

Câu 1: (1 điểm). Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+4}{x}$.

Câu 2: (1 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = x - \ln(2x+1), x \in [0;1]$.

Câu 3: (1 điểm).

1) Tìm $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn: $(1-z)(1+i) + \bar{z}(2-i) = 3+6i$

2) Giải phương trình trên tập số thực $\mathbb{R}$: $2^x + 4^x = 6$

Câu 4: (1 điểm). Tính tích phân: $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

Câu 5: (1 điểm). Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt phẳng (Oxy) .

Viết phương trình đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) .

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Oxy) .

Câu 6: (1 điểm).

a) Cho $\tan \alpha = \frac{2}{3}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính $P = \sin \alpha - 2 \cos \alpha$.

b) Lấy ngẫu nhiên một số có 4 chữ số đôi một phân biệt. Tính xác suất để số được lấy không lớn hơn 2016.

Câu 7: (1 điểm). Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Tam giác ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = 2a$, góc giữa AA' và đáy (ABC) là 60° . Tính thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

Câu 8: (1 điểm). Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$. Gọi $M(5;3), N(-4;1)$ lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BC, AD sao cho $BM = MC, DN = 3NA$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết tọa độ các đỉnh đều là các số nguyên.

Câu 9: (1 điểm). Giải hệ sau trên tập số thực $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 + x - 1 = 0 \\ \sqrt{y} - x + 1 = \sqrt{x^2 - y + 3} \end{cases}$$

Câu 10: (1 điểm). Cho $x, y, z \geq 0, x+y+z=1$. Tìm min của $P = 18xyz - (xy + yz + zx)$.

Hết

Giám thị coi thi không phải giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+4}{x}$.

MXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y' = -\frac{4}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$	0.25
Giới hạn và tiệm cận	0.25
BBT và đơn điệu	0.25
Đồ thị	0.25

Câu 2: (1 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = x - \ln(2x+1), x \in [0;1]$.

$y' = 1 - \frac{2}{2x+1}$	0.25
$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$	0.25
Tính các giá trị	0.25
$\min_{x \in [0;1]} y = 0; \max_{x \in [0;1]} y = \frac{1}{2} - \ln 2.$	0.25

Câu 3: (1 điểm).

- 1) Tìm $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn: $(1-z)(1+i) + \bar{z}(2-i) = 3+6i$
- 2) Giải phương trình trên tập số thực $\mathbb{R}$: $2^x + 4^x = 6$.

Gọi $z = a+bi (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a-bi$	0.25
Thay vào phương trình và giải tìm được $z = 2-3i$	0.25
Đặt $t = 2^x$ ta có phương trình $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2$	0.25
Giải tìm được $x = 1$	0.25

Câu 4: (1 điểm). Tính tích phân: $I = \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$.

$I = \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} dx$.	0.25
Đặt $u = \sqrt{x}+1 \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ và đổi cận	0.25
$I = \int_2^3 \frac{2du}{u}$	0.25
$I = 2 \ln u \Big _2^3 = 2 \ln \frac{3}{2}$	0.25

Câu 5: (1 điểm). Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P): $x+y-z-1=0$.

- a) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt phẳng (Oxy).
Viết phương trình đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy).
- b) Tính góc giữ hai mặt phẳng (P) và (Oxy).

Phương trình mặt phẳng (Oxy): $z = 0$. Xét $(1:1:-1) \neq (0:0:1)$ nên hai mặt phẳng (P) và (Oxy) cắt nhau.	0.25
---	------

Gọi $M(x; y; z) \in d = (P) \cap (Oxy) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Đặt $y = t$ ta có phương trình tham số giao tuyến của (P) và (Oxy): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$	0.25
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng, ta có $\cos \alpha = \frac{ \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{Oxy} }{ \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{Oxy} } = \frac{1}{\sqrt{3}}$	0.25
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng là $\alpha \approx 54^\circ 44' 82''$	0.25

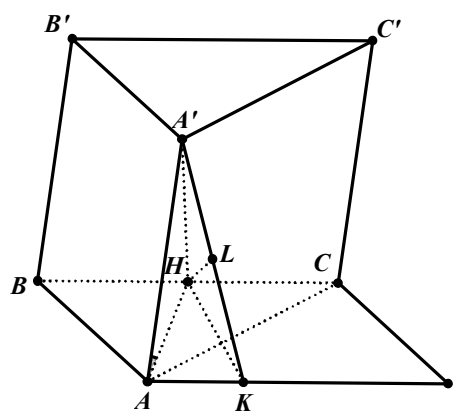
Câu 6: (1 điểm).

a) Cho $\tan \alpha = \frac{2}{3}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính $P = \sin \alpha - 2 \cos \alpha$.

b) Lấy ngẫu nhiên một số có 4 chữ số đôi một phân biệt. Tính xác suất để số được lấy không lớn hơn 2016.

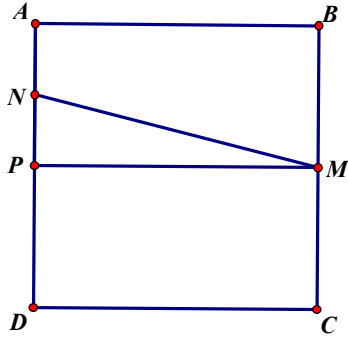
Vì $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos \alpha < 0$, đồng thời $\tan \alpha = \frac{2}{3} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0$	0.25
Tính được $\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{13}}, \sin \alpha = \frac{-2}{\sqrt{13}}$ và $P = \frac{4}{\sqrt{13}}$	0.25
Số các số tự nhiên $\overline{abcd}$ có 4 chữ số đôi một phân biệt là $9.8.7$ (có 9 cách chọn $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$). Số $\overline{bcd}$ có $A_9^3 = 9.8.7$ cách chọn	0.25
*) $\overline{abcd} \leq 2016 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 (\text{chọn } \overline{bcd} \text{ có } A_9^3 = 9.8.7 \text{ cách}) \\ \overline{abcd} \in \{2013, 2014, 2015, 2016\} \end{cases}$ Vậy xác suất cần tìm $p = \frac{A_9^3 + 4}{9 \cdot A_9^3} = \frac{127}{1134}$.	0.25

Câu 7: (1 điểm). Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Tam giác ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = 2a$, góc giữa AA' và đáy (ABC) là 60° . Tính thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

	$AA' \perp AH = 60^\circ, AH = \frac{a\sqrt{5}}{2}, A'H = \frac{a\sqrt{15}}{2}$	0.25
	$S_{ABC} = a^2; V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{2}$	0.25
	Dựng hình bình hành ABCD. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AD và L là hình chiếu vuông góc của H lên $A'K$. Ta có : $d(AA', BC) = d(BC, (AA'D)) = d(H, (AA'D)) = HL$	0.25
	$HK = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ (Chiều cao của tam ABC kẻ từ A)	0.25

	$\frac{1}{HL^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{15a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{91}{60a^2}$ $\Rightarrow HL = a\sqrt{\frac{60}{91}}. \text{ Kết luận: } d(AA', BC) = a\sqrt{\frac{60}{91}}$	
--	---	--

Câu 8: (1 điểm). Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$. Gọi $M(5;3), N(-4;1)$ lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BC, AD sao cho $BM = MC, DN = 3NA$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết tọa độ các đỉnh đều là các số nguyên.

Gọi P là trung điểm AD và gọi cạnh hình vuông là a thì ta có $MP = a, NP = \frac{a}{4}$. Xét tam giác MNP vuông tại P ta có: $MP^2 + NP^2 = MN^2 \Leftrightarrow a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = 85 \Leftrightarrow a = 4\sqrt{5}$		0.25
P nằm trên đường tròn tâm N, bán kính $NP = \frac{a}{4} = \sqrt{5}$ và đường tròn tâm M, bán kính $MP = a = 4\sqrt{5}$ nên tọa độ P thỏa mãn hệ : $\begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{67}{17} \\ y = \frac{55}{17} \end{cases}$		0.25
Nếu $P\left(-\frac{67}{17}; \frac{55}{17}\right)$ thì kết hợp với N là trung điểm AP, ta có A có tọa độ không nguyên nên loại. Nếu $P(-3; -1)$ thì sử dụng N là trung điểm của PA nên có tọa độ $A(-5; 3)$. Lại có P là trung điểm của AD nên suy ra $D(-1; -5)$		0.25
Đi đến đáp số: $A(-5; 3), B(3; 7), C(7; -1), D(-1; -5)$		0.25

Câu 9: (1 điểm). Giải hệ sau trên tập số thực $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 + x - 1 = 0 \\ \sqrt{y} - x + 1 = \sqrt{x^2 - y + 3} \end{cases}$$

ĐK: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 - y + 3 \geq 0 \end{cases}$. (Trong PT $2x^2 - 3xy + y^2 + x - 1 = 0$ cho $y = 1000$ ta có PT $2x^2 + (1 - 3000)x + 1000^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 999 = y - 1 \\ x = \frac{1001}{2} = \frac{y + 1}{2} \end{cases}$. Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$	0.25
Nếu $y = x + 1$, thay vào (2), ta có $\sqrt{x+1} - x + 1 = \sqrt{x^2 - x + 2}$ (3) $\Leftrightarrow 1 - x + \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x+1} \geq 0 \\ (1-x)^2 + x + 1 + 2(1-x)\sqrt{x+1} = x^2 - x + 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x+1} \geq 0 \\ (1-x)\sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (\Rightarrow y = 2) \\ x = -1 (\Rightarrow y = 0) \end{cases}$	0.25

Nếu $y = 2x - 1$, thay vào (2), ta có $g(x) = \sqrt{2x-1} - x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 0 \left(x \geq \frac{1}{2} \right)$

Ta có $g'(x) = \frac{1 - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$

Ta có : $x \geq 1 \Rightarrow g'(x) \leq 0; x \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right) \Rightarrow g'(x) > 0$ Vậy ta có BBT của $g(x)$ như sau:

x	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	—
$g(x)$	$1 - \sqrt{3}$		

0.25

Vậy $g(x) < 0, \forall x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = 0$ vô nghiệm.

Cách khác: $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} - x + 1 = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

$VP = \sqrt{x^2 - 2x + 4} = \sqrt{(x-1)^2 + 3} \geq \sqrt{3}$

$VT = \sqrt{2x-1} - x + 1 = t - \frac{t^2 + 1}{2} + 1 = -\frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + 1 \leq 1$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Đáp số: nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (-1; 0), (1; 2)$.

0.25

Câu 10:(1 điểm). Cho $x, y, z \geq 0, x + y + z = 1$. Tìm min của $P = 18xyz - (xy + yz + zx)$.

$P = xy(18z - 1) - z(x + y) = xy(18z - 1) - z(1 - z) = z^2 + (18xy - 1)z - xy = f(z)$

Ta có $f'(z) = 2z + (18xy - 1); f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 - 18xy}{2} = z_0$

0.25

Nếu $18xy > 1 \Leftrightarrow xy > \frac{1}{18}$ thì $z_0 < 0$ nên lập BBT của hàm số $f(z)$ trên $[0; 1]$ ta có

$f(z) \geq f(0) = -xy \geq -\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$ (Vì $z = 0 \Rightarrow x + y = 1$)

0.25

Nếu $18xy \leq 1 \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{18}$ thì $z_0 \in \left[0; \frac{1}{2} \right]$ nên lập BBT của hàm số $f(z)$ trên $[0; 1]$ ta có

$f(z) \geq f(z_0) = -81x^2y^2 + 8xy - \frac{1}{4} = g(xy)$ với

$g(t) = -81t^2 + 8t - \frac{1}{4}; g'(t) = -162t + 8; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{81}$

t	0	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{18}$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	$-\frac{17}{324}$		

0.25

Vậy $f(z) \geq g(xy) \geq \frac{-1}{4}$ Dấu bằng xảy ra khi $xy = 0, z = \frac{1}{2}$	
Tóm lại $P = f(z) \geq \frac{-1}{4}$. Hơn nữa khi $x = y = \frac{1}{2}, z = 0$ thì $P = \frac{-1}{4}$ nên $\min P = \frac{-1}{4}$	0.25