

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Chứng minh hàm số $y = \frac{4x}{5} + \ln(x^2 + 1)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Tìm môđun của số phức $\bar{z}$ biết $(2 + i^3)z + 1 + 3i = z + i^4$.

b) Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}}(3^x - 1) \leq 3^{1 - \log_9 4}$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{5}} x^3 (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): x - 2y - z + 2 = 0$ và điểm $A(3; -2; -3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (α) . Tìm tọa độ tiếp điểm của (S) và (α) .

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Cho $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Một chiếc tàu của tập đoàn dầu khí quốc gia Việt Nam khoan thăm dò dầu khí trên thềm lục địa tỉnh Bình Thuận có xác suất khoan trúng túi dầu là p . Tìm p biết rằng trong hai lần khoan độc lập, xác suất để chiếc tàu đó khoan trúng túi dầu ít nhất một lần là 0,36.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a ; góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° ; $A'A = A'B = A'C$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (I) có hai đường kính AB và MN với $A(2; -1)$, $B(2; -5)$. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AM và AN với tiếp tuyến của (I) tại B. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác MEF sao cho H nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$ và có hoành độ là một số nguyên.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải phương trình $3\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{3 + \sqrt[3]{x}} = 1 - 4\sqrt[3]{x} - 6x$ trên tập hợp số thực.

Câu 10 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{2b} + \frac{b^2}{4c} + \frac{16c^2}{a} + \frac{175\sqrt{a^2 + 9}}{4(a+1)}.$$

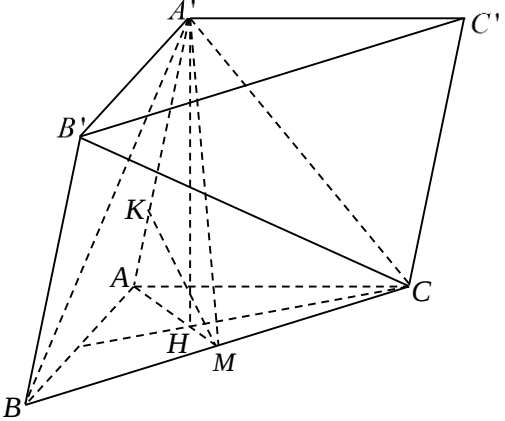
-----HẾT-----

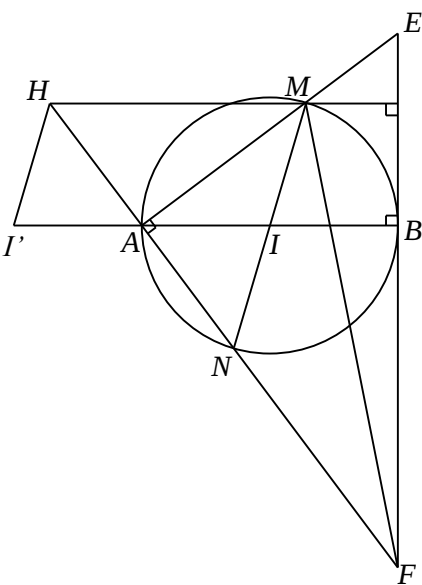
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN 12
KỲ THI THỬ THPT QUỐC GIA

Câu	Đáp án	Điểm
1		
2	Tập xác định $D = \mathbb{R}$ $y' = \frac{4}{5} + \frac{2x}{x^2 + 1}$	0,25
	$y'' = 2 \cdot \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$	0,25
	Suy ra $\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) = \frac{-6}{25} < 0 \end{cases}$	0,25
	Do đó hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm $x = -2$.	0,25
3a	a) Ta có $(2 + i^3)z + 1 + 3i = z + i^4 \Leftrightarrow (2 - i)z - z = -1 - 3i + 1 \Leftrightarrow z = \frac{-3i}{1 - i} \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$	0,25
	Do đó $ \bar{z} = z = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.	0,25
3b	b) Ta có $\log_{\frac{1}{4}}(3^x - 1) \leq 3^{1 - \log_9 4} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(3^x - 1) \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(3^x - 1) \leq \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$	0,25
	$\Leftrightarrow 3^x - 1 \geq \frac{1}{8} \Leftrightarrow 3^x \geq \frac{9}{8} \Leftrightarrow x \geq \log_3 \frac{9}{8}$.	0,25
	Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\left[\log_3 \frac{9}{8}; +\infty\right)$	
4	Đặt $t = (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + 4}$. Suy ra $t^2 = x^2 + 4$. Do đó $t dt = x dx$.	0,25
	$x = 0 \Rightarrow t = 2, x = \sqrt{5} \Rightarrow t = 3$	0,25
	Suy ra $I = \int_2^3 (t^2 - 4)t \cdot t dt = \int_2^3 (t^4 - 4t^2) dt$	0,25
	$= \left(\frac{t^5}{5} - \frac{4t^3}{3}\right) \Big _2^3 = \frac{63}{5} - \frac{64}{15} = \frac{253}{15}$	0,25
	Ghi chú: Nếu học sinh không giải mà chỉ ghi đáp số thì không cho điểm bài này.	
5	*Ta có $d(A, (\alpha)) = \frac{ 3 - 2 \cdot (-2) - (-3) + 2 }{\sqrt{1 + 4 + 1}} = 2\sqrt{6}$.	0,25
	Gọi R là bán kính của (S) . (α) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d(A, (\alpha)) = R \Leftrightarrow R = 2\sqrt{6}$ Do đó (S) có phương trình $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 24$.	0,25
	* Gọi H là tiếp điểm của (S) và (α) , d là đường thẳng qua A và vuông góc với (α) . Khi đó $H = d \cap (\alpha)$, d nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; -1)$ của (α) làm vectơ chỉ phương và có phương trình tham số là:	0,25
	$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$	
	Tham số t ứng với tọa độ điểm H là nghiệm của phương trình	0,25

	$(3+t) - 2(-2-2t) - (-3-t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2$	
	Do đó $H(1; 2; -1)$	
6a	a) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$. Suy ra $\cos \alpha = \frac{-12}{13}$ (vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$)	0,25
	Do đó $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{-12}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-17\sqrt{2}}{26}$.	0,25
6b	b) Gọi A_i là xác suất lần thứ i khoan trúng túi dầu ($i=1, 2$), $P(A_i) = p, P(\bar{A}_i) = 1 - p$. Gọi A là biến cố trong hai lần khoan độc lập, chiếc tàu khoan trúng túi dầu ít nhất một lần. Khi đó $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$ và $P(A) = 0,36 = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 1 - (1 - p)^2$ (vì $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ là hai biến cố độc lập)	0,25
	Do đó $(1 - p)^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow p = \frac{1}{5}$ hoặc $p = \frac{9}{5}$ (loại vì $0 \leq p \leq 1$). Vậy $p = \frac{1}{5} = 0,2$.	0,25
7	Ta có $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều. Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm BC. Khi đó $A'H \perp (ABC)$ và $A'MH = 60^\circ$ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC).	0,25
	 Tam giác $A'HM$ có $A'H \perp HM$ (vì $A'H \perp (ABC), HM \subset (ABC)$), $HM = \frac{1}{3} \cdot AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ Suy ra $A'H = HM \cdot \tan A'MH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$ Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.	0,25
	Ta có $AA' \parallel (BCC'B')$; $B'C', BC \subset (BCC'B')$ và $B'C', BC$ không song song với AA' nên $d(AA', B'C') = d(AA', (BCC'B')) = d(AA', BC)$ Dựng $MK \perp AA', K \in AA'$ (1) Ta có $BC \perp AM$ (vì tam giác ABC đều) $BC \perp A'H$ (vì $A'H \perp (ABC)$) Suy ra $BC \perp (AA'M)$. Suy ra BC và MK vuông góc với nhau tại M (vì $MK \subset (AA'M)$) (2) Từ (1) và (2) suy ra MK là đoạn vuông góc chung của AA' và BC. Do đó $d(AA', BC) = MK$	0,25
	Ta có $AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ Do đó $MK = \frac{A'H \cdot AM}{AA'} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = \frac{3\sqrt{7}a}{14}$. Vậy $d(AA', B'C') = d(AA', BC) = MK = \frac{3\sqrt{7}a}{14}$.	0,25

8		Đường tròn (I) có tâm $I(2; -3)$ là trung điểm của AB và có bán kính $R = \frac{AB}{2} = 2$. Ta có $AF \perp ME$ (vì $FAE = NAM = 90^\circ$) nên AF là đường cao của tam giác MEF. Suy ra H, A, F thẳng hàng. Ta có $AI \parallel HM$ (vì cùng vuông góc với EF) nên $\frac{AI}{HM} = \frac{NI}{NM} = \frac{1}{2}$. Suy ra $HM = 2AI$ Gọi I' là điểm đối xứng của I qua A. Khi đó $I'(2; 1)$, $I'I = 2AI = HM$ và $I'I \parallel HM$. Suy ra $HMI'I'$ là hình bình hành. Do đó $I'H = IM = R = 2$. Mặt khác $H(2t+2; t)$ (vì H nằm trên đường thẳng $\Delta: x-2y-2=0$) và $2t+2 \in \mathbb{Z}$. Ta có $I'H = 2 \Leftrightarrow I'H^2 = 4 \Leftrightarrow (2t+2-2)^2 + (t-1)^2 = 4$$\Leftrightarrow 5t^2 - 2t - 3 = 0$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -\frac{3}{5} \text{ (loại)}$ Vậy $H(4; 1)$.	0,25 0,25 0,25 0,25
9	Điều kiện: $x \geq 0$. Ta có $x = 0$ không thỏa phương trình (*) Với $x > 0$, chia hai vế của (*) cho x ta được: $3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1\right)\sqrt{\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 1} = \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - 6 \quad (1)$ Đặt $t = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $t > 0$, phương trình (1) trở thành $3(t+1)\sqrt{3t+1} = t^3 - 4t^2 - 6$ $\Leftrightarrow (\sqrt{3t+1})^3 + 2(\sqrt{3t+1})^2 + 2\sqrt{3t+1} = (t-2)^3 + 2(t-2)^2 + 2(t-2)$ Xét hàm số $f(u) = u^3 + 2u^2 + 2u$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(u) = 3u^2 + 4u + 2 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$ (vì $a = 3 > 0, \Delta' = -2 < 0$) Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{3t+1}) = f(t-2) \Leftrightarrow \sqrt{3t+1} = t-2 \Leftrightarrow \begin{cases} t-2 \geq 0 \\ 3t+1 = t^2 - 4t + 4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t^2 - 7t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{7 + \sqrt{37}}{2} \text{ (thỏa } t > 0)$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{8}{(7 + \sqrt{37})^3}$.	0,25 0,25 0,25 0,25	
10	Ta có $\frac{a^2}{2b} + 2b \geq 2a, \frac{b^2}{4c} + 4c \geq 2b, \frac{16c^2}{a} + \frac{a}{4} \geq 4c$. Do đó $\frac{a^2}{2b} + \frac{b^2}{4c} + \frac{16c^2}{a} \geq \frac{7a}{4}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = 2b = 8c$. Suy ra $P \geq \frac{7a}{4} + \frac{175}{4} \cdot \frac{\sqrt{a^2+9}}{a+1} = \frac{7}{4} \left(a + 25 \cdot \frac{\sqrt{a^2+9}}{a+1} \right)$. Xét hàm số $f(a) = a + 25 \cdot \frac{\sqrt{a^2+9}}{a+1}$ trên $(0; +\infty)$.	0,25 0,25	

Ta có $f'(a) = 1 + 25 \cdot \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+9}} \cdot (a+1) - \sqrt{a^2+9}}{(a+1)^2} = \frac{(a+1)^2 \sqrt{a^2+9} + 25(a-9)}{(a+1)^2 \sqrt{a^2+9}}$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 \sqrt{a^2+9} + 25(a-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 \cdot (\sqrt{a^2+9} - 5) + 5(a+1)^2 + 25(a-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 \cdot \frac{(a^2-16)}{\sqrt{a^2+9}+5} + 5a^2 + 35a - 220 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-4) \left((a+1)^2 \cdot \frac{(a+4)}{\sqrt{a^2+9}+5} + 5a + 55 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 4 \quad (\text{vì } (a+1)^2 \cdot \frac{(a+4)}{\sqrt{a^2+9}+5} + 5a + 55 > 0, \forall a \in (0; +\infty))$$

0,25

Bảng biến thiên

a	0	4	$+\infty$
$f'(a)$		-	0
		-	+
$f(a)$	75	29	$+\infty$

0,25

Suy ra $\min_{(0;+\infty)} f(a) = f(4) = 29$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{7}{4} \cdot 29 = \frac{203}{4}$, khi $a = 4, b = 2, c = \frac{1}{2}$.