

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA MODUL SỐ PHỨC



DẠNG TOÁN 1. ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG THẲNG

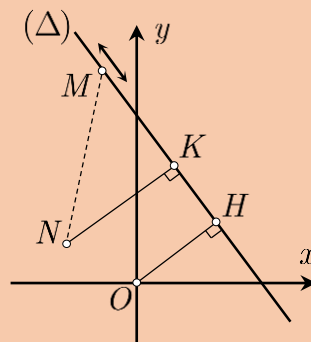
Cho đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ và điểm $M \in \Delta$. Điểm $N \notin \Delta$ sao cho NM nhỏ nhất $\Leftrightarrow K$ là hình chiếu của N lên Δ , nghĩa là $NM_{\min} = NK = d(N, \Delta) \Leftrightarrow M \equiv K$.

$$\bullet |z|_{\min} = OH = d(N, \Delta) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Khi đó $M \equiv H$ và tọa độ $H = \Delta \cap (OH)$.

$$\bullet |z - (x_0 + y_0 i)|_{\min} = NK = d(N, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Khi đó $M \equiv K$ và tọa độ $K = \Delta \cap NK$.



BÀI TẬP TẠI LỚP

Câu 1: Cho $z = x + yi$ thỏa $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x - 2y$ bằng

A. 2.

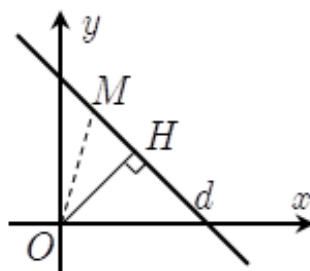
B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$

$$\Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = |x + (y - 2)i|$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = x^2 + (y - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow x + y - 4 = 0: \text{ là đường thẳng } d.$$

Khi đó: $|z| = OM \Rightarrow |z|_{\min} = OM_{\min}$

$$\Leftrightarrow M \equiv H.$$

Do $OH \perp d: x + y - 4 = 0$

$$\Rightarrow OH: x - y + m = 0.$$

$$O(0;0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH: x - y = 0.$$

$$\text{Tọa độ } H = d \cap OH \text{ thỏa } \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y = 2.$$

Cách 2. Từ $d : y = 4 - x \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2} = \sqrt{2(x - 2)^2 + 8} \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra: $|z|_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 3x - 2y = 2$.

Cách 3. Sử dụng Cauchy – Schwarz, có

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1}} \geq \sqrt{\frac{(x + y)^2}{1 + 1}} = \sqrt{\frac{4^2}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Dấu "=" khi $x = y$ và $x + y = 4 \Leftrightarrow x = y = 2 \Rightarrow 3x - 2y = 2$.

➤ **Lưu ý.** Nếu đề bài chỉ yêu cầu tính $|z|_{\min}$, thì nó là $|z|_{\min} = OH = d(O; d)$.

Câu 2: Cho $z = x + yi$ thỏa mãn $|z + 1 - 5i| = |\bar{z} + 3 - i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $3x + y$.

A. $\frac{5}{12}$.

B. $-\frac{12}{5}$.

C. $\frac{12}{5}$.

D. $-\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|z + 1 - 5i| = |\bar{z} + 3 - i| \Leftrightarrow |x + yi + 1 - 5i| = |x - yi + 3 - i|$

$$\Leftrightarrow |x + 1 + y - 5i| = |x + 3 - y - i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1^2 + y-5^2} = \sqrt{x+3^2 + -y-1^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 10y + 26 = 6x + 2y + 10$$

$$\Leftrightarrow x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 - 3y$$

Ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 - 3y^2 + y^2} = \sqrt{10y^2 - 24y + 16} = \sqrt{10\left(y - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{8}{5}} \geq \sqrt{\frac{8}{5}}$

Suy ra $|z|_{\min} = \sqrt{\frac{8}{5}} \Leftrightarrow y = \frac{6}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow 3x + y = \frac{12}{5}$.

Câu 3: Cho $z = x + yi$ thỏa mãn $|z + 3i| = |z + 2 - i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $x - 2y$.

A. 1.

B. $\frac{1}{5}$.

C. 2.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z + 3i| = |z + 2 - i| \Leftrightarrow |x + yi + 3i| = |x + yi + 2 - i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y+3^2} = \sqrt{x+2^2 + y-1^2}$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$$

Ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2y + 1^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \sqrt{\frac{1}{5}}$

$$\text{Suy ra } |z|_{\min} = \sqrt{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow x - 2y = 1.$$

Câu 4: Cho $z = x + yi$ thỏa mãn $|z + 2 + i| = |\bar{z} - 3i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $4x + 2y$ bằng

- A.** 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |z + 2 + i| &= |\bar{z} - 3i| \Leftrightarrow |x + 2 + y + 1i| = |x - y + 3i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+2^2 + y+1^2} = \sqrt{x^2 + y+3^2} \\ &\Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y+1^2 + y^2} = \sqrt{2y^2 + 2y + 1} = \sqrt{2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Suy ra } |z|_{\min} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } 4x + 2y = 1.$$

Câu 5: Cho số phức z thỏa $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|iz + 1|$ bằng

- A.** $2\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|z + 2 - 2i| = |z - 4i| \Leftrightarrow |(x + 2) + (y - 2)i| = |x + (y - 4)i|$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2 = 0 \text{ là đường thẳng } d.$$

$$\text{Có } |iz + 1| = |i||z - i| = |z - i| = AM \text{ với } A(0; 1).$$

$$|iz + 1|_{\min} \Leftrightarrow AM_{\min} \Leftrightarrow M \text{ là hình chiếu của } A \text{ lên đường thẳng } d \text{ (xem lý thuyết). Khi đó:}$$

$$|iz + 1|_{\min} = AM_{\min} = d(A; d) = \frac{|1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 6: Cho z thỏa $|z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + 2i|$ bằng

- A.** 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1| \Leftrightarrow |(x-1) + (y-2)i| = |x-1 + (y+3)i|$$

$\Leftrightarrow 2y + 1 = 0$ là đường thẳng d .

Có $|z - 2 + 2i| = AM$ với $A(2; -2)$.

$|z - 2 + 2i|_{\min} \Leftrightarrow AM_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d (xem lý thuyết). Khi đó:

$$|z - 2 + 2i|_{\min} = AM_{\min} = d(A; d) = \frac{|2 \cdot -2 + 1|}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = \frac{3}{2}.$$

Câu 7. Cho số phức z thỏa $|z + 2i| = |z - 1 - 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|(1+i)z + 2|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{41}}$.

B. $\frac{5}{\sqrt{34}}$.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|z + 2i| = |z - 1 - 2i| \Leftrightarrow |x + (y+2)i| = |x-1 + (y-2)i|$$

$\Leftrightarrow 2x + 8y - 1 = 0$ là đường thẳng d .

Có $|(1+i)z + 2| = |(1+i)z + 1+i - 1-i| = |1+i \cdot z + 1-i| = |1+i| |z+1-i| = \sqrt{2}AM$ với $A(-1; 1)$.

$|(1+i)z + 2|_{\min} \Leftrightarrow AM_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d (xem lý thuyết). Khi đó:

$$|(1+i)z + 2|_{\min} = \sqrt{2}AM_{\min} = \sqrt{2}d(A; d) = \sqrt{2} \cdot \frac{|2 \cdot -1 + 8 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1: Cho $z = x + yi$ thỏa $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x - y$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z - i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$

$$\Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |(x-2) - (y+3)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2y+3)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 12y + 9} = \sqrt{5\left(y + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}} \geq \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow |z|_{\min} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow y = -\frac{6}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \Rightarrow 3x - y = 3.$$

Câu 2: Cho $z = x + yi$ thỏa mãn $|z - 1 + i| = |\bar{z} + 1 - 2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $5x - 10y$.

A. $\frac{3}{5}$.

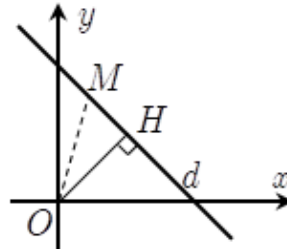
B. $-\frac{3}{10}$.

C. 0.

D. $-\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C



$$\begin{aligned} \text{Ta có } |z - 1 + i| &= |\bar{z} + 1 - 2i| \Leftrightarrow |x + yi - 1 + i| = |x - yi + 1 - 2i| \\ &\Leftrightarrow |x - 1 + y + 1i| = |x + 1 - y - 2i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (-y-2)^2} \\ &\Leftrightarrow -2x + 2y + 2 = 2x + 4y + 5 \\ &\Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 4x + 2y + 3 = 0$

Khi đó: $|z| = OM \Rightarrow |z|_{\min} = OM_{\min}$

$$\Leftrightarrow M \equiv H.$$

$$\text{Do } OH \perp d: 4x + 2y + 3 = 0 \Rightarrow OH: 2x - 4y + m = 0.$$

$$O(0;0) \in OH \Rightarrow m = 0 \Rightarrow OH: x - 2y = 0.$$

$$\text{Tọa độ } H = d \cap OH \text{ thỏa } \begin{cases} 4x + 2y = -3 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{3}{10} \end{cases} \Rightarrow 5x - 10y = 0.$$

Câu 3: Cho $z = x + yi$ thỏa mãn $|iz - 3| = |z - 2 - i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Phần thực của z bằng

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. $-\frac{2}{5}$.

D. $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } |iz - 3| = |z - 2 - i| \Leftrightarrow |-3 - y + xi| = |x - 2 + y - 1i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-y-3)^2 + x^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 1$$

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-2y - 1^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\text{Suy ra } |z|_{\min} = \sqrt{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}.$$

Câu 4: Xét số phức z thỏa $\bar{z} - 2 + i + 4i - 1$ là một số thực. Giá trị nhỏ nhất của $|z|^2$ bằng

- A. $\frac{8}{5}$. B. $\frac{16}{5}$. C. $\frac{9}{6}$. D. $\frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Gọi } z = x + yi, \text{ đk } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Ta có } \bar{z} - 2 + i + 4i - 1 = x - yi - 2 + i + 4i - 1 \\ = x^2 + y^2 - 2x - y - 1 + x - 2y + 4i \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \bar{z} - 2 + i + 4i - 1 \text{ là số thực nên } x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 4$$

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2y - 4^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 - 16y + 16} = \sqrt{5\left(y - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}} \geq \sqrt{\frac{16}{5}}$$

$$\text{Suy ra } |z|_{\min} = \sqrt{\frac{16}{5}} \Rightarrow |z|_{\min}^2 = \frac{16}{5}.$$

Câu 5: Cho z thỏa $|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 - 3i|$ bằng

- A. $\sqrt{10}$. B. 10. C. $\frac{11}{\sqrt{10}}$. D. $\frac{121}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i| \Leftrightarrow |x - 1 + (y - 2)i| = |x - 2 + (y + 1)i|$$

$$\Leftrightarrow x - 3y = 0 \text{ là đường thẳng } d.$$

$$\text{Có } |z + 2 - 3i| = AM \text{ với } A(-2; 3).$$

$$|z + 2 - 3i|_{\min} \Leftrightarrow AM_{\min} \Leftrightarrow M \text{ là hình chiếu của } A \text{ lên đường thẳng } d \text{ (xem lý thuyết)}. \text{ Khi đó:}$$

$$|z + 2 - 3i|_{\min} = AM_{\min} = d(A; d) = \frac{|1 \cdot -2 - 3 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{11}{\sqrt{10}}.$$

Câu 6: Cho z thỏa $|z + 1 - i| = |z - 1 + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|(3 + 4i)z - 5 + 10i|$ bằng

- A. $\frac{7\sqrt{3}}{26}$. B. $\frac{15}{2}$. C. $\frac{17}{2}$. D. $\frac{25\sqrt{13}}{26}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|z + 1 - i| = |z - 1 + 2i| \Leftrightarrow |x + 1 + (y - 1)i| = |x - 1 + (y + 2)i|$$

$\Leftrightarrow 4x - 6y - 3 = 0$ là đường thẳng d .

$$\begin{aligned} \text{Có } |(3 + 4i)z - 5 + 10i| &= |(3 + 4i)z + (3 + 4i) \cdot 1 + 2i| = |(3 + 4i)(z + 1 + 2i)| \\ &= |3 + 4i| |z + 1 + 2i| = 5AM \text{ với } A(-1; -2). \end{aligned}$$

$|(3 + 4i)z - 5 + 10i|_{\min} \Leftrightarrow AM_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d (xem lý thuyết).

Khi đó:

$$|(3 + 4i)z - 5 + 10i|_{\min} = 5AM_{\min} = 5d(A; d) = 5 \cdot \frac{|4 \cdot (-1) - 6 \cdot (-2) - 3|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \frac{25}{\sqrt{52}} = \frac{25\sqrt{13}}{26}.$$

Câu 7: Cho các số phức z thỏa $|z| = |\bar{z} - 1 + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|(1 + 2i)z + 11 + 2i|$ là

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

$$|z| = |\bar{z} - 1 + 2i| \Leftrightarrow |x + yi| = |x - 1 + (2 - y)i|$$

$\Leftrightarrow 2x + 4y - 5 = 0$ là đường thẳng d .

$$\begin{aligned} \text{Có } |(1 + 2i)z + 11 + 2i| &= |(1 + 2i)z + (1 + 2i) \cdot 3 - 4i| = |(1 + 2i)(z + 3 - 4i)| \\ &= |1 + 2i| |z + 3 - 4i| = \sqrt{5}AM \text{ với } A(-3; 4). \end{aligned}$$

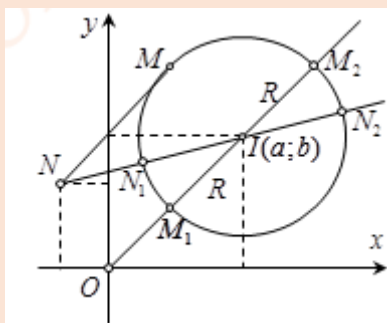
$|(1 + 2i)z + 11 + 2i|_{\min} \Leftrightarrow AM_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d (xem lý thuyết).

Khi đó:

$$|(1 + 2i)z + 11 + 2i|_{\min} = \sqrt{5}AM_{\min} = \sqrt{5}d(A; d) = \sqrt{5} \cdot \frac{|2 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{5}{2}.$$

DẠNG 2: ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Cho tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn các số phức $z = x + yi$ là một đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R . Gọi N là điểm biểu diễn số phức z' .

Phương pháp 1. Hình học

$$\begin{cases} |z|_{\min} = OM_{\min} = OM_1 = |OI - R| \text{ khi } M \equiv M_1 \\ |z|_{\max} = OM_{\max} = OM_2 = |OI + R| \text{ khi } M \equiv M_2 \end{cases}.$$

Khi đó $(OI) \cap (C) = \{M_1; M_2\}$.

$$\begin{cases} |z - z'|_{\min} = MN_{\min} = NN_1 = |NI - R| \text{ khi } M \equiv N_1 \\ |z - z'|_{\max} = MN_{\max} = NN_2 = |NI + R| \text{ khi } M \equiv N_2 \end{cases}.$$

Khi đó $(NI) \cap (C) = \{N_1; N_2\}$.

➤ **Lưu ý.** Nếu đề bài yêu cầu tìm tổng phần thực, phần ảo tương ứng với $|z|_{\min}$, $|z|_{\max}$ thì từ nhận xét I là trung điểm của M_1M_2 suy ra: **tổng phần thực** $2a$, **tổng phần ảo** $2b$.

Phương pháp 2. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

Giả sử tập hợp điểm là đường tròn $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ và viết lại:

$$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax + 2by - c.$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 = 2ax + 2by - c = 2a(x-a) + 2b(y-b) + 2a^2 + 2b^2 - c$$

nhằm lợi dụng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ trong bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (điểm rơi):

$$-\sqrt{(4a^2 + 4b^2)} \underbrace{\left[(x-a)^2 + (y-b)^2 \right]}_{R^2} \leq 2a(x-a) + 2b(y-b) \leq \sqrt{(4a^2 + 4b^2)} \underbrace{\left[(x-a)^2 + (y-b)^2 \right]}_{R^2}$$

$$\text{Suy ra } 2a^2 + 2b^2 - c - 2R\sqrt{(a^2 + b^2)} \leq |z|^2 \leq 2a^2 + 2b^2 - c + 2R\sqrt{(a^2 + b^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c - 2R\sqrt{(a^2 + b^2)}} \leq |z| \leq \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c + 2R\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

Phương pháp 3. Lượng giác

Giả sử tập hợp điểm là đường tròn $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R}\right)^2 = 1$,

gọi ta đến công thức $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ nên đặt $\begin{cases} \frac{x-a}{R} = \sin t \\ \frac{y-b}{R} = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a + R \sin t \\ y = b + R \cos t \end{cases}$.

Do đó $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 = (a + R \sin t)^2 + (b + R \cos t)^2$.

$$\Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 + R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + 2aR \sin t + 2bR \cos t.$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 + R^2 + 2R\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(t + \alpha) \text{ và luôn có } -1 \leq \sin(t + \alpha) \leq 1$$

nên suy ra: $-\sqrt{a^2 + b^2} - 2R\sqrt{a^2 + b^2} \leq |z| \leq \sqrt{a^2 + b^2} + 2R\sqrt{a^2 + b^2}$.

Phương pháp 4. Sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối $\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

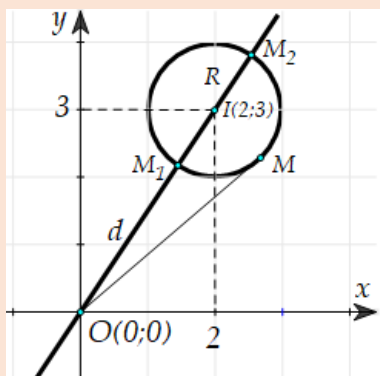
Ví dụ minh họa: Xét các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$.

a) Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z|$. Ứng với $|z|_{\min}$ là số phức $z = a + bi$ và ứng với $|z|_{\max}$ là số phức $z = c + di$. Tìm tổng $a + b + c + d$.

$$\text{Ta có } |z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |(x-2) + (y-3)i| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1 \quad (*)$$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R = 1$.

Cách 1. Hình học



$$\bullet |z|_{\min} = OM_1 = |OI - R| = |\sqrt{13} - 1| = \sqrt{13} - 1.$$

$$\bullet |z|_{\max} = OM_2 = OI + R = \sqrt{13} + 1.$$

Vì $I(2;3)$ là trung điểm M_1M_2 nên:

$$\begin{cases} x_{M_1} + x_{M_2} = 2x_I \Leftrightarrow a + c = 4 \\ y_{M_1} + y_{M_2} = 2y_I \Leftrightarrow b + d = 6 \end{cases} \text{ Suy ra } a + b + c + d = 10.$$

Lưu ý. Nếu đề bài yêu cầu tìm số phức tương ứng với $|z|_{\min}$ và $|z|_{\max}$, tức là tìm hai điểm biểu diễn M_1, M_2 , nó cũng chính là tọa độ giao điểm của đường thẳng $d \equiv OI$ và đường tròn (C) .

Cách 2. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

Ta có: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x + 6y - 12$.

Ta lại có: $|z|^2 = x^2 + y^2 = 4x + 6y - 12 = 4(x-2) + 6(y-3) + 14$

Mà $-\sqrt{(4^2 + 6^2)}[(x-2)^2 + (y-3)^2] \leq 4(x-2) + 6(y-3) \leq \sqrt{(4^2 + 6^2)}[(x-2)^2 + (y-3)^2]$

$\Leftrightarrow 14 - 2\sqrt{13} \leq |z|^2 \leq 14 + 2\sqrt{13} \Rightarrow \sqrt{13} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{13} + 1$.

Cách 3. Lượng giác

Đặt $\begin{cases} x = 2 + \sin t \\ y = 3 + \cos t \end{cases} \Rightarrow |z|^2 = (2 + \sin t)^2 + (3 + \cos t)^2 = 14 + 4\sin t + 6\cos t$

$\Rightarrow |z|^2 = 14 + \sqrt{4^2 + 6^2} \cdot \sin(t + \alpha) = 14 + 2\sqrt{13} \sin(t + \alpha)$ và do $-1 \leq \sin(t + \alpha) \leq 1$ nên:

$14 - 2\sqrt{13} \leq |z|^2 \leq 14 + 2\sqrt{13} \Rightarrow \sqrt{13} - 1 \leq |z| \leq \sqrt{13} + 1$.

Cách 4. Sử dụng bất đẳng thức $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$

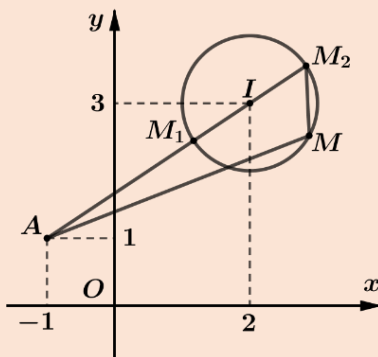
Ta có $\|z\| - \|-2 - 3i\| \leq \|z - 2 - 3i\| \leq \|z\| + \|-2 - 3i\|$

$\Leftrightarrow \|z\| - \sqrt{13} \leq 1 \leq \|z\| + \sqrt{13} \Leftrightarrow -1 + \sqrt{13} \leq \|z\| \leq 1 + \sqrt{13}$.

➤ **Nhận xét.** Tùy vào cấu trúc bài toán, yêu cầu câu hỏi và sự thành thạo về kiến thức mà học sinh chọn phương pháp giải cho phù hợp.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |\bar{z} + 1 + i|$.

Ta có: $P = |\bar{z} + 1 + i| = |(x+1) - (y-1)i|$
 $= \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = MA$ với $A(-1;1)$.



Từ hình vẽ, suy ra: $\begin{cases} P_{\min} = AM_1 = |AI - R| = \sqrt{13} - 1 \\ P_{\max} = AM_2 = |AI + R| = \sqrt{13} + 1 \end{cases}$

Kết luận: $P_{\min} = \sqrt{13} - 1$ và $P_{\max} = \sqrt{13} + 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |\bar{z} + 1 + i|$.

Ta có: $P = |\bar{z} + 1 + i| = |(x + 1) - (y - 1)i|$

$$= \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} = MA \text{ với } A(-1; 1).$$

Từ hình vẽ, suy ra:
$$\begin{cases} P_{\min} = AM_1 = |AI - R| = \sqrt{13} - 1 \\ P_{\max} = AM_2 = |AI + R| = \sqrt{13} + 1 \end{cases}$$

Kết luận: $P_{\min} = \sqrt{13} - 1$ và $P_{\max} = \sqrt{13} + 1$.

BÀI TẬP TẠI LỚP

Câu 1: Cho các số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng

A. 9.

B. 5.

C. 12.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 4$$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ là đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 4$

$$|z|_{\max} = OI + R = 9$$

Câu 2: Xét các số phức z thỏa $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|z - 2 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = \sqrt{5}$$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ là đường tròn tâm $I(2; 4)$ bán kính $R = \sqrt{5}$

$$|z|_{\min} = OI - R = \sqrt{5}$$

Câu 3: Xét các số phức z thỏa $|z + 3 + 4i| = 2$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất.

Tổng phần thực của z_1, z_2 bằng

A. 8.

B. -6.

C. -8.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|z + 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow |(x + 3) + (y + 4)i| = 2 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ là đường tròn (C) tâm $I(-3; -4)$ bán kính $R = 2$

$$OI : \begin{cases} \text{qua } O(0; 0) \\ \vec{u}(3; 4) \end{cases} \Rightarrow OI : \begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của (C) và OI là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \\ (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{5} \\ y = -\frac{12}{5} \\ x = -\frac{21}{5} \\ y = -\frac{28}{5} \end{cases}$$

Vậy tổng phần thực của z_1, z_2 bằng $-\frac{9}{5} - \frac{21}{5} = -6$

Câu 4: Xét các số phức z thỏa mãn $|-iz + 1| = 1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z|$. Giá trị của biểu thức $2020 - M + m$ bằng

- A. 2014. B. 2016. C. 2018. D. 2022.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|-iz + 1| = 1 \Leftrightarrow |(1 - y) + xi| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ là đường tròn tâm $I(0; 1)$ bán kính $R = 1$

Tọa độ giao điểm của (C) và OI là $(0; 0), (0; 2)$

$$\Rightarrow m = |z|_{\min} = 0, M = |z|_{\max} = 2$$

Vậy $2020 - M + m = 2018$

Câu 5: Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\bar{z} + 1 + i|$ lần lượt là

- A. $\sqrt{14} + 2, \sqrt{14} - 2$. B. $\sqrt{13} + 1, \sqrt{13} - 1$.
C. $\sqrt{13} + 4, \sqrt{13} - 4$. D. $\sqrt{14} + 1, \sqrt{14} - 1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

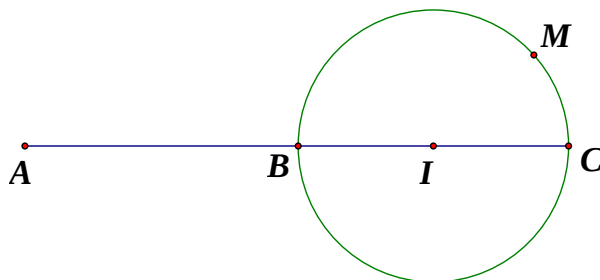
$$\text{Khi đó } |z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1.$$

Gọi M là điểm biểu diễn hình học của số phức z ta có $M \in (I;1)$ với $I(2;3)$.

$$\text{Có } |\bar{z} + 1 + i| = \sqrt{(x+1)^2 + (-y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}.$$

$$\text{Gọi } A(-1;1) \text{ suy ra } |\bar{z} + 1 + i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = AM.$$

Để thấy $AI = \sqrt{13} > 1$ nên A nằm ngoài $(I;1)$.



Kẻ đường thẳng AI cắt đường tròn $(I;1)$ tại B, C như hình vẽ.

$$\text{Có } AB \leq AM \leq AC \text{ nên } \begin{cases} AM_{\max} = AC = AI + IC = \sqrt{13} + 1 \\ AM_{\min} = AB = AI - IB = \sqrt{13} - 1 \end{cases}.$$

- Câu 6:** Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Số phức $w = z + 3i$ có mô-đun nhỏ nhất và lớn nhất lần lượt là m và M . Tổng $m + M$ bằng
- A. 5. B. 7. C. 8. D. 6.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

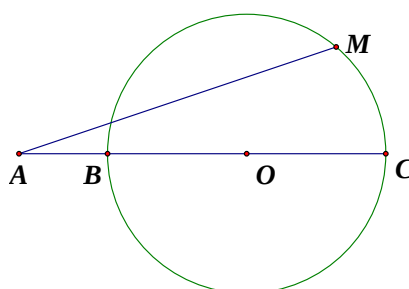
$$\text{Khi đó } |z| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Gọi M là điểm biểu diễn hình học của số phức z ta có $M \in (O;2)$.

$$\text{Xét } |w| = |z + 3i| = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\text{Gọi } A(0;-3) \text{ suy ra } |w| = |z + 3i| = \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = AM.$$

Để thấy $AO = 3 > 2$ nên A nằm ngoài $(O;2)$.



Kẻ đường thẳng AO cắt đường tròn $(O; 2)$ tại B, C như hình vẽ.

$$\text{Có } AB \leq AM \leq AC \text{ nên } \begin{cases} AM_{\max} = AC = AO + OC = 3 + 2 = 5 \\ AM_{\min} = AB = AO - OB = 3 - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 6.$$

Câu 7: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$ và $w = (4 - 3i)z + 1 - 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ bằng

A. $3\sqrt{5}$.

B. $4\sqrt{5}$.

C. $5\sqrt{5}$.

D. $6\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } w = (4 - 3i)z + 1 - 2i \Rightarrow z = \frac{w - 1 + 2i}{4 - 3i} \Rightarrow |z| = \left| \frac{w - 1 + 2i}{4 - 3i} \right|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} = \frac{|w - 1 + 2i|}{|4 - 3i|} \Leftrightarrow |w - 1 + 2i| = 5\sqrt{5}$$

$$\text{Lại có: } |w - 1 + 2i| \leq |w| + |-1 + 2i| \Leftrightarrow 5\sqrt{5} \leq |w| + \sqrt{5} \Leftrightarrow |w| \geq 4\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } |w|_{\min} = 4\sqrt{5}.$$

Câu 8: Cho số phức z thỏa $|z^2 + 4| = |z^2 + 2iz|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có:

$$|z^2 + 4| = |z^2 + 2iz| \Leftrightarrow |z - 2i| \cdot |z + 2i| = |z| \cdot |z + 2i| \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2i \\ |z - 2i| = |z| \end{cases}$$

$$\text{Với } z = -2i \text{ thì } |z + i| = |-i| = 1.$$

$$\text{Với } |z - 2i| = |z| \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y = 1.$$

$$\text{thì } |z + i| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{x^2 + 4} \geq 2.$$

So sánh hai trường hợp ta được $|z + i|_{\min} = 1$ đạt được khi $z = -2i$.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1: Cho các số phức thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng

A. $4\sqrt{2} - 2$.

B. $2 + \sqrt{2}$.

C. $2\sqrt{2} + 1$.

D. $3\sqrt{2} + 1$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|z - 2 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y + 2)i| = 1$$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ là đường tròn tâm $I(2; -2)$ bán kính $R = 1$

$$|z|_{\max} = OI + R = 2\sqrt{2} + 1.$$

Câu 2: Xét các số phức z thỏa $|iz + 4 - 3i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$\begin{aligned} |iz + 4 - 3i| = 1 &\Leftrightarrow |(-y + 4) + (x - 3)i| = 1 \\ &\Leftrightarrow (y - 4)^2 + (x - 3)^2 = 1 \end{aligned}$$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ là đường tròn tâm $I(4; 3)$ bán kính $R = 1$

$$|z|_{\min} = OI - R = 4$$

Câu 3: Xét các số phức z thỏa $|z - 2 - 4i| = 2$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất.

Tổng phần ảo của z_1, z_2 bằng

- A. -8. B. 4. C. 8. D. -4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|z - 2 - 4i| = 2 \Leftrightarrow |(x - 2) + (y - 4)i| = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ là đường tròn (C) tâm $I(2; 4)$ bán kính $R = 2$

$$OI : \begin{cases} \text{qua } O(0; 0) \\ u(2; 4) \end{cases} \Rightarrow OI : \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của (C) và OI là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-10 - 2\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{-20 - 4\sqrt{5}}{5} \\ x = \frac{-10 + 2\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{-20 + 4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy tổng phần ảo của } z_1, z_2 \text{ bằng } \frac{-20 + 4\sqrt{5}}{5} + \frac{-20 - 4\sqrt{5}}{5} = -8$$

Câu 4: Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1 + i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z|$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 4.

B. 10.

C. 2.

D. 24.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$$|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ là đường tròn tâm $I(3; 4)$ bán kính $R = 1$

$$OI : \begin{cases} \text{qua } O(0; 0) \\ \text{u}(3; 4) \end{cases} \Rightarrow OI : \begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của (C) và OI là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{5} \\ y = \frac{24}{5} \\ x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = |z|_{\min} = 4, M = |z|_{\max} = 6$$

$$\Rightarrow M - m = 2$$

Câu 5: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$ và cho số phức $w = 2z + 1 - i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $16 + \sqrt{74}$.B. $2 + \sqrt{130}$.C. $4 + \sqrt{74}$.D. $4 + \sqrt{130}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

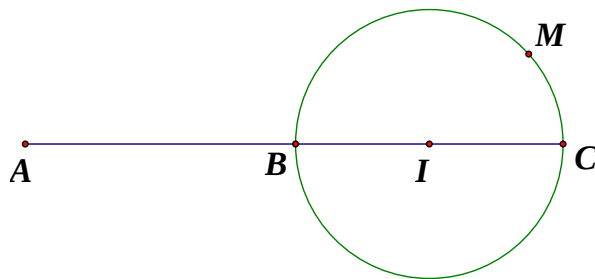
$$\text{Khi đó } |z - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4.$$

Gọi M là điểm biểu diễn hình học của số phức z ta có $M \in (I; 2)$ với $I(3; -4)$.

$$w = 2z + 1 - i = 2x + 1 + (2y - 1)i \Rightarrow |w| = \sqrt{(2x + 1)^2 + (2y - 1)^2} = \sqrt{4 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \right]}.$$

$$\text{Gọi } A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ suy ra } |w| = \sqrt{4 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \right]} = 2AM.$$

$$\text{Để thấy } AI = \sqrt{\left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-4 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{2} > 2 \text{ nên } A \text{ nằm ngoài } (I; 2).$$



Kẻ đường thẳng AI cắt đường tròn $(I; 2)$ tại B, C như hình vẽ.

Có $AM \leq AC$ nên $AM_{\max} = AC$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv C$ khi đó $AC = AI + IC = \frac{\sqrt{130}}{2} + 2 = \frac{\sqrt{130} + 4}{2}$.

Vậy $|w|_{\max} = 2AC = \sqrt{130} + 4$.

Câu 6: Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = 2$. Số phức z mà có $|z - 1|$ nhỏ nhất có dạng $z_0 = a + bi$.

Giá trị của tổng $2a + 3b$ bằng

A. 2.

B. 5.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

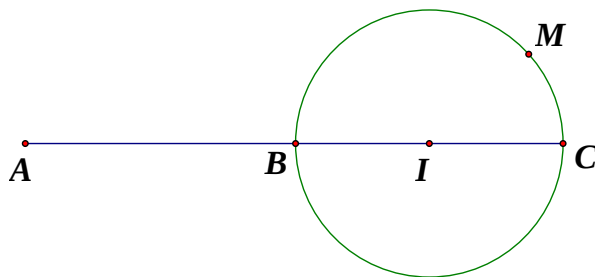
Khi đó $|z - 1 - 3i| = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

Gọi M là điểm biểu diễn hình học của số phức z ta có $M \in (I; 2)$ với $I(1; 3)$.

Có $|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$.

Gọi $A(1; 0)$ suy ra $|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = AM$.

Dễ thấy $AI = 3 > 2$ nên A nằm ngoài $(I; 2)$.



Kẻ đường thẳng AI cắt đường tròn $(I; 2)$ tại B, C như hình vẽ.

Có $AM \geq AB \Rightarrow AM_{\min} = AB = AI - IB = 1$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \frac{AB}{AI} \overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AI}$, với $\overrightarrow{AI}(0;3)$ suy ra

$$\overrightarrow{AB}(0;1) \Rightarrow B(1;1).$$

Khi đó $z = 1 + i$ hay $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b = 5.$

Câu 7: Xét các số phức z, w thỏa mãn $w = iz$ và $|(1+i)z + 2 - 2i| = \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|z - w|$ bằng

A. 3.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết:

$$|(1+i)z + 2 - 2i| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \geq |(1+i)z| - |2 - 2i| \Leftrightarrow \sqrt{2} \geq \sqrt{2}|z| - 2\sqrt{2} \Rightarrow |z| \leq 3.$$

$$\text{Lại có: } |z - w| = |z - iz| = |z| \cdot |1 - i| = \sqrt{2} \cdot |z| \leq 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy: } |z - w|_{\max} = 3\sqrt{2}.$$

Câu 8: Cho $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + 2i|$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có:

$$\begin{aligned} |z^2 - 2z + 5| &= |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \Leftrightarrow |z - 1 - 2i| \cdot |z - 1 + 2i| = |z - 1 + 2i| \cdot |z - 1 + 3i| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2i \\ |z - 1 - 2i| = |z - 1 + 3i| \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Với } z = 1 - 2i \text{ thì } |z - 2 + 2i| = |-1| = 1.$$

$$\text{Với } |z - 1 - 2i| = |z - 1 + 3i| \Leftrightarrow x - 1^2 + y - 2^2 = x - 1^2 + y + 3^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{thì } |z - 2 + 2i| = \sqrt{x - 2^2 + y + 2^2} = \sqrt{x - 2^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}.$$

So sánh hai trường hợp ta được $|z - 2 + 2i|_{\min} = 1$ đạt được khi $z = 1 - 2i$.

DẠNG TOÁN 3. ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Câu 1: Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4| = 1$ và $|iz_2 - 2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 2z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5} - 2$

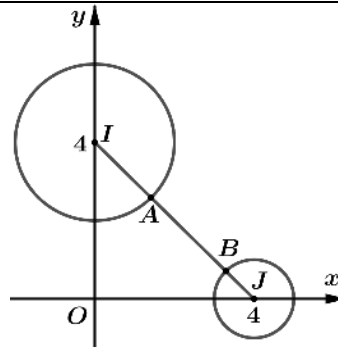
B. $4 - \sqrt{2}$

C. $4\sqrt{2} - 3$

D. $4\sqrt{2} + 3$

Lời giải

Chọn C



Đặt $z_3 = -2z_2$, suy ra $P = |z_1 + 2z_2| = |z_1 - (-2z_2)| = |z_1 - z_3|$.

Và $z_2 = -\frac{1}{2}z_3$ thế vào $|iz_2 - 2| = 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{1}{2}iz_3 - 2 \right| = 1 \Leftrightarrow |z_3 - 4i| = 2$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho hai số phức z_3, z_1 .

• $|z_3 - 4i| = 2 \Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm $I(0; 4)$, $R_3 = 2$.

• $|z_1 - 4| = 1 \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $J(4; 0)$, $R_1 = 1$.

$$\Rightarrow P = |z_1 - z_3| = AB \Rightarrow \begin{cases} P_{\min} = |IJ - R_1 - R_3| = 4\sqrt{2} - 3 \\ P_{\max} = IJ + R_1 + R_3 = 4\sqrt{2} + 3 \end{cases}$$

Câu 2: Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |2iz_1 + 3z_2|$ bằng

A. $\sqrt{313} + 16$.

B. $\sqrt{313}$.

C. $\sqrt{313} + 8$.

D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z_3 = 2iz_1$ và $z_4 = -3z_2$ suy ra $P = |2iz_1 + 3z_2| = |z_3 - (-3z_2)| = |z_3 - z_4|$.

Và $z_1 = \frac{1}{2i}z_3$ thế vào $|z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2i}z_3 - 3i + 5 \right| = 2 \Leftrightarrow |z_3 - (-6 - 10i)| = 4$.

Và $z_2 = -\frac{1}{3}z_4$ thế vào $|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow \left| \frac{-1}{3}iz_4 - 1 + 2i \right| = 4 \Leftrightarrow |z_4 - (6 + 3i)| = 12$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho hai số phức z_3, z_4 .

• $|z_3 - (-6 - 10i)| = 4 \Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm $I(-6; -10)$, $R_3 = 4$.

• $|z_4 - (6 + 3i)| = 12 \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $J(6; 3)$, $R_4 = 12$.

$$\Rightarrow P = |z_4 - z_3| = AB \Rightarrow \begin{cases} P_{\min} = |IJ - R_3 - R_4| = \sqrt{313} - 16 \\ P_{\max} = IJ + R_3 + R_4 = \sqrt{313} + 16 \end{cases}$$

Câu 3: Xét các số phức z, w thỏa $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ và $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$. Biết $|z - w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$ và $w = w_0$. Giá trị của $|3z_0 - w_0|$ bằng

A. $2\sqrt{2}$.

B. $6\sqrt{2}$.

C. $4\sqrt{2}$.

D. 1.

Lời giải

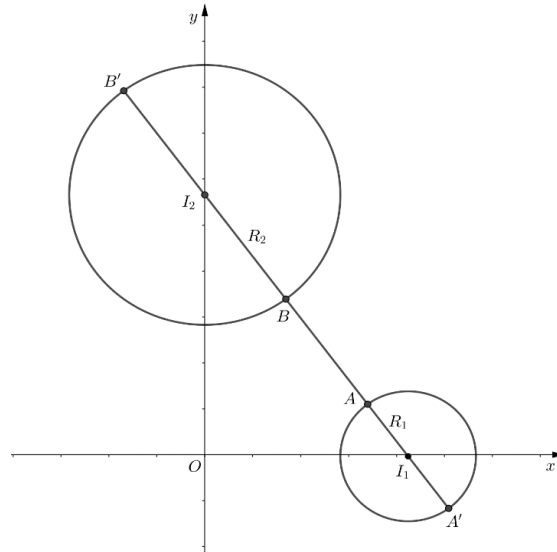
Chọn B

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho hai số phức z, w .

• $|z - 3\sqrt{2}| = \sqrt{2} \Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm $I_1(3\sqrt{2}; 0)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

- $|w - 4\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2} \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $I_2(0; 4\sqrt{2})$, bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$.

Ta có hình vẽ:



Ta có: $I_1I_2 = \sqrt{9 \times 2 + 16 \times 2} = 5\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow P = |z - w| = AB \Rightarrow \begin{cases} P_{\min} = |I_1I_2 - R_1 - R_2| = 2\sqrt{2} \\ P_{\max} = I_1I_2 + R_1 + R_2 = 8\sqrt{2} \end{cases}$$

$\overline{I_1I_2} = (-3\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$, phương trình đường thẳng I_1I_2 : $4x + 3y - 12\sqrt{2} = 0$.

$$\bullet \begin{cases} 4x + 3y - 12\sqrt{2} = 0 \\ (x - 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12\sqrt{2} - 4x}{3} \\ \frac{25}{9}x^2 - \frac{50\sqrt{2}}{3}x + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18\sqrt{2}}{5} \Rightarrow y = \frac{-4\sqrt{2}}{5} \\ x = \frac{12\sqrt{2}}{5} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

Điểm A là điểm nằm bên trong I_1I_2 nên có tọa độ là: $\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}; \frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$.

$$\bullet \begin{cases} 4x + 3y - 12\sqrt{2} = 0 \\ x^2 + (y - 4\sqrt{2})^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{28\sqrt{2}}{5} \Rightarrow x = \frac{-6\sqrt{2}}{5} \\ y = \frac{12\sqrt{2}}{5} \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

Điểm B là điểm nằm bên trong I_1I_2 nên có tọa độ là: $\left(\frac{6\sqrt{2}}{5}; \frac{12\sqrt{2}}{5}\right)$.

Theo đó A, B lần lượt biểu diễn cho z_0, w_0 . Suy ra $z_0 = \frac{12\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}i, w_0 = \frac{12\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}i$.

Vậy: $|3z_0 - w_0| = 6\sqrt{2}$.

- Câu 4:** Xét các số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = 12$ và $|z_2 - 3 - 4i| = 5$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng
- A.** 0. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 17.

Lời giải

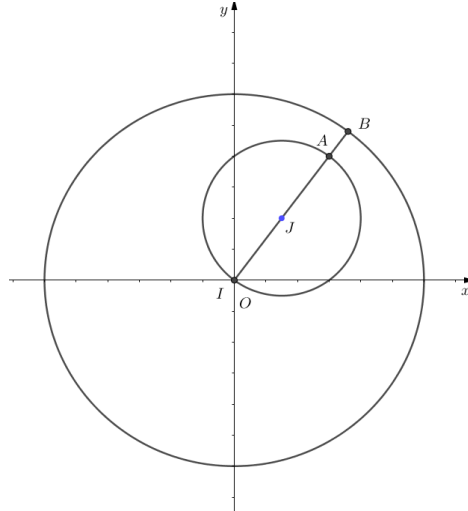
Chọn B

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho hai số phức z_1, z_2 .

- $|z_1| = 12 \Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm $I(0; 0)$, $R_1 = 12$.

- $|z_2 - (3 + 4i)| = 5 \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $J(3; 4)$, $R_2 = 5$.

Ta có hình vẽ:



$$\Rightarrow P = |z_1 - z_2| = AB \Rightarrow \begin{cases} P_{\min} = |R_1 - 2R_2| = |1 - 10| = 9 \\ P_{\max} = 2R_1 - R_2 = 5 + 10 = 15 \end{cases}$$

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$, số phức w thỏa mãn $|\bar{w} - 2 - 3i| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z - w|$ bằng

- A. $\sqrt{13} - 3$. B. $\sqrt{17} - 3$. C. $\sqrt{17} + 3$. D. $\sqrt{13} + 3$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho hai số phức z và w .

+) $|z - 1 - i| = 1 \Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm $I(1; 1)$, bán kính $R_1 = 1$.

+) $|\bar{w} - 2 - 3i| = 2 \Leftrightarrow |\bar{w} - (2 + 3i)| = 2 \Leftrightarrow |\overline{w - (2 - 3i)}| = 2 \Leftrightarrow |w - (2 - 3i)| = 2 \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $J(2; -3)$, bán kính $R_2 = 2$.

Vì $IJ = \sqrt{17} > 3 = R_1 + R_2$ nên hai đường tròn $(I; R_1)$ và $(J; R_2)$ ngoài nhau.

$$\Rightarrow P = |z - w| = AB \Rightarrow P_{\min} = |IJ - R_1 - R_2| = \sqrt{17} - 3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z - w|$ bằng $\sqrt{17} - 3$.

Câu 6: Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z - 5 + 3i| = 3$ và $|iw + 4 + 2i| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|3iz + 2w|$ bằng

- A. $\sqrt{554} + 5$. B. $\sqrt{578} + 13$. C. $\sqrt{578} + 5$. D. $\sqrt{554} + 13$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} z_1 = 3z \\ z_2 = 2iw \end{cases} \Rightarrow P = |3iz + 2w| = |3z - 2iw| = |z_1 - z_2|.$$

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho hai số phức z_1 và z_2 .

+) $|z - 5 + 3i| = 3 \Leftrightarrow |3z - 15 + 9i| = 9 \Leftrightarrow |z_1 - 15 + 9i| = 9 \Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm $I(15; -9)$, bán kính $R_1 = 9$.

+) $|iw + 4 + 2i| = 2 \Leftrightarrow |2iw + 8 + 4i| = 4 \Leftrightarrow |z_2 + 8 + 4i| = 4 \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $J(-8; -4)$, bán kính $R_2 = 4$.

Vì $IJ = \sqrt{554} > 13 = R_1 + R_2$ nên hai đường tròn $(I; R_1)$ và $(J; R_2)$ ngoài nhau.

$$\Rightarrow P = |z_1 - z_2| = AB \Rightarrow P_{\max} = |IJ + R_1 + R_2| = 13 + \sqrt{554}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|3iz + 2w|$ bằng $13 + \sqrt{554}$.

Câu 7: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - 3i| = 2$ và $|\bar{z}_2 - 1 - 2i| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $3 + \sqrt{34}$.

B. $3 + \sqrt{10}$.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho hai số phức z_1 và z_2 .

+) $|z_1 + 2 - 3i| = 2 \Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm $I(-2; 3)$, bán kính $R_1 = 2$.

+) $|\bar{z}_2 - 1 - 2i| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z}_2 - \overline{(1 - 2i)}| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z_2 - (1 - 2i)}| = 1 \Leftrightarrow |z_2 - (1 - 2i)| = 1 \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $J(1; -2)$, bán kính $R_2 = 1$.

Vì $IJ = \sqrt{34} > 3 = R_1 + R_2$ nên hai đường tròn $(I; R_1)$ và $(J; R_2)$ ngoài nhau.

$$\Rightarrow P = |z_1 - z_2| = AB \Rightarrow P_{\max} = |IJ + R_1 + R_2| = 3 + \sqrt{34}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng $3 + \sqrt{34}$.

Câu 8: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tổng các phần tử của S bằng

A. -2.

B. 4.

C. 2.

D. -5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(x; y) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

+) $z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $O(0; 0)$, bán kính $R_1 = 1$.

+) $|z - \sqrt{3} + i| = m \Rightarrow$ với $m > 0$ thì điểm M thuộc đường tròn tâm $I(\sqrt{3}; -1)$, bán kính $R_2 = m$.

Tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi hai đường tròn trên tiếp xúc với nhau.

TH1: Hai đường tròn tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow OI = R_1 + R_2 \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1 (tm)$.

TH2: Hai đường tròn tiếp xúc trong $\Leftrightarrow OI = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow |m - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3(tm) \\ m = -1(l) \end{cases} \Rightarrow m = 3.$

$\Rightarrow S = \{1; 3\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

DẠNG TOÁN 4. ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Câu 1: Biết rằng số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn đồng thời $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của $|z|$ bằng

A. $\sqrt{33}$.

B. 50.

C. $\sqrt{10}$.

D. $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Lời giải tham khảo 1 (hình học)

$$\text{Có } |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là đường tròn C tâm $I(3; 4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

$$\text{Ta lại có } P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 \Leftrightarrow P = (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2]$$

$$\Leftrightarrow P = 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 - P = 0 \text{ là đường thẳng } d.$$

$$\text{Để tồn tại } z \text{ thì } d \text{ và } C \text{ phải có điểm chung} \Leftrightarrow d \cap C \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 - P|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} \leq \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |23 - P| \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33 \Rightarrow \max P = 33.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 4x + 2y + 3 = 33 \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 5 \Rightarrow z = 5\sqrt{2}.$$

Lời giải tham khảo 2 (đại số)

$$\text{Có } |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

$$\text{Ta lại có } P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 \Leftrightarrow P = (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2]$$

$$\Leftrightarrow P = 4x + 2y + 3 = 4(x - 3) + 2(y - 4) + 23$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{4^2 + 2^2} \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} + 23 = 33.$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{x - 3}{4} = \frac{y - 4}{2} \\ 4x + 2y + 3 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 4y - 16 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 5 \Rightarrow z = 5\sqrt{2}.$$

Câu 2: Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = \sqrt{13}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - 3i|^2$. Tổng $m + M$ bằng

A. 10.

B. 25.

C. 34.

D. 40.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Có } |z - 1 - 3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 13.$$

Tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z là đường tròn C tâm $I(1; 3)$, bán kính $R = \sqrt{13}$.

$$\text{Ta lại có } P = |z+2|^2 - |z-3i|^2 \Leftrightarrow P = (x+2)^2 + y^2 - [x^2 + (y-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow P = 4x + 6y - 5 \Leftrightarrow 4x + 6y - 5 - P = 0 \text{ là đường thẳng } \Delta.$$

Để tồn tại z thì Δ và C phải có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 - 5 - P|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} \leq \sqrt{13} \Leftrightarrow |17 - P| \leq 26 \Leftrightarrow -9 \leq P \leq 43.$$

$$\Rightarrow m = \min P = -9, M = \max P = 43.$$

$$\text{Vậy: } m + M = -9 + 43 = 34.$$

Câu 3: Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|(1+i)z + 2 - i| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |x + y + 3|$ bằng

- A. 4. B. $4\sqrt{2}$. C. $4 + 2\sqrt{2}$. D. 8.

Lời giải

Chọn D

$$|(1+i)z + 2 - i| = 4 \Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = 8 \quad (1).$$

$$P = |x + y + 3| = \left| x + \frac{1}{2} + y - \frac{3}{2} + 4 \right| = \left| x + \frac{1}{2} + y - \frac{3}{2} \right| + 4 \leq \sqrt{(1^2 + 1^2) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 \right]} + 4 = 8$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} x + \frac{1}{2} = y - \frac{3}{2} \\ x + y + 3 = 8 \\ x + \frac{1}{2} + y + \frac{3}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}.$$

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Môđun của số phức $w = M + mi$ bằng

- A. $\sqrt{1258}$. B. $\sqrt{1258}$. C. $2\sqrt{314}$. D. $2\sqrt{309}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Có } |z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có: } P &= |z + 2|^2 - |z - i|^2 \\ &= (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2] \end{aligned}$$

$$= 4x + 2y + 3 = 4(x - 3) + 2(y - 4) + 23$$

Ta có: $|4(x - 3) + 2(y - 4)| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{(4^2 + 2^2)} \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(4^2 + 2^2)} \cdot 5 = 10.$

$$\Leftrightarrow -10 \leq 4(x - 3) + 2(y - 4) \leq 10.$$

$$\Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33 \Rightarrow m = \min P = 13, M = \max P = 33$$

$$\Rightarrow W = 33 + 13i \Rightarrow |W| = \sqrt{33^2 + 13^2} = \sqrt{1258}.$$

$$P \text{ đạt max khi: } \begin{cases} \frac{x - 3}{4} = \frac{y - 4}{2} \\ 4x + 2y + 3 = 33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 4y - 16 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 5.$$

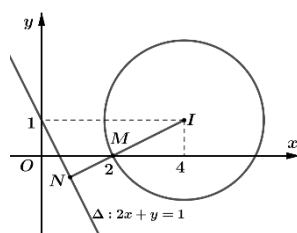
$$P \text{ đạt min khi: } \begin{cases} \frac{x - 3}{4} = \frac{y - 4}{2} \\ 4x + 2y + 3 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 4y - 16 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1, y = 3.$$

Chọn đáp án B.

Câu 5: Xét các số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1$ và các số phức z_2 thỏa $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng



A. $\sqrt{5}.$

B. $2\sqrt{5}.$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } |z_1 - 2|^2 - |z_1 + i|^2 = 1 \Leftrightarrow [(x - 2)^2 + y^2] - [x^2 + (y + 1)^2] = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0 \longrightarrow \text{Tập hợp biểu diễn số phức } z_1 \text{ là đường thẳng } d.$$

Ta lại có: $|z_2 - 4 - i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-4) + (y-1)i| = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5 \longrightarrow$ Tập hợp biểu diễn z_2 là đường tròn (C) có tâm $I(4;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Khi đó $|z_1 - z_2|$ là khoảng cách từ 1 điểm thuộc d đến 1 điểm thuộc (C) .

Suy ra: $P_{\min} = MN = |d[I, \Delta] - R| = \left| \frac{8}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} \right| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 6: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 1$ và $|w + 1 + 2i| = |w - 2 - i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z - w|$ bằng

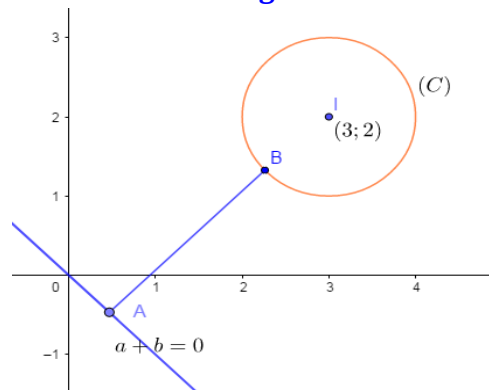
A. $\frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$.

B. $\sqrt{2} + 1$.

C. $3\sqrt{5} - 2$.

D. $\frac{5\sqrt{2} - 2}{2}$.

Lời giải



Chọn D

Đặt $z = x + yi, w = a + bi$.

$\Rightarrow |z - 3 - 2i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1 \rightarrow$ tập hợp các số phức z là đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$

$\Rightarrow |w + 1 + 2i| = |w - 2 - i| \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+2)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow a + b = 0 \rightarrow$ tập hợp các số phức w là đường thẳng $d: x + y = 0$.

Ta có $|z - w| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ chính là khoảng cách từ một điểm $A(a; b) \in (C)$ đến một điểm $B(x; y) \in d$.

Do $d(I; d) = \frac{|3+2|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} > 1$ nên d không cắt (C) , do đó $AB_{\min} = d(I; d) - R = \frac{|3+2|}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 1$.

$\Rightarrow \min |z - w| = \min AB = \frac{5\sqrt{2} - 2}{2}$.

Câu 7: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z - 2 + 4i| = 1$ và $|w + 2 - 3i| = |w - 3 + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|w - z|$ bằng

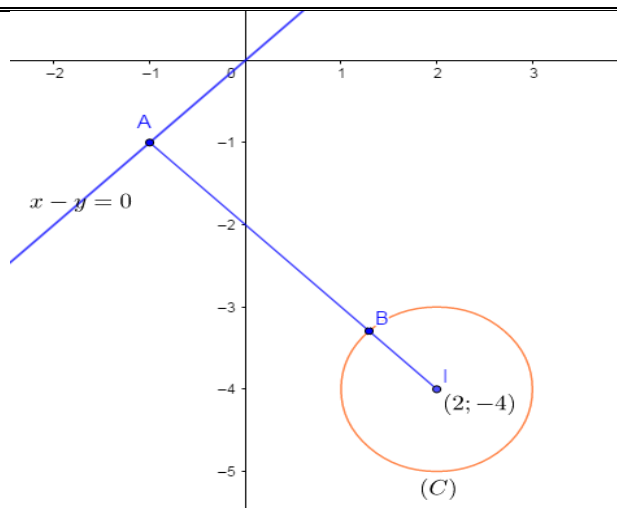
A. $2\sqrt{3} - 1$.

B. $2\sqrt{3} + 1$.

C. $3\sqrt{2} - 1$.

D. $3\sqrt{2} + 1$.

Lời giải

**Chọn C**

Đặt $z = x + yi, w = a + bi$.

$\Rightarrow |z - 2 + 4i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = 1 \rightarrow$ tập hợp các số phức z là đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+4)^2 = 1$

$\Rightarrow |w + 2 - 3i| = |w - 3 + 2i| \Leftrightarrow (a+2)^2 + (b-3)^2 = (a-3)^2 + (b+2)^2 \Leftrightarrow a - b = 0 \rightarrow$ tập hợp các số phức w là đường thẳng $d: x - y = 0$.

Ta có $|w - z| = \sqrt{x-a^2 + y-b^2}$ chính là khoảng cách từ một điểm $A(a; b) \in (C)$ đến một điểm $B(x; y) \in d$.

Do $d(I; d) = \frac{|2 - (-4)|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} > 1$ nên d không cắt (C) , do đó $AB_{\min} = d(I; d) - R = \frac{|2 - (-4)|}{\sqrt{2}} - 1 = 3\sqrt{2} - 1$.

$\Rightarrow \min |w - z| = \min AB = 3\sqrt{2} - 1$.

Câu 8: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$ và $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{7}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn A

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$ là tập hợp các điểm

$M: x, y$ thỏa mãn phương trình: $x + 5^2 + y^2 = 25$ là đường tròn tâm

$I(-5; 0), R = 5$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$ là tập hợp các điểm $N: x, y$ thỏa mãn phương trình

$$x + 1^2 + y - 3^2 = x - 3^2 + y - 6^2 \Leftrightarrow 8x + 6y - 35 = 0$$

Khi đó $|z_1 - z_2|$ là khoảng cách từ một điểm thuộc $d: 8x + 6y - 35 = 0$ tới một điểm thuộc đường tròn $C: x^2 + y^2 = 25$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2|_{\min} = MN = |d[I, d] - R| = \left| \frac{|-75|}{\sqrt{100}} - 5 \right| = \frac{5}{2}.$$

- Câu 9:** Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa $|z - 1| = \sqrt{34}$ và $|z + 1 + mi| = |z + m + 2i|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng $P = x_0 + y_0 + z_0$ bằng
- A.** 2 **B.** 10 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{130}$

Lời giải

Chọn B

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1| = \sqrt{34}$ là tập hợp các điểm

$M(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 + y^2 = 34$ là đường tròn tâm

$I(1; 0), R = \sqrt{34}$.

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn phương trình $|z + 1 + mi| = |z + m + 2i|$ là tập hợp các điểm $N(x; y)$ thỏa mãn phương trình

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2my - 3 = 0$$

Tập hợp các số phức z có điểm biểu diễn thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ 2 - 2mx + 2m + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Khi đó $|z_1 - z_2|$ là khoảng cách từ một điểm M thuộc tập S tới một điểm N thuộc tập S .

Để $|z_1 - z_2|$ đạt giá trị lớn nhất khi MN là đường kính của đường tròn

$$C: x^2 + y^2 = 34 \Leftrightarrow d(I, \Delta) = 0 \Leftrightarrow \frac{|2 - 2m - 3|}{\sqrt{2 - 2m^2 + 2 + 2m^2}} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ 2 - 2mx + 2m + 2y - 3 = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ 3x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ y = 3 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{2 + \sqrt{34}}{2}; -\frac{3\sqrt{34}}{2} \right); \left(\frac{2 - \sqrt{34}}{2}; \frac{3\sqrt{34}}{2} \right) \right] \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{2 + \sqrt{34}}{2} - \frac{3\sqrt{34}}{2}i \\ z = \frac{2 - \sqrt{34}}{2} + \frac{3\sqrt{34}}{2}i \end{cases} \Rightarrow |z_1 + z_2| = 2$$

- Câu 10:** Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 2i| \leq |z - 4i|$ và $|z - 3 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 2| + 1$ bằng

A. $\sqrt{5} + 2$.

B. $\sqrt{10}$.

C. $\sqrt{10} + 1$.

D. $\sqrt{13} + 1$.

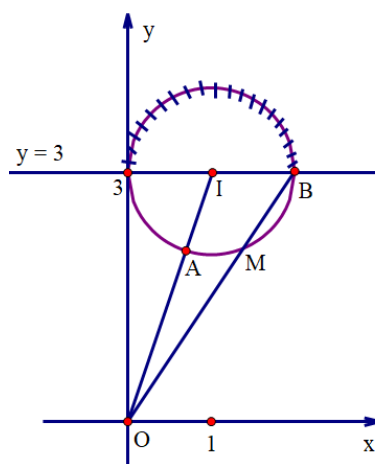
Lời giải

Chọn D

Đặt $w = z - 2$ thì $P = |w| + 1$ khi ấy giả thiết trở thành $\begin{cases} |w + 2 - 2i| \leq |w + 2 - 4i| \\ |w - 1 - 3i| = 1 \end{cases}$

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của w thì giả thiết trên trở thành

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 \leq (x+2)^2 + (y-4)^2 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \end{cases}$$



Điểm $M(x; y)$ thuộc nửa đường tròn (phần không bị gạch) $\Rightarrow P_{\max} \Leftrightarrow |w|_{\max} \Leftrightarrow M \equiv B$
 $\Rightarrow P_{\max} = OB + 1 = \sqrt{13} + 1$. Vậy chọn **D**.

Câu 11: Cho biểu thức $P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$ và xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2| = |1 + 2i|$. Biết $\min P = a\sqrt{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 12.

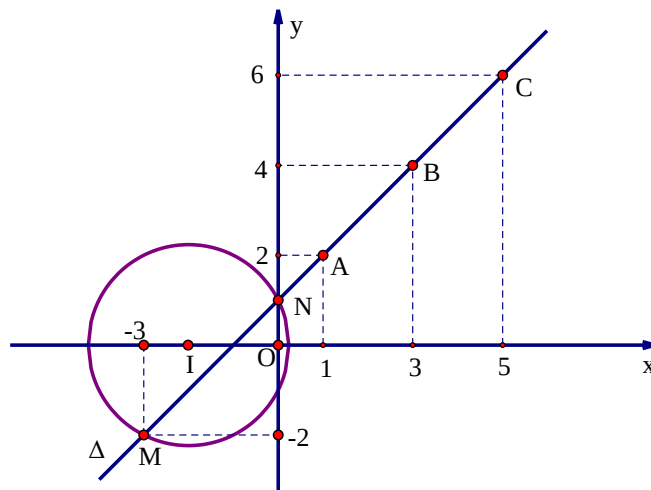
Lời giải

Chọn B

Đặt $E(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z và $A(1; 2), B(3; 4), C(5; 6)$.

$$\text{Ta có } P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i| = EA + EB + EC$$

Mặt khác các điểm A, B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0 \Rightarrow P_{\min} \Rightarrow E \in \Delta: x - y + 1 = 0$. Từ giả thiết $|z + 2| = |1 + 2i| \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow E$ thuộc đường tròn tâm $I(-2; 0)$ bán kính $R = \sqrt{5}$



Từ đó suy ra $P_{\min} \Leftrightarrow E \equiv N \Rightarrow E(0;1) \Rightarrow P_{\min} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \Rightarrow a + b = 11$

Vậy chọn B.

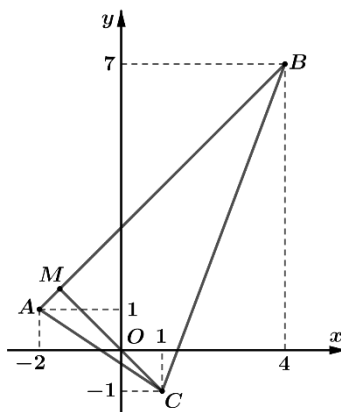
DẠNG TOÁN 5. ĐOẠN THẲNG VÀ TIA

Câu 1: Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $T = |z - 1 + i|$. Giá trị của $m + M$ bằng

- A. $\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$. B. $5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$. C. $\sqrt{13} + \sqrt{73}$. D. $\frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

Ta có: $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA + MB = 6\sqrt{2}$

Trong đó $A(-2; 1)$, $B(4; 7)$ và có $AB = 6\sqrt{2}$

Nên $MA + MB = AB$.

Suy ra điểm M thuộc đoạn AB .

Ta có $T = |z - 1 + i| = CM$ với $C(1; -1)$.

Dựa vào hình vẽ, ta có:

$$T_{\min} \Leftrightarrow CM_{\min} = d[C, AB] = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$CB = \sqrt{73}; \quad CA = \sqrt{13} \Rightarrow CM_{\max} = CB = \sqrt{73}.$$

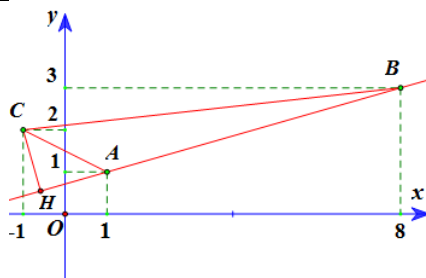
$$\text{Suy ra } m + M = \sqrt{73} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{73} + 5\sqrt{2}}{2}. \text{ Chọn đáp án D.}$$

Câu 2: Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| + |z - 8 - 3i| = \sqrt{53}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 1 + 2i|$ bằng.

- A. $\sqrt{53}$. B. 53. C. $\frac{\sqrt{185}}{2}$. D. $\sqrt{106}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $H(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

Ta có: $|z - 1 - i| + |z - 8 - 3i| = \sqrt{53} \Leftrightarrow HA + HB = \sqrt{53}$

Trong đó $A(1;1)$, $B(8;3)$ và có $AB = \sqrt{53}$

Nên $HA + HB = AB$.

Suy ra điểm H thuộc đoạn AB .

Ta có $P = |z + 1 + 2i|$ với $C(-1;2)$.

Dựa vào hình vẽ, ta có:

$$P_{\min} \Leftrightarrow CH_{\min} = d[C, AB] = \frac{17}{\sqrt{53}}.$$

$$CB = \sqrt{106}; \quad CA = \sqrt{13} \Rightarrow CH_{\max} = CB = \sqrt{106}.$$

Suy ra $P_{\max} = \sqrt{106}$. **Chọn đáp án D**

Câu 3: Xét các số phức z thỏa $|z + 2 - 3i| + |z - 6 - i| = 2\sqrt{17}$. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = ||z + 1 - 2i| - |z - 2 + i||$. Giá trị $m + M$ bằng

A. $3\sqrt{2}$.

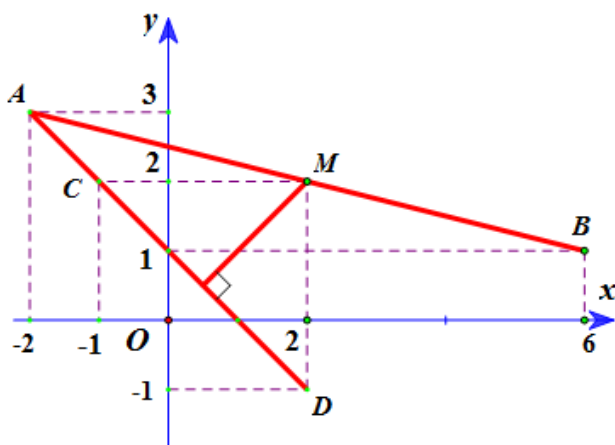
B. $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$.

C. $8\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$.

D. $\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

Ta có: $|z + 2 - 3i| + |z - 6 - i| = 2\sqrt{17} \Leftrightarrow MA + MB = 2\sqrt{17}$

Trong đó $A(-2;3)$, $B(6;1)$ và có $AB = 2\sqrt{17}$

Nên $MA + MB = AB$.

Suy ra điểm M thuộc đoạn AB .

Ta có $P = ||z + 1 - 2i| - |z - 2 + i||$ với $C(-1;2); D(2;-1)$.

Dựa vào hình vẽ, ta có $C; D$ nằm về một phía của đường thẳng AB

$$|MC - MD| \leq CD = 3\sqrt{2}$$

$$|MC - MD| \geq 0$$

Suy ra $M = 3\sqrt{2}; m = 0$. Chọn đáp án A

Câu 4: Xét các số phức z thỏa $|z + 3 - 2i| + |z - 3 + i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 2| + |z - 1 - 3i|$. Giá trị của $m + M$ bằng

A. $\sqrt{17} + \sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.

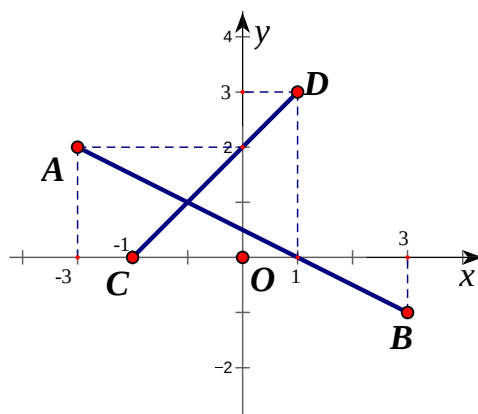
B. $\sqrt{26} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{26} + 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

D. $\sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $M(x; y)$, $A(-3;2)$, $B(3;-1)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z , $-3 + 2i$, $3 - i$ trong mặt phẳng tọa độ.

Ta có: $AB = 3\sqrt{5}$

$$|z + 3 - 2i| + |z - 3 + i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow MA + MB = AB \Rightarrow M \text{ nằm trên đoạn thẳng } AB \quad (1)$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB \text{ là: } \frac{x+3}{3+3} = \frac{y-2}{-1-2} \Leftrightarrow x+2y-1=0$$

$$\text{Gọi } C(-2;0), D(1;3) \Rightarrow P = MC + MD$$

$(x_C + 2y_C - 1)(x_D + 2y_D - 1) = (-2 + 2 \cdot 0 - 1)(1 + 2 \cdot 3 - 1) = -18 < 0 \Rightarrow C, D$ nằm về hai phía của đường thẳng AB . (2)

Ta có: $P = MC + MD \geq CD = 3\sqrt{2}$

P nhỏ nhất $\Leftrightarrow P = CD \Leftrightarrow MC + MD = CD \Leftrightarrow M$ nằm giữa CD (3)

Từ (1) và (3) suy ra: M là điểm chung của hai đoạn thẳng AB và CD .

M nằm trên đoạn thẳng $AB \Rightarrow M(1-2t; t), t \in \mathbb{R} (0 \leq t \leq 3)$

$\overrightarrow{CM} = (3-2t; t), \overrightarrow{CD} = (3; 3)$

M nằm trên đoạn thẳng $CD \Rightarrow \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng $\Rightarrow \frac{3-2t}{3} = \frac{t}{3} \Leftrightarrow t = 1$ (thỏa) $\Rightarrow M(-1; 1)$

Vì $x_C < x_M < x_D$ nên điểm M nằm trên đoạn thẳng CD

Suy ra: Giá trị nhỏ nhất của là $m = 3\sqrt{2}$.

Từ (1) và (2) suy ra: $P = MC + MD \leq \max\{AC + AD; BC + BD\}$

$AC + AD = \sqrt{5} + \sqrt{17} < BC + BD = \sqrt{26} + 2\sqrt{5}$

Do đó: Giá trị lớn nhất của P là $M = \sqrt{26} + 25$

$\Rightarrow M + m = \sqrt{26} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.

Câu 5: Xét các số phức z thỏa mãn $|iz - 2i - 2| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = |(1+i)z + 2i|$ bằng

A. $\frac{9}{\sqrt{17}}$.

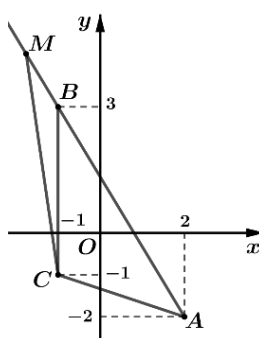
B. $3\sqrt{2}$.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $M(x; y)$, $A(2; -2)$, $B(-1; 3)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z , $2 - 2i$, $-1 + 3i$ trong mặt phẳng tọa độ.

Từ $|iz - 2i - 2| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34}$

$\Leftrightarrow |z - 2 + 2i| - |z + 1 - 3i| = \sqrt{34} \Leftrightarrow MA - MB = \sqrt{34} = AB$

Suy ra M nằm trên tia đối của BA .

Ta có $P = |1 + iz + 2i| = \sqrt{2}|z + 1 + i| = \sqrt{2}MC$ với $C(-1; -1)$.

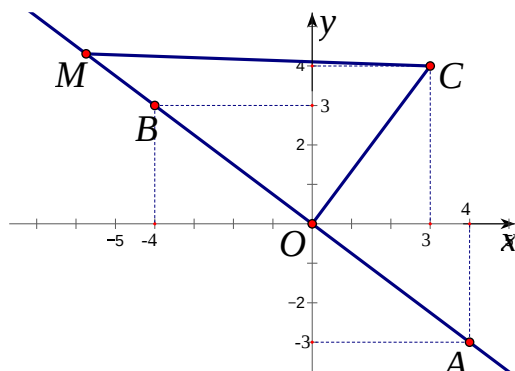
Có $MC_{\min} \Leftrightarrow M \equiv B \Rightarrow MC_{\min} = CB = 4 \Rightarrow P_{\min} = 4\sqrt{2}$.

Câu 6: Xét các số phức z đồng thời thỏa mãn $|z - 4 + 3i| - |\bar{z} + 4 + 3i| = 10$ và $|z - 3 - 4i|$ nhỏ nhất.
 Môđun của số phức z bằng

- A.** 5. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(x; y)$, $A(4; -3)$, $B(-4; 3)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z , $2 - 2i$, $-1 + 3i$ trong mặt phẳng tọa độ.

$$\overline{AB} = (-8; 6) \Rightarrow AB = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$$

$$\text{Từ } |z - 4 + 3i| - |\bar{z} + 4 + 3i| = 10$$

$$\Leftrightarrow MA - MB = 10 = AB \Rightarrow M, A, B \text{ thẳng hàng và } B \text{ nằm giữa } A \text{ và } M$$

Ta có $|z - 3 - 4i| = MC$ với $C(3; 4)$.

Gọi H là hình chiếu của C lên đường thẳng AB .

Đường thẳng CH đi qua C và vuông góc với AB có phương trình là $4x - 3y = 0$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB \text{ là } \frac{x-4}{-4-4} = \frac{y+3}{3+3} \Leftrightarrow 3x + 4y = 0$$

$$\text{Tọa độ điểm } H \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow H \equiv O(0; 0)$$

Dễ thấy O là trung điểm của đoạn thẳng AB

Do đó: $|z - 3 - 4i| = MC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$M \equiv B(-4; 3) \Rightarrow z = -4 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5.$$

Câu 7: Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z - 1 - 2i| = |\bar{z} + 3i|$. Tính $P = a + b$ khi $T = ||z - 3 - 4i| - |z - 1 + i||$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 2$.

B. $P = 6$.

C. $P = \frac{26}{3}$.

D. $P = \frac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\square \quad |z - 1 - 2i| = |\bar{z} + 3i| \Leftrightarrow \sqrt{a-1}^2 + b-2}^2 = \sqrt{a^2 + 3-b}^2 \Leftrightarrow a - b + 2 = 0$$

$\square$ Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi \Rightarrow M$ thuộc đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$

$$\square \text{ Gọi } A(3; 4), B(1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; -5); AB = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

Ta có: $(x_A - y_A + 2)(x_B - y_B + 2) = (3 - 4 + 2)(1 + 1 + 2) = 4 > 0 \Rightarrow A, B$ nằm về cùng phía với d (1)

$$d(A, d) = \frac{1}{\sqrt{2}} < d(B, d) = 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$T = \left| |z - 3 - 4i| - |z - 1 + i| \right| = |MA - MB| \leq AB = \sqrt{29}$$

Do đó: T lớn nhất khi $T = \sqrt{29} \Leftrightarrow M, A, B$ thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ cùng hướng (3)

$$\square \quad M \in d \Rightarrow b = a + 2 \Rightarrow M(a; a + 2) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (3 - a; 2 - a)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB} \text{ cùng hướng} \Rightarrow \frac{3-a}{-2} = \frac{2-a}{-5} \Leftrightarrow a = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{5}{3} \right) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \quad (\text{thỏa})$$

$$a = \frac{11}{3} \Rightarrow b = \frac{17}{3} \Rightarrow a + b = \frac{28}{3}$$

DẠNG TOÁN 6. PARABOL

Câu 1. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - i - 10| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $\sqrt{10} + 1$.

B. $\sqrt{\sqrt{101} - 1}$.

C. $\sqrt{\sqrt{101} + 1}$.

D. $3\sqrt{5} - 1$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } 2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i| \Rightarrow b = \frac{a^2}{4}.$$

Tập hợp điểm M biểu diễn z_1 là parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ có đỉnh $O(0; 0)$.

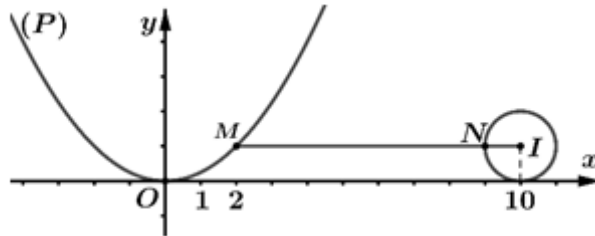
Ta có: $|z_2 - i - 10| = 1 \Rightarrow$ Tập hợp điểm N biểu diễn z_2 là đường tròn (C) có tâm $I(10; 1), R = 1$.

Khi đó $P = |z_1 - z_2| = MN$ là khoảng cách từ một điểm thuộc (P) đến một điểm thuộc (C) .

Ta có: $MN + NI \geq MI \Rightarrow MN \geq MI - NI = MI - 1 \Rightarrow MN_{\min} \Leftrightarrow IM_{\min}$.

$$\text{Mà } IM^2 = (x-10)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2.$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2 + \frac{5}{2}(x-4)^2 + 45 \geq 45 \Rightarrow IM \geq \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$



Do đó $MN_{\min} = 3\sqrt{5} - 1$.

Câu 2. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$. Tính $P = -a + 4b$ khi $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $P = 4$.

B. $P = 5$.

C. $P = 6$.

D. $P = 7$.

Lời giải

Chọn D

$$4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2 \Leftrightarrow 4(a + bi - a - bi) - 15i = i(a + bi + a - bi - 1)^2.$$

$$\Leftrightarrow 4(2bi) - 15i = i(2a - 1)^2 \Leftrightarrow 8b - 15 = (2a - 1)^2 \Leftrightarrow b = \frac{a^2 - a + 4}{2}.$$

Suy ra điểm M biểu diễn cho số phức z là Parabol có phương trình $y = \frac{x^2 - x + 4}{2}$.

Gọi $N\left(\frac{1}{2}; -3\right)$.

$$\Rightarrow \left|z - \frac{1}{2} + 3i\right| = MN = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2 - a + 10}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}}{2}\right)^2} \geq \frac{39}{8}.$$

$$\Rightarrow \min \left|z - \frac{1}{2} + 3i\right| = \frac{39}{8} \text{ khi } a = \frac{1}{2}; b = \frac{15}{8} \Rightarrow P = -a + 4b = 7.$$

Câu 3. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $2|z - 3i| = |z - \bar{z} + 2i|$. Tính $8a + 7b$ khi biểu thức $P = \left|z + \frac{6}{7}i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $8a + 7b = 8$.

B. $8a + 7b = 5$.

C. $8a + 7b = 6$.

D. $8a + 7b = 7$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2|z - 3i| = |z - \bar{z} + 2i| \Leftrightarrow 2|a + bi - 3i| = |a + bi - a + bi + 2i| \Leftrightarrow 2|a + (b - 3)i| = |(2b + 2)i|$.

$$\Leftrightarrow a^2 + (b - 3)^2 = (b + 1)^2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{8}a^2 + 1.$$

Suy ra điểm M biểu diễn cho số phức z là Parabol có phương trình $y = \frac{1}{8}x^2 + 1$.

$$\text{Gọi } N\left(0; -\frac{6}{7}\right).$$

$$\Rightarrow P = \left|z + \frac{6}{7}i\right| = MN = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{8}a^2 + \frac{13}{7}\right)^2} \geq \frac{13}{7}.$$

$$\Rightarrow P_{\min} = \frac{13}{7} \text{ khi } a = 0, b = 1 \Rightarrow 8a + 7b = 7.$$

DẠNG TOÁN 7. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 1: Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của $T = |z + 1| + 2|z - 1|$ bằng
A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Suy ra $-1 \leq x \leq 1$.

$$\text{Khi đó, } T = |1 + z| + 2|z - 1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{2x+2} + 2\sqrt{2-2x}.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki: $T \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)[(2x+2) + (2-2x)]}$ hay $T \leq 2\sqrt{5}$, với mọi $-1 \leq x \leq 1$.

$$\text{Vậy } P_{\max} = 2\sqrt{5} \text{ khi } 2\sqrt{2x+2} = \sqrt{2-2x} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}, y = \pm\frac{4}{5}.$$

Câu 2: Xét các số phức z thỏa $|z - 1| = \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $T = |z + i| + |z - 2 - i|$ bằng
A. 4. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** $8\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Gọi số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. gọi M là điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z .

$$\text{Ta có } |z - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2.$$

Như vậy, tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(1;0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Gọi $A(0;-1)$, $B(2;1)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = -i$, $z_2 = 2 + i$. Dễ thấy A, B thuộc đường tròn (C) . Vì $AB = 2\sqrt{2} = 2R$ nên AB là đường kính của đường tròn (C)
 $\Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2 = 8$.

Từ đó:

$$P = |z + i| + |z - 2 - i| = MA + MB \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)}(MA^2 + MB^2) = 4.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} MB = MA \\ MA^2 + MB^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = 2 \\ MB = 2 \end{cases}.$$

Vậy $\max P = 4$.

Cách 2.

$$T = |z + i| + |z - 2 - i| = |(z - 1) + (1 + i)| + |(z - 1) - (1 + i)|.$$

$$\text{Đặt } w = z - 1. \text{ Ta có } |w| = \sqrt{2} \text{ và } T = |w + (1 + i)| + |w - (1 + i)|.$$

$$\text{Đặt } w = x + yi. \text{ Khi đó } |w|^2 = 2 = x^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned} T &= |(x + 1) + (y + 1)i| + |(x - 1) + (y - 1)i| = 1 \cdot \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} + 1 \cdot \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \\ &\leq \sqrt{(1^2 + 1^2)}((x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2) = \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 4)} = 4 \end{aligned}$$

Vậy $\max T = 4$.

Câu 3: Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có môđun bằng 2 và phần ảo dương. Tính giá trị của $S = (5(a + b) + 2)^{2018}$ khi biểu thức $P = |2 + z| + 3|2 - z|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $S = 0$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2^{2018}$.

D. $S = 2^{1009}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $|z| = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$. Suy ra $-2 \leq a \leq 2$.

$$\text{Khi đó, } P = |2 + z| + 3|2 - z| = \sqrt{(a + 2)^2 + b^2} + 3\sqrt{(2 - a)^2 + b^2} = \sqrt{8 + 4a} + 3\sqrt{8 - 4a}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki: $P \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)}[(8 + 4a) + (8 - 4a)]$ hay $T \leq 4\sqrt{10}$, với mọi $-2 \leq x \leq 2$.

$$\text{Vậy } P_{\max} = 2\sqrt{5} \text{ khi } 3\sqrt{8+4a} = \sqrt{8-4a} \Leftrightarrow a = -\frac{8}{5} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{6}{5} \\ b = -\frac{6}{5} < 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$S = (5(a+b)+2)^{2018} = \left[5\left(-\frac{8}{5} + \frac{6}{5}\right) + 2\right]^{2018} = 0.$$

Câu 4. Xét các số phức z thỏa mãn $\sqrt{2}|z-1| = |z+3i|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i|$. Giá trị $M+m$ bằng.

- A. $10+2\sqrt{5}$. B. $10+4\sqrt{5}$. C. $20+2\sqrt{5}$. D. $20+4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, gọi M là điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z . Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}|z-1| = |z+3i| &\Leftrightarrow \sqrt{2}|(x-1)+yi| = |x+(y+3)i| \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2} \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 20. \end{aligned}$$

Như vậy, tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Gọi $A(0;-1)$, $B(4;7)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = -i$, $z_2 = 4+7i$. Dễ thấy A, B thuộc đường tròn (C) . Vì $AB = 4\sqrt{5} = 2R$ nên AB là đường kính của đường tròn (C)

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2 = 20.$$

Từ đó:

$$P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i| = |z+i| + 2|z-4-7i| = MA + 2MB \leq \sqrt{(1^2+2^2)} \sqrt{MA^2+MB^2} = 10.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} MB = 2MA \\ MA^2 + MB^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MA = 2 \\ MB = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } M = \max P = 10.$$

- Ta lại có $P = MA + 2MB = (MA + MB) + MB \geq AB + MB$
 $P \geq 4\sqrt{5} + MB$
 $P \min \Leftrightarrow MB \min \Leftrightarrow M \equiv B \Rightarrow m = \min P = 4\sqrt{5}$.
 Vậy $M+m = 10+4\sqrt{5}$.

Câu 5. Xét các số phức z thỏa $|z+4| + |z-4| = 10$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

- A. 10 và 4. B. 5 và 4. C. 4 và 3. D. 5 và 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } 10 = |z + 4| + |z - 4| \geq |z + 4 + z - 4| = |2z| \Leftrightarrow |z| \leq 5.$$

$$\text{Do đó } \max |z| = 5.$$

$$\text{Mà } |z + 4| + |z - 4| = 10 \Leftrightarrow |x + 4 + yi| + |x - 4 + yi| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 10.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$10 = 1 \cdot \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} + 1 \cdot \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)} \left[\sqrt{(x + 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} \right]$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 32)} \Leftrightarrow 2(2x^2 + 2y^2 + 32) \geq 100.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq 3 \Leftrightarrow |z| \geq 3.$$

$$\text{Do đó } \min |z| = 3.$$

Cách 2.

Gọi $M(x, y)$, $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$ biểu diễn cho số phức $z, -4, 4$.

Ta có $MF_1 + MF_2 = 10 \Rightarrow M$ chạy trên Elip có trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

tiêu cự $2c = F_1F_2 = 8 \Rightarrow c = 4$.

trục nhỏ $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow b = 3$.

Mà $|z| = OM$. Do đó giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là 5 và 3.