

① **Tiệm cận ngang:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$).

Đường thẳng $y = \alpha$ là đường **tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$.

Nhận xét:

— Để tìm **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số ta cần tính giới hạn của hàm số tại **vô cực**.

— Tìm giới hạn ở vô cực của hàm $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$; với $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức không căn:

+ Bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang $Ox : y = 0$.

+ Bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } P(x)}{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } Q(x)} = \alpha$.

Suy ra tiệm cận ngang $y = \alpha$.

+ Bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty \Rightarrow$ Không có tiệm cận ngang.

— Kỹ năng sử dụng máy tính (**tham khảo**):

+ Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = 10^{10}$.

+ Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = -10^{10}$.

② **Tiệm cận đứng:** Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

Nhận xét:

— Để tìm **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số, ta cần **tính giới hạn một bên** của x_0 , với x_0 thường là điều kiện biên của hàm số (hay tại x_0 thì hàm số không xác định).

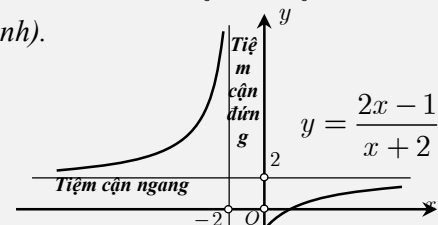
— Kỹ năng sử dụng máy tính (**tham khảo**):

+ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_0 + 10^{-9}$.

+ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_0 - 10^{-9}$.

③ **Một số lưu ý cần nhớ**

— Hàm số nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$) có $\begin{cases} TCN : y = \frac{a}{c} \\ TCD : cx + d = 0 \end{cases}$.



— Kiểm tra xem hàm số đã cho đã “Chuẩn thức hay chưa”, nếu chưa chuẩn thức (còn tồn tại nghiệm mẫu và tử trùng nhau) ta nên chuẩn thức. Nếu gặp đa thức sẽ phân tích thành tích số, gặp căn thức sẽ nhân lượng liên hợp.

— Tìm tiệm cận đứng (tại vị trí hàm số không xác định), kết quả giới hạn phải ra $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Tìm tiệm cận ngang (tại vị trí $\pm\infty$), kết quả sẽ ra một số cụ thể.

Hãy nhớ điều này để giải quyết những bài toán cho dạng bảng biến thiên, mà câu hỏi hỏi đúng, sai?

A. TÌM TIỆM CẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ (thông qua bảng biến thiên – đồ thị)

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		-	+	+
y	-3	$+\infty$	-1	$+\infty$	3

Đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng là a và tổng số đường tiệm cận ngang là b . Khi đó $2a + b$ bằng

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 2.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+		+	+
y	1	$+\infty$	$+\infty$	1

Tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y	0	1	$+\infty$	6

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	-	0	+	+
y	1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$	-2

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+3}{2x-b}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

Giá trị $a - 2b$ bằng?

A. 8

B. -6

C. 0

D. 10

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		+	
y		2			2

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	+	
y		0	2		3	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		-		-	0	+	
y		$+\infty$		$+\infty$	-1		$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y'		-	0	+	
y		$+\infty$	2		9

Tổng số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$		0		$+\infty$		$+\infty$	1

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	1	10	3
			$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	10		1	$+\infty$	-3	

Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	-2	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-3	4	2	3	

Khẳng định nào sau đây sai?

A. Đồ thị hàm có tiệm cận ngang $y = 3$

B. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 3$ và một tiệm cận đứng $x = -2$.

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = 3$ và $y = 4$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y	3	5	$+\infty$	$+\infty$
			$-\infty$	$-\infty$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Phát biểu nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'		-	0	+
y	3	$+\infty$	2	5
				$-\infty$

A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và một trong các đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

B. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng và có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$ và $y=5$.

C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x=1$ và hai tiệm cận đứng là đường thẳng $y=3$ và $y=5$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$		$-$	$+$
y	2	3	-2	$+\infty$

Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$ và $x=2$ tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

B. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng và có một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x=0$ và hai tiệm cận đứng là đường thẳng $y=2$ và $y=3$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$	$-$
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A. Đồ thị hàm số có đúng 4 tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		$+$	$-$	
y		$-\infty$	$+\infty$	0

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	0	2	-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2020}{f(x)}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$		3	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1		1
		-3	

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 2.

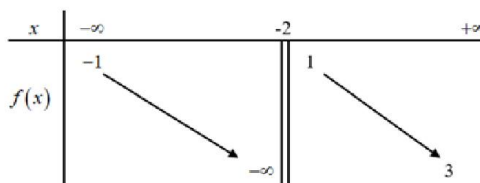
Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$+\infty$		
		2		3	

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên nh sau:



Đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng là a và tổng số đường tiệm cận ngang là b . Khi đó giá trị của biểu thức $\frac{2a^2 + b^3}{a^2 - b^2}$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $[0; 4]$. B. $(-6; -4)$. C. $[-2; 0)$. D. $(-4; -2)$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		4		0		$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

B. TÌM TIỆM CẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ (thông qua hàm số)

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

- A. $y = -2$. B. $y = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 2. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2020}{x+2019}$ là

- A. $y = -2019$. B. $y = 1$. C. $x = -2019$. D. $x = 2020$.

Câu 3. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

- A. $y = 2$. B. $y = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 4. Tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

- A. $I(1; 1)$. B. $I(-1; 1)$. C. $I(1; -1)$. D. $I(-1; -1)$.

Câu 5. Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$ D. $y = \frac{x}{x + 1}$

Câu 7. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.

- A. 2 B. 3 C. 0 D. 1

- Câu 8.** Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$
A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0
- Câu 9.** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$ là
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 10.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 - 4}$. Biết rằng đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và một đường tiệm cận đứng là $x = 2$. Khi đó giá trị của biểu thức $b - a$ bằng?
A. 2 **B.** -4 **C.** -2 **D.** 4
- Câu 11.** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ là
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4
- Câu 12.** Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?
A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 13.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x^2 + x}$ là
A. 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1
- Câu 14.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x^2 + x}$ là
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 15.** Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$.
A. $x = 3$ và $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = -3$ và $x = -2$. **D.** $x = -3$.
- Câu 16.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + x}$ là
A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 17.** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1} - 3x-5}$.
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 18.** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?
A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.
- Câu 19.** Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?
A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.
- Câu 20.** Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 1} + x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

C. ĐỊNH MỀM ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ ĐƯỜNG TIỆM CẬN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ có TXD: D

Điều kiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Điều kiện đủ:

Dạng 1. $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Nếu $\deg P(x) > \deg Q(x)$: thì không có tiệm cận ngang

Nếu $\deg P(x) > \deg Q(x)$: TCN $y = 0$

Nếu $\deg P(x) = \deg Q(x)$: $y = k$ (k là tỉ số hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu)

Dạng 2: $y = f(x) = u - \sqrt{v}$ (hoặc $\sqrt{u} - \sqrt{v}$): Nhân liên hợp $\Rightarrow y = f(x) = \frac{u^2 - v}{u + \sqrt{v}}$ (hoặc $\frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$)

Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có TXD: D

Điều kiện cần: giải $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ là TCĐ khi thỏa mãn đk đủ

Điều kiện đủ:

Điều kiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Điều kiện 2: - x_0 không phải nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCĐ

- x_0 là nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCĐ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận

ngang

A. $m < 0$

B. $m = 0$

C. $m > 0$

D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m = -1$

B. $m \in \{1; 4\}$

C. $m = 4$

D. $m \in \{-1; -4\}$

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$

B. $-1 < m < 1$

C. $m = -1$

D. $m = 1$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

A. $m > 2$ B. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

Câu 6. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

A. 0 B. -3 C. 3 D. 6

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

A. 8 B. 6 C. 7 D. Vô số

Câu 8. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.

A. $m=1$ B. $m=-1$ C. $m=\pm 1$ D. Không có m

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

A. $y = 2x$. B. $2x + y = 0$. C. $x - 2y = 0$. D. $x + 2y = 0$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-2}{x^2-4}$ có đúng 2 tiệm cận?

A. $m = -1$. B. $m = \pm 1$. C. $m = 1$. D. $m = 0$

Câu 11. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$

A. $m = -1$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19. B. 15. C. 17. D. 18.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

A. 4. B. 2. C. Vô số. D. 3.

Câu 14. Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $-\frac{1}{2}$. B. 2. C. -3. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-2x-m}$ có 3 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m > -1 \\ m \neq 8 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 8 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 8 \end{cases}$. D. $m > 8$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?
A. 12. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2+3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.
A. $m = 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m = 1$ và $m = 0$. **D.** $m \neq 0$.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng.
A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2020.

----- HẾT -----

-

Nguyễn Bảo Vương

Vấn đề 5

TIỆM CẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

① **Tiệm cận ngang:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$).

Đường thẳng $y = \alpha$ là đường **tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$.

Nhận xét:

— Để tìm **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số ta cần tính giới hạn của hàm số tại vô cực.

— Tìm giới hạn ở vô cực của hàm $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$; với $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức không căn:

+ Bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang $Ox: y = 0$.

+ Bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } P(x)}{\text{Hệ số } x \text{ bậc cao của } Q(x)} = \alpha$.

Suy ra tiệm cận ngang $y = \alpha$.

+ Bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty \Rightarrow$ Không có tiệm cận ngang.

— Kỹ năng sử dụng máy tính (tham khảo):

+ Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = 10^{10}$.

+ Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = -10^{10}$.

② **Tiệm cận đứng:** Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

Nhận xét:

— Để tìm **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số, ta cần tính giới hạn một bên của x_0 , với x_0 thường là điều kiện biên của hàm số (hay tại x_0 thì hàm số không xác định).

— Kỹ năng sử dụng máy tính (tham khảo):

+ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_0 + 10^{-9}$.

+ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x = x_0 - 10^{-9}$.

③ **Một số lưu ý cần nhớ**

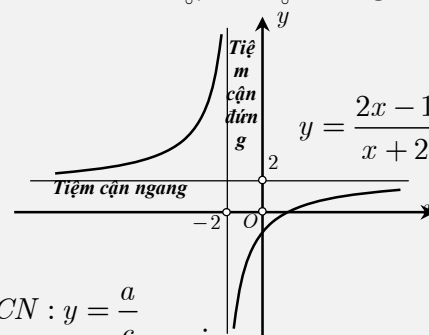
— Hàm số nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$) có $\begin{cases} TCN: y = \frac{a}{c} \\ TCD: cx + d = 0 \end{cases}$.

— Kiểm tra xem hàm số đã cho đã “Chuẩn thức hay chưa”, nếu chưa chuẩn thức (còn tồn tại nghiệm mẫu và tử trùng nhau) ta nên chuẩn thức. Nếu gặp đa thức sẽ phân tích thành tích số, gặp căn thức sẽ nhân lượng liên hợp.

— Tìm tiệm cận đứng (tại vị trí hàm số không xác định), kết quả giới hạn phải ra $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Tìm tiệm cận ngang (tại vị trí $\pm\infty$), kết quả sẽ ra một số cụ thể.

Hãy nhớ điều này để giải quyết những bài toán cho dạng bảng biến thiên, mà câu hỏi hỏi đúng, sai?



A. TÌM TIỆM CẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ (thông qua bảng biến thiên – đồ thị)

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		-	+	+
y	-3	$+\infty$	-1	$+\infty$	3

Đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng là a và tổng số đường tiệm cận ngang là b . Khi đó $2a+b$ bằng

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị có hai tiệm cận đứng là $x=1$, $x=-1$ và hai tiệm cận ngang là $y=-3$, $y=3$. Suy ra $a=2$ và $b=2$.

Vậy $2a+b=6$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+		+	+
y	1	$+\infty$	$+\infty$	1

Tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y	0	1	$+\infty$	6

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta có

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 6 \Rightarrow y = 6$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	1	$-\sqrt{3}$	$+\infty$	-2

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta có

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = -2$; $y = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = +\infty$ do đó đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = 2$.

Vậy tổng số có 3 đường tiệm cận.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+3}{2x-b}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	2	$+\infty$	2

Giá trị $a - 2b$ bằng?

A. 8

B. -6

C. 0

D. 10

Lời giải

Chọn C

Đk: $-a.b - 6 \neq 0 \Leftrightarrow a.b \neq -6$

Từ BBT ta dễ dàng nhận thấy ĐTHS có TCN là: $y = 2$

và tiệm cận đứng là: $x = 1$

Suy ra $\frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow a = 4$ và $\frac{b}{2} = 1 \Leftrightarrow b = 2$ (TMĐK)

Vậy $a - 2b = 4 - 2.2 = 0$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+			+
y	2		$+\infty$		2

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 2.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
y'		+	0	-		+
y	0		2		$-\infty$	3

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow y = 5$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		-		-	0	+	
y	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn B

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -1$ là một tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 1.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$ ↘ 2		$-\infty$ ↗ 9

Tổng số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 9 \Rightarrow y = 9$ là một tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 4$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm là 2.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy hàm số đã cho có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 4. Chọn đáp án **A.**

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	1 ↗ 10	3 ↘ $-\infty$	

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = 10$ nên đường thẳng $x = 1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy hàm số đã cho có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 1. Chọn đáp án **B.**

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$		
y	10		1	$+\infty$	-10		-3	-10

Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0

Lời giải

Chọn C

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -8$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 10$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = -8$, $y = 10$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	-2	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	-3	4	2	3		

Khẳng định nào sau đây sai?

A. Đồ thị hàm có tiệm cận ngang $y = 3$

B. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 3$ và một tiệm cận đứng $x = -2$.

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = 3$ và $y = 4$

Lời giải

Chọn D

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 3$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y	3	5	$+\infty$	$+\infty$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 3$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số hai tiệm cận đứng $x = \pm 1$. Vậy đồ thị hàm số có tổng cộng ba đường tiệm cận.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Phát biểu nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'		-	-	0	+
y	3	$+\infty$	2	5	

- A.** Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và một trong các đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.
B. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng và có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$ và $y = 5$.
C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 1$ và hai tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 3$ và $y = 5$.

Lời giải

Chọn A

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = 3$ và $y = 5$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số một tiệm cận đứng $x = 1$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		-	-	+
y	2	3	-2	$+\infty$

Phát biểu nào sau đây đúng?

- A.** Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$ và $x = 2$ tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
B. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng và có một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $x = 0$ và hai tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 2$ và $y = 3$.

Lời giải

Chọn C

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 2$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số một tiệm cận đứng $x = 0$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$	$-$
$f(x)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A. Đồ thị hàm số có đúng 4 tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận.

C. Đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

+ $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = -2$.

+ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = 2$.

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số không có một tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		$+$	$-$	
y		$-\infty \rightarrow +\infty$	$1 \rightarrow 0$	

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta suy ra:

+ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ nên có đường thẳng $x = -2$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ nên có đường thẳng $x = 0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ nên có đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba tiệm cận.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow -2$	$-2 \rightarrow +\infty$	

Tổng số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2020}{f(x)}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2018}{f(x)}$ là số nghiệm phương trình $f(x) = 0$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành. Nhìn bảng biến thiên ta có số giao điểm bằng 3 nên đồ thị hàm số $y = \frac{2020}{f(x)}$ có 3 tiệm cận đứng.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$	3		$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Ta có: $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2}(1)$. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 1$ và giới hạn của hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ tại các điểm x_1, x_2, x_3, x_4 đều bằng $\pm\infty$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 1^{\pm}} \frac{1}{2f(x)-5} = 0$ nên $x = 1$ không phải tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1		1

Diagram illustrating the behavior of the function y as x approaches $-\infty$ and $+\infty$. The function y is plotted against x , showing a horizontal asymptote at $y = 1$ as $x \rightarrow -\infty$ and $x \rightarrow +\infty$. The function passes through the point $(-\frac{1}{2}, -3)$ where $y' = 0$.

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình

$$2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có 2 tiệm cận đứng.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 1$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là 3.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x) = -\frac{3}{2}$ có hai nghiệm phân biệt a và b (với $a < 0$ và $0 < b < 1$).

Nên, tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ là $\mathbb{R} \setminus \{1; a; b\}$.

Ta có

☐ $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{2f(x)+3} = -\infty$;

☐ $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{1}{2f(x)+3} = +\infty$;

☐ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2f(x)+3} = 0$;

☐ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2f(x)+3} = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{2}$ (1).

Dựa vào BBT ta suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 (với $x_1 < -2 < x_2 < 1 < x_3 < 2 < x_4$).

Mặt khác hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-5} = g(x)$ có tử thức là hằng số nên ta suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 tiệm cận đứng.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên nh sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	-1	1	3

Đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng là a và tổng số đường tiệm cận ngang là b . Khi đó giá trị của biểu thức $\frac{2a^2+b^3}{a^2-b^2}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $[0; 4]$.B. $(-6; -4)$.C. $[-2; 0)$.D. $(-4; -2)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = -1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 3$.

Suy ra tổng số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $2 \Rightarrow b = 2$.

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -2$.

Suy ra tổng số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $1 \Rightarrow a = 1$.

Vậy ta có: $\frac{2a^2+b^3}{a^2-b^2} = \frac{2 \cdot 1^2 + 2^3}{1^2 - 2^2} = -\frac{10}{3} \approx -3.333$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			4		0		$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f^2(x) - 4f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 4 \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+ Xét trường hợp $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1 < -1$ và $x_2 = 1$ là nghiệm bội hai (do đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại $x = 1$). Trường hợp này đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng.

+ Xét trường hợp $f(x) = 4$ có 2 nghiệm $x_3 > 1$ và $x_4 = -1$ là nghiệm bội hai (do đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại $x = -1$). Trường hợp này đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

B. TÌM TIỆM CẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ (thông qua hàm số)

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = -2$.

B. $y = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$$

Suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 2. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2020}{x+2019}$ là

A. $y = -2019$.

B. $y = 1$.

C. $x = -2019$.

D. $x = 2020$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2020}{x+2019} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2020}{x+2019} = 1$$

Suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 3. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

A. $y = 2$.

B. $y = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty$$

Suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 4. Tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

A. $I(1;1)$.

B. $I(-1;1)$.

C. $I(1;-1)$.

D. $I(-1;-1)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$$

Suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty$$

Suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận là $I(-1;1)$.

Câu 5. Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1$$

Suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang.

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

D. $y = \frac{x}{x + 1}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 7. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.

A. 2

B. 3

C. 0

D. 1

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là đường tiệm cận ngang.}$$

Mặt khác:

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow x = 1$ không là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-4)}{(x+1)} = +\infty$$

$\Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận

Câu 8. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{x+1}{x+4}$ (với điều kiện xác định), do đó đồ thị hàm có 1 tiệm cận đứng.

Câu 9. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận ngang:

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(5 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 5 \text{ nên đồ thị hàm số}$$

có một tiệm cận ngang $y = 5$.

Tiệm cận đứng:

$$\text{Cho } x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+1}{x+1} = \frac{6}{2} = 3$ nên $x = 1$ không là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{1}{x+1} \cdot \frac{5x^2 - 4x - 1}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x-1} = -4 < 0 \end{cases}$$

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 - 4}$. Biết rằng đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và một đường tiệm cận đứng là $x = 2$. Khi đó giá trị của biểu thức $b - a$ bằng?

A. 2

B. -4

C. -2

D. 4

Lời giải

Chọn A

ĐTHS có TCN là: $y = 1$. Suy ra $\frac{a}{1} = 1 \Leftrightarrow a = 1$

Phương trình $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

ĐTHS có TCĐ là: $x = 2$. Suy ra phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x = -2$ và nghiệm còn lại phải khác 2.

Ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (-2)^2 - 2b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = 3 \\ (2)^2 + 2b + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b - a = 3 - 1 = 2$$

Câu 11. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn B

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty \Rightarrow x = 2 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2 - 4}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.}$$

Tổng cộng có 2 tiệm cận.

Câu 12. Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$$\text{TH1: } x < -1 \Rightarrow x+1 < 0. \text{ Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Suy ra đồ thị hàm số có TCN $y = -1$, không có TCĐ.

$$\text{TH2: } x > 1 \Rightarrow x+1 > 0. \text{ Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Suy ra đồ thị hàm số có TCN $y = 1$, TCĐ $x = 1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 TCN và 1 TCĐ.

Câu 13. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

A. 3

B. 2

C. 0

D. 1

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = [-25; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$. Biến đổi $f(x) = \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+25}+5)}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+25}+5)} = +\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 14. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định hàm số $D = [-16; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \frac{1}{8}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = +\infty.$$

vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (\sqrt{x+16}+4) = \sqrt{15}+4 > 0$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0$ và $x \rightarrow (-1)^+$ thì $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$.

$$\text{Tương tự } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = -\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Câu 15. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=3$ và $x=2$.

B. $x=3$.

C. $x=-3$ và $x=-2$.

D. $x=-3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x+1)}{(x-3)(2x-1+\sqrt{x^2+x+3})} = -\frac{7}{6}$$

Tương tự $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\frac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x=2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 16. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = [-4; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = -\infty$$

Nên đường thẳng $x = -1$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$$

Nên đường thẳng $x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 17. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

$$+ \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)} = -\infty$$

do đó đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{4\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-3-\frac{5}{x}} = -\frac{1}{3} \text{ do đó đường thẳng } y = -\frac{1}{3} \text{ là đường}$$

tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

□ Tập xác định $D = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

$$\square \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (1)^-} y = +\infty.$$

⇒ Các đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm 1$.

□ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị có một tiệm cận ngang $y = 1$.

Câu 19. Đồ thị hàm số $y = \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-8}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-\frac{8}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = 5$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-8}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-\frac{8}{x}}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = -5$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y = -5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = -\infty$$

(vì $\lim_{x \rightarrow 0^-} (5x-8) = -8 < 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2-3x} = 0$; $\sqrt{x^2-3x} > 0 \forall x \rightarrow 0^-$)

Suy ra: đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = +\infty$$

(vì $\lim_{x \rightarrow 3^+} (5x-8) = 7 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2-3x} = 0$; $\sqrt{x^2-3x} > 0 \forall x \rightarrow 3^+$)

Suy ra: đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 20. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Hàm số } y = \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+2x-1 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{Tập xác định của hàm số đã cho là } D = (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{4}; +\infty\right).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}} = -1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1}{1 + \frac{1}{x}} = 3.$$

$\Rightarrow y = 3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 1} + x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 2x - 1 - x^2}{(x+1)(\sqrt{4x^2 + 2x - 1} - x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(\sqrt{4x^2 + 2x - 1} - x)} = -2.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 1} + x}{x+1}$ có 2 đường tiệm cận.

C. ĐỊNH MỆNH ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ ĐƯỜNG TIỆM CẬN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ có TXD: D

Điều kiện cần: D phải chứa $+\infty$ hoặc $-\infty$

Điều kiện đủ:

Dạng 1. $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Nếu $\deg P(x) > \deg Q(x)$: thì không có tiệm cận ngang

Nếu $\deg P(x) > \deg Q(x)$: TCN $y = 0$

Nếu $\deg P(x) = \deg Q(x)$: $y = k$ (k là tỉ số hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu)

Dạng 2: $y = f(x) = u - \sqrt{v}$ (hoặc $\sqrt{u} - \sqrt{v}$): Nhân liên hợp $\Rightarrow y = f(x) = \frac{u^2 - v}{u + \sqrt{v}}$ (hoặc $\frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$)

Đường tiệm cận đứng

Cho hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có TXD: D

Điều kiện cần: giải $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ là TCĐ khi thỏa mãn đk đủ

Điều kiện đủ:

Điều kiện 1: x_0 làm cho $P(x)$ và $Q(x)$ xác định.

Điều kiện 2: - x_0 không phải nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCĐ

- x_0 là nghiệm $P(x) \Rightarrow x = x_0$ là TCĐ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận

ngang

A. $m < 0$

B. $m = 0$

C. $m > 0$

D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài

Lời giải

Chọn C

Xét các trường hợp sau:

Với $m = 0$: hàm số trở thành $y = x+1$ nên không có tiệm cận ngang.

Với $m < 0$:

hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{1-|m|x^2}}$ có tập xác định là $D = \left(-\frac{1}{\sqrt{|m|}}; \frac{1}{\sqrt{|m|}}\right)$ suy ra không tồn tại giới

hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ hay hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m > 0$:

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là: $y = \frac{1}{\sqrt{m}}; y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m > 0$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m = -1$

B. $m \in \{1; 4\}$

C. $m = 4$

D. $m \in \{-1; -4\}$

Lời giải

$$y = \frac{x^2+m}{x^2-3x+2} = \frac{x^2+m}{(x-1)(x-2)}.$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận

đứng $\Leftrightarrow$ pt $x^2+m=0$ nhận nghiệm $x=1$ hoặc $x=2$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Với $m = -1$ có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Với $m = -4$ có một tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy $m \in \{-1; -4\}$.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

$$\text{Kí hiệu (C) là đồ thị hàm số } y = \frac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}.$$

* Trường hợp 1: $m = 0$.

Khi đó $y = \frac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó chọn $m = 0$.

* Trường hợp 2: $m \neq 0$.

$$\text{Xét phương trình } (mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1) = 0 \quad (1)$$

Nhận thấy: (C) luôn có một đường tiệm cận ngang $y = 0$ và phương trình (1) không thể có duy nhất một nghiệm đơn với mọi m .

Do đó (C) có đúng một đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) không có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow (1)$ vô

$$\text{nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-3m < 0 \\ 9m^2-9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases}, (\text{không tồn tại } m).$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m = 0$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng.

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$ B. $-1 < m < 1$ C. $m = -1$ D. $m = 1$

lời giải

Chọn B

để hàm số không có tiệm cận đứng thì $x^2 - 2mx + 1 = 0$ vô nghiệm

suy ra $m^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < m < 1$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận

- A. $m > 2$ B. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Câu 6. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

- A. 0 B. -3 C. 3 D. 6

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x = -\frac{d}{c} = -m-3 = 0$ làm TCĐ $\Rightarrow m = -3$

Đồ thị hàm số nhận $y = \frac{a}{c} = n-3 = 0$ làm TCN $\Rightarrow n = 3$.

Vậy $m+n = 0$.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

- A. 8 B. 6 C. 7 D. Vô số

Lời giải

TH1: $m < 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (x_1; x_2)$, ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó $m < 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

TH2: $m = 0 \Rightarrow y = \frac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 4)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} y = -\infty$. Khi đó ta có $x = -4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó $m = 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán

TH3: $m > 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 2m > 0 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m - 8 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 6 \end{cases} \Rightarrow m = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}. \text{ Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của tham}$$

số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 8. Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.

A. $m = 1$

B. $m = -1$

C. $m = \pm 1$

D. Không có m

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$ Hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty; a)$, $(-\infty; a]$, $(a; +\infty)$ hoặc $[a; +\infty)$

$m \geq 0$

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x + 7}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang

TH2: $m > 0, y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$

Khi $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \sqrt{m - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}} \right) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy $m = 1$

Cách trắc nghiệm:

Thay $m = 1 \Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = \frac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}) = -\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m = -1 \Rightarrow y = x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7})$ không xác định.

Vậy $m = 1$

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?

A. $y = 2x$.

B. $2x + y = 0$.

C. $x - 2y = 0$.

D. $x + 2y = 0$.

Lời giải

Chọn C

Khi đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận thì:

Đường tiệm cận ngang có phương trình: $y = m$

Đường tiệm cận đứng có phương trình: $x = 2m$. Vậy giao điểm hai tiệm cận là $I(2m; m)$

Khử m từ hệ $\begin{cases} y = m \\ x = 2m \end{cases}$ ta được $x - 2y = 0$.

Vậy giao điểm của hai tiệm cận thuộc đường thẳng có phương trình $x - 2y = 0$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-2}{x^2-4}$ có đúng 2 tiệm cận?

A. $m = -1$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Thử nghiệm

Thế $m = -1$ vào $y = \frac{mx-2}{x^2-4}$ ta được $y = \frac{-x-2}{x^2-4} \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận: $x = 2; y = 0$.

Thế $m = 1$ vào $y = \frac{mx-2}{x^2-4}$ ta được $y = \frac{x-2}{x^2-4} \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận: $x = -2; y = 0$.

Cách 2: Tự luận

$$D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx-2}{x^2-4} = 0 \quad (\forall m \in \mathbb{R}) \Rightarrow \text{Hàm số có 1 TCN.}$$

Để hàm số có đúng 2 tiệm cận thì hàm số cần có thêm 1 TCD.

+ Xét $x = 2$ không là TCD khi $x = 2$ là nghiệm của $mx - 2 \Leftrightarrow 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Thử lại: với $m = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty \Rightarrow x = -2$ là TCD.

+ Xét $x = -2$ không là TCD khi $x = -2$ là nghiệm của $mx - 2 \Leftrightarrow -2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Thử lại: với $m = -1$ thì $x = 2$ là TCD.

Câu 11. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$

A. $m = -1$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{m}{2} \right\}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m+1)x-5m}{2x-m} = \frac{m+1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(m+1)x-5m}{2x-m} = \frac{m+1}{2}.$$

$$\Rightarrow y = \frac{m+1}{2} \text{ là TCN của đồ thị hàm số.}$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19.

B. 15.

C. 17.

D. 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{2x^2+6x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình

$$2x^2 + 6x - m - 3 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 2(-m-3) > 0 \\ 2.1^2 + 6.1 - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{15}{2} \\ m \neq 5 \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là

$\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

A. 4.

B. 2.

C. Vô số.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

* Xét điều kiện tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

$$\text{Trường hợp 1: } g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{16}{9}$$

Trường hợp 2: $g(x) = mx^2 + 3mx + 4 \geq 0$ với $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ với $x_1; x_2$ là nghiệm của

$$g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{16}{9}$$

Vậy $m \geq 0$ thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{m + \frac{3m}{x} + \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = -\sqrt{m}$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m > 0$

* Xét trường hợp $x = -2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x = -2$ là nghiệm của $g(x) = mx^2 + 3mx + 4$

$$\Rightarrow g(-2) = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\text{Khi đó } y = \frac{\sqrt{2x^2+6x+4}}{x+2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} y = \frac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[-\sqrt{\frac{2(x+1)}{x+2}} \right] = -\infty$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

$\Rightarrow m = 2$ thỏa mãn

* Xét trường hợp $x = -2$ không là nghiệm của tử số, để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$\text{thì } \begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ g(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(-2) > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -2$ với $\forall m \in (0; 2]$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ có 3 tiệm cận là $\forall m \in (0; 2]$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m = 1; m = 2$.

Câu 14. Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. -3.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2$

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = 1$ hoặc $f(x) = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) = 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2 - 2) > 0 \\ 1 + 2(m-1) + m^2 - 2 = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m = 1; m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\frac{1}{2}$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - m}$ có 3 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m > -1 \\ m \neq 8 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 8 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 8 \end{cases}$.

D. $m > 8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - m} = 1$, suy ra đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

Do đó, đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - m}$ có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có thêm hai đường tiệm cận đứng. Khi đó, phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt không trùng với

các nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$, hay $\begin{cases} \Delta' = 1 + m > 0 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 - m \neq 0 \\ (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq -1 \\ m \neq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 8 \end{cases}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

A. 12.

B. 9.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x \neq 3$.

Xét phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ (*) ta có

$$x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x^2 - 2mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0 \end{cases}$$

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $x \neq 3$ khi và chỉ khi $m \neq 3$ và phương trình

$$x^2 - 2mx + 1 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x \neq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 1 \\ m < -1 \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases}$$

Do m nguyên và $m \in [-6;6]$ nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + m}{x - m}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m = 1$.

B. $m > 1$.

C. $m = 1$ và $m = 0$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow m} \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m} = \lim_{x \rightarrow m} \left(2x + 2m - 3 + \frac{2m^2 - 2m}{x - m} \right).$$

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại $\lim_{x \rightarrow m} \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$,

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy đáp án C.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng.

A. 2019.

B. 2021.

C. 2018.

D. 2020.

Lời giải

Chọn D

Để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 4x + m}}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m > 0 \\ 12+m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2017 \leq m < 4 \\ m \neq -12 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2017; -2016; \dots; 3\} \setminus \{-12\}.$$

Do đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài là: $3 - (-2017) + 1 - 1 = 2020$ giá trị.

----- HẾT -----

Nguyễn Bảo Vương