CHUYÊN ĐỀ

BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN
VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho các hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó:

- Nếu $f(x)\ge g(x)$ với mọi $x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.
- Nếu $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx\ge 0$. Hệ quả: $\int_a^b f^2(x)dx=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.
- Bất đẳng thức Holder (Cauchy – Schwarz): $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$.

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=kg(x)$ với $k\in\mathbb{R}$.

B. BÀI TẬP

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(2)=2$, $\int_0^2 xf(x)dx=0$, và $\int_0^2\left[f'(x)\right]^2dx=10$. Hãy tính tích phân $I=\int_0^2 x^2f(x)dx$?

Lời giải

Ta có: $0=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx^2=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2f'(x)dx \Rightarrow \boxed{\int_0^2 x^2f'(x)dx=8}$.

Cách 1: Kết hợp $\int_0^2\left[f'(x)\right]^2dx=10$, $\int_0^2 x^2f'(x)dx=8$ và $\int_0^2 x^4dx=\frac{32}{5}$ ta được:

$$\int_0^1\left\{\left[f'(x)\right]^2-\frac{5}{2}x^2f'(x)+\frac{25}{16}x^4\right\}dx=10-\frac{5.8}{2}+\frac{25}{16}.\frac{32}{5}=0\Leftrightarrow\int_0^1\left[f'(x)-\frac{5}{4}x^2\right]^2dx=0\Leftrightarrow\boxed{f'(x)=\frac{5}{4}x^2}.$$

Cách 2: $64=\left(\int_0^2 x^2f'(x)dx\right)^2\le\int_0^2 x^4dx\int_0^2\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{32}{5}10=64$. Đẳng thức xảy ra khi: $f'(x)=kx^2$.

Vì $8=\int_0^2 x^2f'(x)dx=k\int_0^2 x^4dx=\frac{32}{5}k\Leftrightarrow k=\frac{5}{4}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{5}{4}x^2}$.

Khi đó: $\boxed{f(x)=\frac{5x^3}{12}-\frac{4}{3}}$ vì $f(1)=2$. Khi đó thay vào tích phân $I=\int_0^2 x^2f(x)dx=\frac{8}{9}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f\left(1\right)=2$, $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\frac{1}{3}$, $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=\frac{25}{3}$. Hãy tính tích phân $I=\int\limits_0^1 xf\left(x\right)dx$?

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{3}=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=xf\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)dx=2-\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)dx\Leftrightarrow\boxed{\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)dx=\frac{5}{3}}$.

Cách 1: Kết hợp $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=\frac{25}{3}$, $\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)dx=\frac{5}{3}$ và $\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$ ta được:

$$\int\limits_0^1\left\{\left[f'\left(x\right)\right]^2-10xf'\left(x\right)+25x^2\right\}dx=\frac{25}{3}-\frac{50}{3}+\frac{25}{3}=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)-5x\right]^2dx=0\Leftrightarrow\boxed{f'\left(x\right)=5x}.$$

Cách 2: $\frac{25}{9}=\left(\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)dx\right)^2\le\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=\frac{1}{3}\frac{25}{3}=\frac{25}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi: $f'\left(x\right)=kx$.

Vì $\frac{5}{3}=\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)dx=k\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}k\Leftrightarrow k=5\Rightarrow\boxed{f'\left(x\right)=5x}$.

Khi đó $\boxed{f\left(x\right)=\frac{5x^2}{2}-\frac{1}{2}}\Rightarrow I=\int\limits_0^1 xf\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\frac{5x^3}{2}-\frac{x}{2}dx=\frac{3}{8}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ đồng thời thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f^2\left(x\right)dx=3\pi$, $\int\limits_0^{\pi}\left(\sin x-x\right)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=6\pi$, và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Hãy tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f''\left(x\right)\right]^3dx$?

Lời giải

Ta có $3\pi=\int\limits_0^{\pi}\left(\sin x-x\right)f'\left(\frac{x}{2}\right)d\left(\frac{x}{2}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2x-2x\right)f'\left(x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2x-2x\right)df\left(x\right)$

$$\Leftrightarrow 3\pi=\left(\sin 2x-2x\right)f\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2x\right)f\left(x\right)dx=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf\left(x\right)dx\Leftrightarrow\boxed{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf\left(x\right)dx=\frac{3\pi}{4}}.$$

Cách 1: Kết hợp $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f^2\left(x\right)dx=3\pi$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf\left(x\right)dx=\frac{3\pi}{4}$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3\pi}{16}$ ta được:

$$\int\limits_0^1\left\{f^2\left(x\right)-8\sin^2 xf\left(x\right)+16\sin^4 x\right\}dx=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)-4\sin^2 x\right]^2dx=0\Leftrightarrow\boxed{f\left(x\right)=4\sin^2 x}$$

Cách 2: $\frac{9\pi^2}{16}=\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf\left(x\right)dx\right)^2\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f^2\left(x\right)dx=\frac{3\pi}{16}3\pi=\frac{9\pi^2}{16}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=k\sin^2 x$. Vậy $\frac{3\pi}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)dx=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3\pi}{16}k\Leftrightarrow\boxed{f(x)=4\sin^2 x}$.

Khi đó: $f(x)=4\sin^2 x=2(1-\cos 2x)\Rightarrow f'(x)=4\sin 2x\Rightarrow f''(x)=8\cos 2x$.

Thay vào ta được: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f''(x)\right]^3 dx=512\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 2xdx=0$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(2)=1$, $\int_0^2 x^2 f(x)dx=\frac{8}{15}$, $\int_0^2\left[f'(x)\right]^4 dx=\frac{32}{5}$. Hãy tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$?

Lời giải

Ta có $\frac{8}{15}=\int_0^2 f(x)d\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^2-\frac{1}{3}\int_0^2 x^3 f'(x)dx\Leftrightarrow\boxed{\int_0^2 x^3 f'(x)dx=\frac{32}{5}}$.

Cách 1: Như vậy: $\int_0^2\left[f'(x)\right]^4 dx=\frac{32}{5}$, $\int_0^2 x^3 f'(x)dx=\frac{32}{5}$ và $\int_0^2 x^4 dx=\frac{32}{5}$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $\left[f'(x)\right]^4+x^4+x^4+x^4\ge 4x^3 f'(x)$.

Do vậy: $\int_0^2\left[f'(x)\right]^4 dx+3\int_0^2 x^4 dx\ge 4\int_0^2 x^3 f'(x)dx$. Mà giá trị của hai vế bằng nhau.

Như vậy tồn tại dấu bằng xảy ra tức là: $f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$ do đó $I=\int_0^2 f(x)dx=\frac{7}{3}$.

Cách 2: Ta áp dụng hai lần liên tiếp bất đẳng thức Holder:

$$\frac{1048576}{625}=\left(\int_0^2 x^3 f'(x)dx\right)^4\le\left(\int_0^2 x^4 dx\right)^2\left(\int_0^2 x^2\left[f'(x)\right]^2 dx\right)^2\le\left(\int_0^2 x^4 dx\right)^3\int_0^2\left[f'(x)\right]^4 dx=\frac{1048576}{625}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $f'(x)=kx$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ đồng thời thỏa mãn $\int_1^2 x^3 f(x)dx=31$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $I=\int_1^2 f^4(x)dx$?

Lời giải

Ta có áp dụng hai lần liên tiếp bất đẳng thức Holder ta được:

$$31^4=\left(\int_1^2 x^3 f(x)dx\right)^4\le\left(\int_1^2 x^4 dx\right)^2\left(\int_1^2 x^2 f^2(x)dx\right)^2\le\left(\int_1^2 x^4 dx\right)^3\int_1^2 f^4(x)dx\Rightarrow\boxed{\int_1^2 f^4(x)dx\ge 3875}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $f(x)=kx$ nên $k\int_1^2 x^4 dx=31\Leftrightarrow k=5\Leftrightarrow\boxed{f(x)=5x^2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx \le 1$; $f(0)=1$; $f(1)=\sqrt{3}$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)=?$

Lời giải

Ta áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$2 \ge \int_0^1 \left\{[f(x)f'(x)]^2+1\right\}dx \ge 2\int_0^1 f(x)f'(x)dx = f^2(x)\Big|_0^1 = f^2(1)-f^2(0)=2$$

Như vậy đẳng thức phải xảy ra tức là: $f(x)f'(x)=1 \Rightarrow \int f(x)f'(x)dx=\int 1dx \Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+2C}$.

Mà $f(0)=1$; $f(1)=\sqrt{3}$ nên ta suy ra $\boxed{f(x)=\sqrt{2x+1}}$. Vậy $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{x^2 f^4(x)}dx \le 21$; $f(1)=\frac{1}{8}$; $f(2)=1$. Tính giá trị của $f\left(\frac{3}{2}\right)=?$

Lời giải

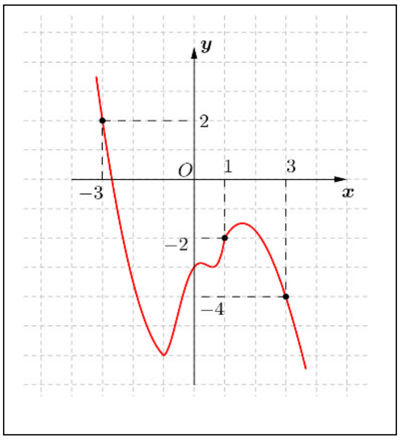
Ta áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$42 \ge \int_1^2 \left\{\frac{[f'(x)]^2}{x^2 f^4(x)}+9x^2\right\}dx \ge 6\int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\frac{6}{f(x)}\Big|_1^2 = 6\left(\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(2)}\right)=42$$

Như vậy đẳng thức phải xảy ra tức là: $\frac{f'(x)}{f^2(x)}=3x^2 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int 3x^2dx \Rightarrow f(x)=\frac{1}{C-x^3}$.

Mà $f(1)=\frac{1}{8}$; $f(2)=1$ nên ta suy ra $\boxed{f(x)=\frac{1}{9-x^3}}$. Vậy $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{8}{45}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** sao cho sao cho tồn tại số thực m thỏa mãn $\int_{-3}^{3}\left[\frac{m}{3}-g(x)\right]dx=0$.



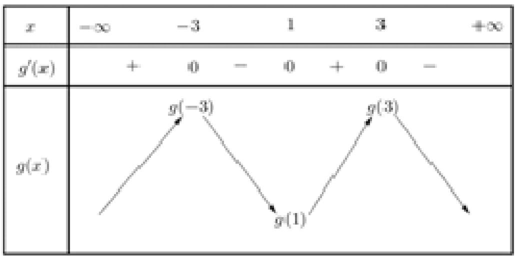
A. $6g(1)<m<g(-3)$ **B.** $6g(1)<m<6g(-3)$

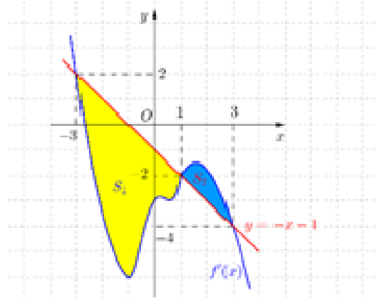
C. $3g(1)<m<3g(-3)$ **D.** $-3g(1)<m<3g(-3)$

Lời giải

$$g'(x)=2f'(x)+2x+2 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Lập BBT của hàm số $y=g(x)$ như hình vẽ bên.





Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow g(1)$ nhỏ nhất trong các giá trị $g(-3)$, $g(1)$, $g(3)$.

Ta có:

$$S_1 > S_2 \Leftrightarrow 2\int_{-3}^{1}\left[-x-1-f'(x)\right]dx > 2\int_{1}^{3}\left[f'(x)+x+1\right]dx \Leftrightarrow -\int_{-3}^{1} g'(x)dx > \int_{1}^{3} g'(x)dx$$

$\Leftrightarrow g(-3)-g(1) > g(3)-g(1) \Leftrightarrow g(-3) > g(3) \Rightarrow$ min, max của $g(x)$ trên $[-3;3]$ lần lượt là $g(1)$, $g(-3) \Rightarrow \boxed{6g(1) \le \int_{-3}^{3} g(x)dx \le 6g(-3)}$. Mà $\int_{-3}^{3}\left[\frac{m}{3}-g(x)\right]dx = 0 \Leftrightarrow 2m = \int_{-3}^{3} g(x)dx$.

$\Rightarrow$ Để phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \boxed{3g(1) \le m \le 3g(-3)}$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx \ge 1$; $f(0)=1$; $f(1)=e^2$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)=?$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng Holder: $1 \le \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\right)^2 \le \int_0^1 xdx \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{f(1)}{f(0)} = 1$

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{f'(x)}{f(x)} = kx$. Thay vào $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx = 1$ ta được $k = 4$.

Vì $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x \Rightarrow \boxed{\ln f(x) = 2x^2 + C}$ mà $f(0)=1$; $f(1)=e^2$ nên $C=0$ vậy $f(x)=e^{2x^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$

Cách 2: Áp dụng AM – GM: $2 \le \int_0^1 \sqrt{4x}\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}dx \le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 4xdx + \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{f(1)}{f(0)} = 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x \Rightarrow \boxed{\ln f(x) = 2x^2 + C}$ mà $f(0)=1$; $f(1)=e^2$ nên $C=0$ vậy $f(x)=e^{2x^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(2)=16$, $\int_0^2 xf(x)dx = \frac{64}{5}$ và $\int_0^2 \left[f'(x)\right]^2 dx = \frac{1152}{5}$. Hãy tính tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$

Lời giải

Cách 1: $\dfrac{64}{5}=\int\limits_0^2 f\left(x\right)d\left(\dfrac{x^2}{2}\right)=\dfrac{x^2}{2}f\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2\dfrac{x^2}{2}f'\left(x\right)dx=32-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2f'\left(x\right)dx\Rightarrow\boxed{\int\limits_0^2 x^2f'\left(x\right)dx=\dfrac{192}{5}}$

Kết hợp $\int\limits_0^2\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=\dfrac{1152}{5}$; $\int\limits_0^2 x^2f'\left(x\right)dx=\dfrac{192}{5}$ và $\int\limits_0^2 x^4dx=\dfrac{32}{5}$ ta được

$\int\limits_0^2\left[\left[f'\left(x\right)\right]^2-12.x^2f'\left(x\right)+36x^4\right]dx=\dfrac{1152}{5}-12.\dfrac{192}{5}+36.\dfrac{32}{5}=0\Leftrightarrow\int\limits_0^2\left[f'\left(x\right)-6x^2\right]^2=0\Leftrightarrow\boxed{f'\left(x\right)=6x^2}$

Cách 2: $\dfrac{36864}{25}=\left(\int\limits_0^2 x^2f'\left(x\right)dx\right)^2\le\int\limits_0^2 x^4dx.\int\limits_0^2\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=\dfrac{32}{5}.\dfrac{1152}{5}=\dfrac{36864}{25}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f'\left(x\right)=kx^2$. Mà $\dfrac{192}{5}=\int\limits_0^2 x^2f'\left(x\right)dx=k\int\limits_0^2 x^4dx=\dfrac{32}{5}k\Rightarrow k=6\Rightarrow\boxed{f'\left(x\right)=6x^2}$

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f\left(1\right)=1$, $\int\limits_0^1 x^5f\left(x\right)dx=\dfrac{11}{78}$ và $\int\limits_0^1 f'\left(x\right)d\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{4}{13}$. Hãy tính $f\left(2\right)$?

Lời giải

Cách 1: $\dfrac{11}{78}=\int\limits_0^1 x^5f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1 f\left(x\right)d\left(\dfrac{x^6}{6}\right)=\dfrac{x^6}{6}f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\dfrac{x^6}{6}f'\left(x\right)dx\Rightarrow\boxed{\int\limits_0^1 x^6f'\left(x\right)dx=\dfrac{2}{13}}$

Lại có: $\int\limits_0^1 f'\left(x\right)d\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{4}{13}\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=\dfrac{4}{13}$. Kết hợp với $\int\limits_0^1 x^{12}dx=\dfrac{1}{13}$ ta được

$\int\limits_0^1\left[\left[f'\left(x\right)\right]^2-4x^6f'\left(x\right)+4x^{12}\right]dx=\dfrac{4}{13}-4.\dfrac{2}{13}+4.\dfrac{1}{13}=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)-2x^6\right]^2dx=0\Leftrightarrow\boxed{f'\left(x\right)=2x^6}$

Cách 2: $\dfrac{4}{169}=\left(\int\limits_0^1 x^6f'\left(x\right)dx\right)^2\le\int\limits_0^1 x^{12}dx.\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=\dfrac{1}{13}.\dfrac{4}{13}=\dfrac{4}{169}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f'\left(x\right)=kx^6$. Mà $\dfrac{2}{13}=\int\limits_0^1 x^6f'\left(x\right)dx\Leftrightarrow k\int\limits_0^1 x^{12}dx=\dfrac{2}{13}\Leftrightarrow k=2\Rightarrow\boxed{f'\left(x\right)=2x^6}$

Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\left[0;2\right]$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để thỏa mãn điều kiện $\int\limits_0^2\left[f\left(x\right)-m\right]dx=0$.

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	7	$\searrow$	-3

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\begin{cases}\max\limits_{x\in[0;2]} f\left(x\right)=7\\ \min\limits_{x\in[0;2]} f\left(x\right)=-5\end{cases}\Rightarrow\int\limits_0^2\left(-5\right)dx\le\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx\le\int\limits_0^2 7dx.$$

Hay: $-10\le\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx\le 14$. Mặt khác $\int\limits_0^2\left[f\left(x\right)-m\right]dx=0\Leftrightarrow 2m=\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx.$

Như vậy để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -10\le 2m\le 14\Leftrightarrow -5\le m\le 7$. Vậy có 13 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(1)=2$, $\int_0^1 x^4 f(x)dx=\frac{3}{11}$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{49}{11}$. Hãy tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$?

Lời giải

$$\frac{3}{11}=\frac{1}{5}\int_0^1 f(x)dx^5=\frac{1}{5}x^5 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)dx \Leftrightarrow \frac{1}{5}\int_0^1 x^5 f'(x)dx=\frac{7}{55} \Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 x^5 f'(x)dx=\frac{7}{11}}.$$

Cách 1: Kết hợp $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{49}{11}$, $\int_0^1 x^5 f'(x)dx=\frac{7}{11}$ và $\int_0^1 x^{10}dx=\frac{1}{11}$ ta được:

$$\int_0^1 \left\{[f'(x)]^2-14x^5 f'(x)+49x^{10}\right\}dx=\frac{49}{11}-\frac{98}{11}+\frac{49}{11}=0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)-7x^5]^2 dx=0 \Leftrightarrow \boxed{f'(x)=7x^5}.$$

Cách 2: Ta có: $\frac{49}{121}=\left(\int_0^1 x^5 f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x^{10}dx\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{1}{11}\frac{49}{11}=\frac{49}{121}$.

Đẳng thức xảy ra khi: $f'(x)=kx^5$. Vì $\frac{7}{11}=\int_0^1 x^5 f'(x)dx=k\int_0^1 x^{10}dx=\frac{1}{11}k \Leftrightarrow k=7 \Rightarrow \boxed{f'(x)=7x^5}$.

Khi đó: $\boxed{f(x)=\frac{7x^6}{6}+\frac{5}{6}}$ vì $f(1)=2$. Khi đó thay vào tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{7x^6}{6}+\frac{5}{6}dx=1$.

Câu 14: Tính giới hạn: $\lim\int_0^1 \frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}dx=?$

Lời giải

Ta có với $x\in[0;1]$ thì $\frac{1}{2}\le\frac{e^x}{1+e^x}\le\frac{e^x}{2} \Leftrightarrow \frac{ne^{-nx}}{2}\le\frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}\le\frac{ne^{x(1-n)}}{2}$.

Do đó: $\lim\int_0^1 \frac{ne^{-nx}}{2}dx\le\lim\int_0^1 \frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}dx\le\lim\int_0^1 \frac{ne^{x(1-n)}}{2}dx \Rightarrow \lim\frac{1-e^{-n}}{2}\le\lim\int_0^1 \frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}dx\le\frac{n(1-e^{1-n})}{2(n-1)}$.

Vậy $\frac{1}{2}\le\lim\int_0^1 \frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}dx\le\frac{1}{2}$ cho nên ta suy ra $\boxed{\lim\int_0^1 \frac{ne^{x(1-n)}}{1+e^x}dx=\frac{1}{2}}$.

Câu 15: Tính giới hạn: $\lim\int_a^b (1+x+x^2+...+x^n)dx$ với $0<a<b<1$.

Lời giải

Ta có $\int_a^b (1+x+x^2+...+x^n)dx=\int_a^b \frac{1}{1-x}dx-\int_a^b \frac{x^{n+1}}{1-x}dx=\ln\frac{1-a}{1-b}-\int_a^b \frac{x^{n+1}}{1-x}dx$.

Mà $0\le\int_a^b \frac{x^{n+1}}{1-x}dx\le\frac{1}{1-b}\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{(1-b)(n+2)}\to 0$. Vậy $\boxed{\lim\int_a^b (1+x+x^2+...+x^n)dx=\ln\frac{1-a}{1-b}}$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\int\limits_1^2 \frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}dx \le 24$; $f(1)=1$; $f(2)=16$. Tính giá trị của $f\left(\sqrt{2}\right)=?$

Lời giải

Ta áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$48 \ge \int\limits_1^2 \left\{\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}+16x\right\}dx \ge 8\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 16\sqrt{f(x)}\Big|_1^2 = 16\left(\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right)=48$$

Như vậy đẳng thức phải xảy ra tức là:

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=4x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx=\int 2xdx \Rightarrow \sqrt{f(x)}=x^2+C \Rightarrow f(x)=\left(x^2+C\right)^2.$$

Mà $f(1)=1$; $f(2)=16$ nên ta suy ra $\boxed{f(x)=x^4}$. Vậy $f\left(\sqrt{2}\right)=4$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f^2(x)\le 1$ với mọi $x\in[-1;1]$ và $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int\limits_{-1}^1 x^2 f(x)dx$?

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{2}{3}$ **D.** -1

Lời giải

Ta đặt $I=\int\limits_{-1}^1 x^2 f(x)dx \Rightarrow |I|=\left|\int\limits_{-1}^1 \left(x^2-a\right)f(x)dx\right| \le \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|\left|f(x)\right|dx \le \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx \quad \forall a\in\mathbb{R}$.

Do đó ta suy ra $|I|\le \min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx$. Đến đây ta chia bài toán thành 3 trường hợp như sau:

Trường hợp 1: Nếu $a\le 0$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx=\min\limits_{a\le 0}\int\limits_{-1}^1 \left(x^2-a\right)dx=\min\limits_{a\le 0}\left(\frac{2}{3}-2a\right)=\frac{2}{3}$.

Trường hợp 2: Nếu $a\ge 1$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx=\min\limits_{a\ge 1}\int\limits_{-1}^1 \left(a-x^2\right)dx=\min\limits_{a\ge 1}\left(2a-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ thì $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx=\min\limits_{a\in[0;1]}\left(\int\limits_{-1}^{-\sqrt{a}} \left(x^2-a\right)dx+\int\limits_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left(a-x^2\right)dx+\int\limits_{\sqrt{a}}^1 \left(x^2-a\right)dx\right)$

$$\Leftrightarrow \min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx=\min\limits_{a\in[0;1]}\left[\left(\frac{x^3}{3}-ax\right)\Bigg|_{-1}^{-\sqrt{a}}+\left(ax-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}+\left(\frac{x^3}{3}-ax\right)\Bigg|_{\sqrt{a}}^{1}\right]$$

$$\Leftrightarrow \min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx=\min\limits_{a\in[0;1]}\left(\frac{8a\sqrt{a}}{3}-2a+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2} \text{ khi và chỉ khi } a=\frac{1}{4}.$$

Kết luận: Như vậy $\min\limits_{a\in\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^1 \left|x^2-a\right|dx=\frac{1}{2}$ do đó $|I|\le\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{\min I=-\frac{1}{2}}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f(x)\in[-8;8]$ với mọi $x\in[0;1]$ và $\int\limits_0^1 xf(x)dx=3$. Tìm giá trị lớn nhất của $\int\limits_0^1 x^3 f(x)dx$?

A. 2 **B.** $\frac{31}{16}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{17}{8}$

Lời giải

Ta đặt $I=\int_0^1 x^3f(x)dx$ khi đó: $\left|I-3a\right|=\left|\int_0^1\left(x^3-ax\right)f(x)dx\right|\le\int_0^1\left|x^3-ax\right|\left|f(x)\right|dx$

$\Rightarrow\left|I-3a\right|\le 8\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx\quad\forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow I\le 3a+8\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx\quad\forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow I\le\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx\right).$

Trường hợp 1: Nếu $a\le 0$ khi đó $\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx\right)=\min_{a\le 0}\left(3a+8\int_0^1\left(x^3-ax\right)dx\right)=\min_{a\le 0}(2-a)=2$

Trường hợp 2: Nếu $a\ge 1$ khi đó $\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx\right)=\min_{a\ge 1}\left(3a+8\int_0^1\left(ax-x^3\right)dx\right)=\min_{a\ge 1}(7a-2)=5$

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ khi đó ta có đánh giá sau:

$$\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx\right)=\min_{a\in[0;1]}\left(3a+8\int_0^{\sqrt{a}}\left(ax-x^3\right)dx+8\int_{\sqrt{a}}^1\left(x^3-ax\right)dx\right)=\min_{a\in[0;1]}\left(4a^2-a+2\right)=\frac{31}{16}$$

Kết luận: Vậy $\min_{a\in\mathbb{R}}\left(3a+8\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx\right)=\frac{31}{16}\Rightarrow I\le\frac{31}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{8};I=\frac{31}{12}>3a=\frac{3}{8}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau: $\max_{[0;1]}\left|f(x)\right|=6$ và $\int_0^1 x^2f(x)dx=0$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3f(x)dx$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$ **C.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$ **D.** $\frac{1}{24}$

Lời giải

Ta có với mọi số thực $a\in\mathbb{R}$ thì $\int_0^1 ax^2f(x)dx=0$ do đó:

$$\left|\int_0^1 x^3f(x)dx\right|=\left|\int_0^1\left(x^3-ax^2\right)f(x)dx\right|\le\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|\left|f(x)\right|dx\le 6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx\quad\forall a\in\mathbb{R}$$

Do đó: $\left|\int_0^1 x^3f(x)dx\right|\le\min_{a\in\mathbb{R}}6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=\min_{a\in\mathbb{R}}g(a)$. Tới đây ta chia các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $a\le 0$ thì $x^3-ax^2=x^2(x-a)\ge 0\ \forall x\in[0;1]$. Khi đó:

$$g(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^1 x^3-ax^2dx=6\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{3}\right)\Rightarrow\min_{a\le 0}g(a)=\frac{3}{2}$$

Trường hợp 2: Nếu $a\ge 1$ thì $x^3-ax^2=x^2(x-a)\le 0\ \forall x\in[0;1]$. Khi đó:

$$g(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^1 ax^2-x^3dx=6\left(\frac{a}{3}-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\min_{a\ge 1}g(a)=\frac{1}{2}$$

Trường hợp 3: Nếu $a\in[0;1]$ thì $f(a)=6\int_0^1\left|x^3-ax^2\right|dx=6\int_0^a ax^2-x^3dx+\int_a^1 x^3-ax^2dx=\frac{2a^4-4a+3}{2}$.

Ta tìm được $\min_{a\in[0;1]}g(a)=\min_{a\in[0;1]}\left(\frac{2a^4-4a+3}{2}\right)=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$ vậy $\boxed{\min_{a\in\mathbb{R}}g(a)=\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$.

Do vậy: $\left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right| \le \min_{a\in\mathbb{R}} g(a) \Rightarrow \left|\int_0^1 x^3 f(x)dx\right| \le \dfrac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4} \Rightarrow \boxed{\max_{[0;1]} \int_0^1 x^3 f(x)dx = \dfrac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}}$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2021\times 2022}$ **B.** $\dfrac{1}{2018\times 2021}$ **C.** $\dfrac{1}{2018\times 2019}$ **D.** $\dfrac{1}{2019\times 2021}$

Lời giải

Ta có: $3f(x)+x.f'(x)\ge x^{2018} \Rightarrow 3x^2 f(x)+x^3 f'(x)\ge x^{2020}$

$\Rightarrow \left[x^3 f(x)\right]' \ge x^{2020} \Rightarrow \int_0^t \left[x^3 f(x)\right]' dx \ge \int_0^t x^{2020}dx \ \ \forall t\in[0;1] \Rightarrow f(t)\ge \dfrac{t^{2018}}{2021}$

Khi đó $\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \ge \int_0^1 \dfrac{x^{2018}}{2021}dx = \dfrac{1}{2019.2021}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ là $\dfrac{1}{2019.2021}$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0, \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \dfrac{1}{11}$ và $\int_0^1 x^4 f(x)dx = -\dfrac{1}{55}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{-1}{7}$ **B.** $\dfrac{1}{7}$ **C.** $\dfrac{-1}{55}$ **D.** $\dfrac{1}{11}$

Lời giải

$\int_0^1 x^4 f(x)dx = \left[\dfrac{x^5}{5}f(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x^5}{5}f'(x)dx$. Suy ra $\int_0^1 x^5 f'(x)dx = \dfrac{1}{11}$. Hơn nữa ta dễ dàng tính được $\int_0^1 \left(x^5\right)^2 dx = \dfrac{1}{11}$. Do đó $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx - 2\int_0^1 x^5 f'(x)dx + \int_0^1 \left(x^5\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)-x^5\right]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x)=x^5$, do đó $f(x)=\dfrac{1}{6}x^6+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=-\dfrac{1}{6}$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \dfrac{x^6-1}{6}dx = \dfrac{-1}{7}$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0, \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \dfrac{3}{2}-2\ln 2$ và $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}dx = 2\ln 2 - \dfrac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{1-2\ln 2}{2}$ **B.** $\dfrac{3-2\ln 2}{2}$ **C.** $\dfrac{3-4\ln 2}{2}$ **D.** $\dfrac{1-\ln 2}{2}$

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{(x+1)^2}dx = \int_0^1 f(x)d\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right) = \left[\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)f(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)f'(x)dx$.

Suy ra $\int_0^1 \left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)f'(x)dx = \dfrac{3}{2}-2\ln 2$. Hơn nữa ta tính được:

$$\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2dx=\int_0^1\left(1-2\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\left[x-2\ln|x+1|-\frac{1}{(x+1)}\right]\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}-2\ln 2.$$

Do đó $\int_0^1[f'(x)]^2dx-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)f'(x)dx+\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2dx=0\Leftrightarrow\int_0^3\left[f'(x)+\frac{1}{x+1}-1\right]^2dx=0$.

Suy ra $f'(x)=1-\frac{1}{x+1}$, do đó $f(x)=x-\ln(x+1)+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=\ln 2-1$.

Ta được $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1[x-\ln(x+1)+\ln 2-1]dx=\frac{1}{2}-\ln 2$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\le\sqrt{f(x)}$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\frac{1}{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải

Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+F(x)\le\sqrt{f(x)}\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{F'(x)}{(F(x)+1)^2}-1\ge 0\ \ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{(F(x)+1)^2}-1\right)dx=1-t-\frac{1}{F(t)+1}$ là hàm số đồng biến trên $[0;1]$ do vậy ta có đánh giá:

$h(x)\ge h(0)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow 1-x-\frac{1}{F(x)+1}\ge 0\Rightarrow\frac{1}{F(x)+1}\le 1-x\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\boxed{\int_0^1\frac{1}{g(x)}dx\le\frac{1}{2}}$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+3\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\ge f^2(x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\sqrt{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{9}{5}$

Lời giải

Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt\Rightarrow g(x)=1+3F(x)\ge f^2(x)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{F'(x)}{\sqrt{3F(x)+1}}-1\le 0\ \ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int_0^t\left(\frac{F'(x)}{\sqrt{3F(x)+1}}-1\right)dx=\frac{2}{3}\sqrt{3F(t)+1}-t-\frac{2}{3}$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ do vậy ta có:

$h(x)\le h(0)\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\frac{2}{3}\sqrt{3F(x)+1}-t-\frac{2}{3}\le 0\Rightarrow\sqrt{3F(x)+1}\le\frac{3}{2}x+1\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\boxed{\int_0^1\sqrt{g(x)}dx\le\frac{7}{4}}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+\int_0^{x^2}f(t)dt$. Biết $g(x)\ge 2xf(x^2)$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 g(x)dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Đặt $F(x^2)=\int\limits_0^{x^2} f(t)dt \Rightarrow g(x)=1+F(x^2)\ge 2xf(x^2)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \dfrac{2xf(x^2)}{1+F(x^2)}-1\le 0\ \forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow h(t)=\int\limits_0^{\sqrt{t}}\left(\dfrac{2xf(x^2)}{1+F(x^2)}-1\right)dx=\ln(1+F(t))-\sqrt{t}$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ do vậy ta có:

$h(x)\le h(0)\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \ln(1+F(x))-\sqrt{x}\le 0\Rightarrow 1+F(x)\le e^{\sqrt{x}}\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \boxed{\int\limits_0^1 g(x)dx\le 2}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời ta đặt $g(x)=1+2\int\limits_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\ge[f(x)]^3$ với mọi $x\in[0;1]$. Tích phân $\int\limits_0^1\sqrt[3]{[g(x)]^2}dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\dfrac{5}{3}$ **B.** 4 **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 5

Lời giải

Ta đặt $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$ khi đó $g(x)=1+2F(x)\ge[f(x)]^3\ \ \forall x\in[0;1]$.

Do vậy $\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\le 0\ \ \forall x\in[0;1]\Leftrightarrow \dfrac{F'(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\le 0\ \ \forall x\in[0;1]$.

Xét hàm số: $h(t)=\int\limits_0^t\left(\dfrac{F'(x)}{\sqrt[3]{1+2F(x)}}-1\right)dx=\dfrac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2-t-\dfrac{3}{4}\ \ \forall t\in[0;1]$ là hàm nghịch biến trên $[0;1]$ cho nên $h(t)\le h(0)\ \ \forall t\in[0;1]\Rightarrow \dfrac{3}{4}\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2-t-\dfrac{3}{4}\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{1+2F(t)}\right)^2\le\dfrac{4}{3}t+1\ \ \forall t\in[0;1]$.

Do đó: $\left(\sqrt[3]{g(x)}\right)^2\le\dfrac{4}{3}x+1\ \ \forall x\in[0;1]\Rightarrow\int\limits_0^1\sqrt[3]{[g(x)]^2}dx\le\int\limits_0^1\left(\dfrac{4}{3}x+1\right)dx\Rightarrow\boxed{\int\limits_0^1\sqrt[3]{[g(x)]^2}dx\le\dfrac{5}{3}}$. **Chọn A.**

Câu 27: Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[1;8]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện:

$$\int\limits_1^2\left[f(x^3)\right]^2dx+2\int\limits_1^2 f(x^3)dx=\frac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)dx-\int\limits_1^2(x^2-1)^2dx$$

Tính tích phân $\int\limits_1^2[f'(x)]^3dx$ bằng:

A. $\dfrac{8\ln 2}{27}$ **B.** $\dfrac{\ln 2}{27}$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** $\dfrac{5}{4}$

Lời giải

Đặt $t=x^3\Rightarrow dt=3x^2dx$. Khi đó: $\int\limits_1^2\left[f(x^3)\right]^2dx+2\int\limits_1^2 f(x^3)dx=\dfrac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)dx-\int\limits_1^2(x^2-1)^2dx$

$\Rightarrow\int\limits_1^8\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}[f(t)]^2dt+2\int\limits_1^8\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}f(t)\left(1-\sqrt[3]{t^2}\right)dt+\dfrac{2}{3}\int\limits_1^8\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\left(1-\sqrt[3]{t^2}\right)^2dt=0$

$$\Rightarrow \int_1^8 \left[\frac{f(t)+1-\sqrt[3]{t^2}}{\sqrt[3]{t}}\right]^2 dt = 0 \Rightarrow \boxed{f(t)=\sqrt[3]{t^2}-1} \Rightarrow \boxed{\int_1^2 \left[f'(x)\right]^3 dx = \frac{8\ln 2}{27}}$$. **Chọn A.**

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(0)=1$ và $3\int_0^1\left[f'(x)f^2(x)+\frac{1}{9}\right]dx \le 2\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx$. Tính tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$?

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{5}{6}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\left(\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f'(x)f^2(x)dx\int_0^1 1dx$.

Như vậy: $9\left(\int_0^1\left[f'(x)f^2(x)+\frac{1}{9}\right]dx\right)^2 \le 4\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx \Leftrightarrow 9\left(\int_0^1\left[f'(x)f^2(x)-\frac{1}{9}\right]dx\right)^2 \le 0$.

Do đó: $f'(x)f^2(x)=\frac{1}{9} \Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+1 \Rightarrow \boxed{\int_0^1 f^3(x)dx=\frac{7}{6}}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(1)=\frac{3}{2}$; $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}$ và $\int_0^1(x-1)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2}dx=-\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx=?$

A. $\frac{7}{3}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{53}{60}$ **D.** $\frac{203}{60}$

Lời giải

Sử dụng tích phân từng phần ta có: $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}=f(1)-\int_0^1 xf'(x)dx \Rightarrow \int_0^1 xf'(x)dx=\frac{2}{3}$.

Mặt khác: $2(1-x)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2} \le (1-x)^2+1+\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2$.

Tích phân hai vế ta $\Rightarrow \frac{2}{3} \le \frac{4}{3}+\int_0^1\frac{x}{x-2}\left(f'(x)\right)^2dx \Rightarrow \int_0^1\frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2dx \le \frac{2}{3}$.

Áp dụng Holder: $\left(\int_0^1 xf'(x)dx\right)^2=\frac{4}{9}=\left(\int_0^1\sqrt{x(2-x)}\sqrt{\frac{x}{2-x}}f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x(2-x)dx\int_0^1\frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2dx$.

Do vậy $\Rightarrow \int_0^1\frac{x}{2-x}\left(f'(x)\right)^2dx \ge \frac{2}{3}$ nên dấu bằng $\Leftrightarrow f'(x)=2-x \Rightarrow f(x)=2x-\frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx=\frac{53}{60}$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)=2$ và $21\left(x^2-1\right)^2-12(x-1)^2-12xf(x)=\left[f'(x)\right]^2\ \forall x\in[0;1]$. Tính $\int_0^1 f(x)dx=?$

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** -2 **D.** $-\frac{5}{4}$

Lời giải

Ta có $21\left(x^2-1\right)^2-12(x-1)^2-12xf(x)=\left[f'(x)\right]^2$

$$\Rightarrow \frac{36}{5}-6\int_0^1 f(x)d(x^2-1)=\int_0^1[f'(x)]^2dx \Rightarrow -\frac{24}{5}+6\int_0^1(x^2-1)f'(x)dx=\int_0^1[f'(x)]^2dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1[f'(x)-3x^2+3]^2dx=0 \Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$$. Chọn đáp án A.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1(f'(x))^2dx=\int_0^1(x+1).e^x.f(x)dx=\frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)dx=?$

A. $2+e$ **B.** $2-e$ **C.** e **D.** $1-e$

Lời giải

Ta có: $\frac{e^2-1}{4}=\int_0^1(x+1).e^x.f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(x.e^x)=-\int_0^1 x.e^x.f'(x)dx$

$$\Rightarrow \int_0^1(f'(x))^2dx=-\int_0^1 x.e^x.f'(x)dx=\frac{e^2-1}{4}=\int_0^1 x^2.e^{2x}dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1(f'(x))^2dx+\int_0^1 x^2.e^{2x}dx+2\int_0^1 x.e^x.f'(x)dx=0 \Rightarrow \int_0^1(f'(x)+x.e^x)^2dx=0$$

$\Rightarrow f'(x)=-x.e^x \Rightarrow f(x)=e^x(x-1) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=2-e$. Chọn đáp án B.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int_0^1\frac{[f'(x)]^2}{e^x}dx=\frac{1}{e-1}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx=?$

A. $\frac{e-2}{e-1}$ **B.** $\frac{e-1}{e-2}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{(e-1)(e-2)}$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\int_0^1\frac{[f'(x)]^2}{e^x}dx.\int_0^1 e^xdx \ge \left[\int_0^1 f'(x)dx\right]^2 \Leftrightarrow \frac{1}{e-1}.(e-1)\ge 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}=k.\sqrt{e^x} \Leftrightarrow f'(x)=k.e^x$. Vì $\int_0^1 f'(x)dx=1 \Rightarrow k=\frac{1}{e-1}$

Vậy $f(x)=\frac{e^x+C}{e-1}$. Mà $f(0)=0, f(1)=1$ và $f(x)=\frac{e^x-1}{e-1}$. Vậy $I=\frac{e-2}{e-1}$. Chọn đáp án A.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\max\limits_{[1;3]} f(x)=2; \min\limits_{[1;3]} f(x)=\frac{1}{2}$ và biểu thức $S=\int_1^3 f(x)dx\int_1^3\frac{1}{f(x)}dx$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tính $\int_1^3 f(x)dx$?

A. $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{7}{5}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2}\le f(x)\le 2 \Rightarrow (2f(x)-1)(f(x)-2)\le 0 \Rightarrow f(x)+\frac{1}{f(x)}\le\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \le \dfrac{5}{2} - f(x) \Rightarrow S \le \int\limits_1^3 f(x)dx\left(\int\limits_1^3 \dfrac{5}{2} - f(x)dx\right)$. Ta tìm được $\max S = \dfrac{25}{4}$ khi $\int\limits_1^3 f(x)dx = \dfrac{5}{2}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời $f(0) = 0, f(1) = 1$ và $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \sqrt{1+x^2}dx = \dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$ bằng?

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$

C. $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ **D.** $\left(\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \sqrt{1+x^2}dx . \int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \ge \left[\int\limits_0^1 f'(x)dx\right]^2 = 1$

Mặt khác $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Vậy đẳng thức xảy ra khi $f'(x).\sqrt[4]{1+x^2} = \dfrac{k}{\sqrt[4]{1+x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{k}{\sqrt{1+x^2}}$

Vì $\int\limits_0^1 f'(x)dx = 1$ nên $k = \dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$. Vậy $f(x) = \dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C$

Vì $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ nên $C = 0$. Do đó $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Chọn đáp án C.

Câu 35: Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \int\limits_0^1 \left|x^2 - ax\right|dx$ với $a \in [0,1]$

A. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{6}$

Lời giải

Phá dấu trị tuyệt đối ta có

$$S = \int\limits_0^1 \left|x^2 - ax\right|dx = -\int\limits_0^a \left(x^2 - ax\right)dx + \int\limits_a^1 \left(x^2 - ax\right)dx = \left(\dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{ax^2}{3}\right)\Bigg|_0^a + \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{ax^2}{3}\right)\Bigg|_a^1 = \dfrac{2a^3 - 3a + 2}{6}$$

$S_{min} = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = e.f(0) = e; \int\limits_0^1 \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \le 1$. Tìm mệnh đề đung

A. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^2$. **B.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$. **C.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$. **D.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2e}$

Lời giải

Ta có $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1 = lnf(1) - ln\,f(0) = ln\frac{f(1)}{f(0)} = ln\,e = 1$

Nên $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \le 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 - 1\right]dx \le 0$

$\int_0^1 \left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 - 2.\frac{f'(x)}{f(x)} + 1\right]dx \le 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right]^2 dx \le 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - 1 = 0$

Vậy: $f(x) = A.e^x$. Mà $f(1) = e.f(0) = e$ Nên $f(x) = e^x \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$.

Câu 37: Cho $a + b = ab + 4$ và $a < b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I = \int_a^b \left|x^2 - (a+b)x + ab\right|dx$

A. $4\sqrt{3}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 48

Lời giải

Ta có

$$I^2 = \frac{\Delta^3}{36.a^4} = \frac{\left((a+b)^2 - 4ab\right)^3}{36} = \frac{\left((ab+4)^2 - 4ab\right)^3}{36} = \frac{\left((ab+2)^2 + 12\right)^3}{36} \ge \frac{12^3}{36} = 48$$

$\Rightarrow I \ge 4\sqrt{3}$

Câu 38: Tìm giá trị nhỏ nhất của $I = \int_a^b \left|x^2 + (2-m)x - 2\right|dx$ trong đó $a < b$ là hai nghiệm cảu phương trình $x^2 + (2-m)x - 2 = 0$

A. $\frac{128}{9}$. **B.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$

Lời giải

$$I = \frac{\Delta^3}{36a^4} = \frac{\left((2-m)^2 + 8\right)^3}{36} \ge \frac{128}{9} \Rightarrow I \ge \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 39: Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \int_0^1 \left|x^3 - ax\right|dx$ với $a \in [0,1]$

A. $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

$$S = \int_0^{\sqrt{a}} \left(a.x - x^3\right)dx + \int_{\sqrt{a}}^1 \left(x^3 - a.x\right)dx = \left(\frac{a.x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a}} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{a.x^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{a}}^1$$

$$S = \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \ge \frac{1}{8}$$

Câu 40: Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $S=\int_m^{2m}\left|x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3\right|dx$ với $m\in[1;3]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $a+b=\dfrac{41}{6}$. **B.** $a+b=1$. **C.** $a+b=\dfrac{21}{4}$. **D.** $a+b=2$

Lời giải

$$S=\int_m^{2m}\left|(x-m)^2(x-2m)\right|dx=-\int_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)dx=-\int_m^{2m}(x-m)^2((x-m)-m)dx$$

$$S=-\int_m^{2m}(x-m)^3dx+m\int_m^{2m}(x-m)^2dx=\left(\frac{-(x-m)^4}{4}+\frac{m(x-m)^3}{3}\right)\Bigg|_m^{2m}=\frac{m^4}{12}$$

Thay $m\in[1;3]$ vào ta có $a+b=\dfrac{41}{6}$.

Câu 41: Cho A là tập các hàm số f lien tục trên đoạn $[0;1]$ và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$.

Tìm m nhỏ nhất sao cho $\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx\le m.\int_0^1 f(x)dx \quad \forall f\in A$

A. 2018. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2018}$. **D.** $\sqrt{2018}$

Lời giải

Đặt $t^{2018}=x\Rightarrow dx=2018.t^{2017}dt$ nên $\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx=2018.\int_0^1 t^{2017}.f(t).dt\le 2018\int_0^1 f(t).dt$

Tìm m nhỏ nhất nên $m\le 2018$. Ta sẽ Cm $m=2018$ là số cần tìm. Xét $f(x)=x^n$ ta có

$$\int_0^1 x^{n/2018}dx\le m\int_0^1 x^n dx\to\frac{2018}{n+2018}\le\frac{m}{n+1}\to m\ge\frac{2018(n+1)}{n+2018}$$

Cho $n\to+\infty$ ta có $m\ge 2018$. Vậy $m=2018$ là hằng số nhỏ nhất cần tìm.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2018.f(0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức $M=\int_0^1\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}dx+\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx$

A. $ln2018$. **B.** $2ln2018$. **C.** $2e$. **D.** $2018e$

Lời giải

$$M=\int_0^1\left[\frac{1}{f(x)}-f'(x)\right]^2dx+2\int_0^1\frac{f(x)}{f'(x)}dx\ge 2\int_0^1\frac{f(x)}{f'(x)}dx=2ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1=2ln2018.$$

Câu 43: Cho $a+b=ab+4$ và $a<b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I=\int_a^b\left|(x-a)^2(x-b)\right|dx$

A. 12. **B.** 0. **C.** $\dfrac{64}{3}$. **D.** $\dfrac{49}{3}$

Lời giải

$$S=-\int_a^b(x-a)^2\left[(x-a)+(a-b)\right]dx=-\int_a^b(x-a)^2(x-a)dx-(a-b)\int_a^b(x-a)^2dx$$

$S=\frac{1}{12}(a-b)^4=\frac{1}{12}\left((a+b)^2-4ab\right)^2=\frac{1}{12}\left((ab+4)^2-4ab\right)^2=\frac{1}{12}\left((ab+2)^2+12\right)^2\geq 12$.

Câu 44: Cho $(a-b)^2+(a^2-b^2)^2=4$ và $a<b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$I=\int_a^b\left|x^2-(a+b)x+ab\right|dx$$

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{9}{16}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$

Lời giải

$4=(a-b)^2+(a^2-b^2)^2=(a-b)^2\left(1+(a+b)^2\right)\geq(a-b)^2$

$$I^2=\frac{\Delta^3}{36a^4}=\frac{\left((a+b)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((a-b)^2\right)^3}{36}\leq\frac{4^3}{36}=\frac{4}{3}$$

Khi đó $\begin{cases}a+b=0\\(a-b)^2+(a^2-b^2)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=e.f(0)$. Biểu thức $\int_0^1\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}dx+\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx\leq 2$. Mệnh đề nào đúng

A. $f(1)=\sqrt{\frac{2e}{e-1}}$. **B.** $f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. **C.** $f(1)=\sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$. **D.** $f(1)=\frac{2(e-2)}{e^2-1}$

Lời giải

Viết lại biểu thức cho dưới dạng $\int_0^1\left[\frac{1}{f(x)}-f'(x)\right]^2dx\leq 0$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{1}{f(x)}-f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=f'(x)\Leftrightarrow\int 1dx=\int f(x).d\left(f(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow x+c=\frac{f^2(x)}{2}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{2(x+c)}$$

Thay $x=0$ vào ta có $\begin{cases}f(0)=\sqrt{2c}\\f(1)=\sqrt{2+2c}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{f(1)}{f(0)}=e=\frac{\sqrt{2+2c}}{\sqrt{2c}}\Leftrightarrow c=\frac{1}{e^2-1}$

$$\to f(x)=\sqrt{2x+\frac{1}{e^2-1}}\to f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}.$$

Câu 46: Cho A là tập các hàm số f lien tục trên đoạn $[0;1]$.

Tìm $m=\underbrace{min}_{f\in A}\left\{\int_0^1 x.f^2(x)dx-\int_0^1 x^{2018}.f(x)dx\right\}$

A. $\frac{-1}{2019}$. **B.** $\frac{-1}{16144}$. **C.** $\frac{-2017}{2018}$. **D.** $\frac{-1}{16140}$

Lời giải

Biểu thức đã cho là tam thức bậc 2 ẩn là $f(x)$ có hệ số $a=x;b=-x^{2018};c=0$

Nên biểu thức Min tại $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{x^{2017}}{2} \\ m_{min} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{-\Delta}{4a}dx = \int_0^1 \dfrac{-x^{4036}}{4.x}dx = \dfrac{-x^{4035}}{4x4036}\Big|_0^1 = \dfrac{-1}{16144} \end{cases}$.

Câu 47: Cho m là tham số thuộc đoạn $[1;3]$. Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \int_m^{2m} (x-m)^2 (x-2m)^2 dx$. Tính $a+b=$

A. 31.
B. 36.
C. $\dfrac{122}{15}$.
D. $\dfrac{121}{4}$

Lời giải

$$P = \frac{m^5}{30} \in \left[\frac{1}{30};\frac{3^5}{30}\right] \to T = \frac{3^5+1}{30} = \frac{122}{15}.$$

Câu 48: Giá trị nhỏ nhất của $P = \int_m^{2m^2+2} \left|x^2 - 2(m^2+m+1)x + 4(m^3+m)\right| dx$ là $S = \dfrac{a}{b}; a,b$ nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a+b$

A. 7.
B. 337.
C. 25.
D. 91

Lời giải

Ta có : $P = \dfrac{4(m^2-m+1)^3}{3} \geq \dfrac{4}{3}.\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{9}{16} \Rightarrow T = 9+16 = 25$