SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **BÌNH ĐỊNH**	**KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN THI HSG QUỐC GIA** **NĂM HỌC 2020-2021 * KHOÁ NGÀY: 09 – 11 – 2020**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **180 phút** *(không kể thời gian phát đề)*
Ngày thi: **09/11/2020**

Bài 1. *(3,0 điểm)*

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} 2y^2-4xy+3y-4x-1=3\sqrt{\left(y^2-1\right)\left(y-2x\right)} \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{y-2x}=\sqrt{2\left(y-x+1\right)} \end{cases}$$

Bài 2. *(3,0 điểm)*

Cho đa thức $f\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ với hệ thực và $a_n\neq 0$ thỏa mãn đẳng thức $f\left(x\right).f\left(2x^2\right)=f\left(2x^3+x\right)$. Tìm số nghiệm thực của đa thức $f\left(x\right)$.

Bài 3. *(5,0 điểm)*

1. Cho số thực $a>1$ và dãy số $\left(x_n\right)$ với $n\in\mathbb{N}^*$ được xác định bởi:

$$x_1=a;\;\; x_2=1;\;\; x_{n+2}=x_n-\ln x_n.$$

Đặt $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(n-k)\ln\sqrt{x_{2k-1}}\quad(n\geq 2)$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$.

2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $n=\dfrac{2^{2p}-1}{3}$ là số tự nhiên lớn hơn 21 và 2^n chia n dư 2.

Bài 4. *(7,0 điểm)*

1. Cho tam giác nhọn ABC không cân và nội tiếp đường tròn (O). Trong tam giác ABC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với BC. Kẻ PE, PF lần lượt vuông góc với AB, AC (E thuộc AB, F thuộc AC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G (khác điểm A). Chứng minh rằng ba đường thẳng GP, BF, CE đồng quy tại một điểm.

2. Cho đường tròn tâm O và tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, trong đó AB < BC; Trên tia BO kéo dài lấy điểm D sao cho $\widehat{ADC}=\widehat{ABC}$. Một đường thẳng đi qua điểm H song song với đường thẳng BO cắt cung nhỏ AC tại điểm E. Chứng minh rằng BH=DE.

Bài 5. *(2,0 điểm)*

Cho n là số nguyên dương không nhỏ hơn 3 và các điểm $A_1;A_2;...;A_n$ *cùng nằm trên một đường tròn. Có tối đa bao nhiêu tam giác nhọn có đỉnh là ba điểm trong số các điểm trên.*