

Lời giải.





- V_1 bằng thể tích khối trụ có bán kính đáy bằng 4 và chiều cao bằng 8 trừ bốn lần thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi vật thể giới hạn bởi các đường $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$ quay quanh trục Oy.

$$V_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - 4\pi \int_0^4 2y\,\mathrm{d}y = 64\pi.$$

- Thể tích

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(4^3 - 2^3 - 2^3\right) = 64\pi.$$

Chọn đáp án C

Câu 45. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(\mathscr{C})$ và hai trục toạ độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thoả mãn $S = 1$?

A. Không. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Ba.

Lời giải.

- Ta có $y' = \dfrac{m^2+1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq 1$, nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định với mọi m.
- $(\mathscr{C})$ cắt trục hoành tại $A(m^2;0)$ và cắt trục tung $B(0;-m^2)$.
- $S = -\displaystyle\int_0^{m^2} \frac{x - m^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left(m^2+1\right)\ln\left(m^2+1\right) - m^2$.
- $S = 1 \Leftrightarrow (m^2+1)\cdot\left[\ln\left(m^2+1\right) - 1\right] = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\mathrm{e}-1}$.

Chọn đáp án C

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\forall x \in [0;2018]$, ta có $f(x) > 0$ và $f(x)\cdot f(2018 - x) = 1$. Giá trị của tích phân $I = \displaystyle\int_0^{2018} \frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x$ là

A. 2018. **B.** 4016. **C.** 0. **D.** 1009.

Lời giải.

- Đặt $t = 2018 - x$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I = -\int_{2018}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+f(2018-t)} = \int_0^{2018} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{f(t)}} = \int_0^{2018} \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1+f(t)}.$$

  Do đó

$$2I = I + I = \int_0^{2018} \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x + \int_0^{2018} \frac{f(x)}{1+f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{2018} 1\,\mathrm{d}x = 2018.$$

  Vậy $I = 1019$.

Chọn đáp án D

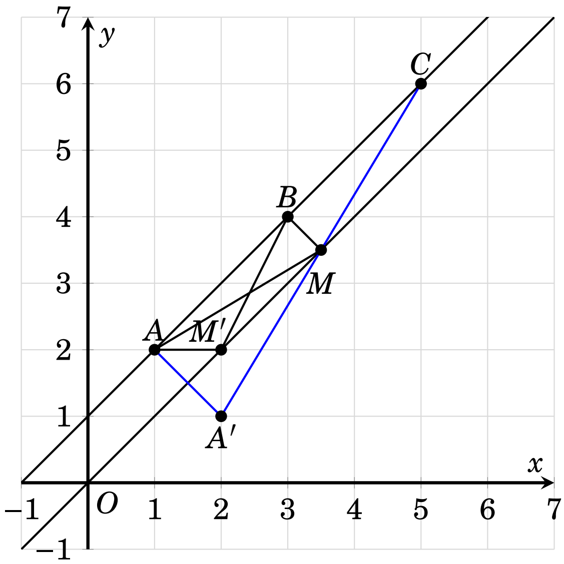
Câu 47. Cho số phức z thoả điều kiện $|z+2| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z-1-2i| + |z-3-4i| + |z-5-6i|$$

được viết dưới dạng $\left(a + b\sqrt{17}\right)/\sqrt{2}$ với a, b là các hữu tỉ. Giá trị của $a+b$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải.



Cách 1

- Đặt $E(-2;0)$, $F(0;-2)$, $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,6)$, $M(x,y)$ biểu diễn cho số phức z.
- Từ giả thiết, ta có M thuộc đường trung trực $\Delta: y = x$ của đoạn EF và $P = AM + BM + CM$.
- Ta chứng minh điểm M chính là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng Δ.
  - Với M' tuỳ ý thuộc Δ, M' khác M. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ. Nhận thấy rằng ba điểm A', M, C thẳng hàng.
  - Ta có

$$AM' + BM' + CM' = A'M' + BM' + CM'.$$

Mà

$$A'M' + CM' > A'C = A'M + CM = AM + CM.$$

Lại có $B'M > BM$. Do đó

$$AM' + BM' + CM' > AM + BM + CM.$$

Cách 2.

- Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Từ giả thiết $|z+2| = |z+2i|$, dẫn đến $y = x$. Khi đó $z = x + xi$.
- $P = \sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(x-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2+(x-6)^2}$.
- Sử dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$. Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2} + \sqrt{(x-5)^2+(x-6)^2} &= \sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2} + \sqrt{(5-x)^2+(6-x)^2}\\ &\geqslant \sqrt{(x-1+6-x)^2+(x-2+5-x)^2}\\ &\geqslant \sqrt{34}.\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x-1}{6-x} = \frac{x-2}{5-x} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$$

- Mặt khác

$$\sqrt{(x-3)^2+(x-4)^2} = \sqrt{2x^2-14x+25} = \sqrt{2}\sqrt{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{7}{2}$.

- Từ hai trường hợp trên, ta thấy, giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$. Khi đó $a + b = 3$.

Chọn đáp án A

Câu 48. Cho tứ diện đều $ABCD$ có mặt cầu nội tiếp là $(\mathscr{S}_1)$ và mặt cầu ngoại tiếp là $(\mathscr{S}_2)$. Một hình lập phương ngoại tiếp $(\mathscr{S}_2)$ và nội tiếp trong mặt cầu $(\mathscr{S}_3)$. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các mặt cầu $(\mathscr{S}_1)$, $(\mathscr{S}_2)$, $(\mathscr{S}_3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{r_2}{r_3} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

B. $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{r_2}{r_3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{r_2}{r_3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{r_2}{r_3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

- Gọi a là cạnh của tứ diện đều. Khi đó, chiều cao h của tứ diện đều bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện là $r_2 = \dfrac{SA^2}{2h} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.
- Bán kính mặt cầu nội tiếp của tứ diện là $r_1 = h - r_2 = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.
- Do đó, $r_1 : r_2 = 1 : 3$.
- Gọi b là cạnh của hình lập phương, thì $r_2 = \dfrac{b}{2}$ và $r_3 = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Do đó, $r_2 : r_3 = 1 : \sqrt{3}$.

Chọn đáp án D

Câu 49. Khẳng định nào sau đây là đúng về phương trình

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{80}{x^2+32x+332}\right) = 0?$$

A. Phương trình có vô số nghiệm thuộc $\mathbb{R}$.
B. Số nghiệm của phương trình là 8.
C. Tổng các nghiệm của phương trình là 8.
D. Tổng các nghiệm của phương trình là 48.

Lời giải.

- Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right) = \sin\left(\frac{80}{x^2+32x+332}\right). \tag{5}$$

- Ta biết rằng hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta chỉ ra rằng các hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x^2+6}$ và $g(x) = \dfrac{60}{x^2+32x+332}$ nhận giá trị trong khoảng này.

  Thật vậy
$$\left|\frac{x}{x^2+6}\right| \leqslant \left|\frac{x}{2\sqrt{6x^2}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$
  Mặt khác
$$0 < \frac{80}{x^2+32x+332} = \frac{80}{(x+16)^2+76} \leqslant \frac{80}{76} < \frac{\pi}{2}.$$

- Từ những đánh giá trên, (5) xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x^2+6} = \frac{60}{x^2+32x+332} \Leftrightarrow x^3 - 48x^2 + 332x - 480 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6 \vee x = 40.$$

  Tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $2+6+40 = 48$.

Chọn đáp án D

Câu 50. Từ các chữ số thuộc tập hợp $\mathscr{S} = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có chín chữ số khác nhau sao cho chữ số 1 đứng trước chữ số 2, chữ số 3 đứng trước chữ số 4 và chữ số 5 đứng trước chữ số 6?

A. 72576.
B. 36288.
C. 22680.
D. 45360.

Lời giải.

- Số các số có chín chữ số khác nhau là $9!$. Trong $9!$ số này, số các số mà chữ số 1 đứng trước chữ số 2 hoặc chữ số 1 đứng sau chữ số 2 là bằng nhau. Do đó, số các số mà chữ số 1 đứng trước chữ số 2 là $\frac{9!}{2}$.
- Tương tự, số các số mà chữ số 1 đứng trước chữ số 2 và chữ số 3 đứng trước chữ số 4 là $\frac{9!}{4}$.
- Số các số cần tìm là $\frac{9!}{8} = 45360$.

Chọn đáp án D

2 Câu hỏi dự trữ

Câu 51. Một hình trụ có đường cao $h = 5\text{cm}$, bán kính đáy bằng $r = 13\text{cm}$. Mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ và cách trục một đoạn $d = 12\text{cm}$. Diện tích thiết diện tạo bởi khối trụ và mặt phẳng (P) là

A. $10\sqrt{313}\ \text{cm}^2$. **B.** $250\ \text{cm}^2$. **C.** $25\ \text{cm}^2$. **D.** $50\ \text{cm}^2$.

Câu 52. Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển của biểu thức $P = (3-2x)^5 \cdot \left(1+x^2+x^4\right)$ là

A. -1562. **B.** 1563. **C.** 1320. **D.** -752.

Lời giải.

Ta có

$$(3-2x)^5 = 243 - 810x + 1080x^2 - 720x^3 + 240x^4 - 32x^5.$$

Hệ số của x^5 trong khai triển của P bằng $-32 - 720 - 810 = -1562$.

Cũng có thể làm như sau mà không cần khai triển trực tiếp. Giả sử

$$(3-2x)^5 = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 \tag{6}$$

Khi đó

$$P = \left(a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5\right) \cdot \left(1 + x^2 + x^4\right).$$

Hệ số của số hạng chứa x^5 của P là

$$a_1 + a_3 + a_5.$$

Thay $x = 1$ vào (6), ta được

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1. \tag{7}$$

Thay $x = -1$ vào (6), ta được

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = 3125. \tag{8}$$

Lấy (7) trừ (8), ta được

$$2(a_1+a_3+a_5)=-3124 \Leftrightarrow a_1+a_3+a_5=\frac{136}{2}=-1562.$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^5 của P là -1562. Chọn đáp án A

Câu 53. Khẳng định nào sau đây đúng về phương trình

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+16}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5}{x^2-14x+98}\right)=0?$$

A. Phương trình có vô số nghiệm thuộc $\mathbb{R}$.

B. Số nghiệm của phương trình là 9.

C. Tổng các nghiệm của phương trình bằng 9.

D. Tổng các nghiệm của phương trình bằng 19.

Lời giải.

- Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+16}\right)=\sin\left(\frac{5}{x^2-14x+98}\right). \tag{9}$$

- Ta biết rằng hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Ta chứng tỏ các hàm số $f(x)=\frac{x}{x^2+16}$ và $g(x)=\frac{5}{x^2-14x+98}$ nhận giá trị trong khoảng này.

  Thật vậy

$$\left|\frac{x}{x^2+16}\right|\leqslant\left|\frac{x}{2\sqrt{16x^2}}\right|=\frac{1}{8}.$$

  Mặt khác

$$0<\frac{5}{x^2-14x+98}=\frac{5}{(x-7)^2+49}\leqslant\frac{5}{49}.$$

- Từ những đánh giá trên, phương trình (9) xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x^2+16}=\frac{5}{x^2-14x+98}\Leftrightarrow x^3-19x^2+98x-80=0\Leftrightarrow x=1\vee x=8\vee x=10.$$

  Tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $1+8+10=19$.

Chọn đáp án D

Câu 54. Khẳng định nào sau đây là đúng về phương trình

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+9}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{60}{x^2+28x+267}\right)=0?$$

A. Phương trình có vô số nghiệm thuộc $\mathbb{R}$.

B. Số nghiệm của phương trình là sáu.

C. Tổng các nghiệm của phương trình là 12.

D. Tổng các nghiệm của phương trình là 32.

Lời giải.

- Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+9}\right)=\sin\left(\frac{60}{x^2+28x+267}\right). \tag{10}$$

- Ta biết rằng hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Ta chỉ ra rằng các hàm số $f(x)=\frac{x}{x^2+9}$ và $g(x)=\frac{60}{x^2+28x+267}$ nhận giá trị trong khoảng này.

  Thật vậy

$$\left|\frac{x}{x^2+9}\right|\leqslant\left|\frac{x}{2\sqrt{9x^2}}\right|=\frac{1}{6}.$$

  Mặt khác

$$0<\frac{60}{x^2+28x+267}=\frac{60}{(x+14)^2+71}\leqslant\frac{60}{71}.$$

- Từ những đánh giá trên, (10) xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x^2+9}=\frac{60}{x^2+28x+267}\Leftrightarrow x^3-32x^2+267x-540=0\Leftrightarrow x=3\vee x=9\vee x=20.$$

  Tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $3+9+20=32$.

Chọn đáp án D

Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=1$. Gọi P là trung điểm cạnh SD. Góc giữa hai đường thẳng SB và CP bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông. Góc giữa hai đường thẳng SB và CP là CPO.

Tam giác CPO, có $CP=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $OP=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sử dụng định lí hàm số côsin, ta tìm được $\widehat{COP}=120^\circ$. Từ đó, $\widehat{CPO}=30^\circ$. Chọn đáp án C

Câu 56. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là 5, 7, 8; các đỉnh A, B, C của tam giác lần lượt nằm trên ba trục toạ độ Ox, Oy, Oz. Thể tích khối tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{20\sqrt{11}}{3}$. **B.** $\frac{10\sqrt{11}}{3}$. **C.** $20\sqrt{11}$. **D.** $10\sqrt{11}$.

Câu 57. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển của $(1-x)^s$, biết s là tổng các nghiệm của phương trình $2C_n^3-4A_n^2+19C_n^1-35=0$.

A. 3003. **B.** 1001. **C.** -5005. **D.** -1365.

Lời giải.

- $2C_n^3-4A_n^2+19C_n^1-35=0\Leftrightarrow n^3-15n^2+71n-105=0\Leftrightarrow n=3\vee n=5\vee n=7$.

- $s=3+5+7=15$. Hệ số chứa x^{10} của $(1-x)^{15}$ là $C_{15}^{10}=3003$.

Chọn đáp án A

Câu 58. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi $(\mathscr{H})$ là tập hợp các điểm có toạ độ $(x;y)$ thoả mãn điều kiện

$$2^{\frac{1}{2}\log_2 y^2}+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{3^{\frac{1}{2}\log_3 x^2}+\frac{1}{2}}$$

và S là diện tích của hình $(\mathscr{H})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

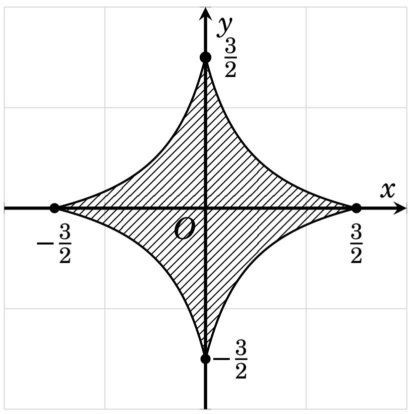
A. $1<S<2$. **B.** $\frac{1}{2}<S<\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}<S<\frac{5}{2}$. **D.** $2<S<3$.

Lời giải.

- Điều kiện đã cho tương đương

$$|y|+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{|x|+\frac{1}{2}}\Leftrightarrow|y|\leqslant\frac{1}{|x|+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}.$$

  Tập hợp các điểm thoả điều kiện là miền bị gạch kể cả những điểm thuộc đồ thị các hàm số $y=\frac{1}{|x|+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}$ và $y=-\frac{1}{|x|+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$.



- Do tính đối xứng của $(\mathscr{H})$, nên $S=4\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=4\ln4-3\approx2.54518$.

Chọn đáp án D

Câu 59. Cho dãy số $\{v_n\}$ xác định bởi $v_1=1$ và $v_{n+1}=\sqrt{v_n^2+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$, với mọi số tự nhiên $n\geqslant1$. Đặt $L=\lim v_n$. Giá trị của L là

A. $L=\frac{1}{5}$. **B.** $L=\frac{6}{5}$. **C.** $L=1$. **D.** $L=2$.

Lời giải.

- Nhận xét rằng $v_n>0$, $\forall n\geqslant1$, nên giới hạn hữu hạn (nếu có) của $\{v_n\}$ sẽ không âm.
- Ta có $v_{n+1}^2=v_n^2+\left(\frac{1}{5}\right)^n$, nên $v_n^2=u_1^2+\sum\limits_{n=1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
- Qua giới hạn đẳng thức trên, ta được $\lim v_n=1$.

Chọn đáp án C

Câu 60. Trong mặt phẳng phức, tập hợp biểu diễn cho số phức z thoả $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1$ là

A. đường tròn tâm $(0;1)$, bán kính $R=1$.

B. trục thực.

C. trục ảo.

D. đường trung trực đoạn thẳng OA, với A là điểm biểu diễn cho số phức $3+4i$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho z. Từ giả thiết đã cho, dẫn đến $\dfrac{y}{x^2+(y+1)^2}=0 \Leftrightarrow y=0$.

Chọn đáp án B

Câu 61. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình

$$\left(x^2-37x+210\right)^2-9\cos\left(x^2-37x+210\right)=(2x+40)^2-9\cos(2x+40)$$

là

A. 1906. **B.** 750. **C.** 125. **D.** 74.

Lời giải.

- Đặt $a=x^2-37x+210$, $b=2x+40$. Phương trình đã cho trở thành

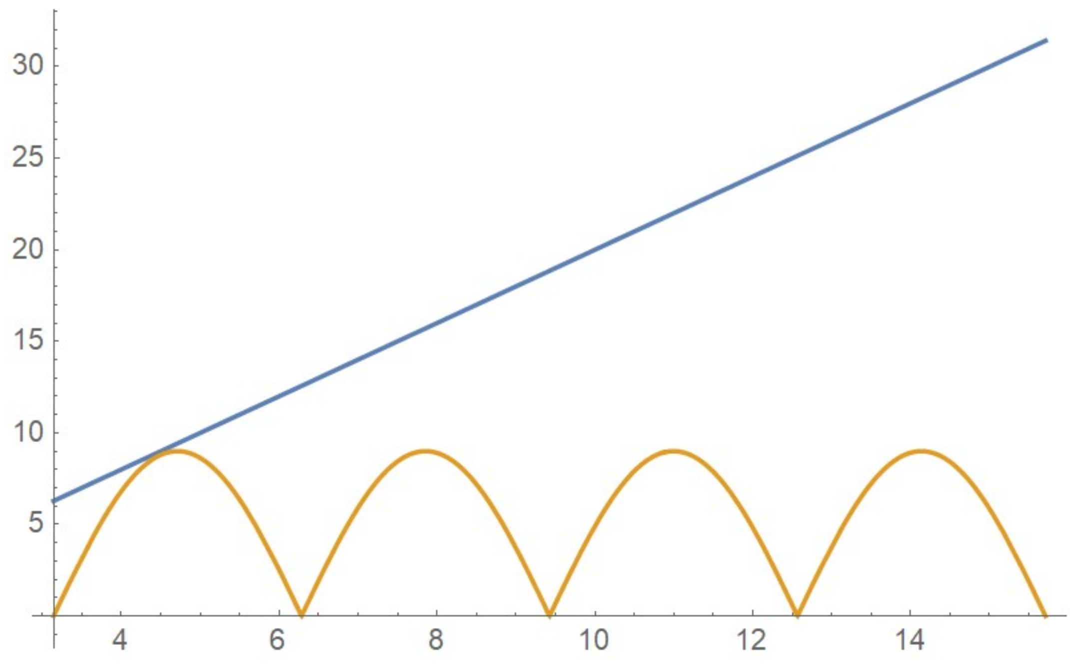
$$a^2-9\cos a=b^2-9\cos b. \tag{11}$$

  Xét hàm số

$$f(t)=t^2-9\cos t.$$

  f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$, nên, trước hết, ta xét với $t\in(0;+\infty)$.

- Ta chứng minh f đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có $f'(t)=2t+9\sin t$.
  - Trong $(0,\pi]$, ta có $2t>0$, $\sin t\geqslant 0$, nên $f'(t)>0$.
  - Trong khoảng $(\pi;+\infty)$, thì $2t>9|\sin t|$, nên $f'(t)=2t+9\sin t>0$.



- Vì f chẵn và đồng biến trên $(0;+\infty)$, nên $f(t_1)=f(t_2) \Leftrightarrow t_1=\pm t_2$. Từ (11), dẫn đến $a=b$ hoặc $a=-b$. Hay phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x=5 \vee x=10 \vee x=25 \vee x=34.$$

Tổng bình phương các nghiệm này là 1906.

Chọn đáp án A

3 Tích phân

Bài tập 3.1 (4.2 Problem Set 2, Problem 9). Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0,1]$, sao cho

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2}+\frac{11}{6},\quad \int_0^1 f(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2}+\frac{1}{2},\quad \int_0^1 x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

Tính $f(0)$.

Bài tập 3.2 (4.3 Problem Set 3, Problem 6). Cho f là hàm không giảm và liên tục trên $[0,1]$, sao cho

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Biết rằng $f(1)=10.5$. Tính giá trị của $f(0)+f(0.5)$.

Bài tập 3.3 (4.7 Problem Set 7, Problem 4). Cho f là hàm liên tục xác định trên $[0,1]$, sao cho

$$\int_0^1 (f(x))^{2014}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 (f(x))^{2015}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 (f(x))^{2016}\,\mathrm{d}x$$

lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức

$$\int_0^1 (f(x))^2+(1-f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Bài tập 3.4 (4.8 Problem Set 8, Problem 7). Cho f là hàm liên tục xác định trên $[0,1]$, sao cho

$$\int_0^1 (f(x))^{2014}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 (f(x))^{2015}\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 (f(x))^{2016}\,\mathrm{d}x$$

lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức

$$\frac{f(0)+100\cdot f(0.5)+200\cdot f(1)}{f(0.25)}.$$

Bài tập 3.5 (4.14 Problem Set 14, Problem 7). Cho hàm không giảm, liên tục $f(x)$ xác định trên $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Biết rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 10,\ \text{và} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x = 5.$$

Tìm $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 3.6 (4.15 Problem Set 15, Problem 11). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ khả vi và $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(4) - f(0) = 20$ và

$$\int_0^4 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 100.$$

Tìm $f(3) - f(1)$.

4 Hàm số

Bài tập 4.1 (4.1 Problem Set 1, Problem 2). Cho

$$f(x) = (x+1)\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{3}x+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2014}x+1\right).$$

Kí hiệu $f^{(n)}(x)$ để chỉ đạo hàm cấp n của hàm số f. Tìm $f^{(2014)}(x)$.

Bài tập 4.2 (4.1 Problem Set 1, Problem 2). Cho

$$f(x) = \frac{a + \sin x - \cos x}{a + \sin x + \cos x}.$$

Có bao nhiêu giá trị của a, sao cho $f(-x) = f(x)$, với mọi $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$?

Bài tập 4.3 (4.15 Problem Set 15, Problem 6). Tìm tất cả các cặp (a, b), với $a, b \in \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x) = \ln \frac{3 + a\sin x}{b + 5\sin x}$$

là hàm số lẻ.

Bài tập 4.4 (4.1 Problem Set 1, Problem 2). Cho

$$f(x) = \frac{6x + 21 + 28\sqrt{3x+2}}{9x + 18 - 12\sqrt{3x+2}}.$$

Tìm giá trị của biểu thức

$$f(f(1)) + f(f(2)) + \cdots + f(f(40)).$$

Bài tập 4.5 (4.6 Problem Set 6, Problem 3). Cho

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 100x + 5000}.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$f(f(1)) + f(f(2)) + \cdots + f(f(40)).$$

Bài tập 4.6 (4.14 Problem Set 14, Problem 1). Cho $f(x) = \log_2 \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$. Tính giá trị của biểu thức

$$f(f(1)) + f(f(2)) + \cdots + f(f(40)).$$

Bài tập 4.7 (4.15 Problem Set 15, Problem 1). Cho $f(x) = x^{\sqrt[3]{2}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$f(f(f(1))) + f(f(f(2))) + \cdots + f(f(f(13))).$$

5 Tâm đối xứng của đồ thị hàm số

Bài tập 5.1 (4.10 Problem Set 10, Problem 4). Biết rằng điểm $M(x_0, y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} + 100.$$

Tìm $x_0 + y_0$.

Bài tập 5.2 (4.13 Problem Set 13, Problem 6). Biết rằng điểm $M(x_0, y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số

$$f(x) = x + 301 + \log_2 \frac{x^3 - 13x^2 + 54x - 72}{x^3 + x^2 - 2x}.$$

Tìm $x_0 + y_0$.

6 Tiếp tuyến

Bài tập 6.1 (4.7 Problem Set 7, Problem 3). Cho $y = 3x - 5$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm x_0. Tìm giá trị của đạo hàm cấp một của hàm số

$$\frac{f(x)}{x} + 6f(x) + \frac{5}{x} - 2x + 7$$

tại điểm x_0.

7 Phương trình lượng giác

Giải các phương trình sau:

1) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+16}\right) - \sin\left(\dfrac{5}{x^2-14x+98}\right) = 0.$ Đáp số. $x = 1 \vee x = 8 \vee x = 10.$

2) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+3}\right) - \sin\left(\dfrac{5}{x^2-4x+23}\right) = 0.$ Đáp số. $x = 1 \vee x = 3 \vee x = 5.$

3) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+4}\right) - \sin\left(\dfrac{30}{x^2+14x+79}\right) = 0.$ Đáp số. $x = 3 \vee x = 5 \vee x = 8.$

4) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+5}\right) - \sin\left(\dfrac{3}{x^2-6x+23}\right) = 0.$ Đáp số. $x = 1 \vee x = 3 \vee x = 5.$

5) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+5}\right) - \sin\left(\dfrac{6}{x^2-4x+31}\right) = 0.$ Đáp số. $x = 2 \vee x = 3 \vee x = 5.$

6) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+9}\right) - \sin\left(\dfrac{5}{x^2-6x+39}\right) = 0.$ Đáp số. $x = 3 \vee x = 5.$

7) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+14}\right) - \sin\left(\dfrac{10}{x^2-18x+167}\right) = 0.$ Đáp số. $x = 1 \vee x = 7 \vee x = 20.$

8) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+9}\right) - \sin\left(\dfrac{60}{x^2+28x+267}\right) = 0.$ Đáp số. $x = 3 \vee x = 9 \vee x = 20.$

9) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+2}\right)-\sin\left(\dfrac{30}{x^2+6x+83}\right)=0.$ Đáp số. $x=1\vee x=3\vee x=20.$

10) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+3}\right)-\sin\left(\dfrac{20}{x^2-4x+83}\right)=0.$ Đáp số. $x=1\vee x=3\vee x=20.$

11) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+5}\right)-\sin\left(\dfrac{12}{x^2-12x+83}\right)=0.$ Đáp số. $x=1\vee x=3\vee x=20.$

12) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+6}\right)-\sin\left(\dfrac{10}{x^2-14x+83}\right)=0.$ Đáp số. $x=1\vee x=3\vee x=20.$

13) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+6}\right)-\sin\left(\dfrac{50}{x^2+22x+175}\right)=0.$ Đáp số. $x=3\vee x=5\vee x=20.$

14) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+8}\right)-\sin\left(\dfrac{15}{x^2-10x+106}\right)=0.$ Đáp số. $x=2\vee x=3\vee x=20.$

15) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+9}\right)-\sin\left(\dfrac{60}{x^2+28x+267}\right)=0.$ Đáp số. $x=3\vee x=9\vee x=20.$

16) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+15}\right)-\sin\left(\dfrac{12}{x^2-14x+129}\right)=0.$ Đáp số. $x=3\vee x=20.$

17) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+18}\right)-\sin\left(\dfrac{10}{x^2-16x+129}\right)=0.$ Đáp số. $x=3\vee x=20.$

18) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+24}\right)-\sin\left(\dfrac{5}{x^2-20x+106}\right)=0.$ Đáp số. $x=2\vee x=3\vee x=20.$

19) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+30}\right)-\sin\left(\dfrac{6}{x^2-20x+129}\right)=0.$ Đáp số. $x=3\vee x=20.$

20) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+30}\right)-\sin\left(\dfrac{10}{x^2-18x+175}\right)=0.$ Đáp số. $x=3\vee x=5\vee x=20.$

21) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+40}\right)-\sin\left(\dfrac{9}{x^2-20x+198}\right)=0.$ Đáp số. $x=3\vee x=6\vee x=20.$

22) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+2}\right)-\sin\left(\dfrac{60}{x^2+16x+163}\right)=0.$ Đáp số. $x=1\vee x=3\vee x=40.$

23) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+5}\right)-\sin\left(\dfrac{24}{x^2-20x+163}\right)=0.$ Đáp số. $x=1\vee x=3\vee x=40.$

24) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+5}\right)-\sin\left(\dfrac{72}{x^2+26x+249}\right)=0.$ Đáp số. $x=3\vee x=40.$

25) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+6}\right)-\sin\left(\dfrac{80}{x^2+32x+332}\right)=0.$ Đáp số. $x=2\vee x=6\vee x=40.$

26) $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+18}\right)-\sin\left(\dfrac{100}{x^2+46x+605}\right)=0.$ Đáp số. $x=5\vee x=9\vee x=40.$

8 Góc giữa hai cạnh đối của tứ diện

Cho tứ diện $ABCD$ với ABC là tam giác đều. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng $60°$ hay $120°$.

STT	Cạnh AB	Cạnh AD	Cạnh BD	Cạnh CD	Góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$
1	3	2	4	4	120°
2	3	4	5	3	120°
3	4	3	5	4	120°
4	4	5	7	6	120°
5	5	4	6	4	120°
6	5	6	9	9	120°
7	6	5	7	4	120°
8	7	5	9	8	120°
9	7	6	8	4	120°
10	8	3	9	9	120°
11	8	5	9	7	120°
12	8	7	9	4	120°
13	9	8	10	4	120°
14	3	4	2	4	60°
15	3	5	4	3	60°
16	4	5	3	4	60°
17	4	7	5	6	60°
18	4	9	7	8	60°
19	5	6	4	4	60°
20	5	9	6	9	60°
21	6	7	5	4	60°
22	7	8	6	4	60°
23	7	9	5	8	60°
24	8	9	3	9	60°
25	8	9	5	7	60°
26	8	9	7	4	60°
27	9	10	8	4	60°