

Họ, tên thí sinh:.....

Mã đề thi 333

Số báo danh:.....

Câu 1. Phần thực của số phức $z = 4 - 2i$ bằng

- A. 4. B. 2. C. -2 . D. -4 .

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	1	4	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 3. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 6$ và $\int_1^4 g(x) dx = -5$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- A. -11 . B. 1 . C. 11 . D. -1 .

Câu 4. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^2$ bằng

- A. $2 \log_5 a$. B. $\frac{1}{2} \log_5 a$. C. $2 + \log_5 a$. D. $\frac{1}{2} + \log_5 a$.

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y = 2^x$ là

- A. $y' = x2^{x-1}$. B. $y' = 2^x \ln 2$. C. $y' = 2^x$. D. $y' = \frac{2^x}{\ln 2}$.

Câu 6. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z = -1 + 2i$ là điểm nào dưới đây?

- A. $N(1; -2)$. B. $M(-1; -2)$. C. $Q(1; 2)$. D. $P(-1; 2)$.

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > 3$ là

- A. $(0; 3)$. B. $\left(0; \frac{8}{3}\right)$. C. $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 8. Cho khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 6; 7. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

- A. 14. B. 84. C. 28. D. 15.

Câu 9. Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{5}{4}}$ là

- A. $y' = \frac{5}{4}x^{-\frac{1}{4}}$. B. $y' = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$. C. $y' = \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}$. D. $y' = \frac{4}{5}x^{\frac{1}{4}}$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 4$. Giá trị của u_2 bằng

- A. 12. B. 64. C. $\frac{3}{4}$. D. 81.

Câu 11. Cho hình nón có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l . Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $S_{xq} = 2\pi rl$. B. $S_{xq} = \frac{4}{3}\pi rl$. C. $S_{xq} = \pi rl$. D. $S_{xq} = 4\pi rl$.

Câu 12. Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 2$, công thức nào dưới đây đúng?

- A. $A_n^2 = \frac{2!}{(n-2)!}$. B. $A_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$. C. $A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!}$. D. $A_n^2 = \frac{(n-2)!}{n!}$.

Câu 13. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-1}$ là đường thẳng

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 14. Cho hai số phức $z = 1 - i$ và $w = 7 + 3i$. Số phức $2z - w$ có tổng phần thực và phần ảo bằng

- A. 10. B. -5. C. 0. D. -10.

Câu 15.

Cho hàm số $Y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = 1$. B. $x = -1$.
C. $x = -3$. D. $x = 2$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-3	1	$-\infty$	

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	-1	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 17. Cho khối lập phương có cạnh bằng 2. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

- A. 6. B. 4. C. $\frac{8}{3}$. D. 8.

Câu 18. Hàm số $y = \ln x + \frac{1}{x}$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

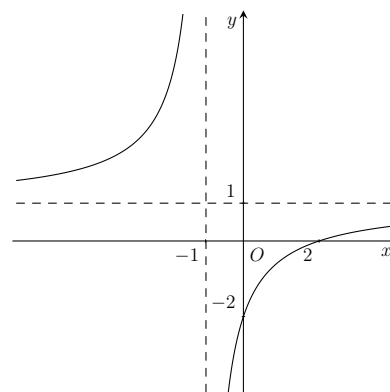
- A. $y = \ln x + 1$. B. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. C. $y = \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{1}{x}$. D. $y = \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{1}{x^2}$.

Câu 19.

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là

- A. $(-2; 0)$. B. $(2; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(0; -2)$.



Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A. 9. B. $\sqrt{7}$. C. 3. D. $\sqrt{15}$.

Câu 21. Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$ là

- A. $S = (-\infty; -2)$. B. $S = (-2; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 2)$. D. $S = (2; +\infty)$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (P) là

- A. $d = \frac{5}{29}$. B. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$. D. $d = \frac{5}{9}$.

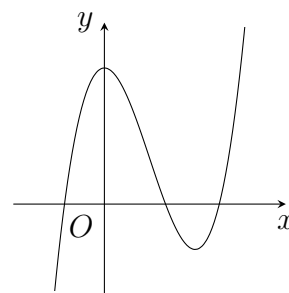
Câu 23. Cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và $(Q): mx + y - 2z + 1 = 0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

- A. $m = 6$. B. $m = -1$. C. $m = -6$. D. $m = 1$.

Câu 24.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. B. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.



Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_2 = (1; 2; -2)$. B. $\vec{n}_4 = (1; -2; -3)$. C. $\vec{n}_3 = (1; 2; 2)$. D. $\vec{n}_1 = (1; -2; 2)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$, giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(4; -3; 0)$. B. $(2; -2; 0)$. C. $(0; -1; -1)$. D. $(-2; 0; -2)$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x - 1)^2(x + 2)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = 3 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = 3x + \cos x + C$. B. $\int f(x) dx = -\sin x + C$.
C. $\int f(x) dx = 3x - \sin x + C$. D. $\int f(x) dx = 3x + \sin x + C$.

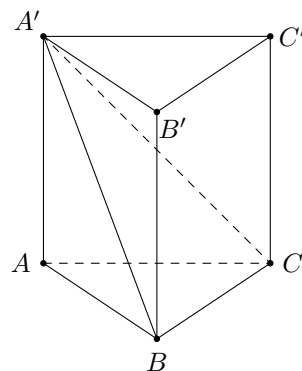
Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(8; 1; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A. $(8; 0; 0)$. B. $(0; 0; 2)$. C. $(0; 1; 2)$. D. $(0; 1; 0)$.

Câu 30.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = 2a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .



Câu 31. Biết rằng $\int_1^5 \frac{3}{x^2 + 3x} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $2a - b = 0$. B. $a + b = 0$. C. $a - b = 0$. D. $a + 2b = 0$.

Câu 32. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 2x - 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo bởi khi quay (H) quanh trục hoành.

- A. $V = \frac{168\pi}{5}$. B. $V = \frac{168}{5}$. C. $V = \frac{32\pi}{5}$. D. $V = \frac{32}{5}$.

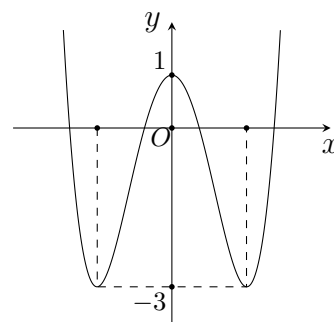
Câu 33. Biết phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $x_1 \cdot x_2$.

- A. $x_1 \cdot x_2 = 4$. B. $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{8}$. C. $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$. D. $x_1 \cdot x_2 = -3$.

Câu 34.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) - 1 = 0$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.



Câu 35. Một nhóm gồm 3 học sinh lớp 10, 3 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngồi vào một hàng có 9 ghế, mỗi học sinh ngồi 1 ghế. Tính xác suất để 3 học sinh lớp 10 không ngồi 3 ghế liền nhau.

- A. $\frac{11}{12}$. B. $\frac{1}{12}$. C. $\frac{7}{12}$. D. $\frac{5}{12}$.

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 1$. Số phức $w = 2z + 1 - i$ có tập hợp điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức là đường tròn có

- A. tâm $I(-3; 5)$ và bán kính $R = 2$. B. tâm $I(-2; -6)$ và bán kính $R = 2$.
C. tâm $I(2; 6)$ và bán kính $R = 2$. D. tâm $I(3; -5)$ và bán kính $R = 2$.

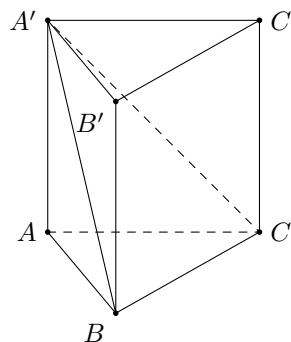
Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1; 0; 2)$ và $F(2; 1; -5)$. Phương trình đường thẳng EF là

- A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$. B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$. D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}$.

Câu 38.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = a\sqrt{5}$, $BC = 2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a}{2}$.



Câu 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2 - 1}{81} < \log_3 \frac{x^2 - 1}{16}$?

- A. 68. B. 73. C. 70. D. 72.

Lời giải.

Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2 \frac{x^2 - 1}{81} < \log_3 \frac{x^2 - 1}{16} \\ \Leftrightarrow & \log_2 (x^2 - 1) - \log_2 81 < \log_3 (x^2 - 1) - \log_3 16 \\ \Leftrightarrow & \log_2 3 \cdot \log_3 (x^2 - 1) - 4 \log_2 3 < \log_3 (x^2 - 1) - 4 \log_3 2 \\ \Leftrightarrow & (\log_2 3 - 1) \log_3 (x^2 - 1) < 4(\log_2 3 - \log_3 2) \\ \Leftrightarrow & \log_3 (x^2 - 1) < \frac{4(\log_2 3 - \log_3 2)}{\log_2 3 - 1} \\ \Leftrightarrow & \log_3 (x^2 - 1) < \frac{4\left(\frac{1}{\log_3 2} - \log_3 2\right)}{\frac{1}{\log_3 2} - 1} \\ \Leftrightarrow & \log_3 (x^2 - 1) < 4(1 + \log_3 2) \\ \Leftrightarrow & \log_3 (x^2 - 1) < \log_3 6^4 \\ \Leftrightarrow & 0 < x^2 - 1 < 6^4 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -\sqrt{1297} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{1297}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vì x là số nguyên nên $x \in \{-36; -35; \dots; -2; 2; \dots; 35; 36\}$.

Vậy có 70 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ thỏa mãn $f(x) = \sqrt{x} + \int_0^1 xf(x^4) dx$. Giá trị của

tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx$ bằng

- A. $I = 2$. B. $I = \frac{3}{22}$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = \frac{22}{3}$.

Lời giải.

Đặt $m = \int_0^1 xf(x^4) dx$. Suy ra

$$m = \int_0^1 xf(x^4) dx = \int_0^1 [x(x^2 + m)] dx \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Từ đó, ta có $I = \int_0^4 f(x) dx = \frac{22}{3}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + xf'(x) + f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$.

A. $S = 8$.

B. $S = 4$.

C. $S = 8\pi$.

D. $S = 4\pi$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) + xf'(x) + f'(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 \\ \Leftrightarrow f(x) + (x+1)f'(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 \quad (*) \\ \Leftrightarrow [(x+1)f(x)]' &= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 \end{aligned}$$

mà $\int (4x^3 - 6x^2 - 2x + 4) dx = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + C$ nên

$$(x+1)f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + C_1.$$

Cho $x = -1$ thì $0 = -2 + C_1$ suy ra $C_1 = 2$, ta được $(x+1)f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2$.

• Với $x = -1$ thay vào $(*)$ thì $f(-1) = -4$;

• Với $x \neq -1$ thì $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$,

Do đó, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Xét phương trình $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$.

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4. \end{cases}$$

Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là

$$S = \int_0^4 |f(x) - f'(x)| dx = \int_0^4 |x^3 - 6x^2 + 8x| dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 |x^3 - 6x^2 + 8x| \, dx + \int_2^4 |x^3 - 6x^2 + 8x| \, dx \\
&= \left| \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) \, dx \right| + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) \, dx \right| \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 42. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết $AA' = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$ và điểm A' cách đều các điểm A, B, C . Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $16a^3\sqrt{3}$.

B. $4a^3\sqrt{3}$.

C. $2a^3\sqrt{3}$.

D. $8a^3\sqrt{3}$.

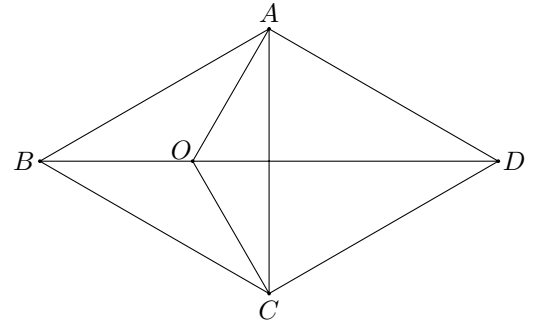
Lời giải.

Tam giác ABC là tam giác đều nên

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}.$$

Gọi O là trọng tâm $\triangle ABC$, ta có

$$\begin{cases} A'A = A'B = A'C \\ OA = OB = OC. \end{cases}$$

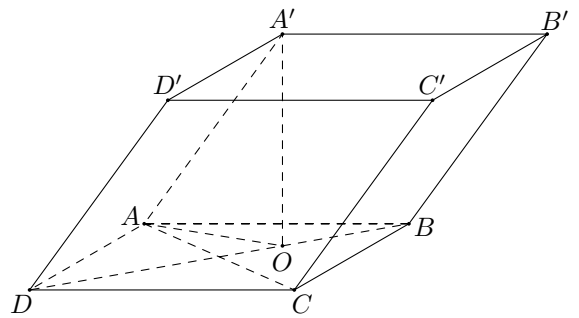


Khi đó O thuộc trục của đa giác đáy ABC , suy ra $A'O \perp (ABC)$.

Tam giác AOA' vuông tại O có

$$\begin{cases} AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \\ A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = 2a. \end{cases}$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'O \cdot S_{ABCD} = 4a^3\sqrt{3}$.



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 43. Một hình trụ có chiều cao bằng $2a$, bán kính đáy bằng a . Gọi O, O' là tâm hai mặt đáy. Kẻ hai bán kính OA và $O'B'$ lần lượt nằm trên hai mặt đáy sao cho góc giữa chúng bằng 30° . Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB' và song song với OO' . Tính diện tích thiết diện tạo thành khi cắt hình trụ nói trên bởi mặt phẳng (α) .

A. $a^2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

B. $2a^2$.

C. $2a^2(2 - \sqrt{3})$.

D. $2a^2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Lời giải.

Gọi A', B lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B' trên mặt đáy còn lại của hình trụ.

Khi đó $\text{mp}(ABB'A') \equiv (\alpha)$ và thiết diện tạo thành khi cắt hình trụ nói trên bởi mặt phẳng (α) là hình chữ nhật $ABB'A'$.

Ta có $\widehat{AOB} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}) = 30^\circ$.

Xét tam giác OAB có

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 30^\circ = a^2 (2 - \sqrt{3})$$

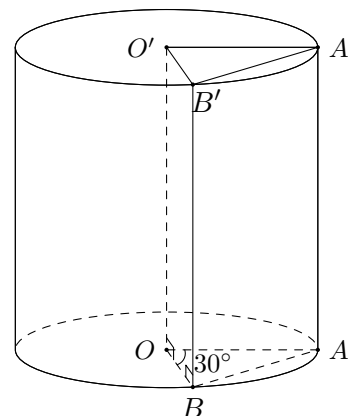
$$\Rightarrow AB = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Lại có $AA' = OO' = 2a$.

Suy ra diện tích thiết diện $ABB'A'$ là $S = AB \cdot AA' = 2a^2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Chọn đáp án **D**

□



Câu 44. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 2m^2 - 2m = 0$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2| = |z_2 - 2|$.

A. 17.

B. 16.

C. 15.

D. 14.

Lời giải.

Đặt $w = z - 2$, ta được phương trình

$$\begin{aligned} (w + 2)^2 - 2m(w + 2) + 2m^2 - 2m &= 0 \\ \Leftrightarrow w^2 - (2m - 4)w + 2m^2 - 6m + 4 &= 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Khi đó bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt w_1, w_2 thỏa mãn $|w_1| = |w_2|$.

Xét phương trình (1) có $\Delta' = (m - 2)^2 - 2m^2 + 6m - 4 = -m^2 + 2m$.

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \in (0; 2)$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$.

Thay vào phương trình ta được $w^2 + 2w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} w = 0 \\ w = -2 \end{cases}$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Khi đó phương trình luôn có hai nghiệm phức phân biệt không phải số thực, hai nghiệm này là hai số phức liên hợp nên mô-đun của chúng luôn bằng nhau.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên và $m \in (-10; 10)$.

Suy ra $m \in \{-9; -8; \dots; -1\} \cup \{3; 4; \dots; 9\}$.

Vậy có 16 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 3; 4)$. Xét các đường thẳng Δ qua A và tạo với (Oyz) một góc 45° . Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng (Oyz) . Khi OM nhỏ nhất, Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (1; a; b)$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 1.

B. 5.

C. 10.

D. 13.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc mặt phẳng (Oyz) .

$$\text{Suy ra } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = 4. \end{cases}$$

Gọi $H = d \cap (Oyz) \Rightarrow H(0; 3; 4)$ và $AH = 1$.

Ta có $\widehat{(\Delta, (Oyz))} = \widehat{AMH} = 45^\circ$.

Xét tam giác AHM vuông tại H có $MH = AH \cdot \cot 45^\circ = 1$.

Suy ra M nằm trên đường tròn tâm H bán kính $R = MH = 1$.

Ta có OM nhỏ nhất khi O, H, M thẳng hàng và M ở giữa O, H .

Suy ra OM đạt nhỏ nhất khi $OM = OH - HM = 5 - 1 = 4$.

$$\text{Ta lại có } \frac{OM}{OH} = \frac{4}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{4}{5} \overrightarrow{OH} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{4}{5} \cdot 0 = 0 \\ y_M = \frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{12}{5} \\ z_M = \frac{4}{5} \cdot 4 = \frac{16}{5}. \end{cases}$$

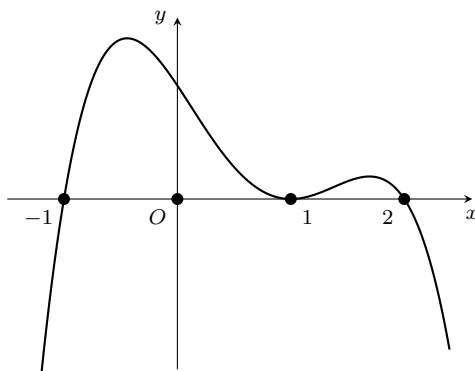
Suy ra $M \left(0; \frac{12}{5}; \frac{16}{5} \right)$.

Vậy vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MA} = \left(1; \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 46. Cho hàm số đa thức $f(x) = mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + hx + r$ ($m, n, p, q, h, r \in \mathbb{R}$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ (như hình vẽ) cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là -1 ; 2 ; và tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là 1 .



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - r|$ là

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 7.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) = m(x+1)(x-1)^2(x-2)$ với $m < 0$.

Đặt $h(x) = f(x) - r = f(x) - f(0) \Rightarrow h'(x) = f'(x)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$	0	$-$
h	$+\infty$	$h(-1)$	$h(2)$	$-\infty$	

Ta có: $h(-1) = f(-1) - f(0) < 0$; $h(2) = f(2) - f(0) > 0$.

Suy ra phương trình $h(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 47. Tìm tất cả giá trị của số thực m sao cho có ít nhất một số phức z thỏa mãn $|z| = m$ và $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$.

A. $2 \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

B. $2 \leq m \leq 1 + \sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{5}$.

D. $\sqrt{5} - 1 \leq m \leq 2 + \sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z , ta có

- $|z| = m \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn tâm O bán kính m khi $m > 0$, $M \equiv O$ khi $m = 0$ và không tồn tại M nếu $m < 0$.

• $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2|x| - 2|y| = 0. \quad (1)$

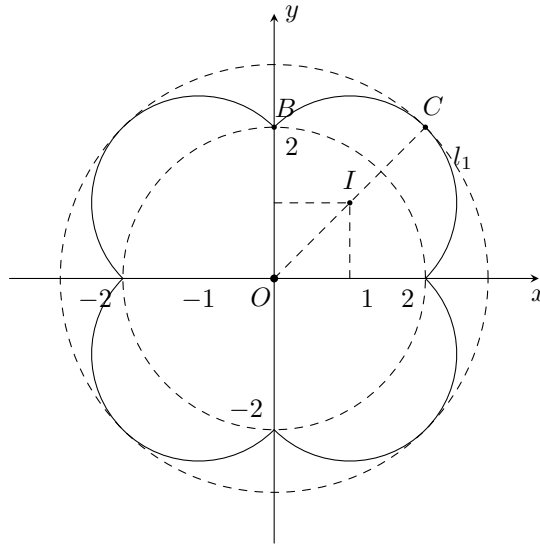
Xét trường hợp $x \geq 0, y \geq 0$, phương trình (1) trở thành

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

là phương trình của đường tròn (C) tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Như vậy tập hợp các điểm M trong góc phần tư thứ nhất thỏa mãn (1) là phần đường tròn (C) nằm trong góc phần tư đó (ta gọi là cung (l_1)).

Dễ thấy $(x; y)$ là một nghiệm của (1) thì $(-x; y)$, $(x; -y)$, $(-x; -y)$ cũng là nghiệm của (1), nên tập hợp các điểm thỏa mãn (1) đối xứng qua hai trục tọa độ và qua O .

Do đó, bằng cách lấy đối xứng của (l_1) qua các trục tọa độ và qua O ta được tập hợp các điểm M là đường cong (H) (như hình vẽ dưới đây).



Yêu cầu của đề bài tương đương $m \geq 0$ và đường tròn (O, m) với đường cong (H) có ít nhất một điểm chung. Từ đó ta có điều kiện của m là

$$OB \leq m \leq OC \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z + 1 = 0$, $(Q) : x - 2y + 2z - 8 = 0$, $(R) : x - 2y + 2z + 4 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại các điểm A , B , C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AB + \frac{96}{AC^2}$ là

A. $\frac{41}{3}$.

B. 99.

C. 18.

D. 24.

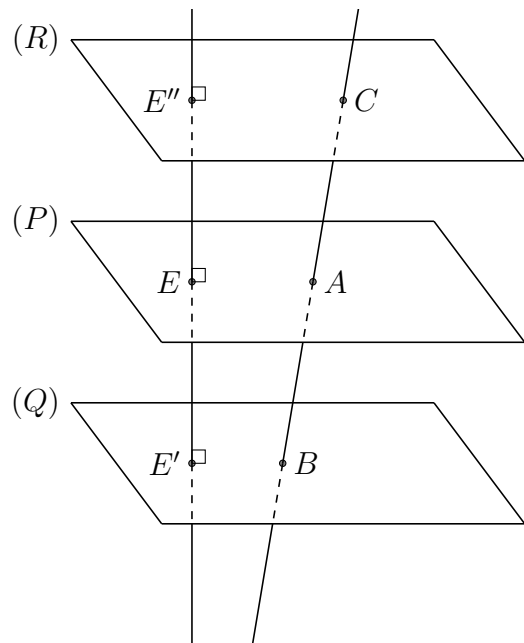
Lời giải.

Dễ thấy các mặt phẳng (P) , (Q) và (R) song song với nhau. Do giả thiết suy ra $d((R), (P)) = EE'' = 1$ và $d((P), (Q)) = EE' = 3$.

Theo định lý Ta-lét trong không gian ta có $\frac{E''E}{EE'} = \frac{AC}{AB}$ suy ra

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AB = 3AC.$$

Đặt $S = AB + \frac{96}{AC^2}$ suy ra $S = 3AC + \frac{96}{AC^2}$.



Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM -GM

$$S = \frac{3AC}{2} + \frac{3AC}{2} + \frac{96}{AC^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3AC}{2} \cdot \frac{3AC}{2} \cdot \frac{96}{AC^2}} \Leftrightarrow S \geq 18.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{3AC}{2} = \frac{96}{AC^2} \Leftrightarrow AC^3 = 64 \Leftrightarrow AC = 4$.

Vậy $\min S = 18$ khi $AC = 4$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để phương trình

$$2^{3^m} \cdot 7^{x^2-2x} + 7^{3^m} \cdot 2^{x^2-2x} = 14^{3^m} (7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m)$$

có bốn nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1 ?

A. 10.

B. 9.

C. 11.

D. 8.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2^{3^m} \cdot 7^{x^2-2x} + 7^{3^m} \cdot 2^{x^2-2x} &= 14^{3^m} (7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m) \\ \Leftrightarrow \frac{7^{x^2-2x}}{7^{3^m}} + \frac{2^{x^2-2x}}{2^{3^m}} &= 7x^2 - 14x + 2 - 7 \cdot 3^m \\ \Leftrightarrow 7^{x^2-2x-3^m} + 2^{x^2-2x-3^m} &= 7(x^2 - 2x - 3^m) + 2. \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $x^2 - 2x - 3^m = a$.

Khi đó $(*)$ trở thành $7^a + 2^a = 7a + 2 \Leftrightarrow 7^a + 2^a - 7a - 2 = 0$.

Xét hàm số $f(a) = 7^a + 2^a - 7a - 2$.

Ta có $f'(a) = 7^a \ln 7 + 2^a \ln 2 - 7$.

Ta có $f''(a) = 7^a (\ln 7)^2 + 2^a (\ln 2)^2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f'(a)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $f'(a) = 0$ có tối đa 1 nghiệm.

Mà $f'(0) = \ln 7 + \ln 2 - 7 < 0$ và $f'(1) = 7 \ln 7 + 2 \ln 2 - 7 > 0$.

Suy ra $f'(a) = 0$ có nghiệm duy nhất $a_0 \in (0; 1)$.

Suy ra $f(a) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

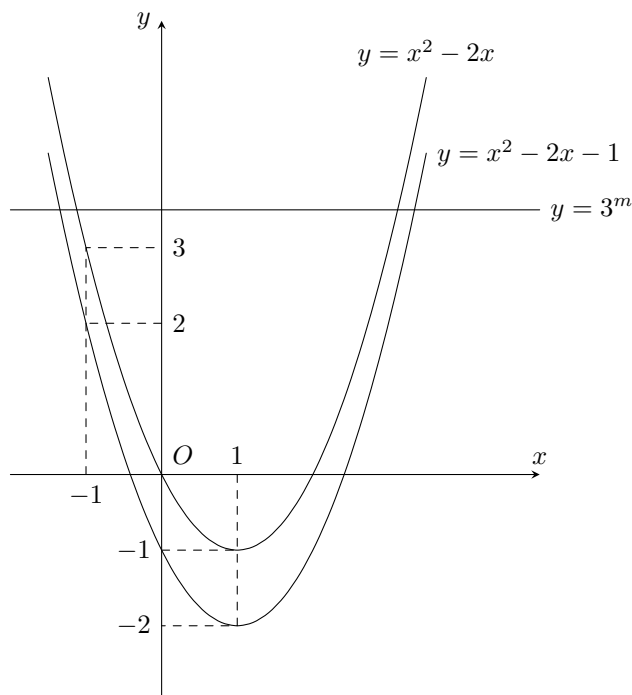
Bảng biến thiên của $y = f(a)$

a	$-\infty$	0	a_0	1	$+\infty$
$f'(a)$		—	0	+	
$f(a)$	$+\infty$	0	$f(a_0)$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f(a) = 0$ có đúng 2 nghiệm $a = 0$ và $a = 1$.

$$\text{Từ đó } \begin{cases} a = x^2 - 2x - 3^m = 0 \\ a = x^2 - 2x - 3^m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^m = x^2 - 2x \\ 3^m = x^2 - 2x - 1. \end{cases} \quad (**)$$

Để $(*)$ có 4 nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1 thì $(**)$ có 4 nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1 hay tương đương với đồ thị hàm số $y = 3^m$ cắt đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = x^2 - 2x - 1$ tại 4 điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn -1 .



Dựa vào đồ thị ta có $3^m \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Suy ra $m \in \{1; 2; \dots; 10\}$.

Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

A. 12.

B. 8.

C. 11.

D. 7.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 2mx + 3$.

$$\text{Ta có } y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0. \end{cases}$$

Do đó, đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành;
- Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành.

$$\text{Ta có } f'(x) = 6x^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{m}{3}.$$

- TH1. $m \leq 0$, ta có:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	0	$+\infty$

- TH2. $-\frac{4}{3}m\sqrt{\frac{m}{3}} + 3 < 0 \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{\frac{243}{16}}$, ta có:

x	$-\infty$	x_1	$-\sqrt{\frac{m}{3}}$	x_2	$\sqrt{\frac{m}{3}}$	x_3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow \frac{4}{3}m\sqrt{\frac{m}{3}}+3 \searrow 0 \searrow -\frac{4}{3}m\sqrt{\frac{m}{3}}+3 \nearrow 0 \nearrow +\infty$					

Trong hai trường hợp trên, hàm số $y = |f(x)| = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi phương trình $2x^3 - 2mx + 3 = 0$ (*) có nghiệm $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$.

$$(*) \Leftrightarrow m = \frac{2x^3 + 3}{2x} = g(x).$$

Ta có

$$g'(x) = \frac{6x^2 \cdot 2x - 2(2x^3 + 3)}{4x^2} = \frac{4x^3 - 3}{2x^2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$	1	$+\infty$
g'	-		0	+	
g	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{9}{4\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}$	$+\infty$

Suy ra (*) có nghiệm $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > \sqrt[3]{\frac{243}{16}} \end{cases}$, ta được $\begin{cases} m \leq 0 \\ \sqrt[3]{\frac{243}{16}} < m \leq \frac{5}{2} \end{cases}$.

Suy ra trong $(-10; 10)$ có 10 giá trị nguyên của $m \in \{-9; -8; \dots; -1; 0\}$ thỏa mãn bài toán.

- TH3. $0 < m \leq \sqrt[3]{\frac{243}{16}}$, ta có:

x	$-\infty$	x_1	$-\sqrt{\frac{m}{3}}$	$\sqrt{\frac{m}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow \frac{4}{3}m\sqrt{\frac{m}{3}}+3 \searrow -\frac{4}{3}m\sqrt{\frac{m}{3}}+3 \geq 0 \nearrow +\infty$			

Trong TH3, hàm số $y = |f(x)| = |2x^3 - 2mx + 3|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\sqrt{\frac{m}{3}} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3.$$

Kết hợp với điều kiện $0 < m \leq \sqrt[3]{\frac{243}{16}}$, ta được $0 < m \leq \sqrt[3]{\frac{243}{16}}$.

Suy ra trong $(-10; 10)$ có 2 giá trị nguyên của $m \in \{1; 2\}$ thỏa mãn bài toán.

Vậy có tất cả 12 giá trị nguyên của $m \in \{-9; -8; \dots; 0; 1; 2\}$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

———— HẾT ————

DÁP ÁN VẮN TẮT

1 A	6 D	11 C	16 D	21 A	26 B	31 B	36 D	41 A	46 C
2 C	7 C	12 C	17 D	22 C	27 D	32 C	37 B	42 B	47 A
3 C	8 B	13 C	18 B	23 A	28 D	33 A	38 C	43 D	48 C
4 A	9 B	14 D	19 B	24 A	29 A	34 B	39 C	44 B	49 A
5 B	10 A	15 B	20 C	25 D	30 A	35 A	40 D	45 A	50 A