

ĐỀ CHÍNH THỨC

Lưu ý: - Thí sinh làm mỗi câu trên một tờ giấy riêng và ghi rõ câu số mấy ở trang 1 của mỗi tờ giấy thi.
- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Câu 1. (3,0 điểm) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2.

Chứng minh

$$2\sqrt{2} + \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{6} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} < 2\sqrt{3}.$$

Câu 2. (4,0 điểm) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn
$$\begin{cases} x^2 - 1 = y + 1 \\ y^2 - 1 = z + 1 \\ z^2 - 1 = x + 1. \end{cases}$$

Chứng minh $x + y + z$ là số nguyên.

Câu 3. (4,0 điểm) Với số nguyên dương $n \geq 2$, xét bảng vuông gồm có $(2n-1) \times (2n-1)$ ô vuông, người ta viết vào mỗi ô chỉ một trong 3 số 1, 0 hoặc -1 sao cho trong mỗi hàng con 2×2 luôn tìm được 3 ô có tổng bằng 0. Gọi S_n là giá trị lớn nhất của tổng tất cả các số trong bảng. Chứng minh

a. $S_2 = 5$.

b. $S_n = n^2 + n - 1$.

Câu 4. (4,0 điểm)

a. Chứng minh tồn tại 2 cặp số (a, b) với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn

$$a^2 + 3b^2 = 7^9.$$

b. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình

$$x^2 + y^2 + xy = 7^n$$

có nghiệm trong tập số nguyên không chia hết cho 7.

Câu 5. (5,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Tia AO cắt đoạn thẳng BC tại L . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng BC . Giả sử tiếp tuyến qua A' của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'BC$ cắt các tia AB, AC lần lượt tại các điểm D, E .

a. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A'BD, A'CE, A'AL$ cùng đi qua một điểm khác A' .

b. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác JDE tiếp xúc với (O) .

HẾT

Họ tên thí sinh: SBD:

Trường: Tỉnh/TP:

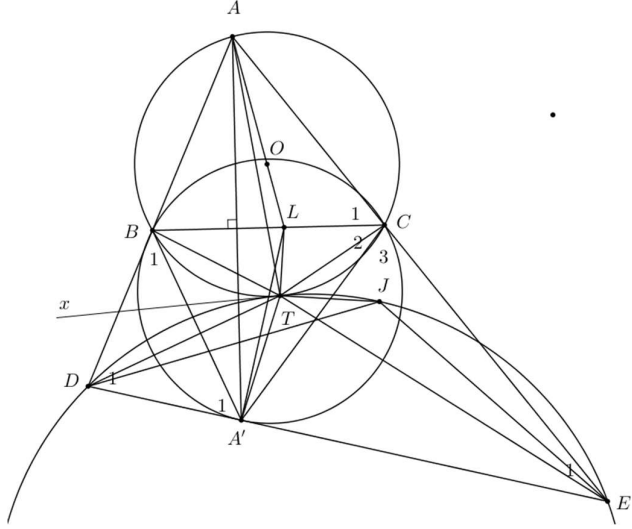
ĐÁP ÁN

Bài	Nội dung	Điểm
1	Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh $2\sqrt{2} + \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{6} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} < 2\sqrt{3}.$	3,0
	Do a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác nên $0 < c < a + b \Rightarrow 0 < 2c < a + b + c = 2 \Rightarrow 0 < c < 1.$ Chứng minh tương tự, ta được $0 < a < 1, 0 < b < 1.$ Đặt $A = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}.$ Ta có $A \leq \sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2)} < \sqrt{6(a + b + c)} = 2\sqrt{3}. (1)$	2,0
	Nhận xét: Từ $0 < a, b, c < 1$ suy ra $\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b < 4.$ Ta có $\sqrt{2(a^2 + b^2)} - a - b = \frac{(a - b)^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b} \geq \frac{(a - b)^2}{4}.$ Viết 2 bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta có $A\sqrt{2} - 4 \geq \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{4}$ $\geq \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{3\sqrt{2}} = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{3\sqrt{2}} (2)$ Từ (1) và (2), ta có điều phải chứng minh.	1,0

Bài 2	Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x^2 - 1 = y + 1 \\ y^2 - 1 = z + 1 \\ z^2 - 1 = x + 1. \end{cases}$ Chứng minh rằng $x + y + z$ là số nguyên.	4,0
	Nhân theo về các phương trình đã cho, ta được $(x+1)(y+1)(z+1)[(x-1)(y-1)(z-1)-1] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \\ (x-1)(y-1)(z-1) = 1. \end{cases}$ Nếu $x = -1$ thì $y = z = -1$, suy ra $x + y + z = -3 \in \mathbb{Z}$. Nếu $y = -1$ hoặc $z = -1$ làm tương tự.	1,0
	Xét trường hợp $(x-1)(y-1)(z-1) - 1 = 0$ (*). Đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$ ta có $(*) \Leftrightarrow r + p - q = 2 \Leftrightarrow r = q - p + 2. \quad (1)$ Cộng ba phương trình ban đầu theo về ta được $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 6 \Leftrightarrow p^2 - p - 6 = 2q. \quad (2)$	0,5
	Ta có $\begin{cases} x^2 - 1 = y + 1 \\ y^2 - 1 = z + 1 \\ z^2 - 1 = x + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y + 2 \\ y^2 = z + 2 \\ z^2 = x + 2 \end{cases}$ Nhân các phương trình trên theo về, ta được $(xyz)^2 = (x+2)(y+2)(z+2) \Leftrightarrow r^2 = r + 4p + 2q + 8. \quad (3)$	0,5
	Thay (1) và (2) vào (3) ta được $\left(\frac{p^2 - p - 6}{2} - p + 2 \right)^2 = \left(\frac{p^2 - p - 6}{2} - p + 2 \right) + 4p + (p^2 - p - 6) + 8.$ Giải phương trình trên thu được 4 nghiệm $p \in \{0; 1; -1; 6\}$. Vậy trong mọi trường hợp, ta đều có $p = x + y + z$ là số nguyên.	2,0

	➤ Tổng các số trong vùng (I) không vượt quá $S_k = k^2 + k - 1$. ➤ Ta chia vùng (II) thành $k - 1$ hình vuông 2×2 riêng biệt, khi đó tổng các số trong vùng (II) không vượt quá $(k - 1) \cdot 1 = k - 1$. ➤ Ta chia vùng (III) thành $k - 1$ hình vuông 2×2 riêng biệt, khi đó tổng các số trong vùng (III) không vượt quá $(k - 1) \cdot 1 = k - 1$.	
	➤ Xét riêng vùng (IV) <	

Bài 4	a) Chứng minh tồn tại 2 cặp số (a, b) với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + 3b^2 = 7^9.$ b) Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình $x^2 + y^2 + xy = 7^n$ có nghiệm trong tập số nguyên không chia hết cho 7.	4,0
a)	Hai cặp nghiệm là $(7^4 \cdot 2, 7^4)$ và $(7^3 \cdot 10, 7^3 \cdot 9)$.	1,5
	Ta biến đổi phương trình đã cho thành $x^2 + y^2 + xy = 7^n \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4xy = 4 \cdot 7^n \Leftrightarrow (2x + y)^2 + 3y^2 = 4 \cdot 7^n.$ Ta chứng minh phương trình $a^2 + 3b^2 = 7^n$ (*) có nghiệm (a, b) mà $a \not\equiv 0, b \not\equiv 0 \pmod{7} \quad (1)$ bằng phương pháp quy nạp theo n. + Với $n = 1$, phương trình (*) có nghiệm $(a_1, b_1) = (2, 1)$ thỏa (1).	0,5
	+ Giả sử với $n = k \in \mathbb{N}^*$, phương trình (*) có nghiệm (a_k, b_k) thỏa (1), tức là $a_k^2 + 3b_k^2 = 7^k$ và $a_k \not\equiv 0, b_k \not\equiv 0 \pmod{7}.$ Ta có $7^{k+1} = 7(a_k^2 + 3b_k^2) = (2a_k + 3b_k)^2 + 3(a_k - 2b_k)^2 = (2a_k - 3b_k)^2 + 3(a_k + 2b_k)^2.$	1,0
b)	Ta thấy $(2a_k + 3b_k) + (2a_k - 3b_k) = 4a_k \not\equiv 0 \pmod{7}$, nên phải tồn tại một trong hai số không chia hết cho 7, giả sử $2a_k + 3b_k \not\equiv 0 \pmod{7}$. Do $2(2a_k + 3b_k) + 3(a_k - 2b_k) = 7a_k \equiv 0 \pmod{7}$ nên $a_k - 2b_k \not\equiv 0 \pmod{7}$. Do đó với $n = k + 1$ thì $(a_{k+1}, b_{k+1}) = (2a_k + 3b_k, a_k - 2b_k)$ là một nghiệm của phương trình (*) và thỏa điều kiện (1).	0,5
	Ta chứng minh phương trình đã cho có nghiệm với mọi n nguyên dương. Với mỗi số nguyên dương n, gọi (a_n, b_n) là một nghiệm thỏa điều kiện (1) của phương trình $a^2 + 3b^2 = 7^n$. Chọn $x_n = a_n - b_n$, $y_n = 2b_n$ thì $(2x_n + y_n)^2 + 3y_n^2 = 4a_n^2 + 12b_n^2 = 4(a_n^2 + 3b_n^2) = 4 \cdot 7^n.$ Suy ra $(x_n, y_n) = (a_n - b_n, 2b_n)$ là nghiệm của phương trình $x^2 + y^2 + xy = 7^n$. Hiển nhiên $y_n = 2b_n \not\equiv 0 \pmod{7}$ do $b_n \not\equiv 0 \pmod{7}$. Giả sử $x_n \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow a_n \equiv b_n \pmod{7}$. Khi đó $7^n = a_n^2 + 3b_n^2 \equiv 4b_n^2 \pmod{7} \Rightarrow b_n \equiv 0 \pmod{7}$ (vô lí). Do đó $x_n \not\equiv 0 \pmod{7}$. Vậy với mọi n nguyên dương thì phương trình $x^2 + y^2 + xy = 7^n$ có nghiệm trong tập hợp các số nguyên không chia hết cho 7.	0,5

Bài 5	Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Tia AO cắt đoạn thẳng BC tại L. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng BC. Tiếp tuyến qua A' của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'BC$ cắt các tia AB, AC lần lượt tại các điểm D, E. Chứng minh a) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A'BD, A'CE, A'AL$ cùng đi qua một điểm khác A'. b) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác JDE tiếp xúc với (O).	5,0
a)	Giả sử các điểm có vị trí như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.  a) Gọi T là giao điểm khác A' của $(A'BD)$ và $(A'CE)$. Ta có $\widehat{BTC} = 360^\circ - \widehat{BTA'} - \widehat{CTA'} = (180^\circ - \widehat{BTA'}) + (180^\circ - \widehat{CTA'})$ $= \widehat{D_1} + \widehat{E_1} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ Suy ra $T \in (O)$.	1,0
	Khi đó $\widehat{ATA'} = \widehat{ATB} + \widehat{BTA'} = \widehat{C_1} + 180^\circ - \widehat{D_1} = \widehat{C_1} + \widehat{A'_1} + \widehat{B_1}$ $= \widehat{C_1} + \widehat{C_2} + 2\widehat{BAA'}$ $= 2\widehat{C_1} + 2\widehat{LAC}$ $= 2\widehat{ALB} = \widehat{ALA'}$. Suy ra $ALTA'$ là tứ giác nội tiếp. Vậy $(A'BD), (A'CE), (A'AL)$ cùng đi qua T.	1,0
b)	Ta có $\widehat{DTE} = \widehat{B_1} + \widehat{C_3} = 2(90^\circ - \widehat{B}) + 2(90^\circ - \widehat{C}) = 2\widehat{A} = \widehat{DJE}$ nên $T \in (DJE)$. Kẻ tiếp tuyến của (O) là Tx như hình vẽ. Ta có $\widehat{DTx} = \widehat{DTB} - \widehat{xTB}$ $= \widehat{A'_1} - \widehat{TCB}$ $= \widehat{C_2} - \widehat{TCB}$ $= \widehat{TCA'} = \widehat{TED}$. Suy ra Tx cũng là tiếp tuyến của $(TJED)$. Vậy (JDE) và (O) tiếp xúc nhau tại T.	2,0

