

Ngày thi: 28/9/2024 – Thời gian: 120 phút

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 02 trang)

Câu 1 (4 điểm):

a) Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$. Tính $\cos 2\alpha$, $\sin \frac{\alpha}{2}$.

b) Với mọi $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$.

Câu 2 (3 điểm): Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O là điểm bên trong tam giác BCD , M là điểm trên AO . Hãy tìm giao tuyến giữa hai mặt phẳng (MCD) và (ABD) .

Câu 3 (3 điểm): Một gia đình dự định trồng rau và hoa trên một mảnh đất có diện tích 8 ha. Nếu trồng 1 ha rau thì cần 20 ngày công và thu lợi 3 triệu. Nếu trồng hoa thì cần 30 ngày công và thu lợi 4 triệu. Biết rằng, gia đình chỉ có thể sử dụng không quá 180 ngày công cho công việc trồng rau và hoa. Tìm số lợi nhuận cao nhất từ việc gia đình trồng rau và hoa nói trên?

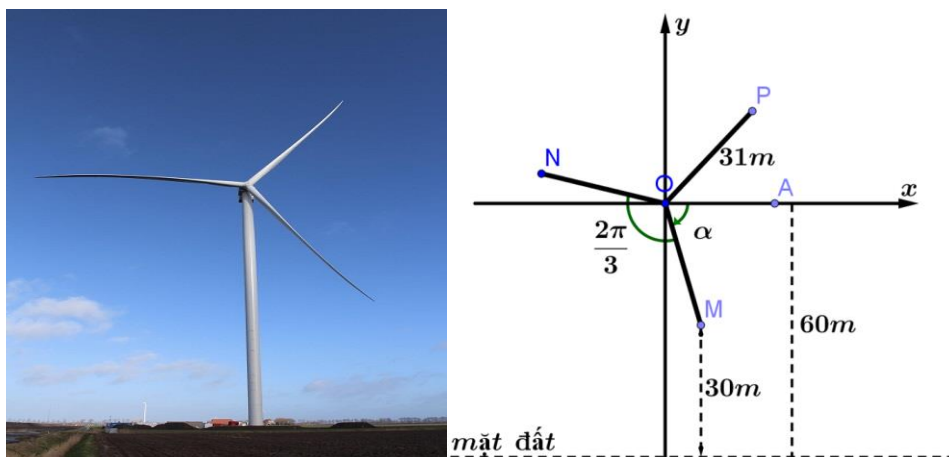
Câu 4 (3 điểm): Có 10 tấm bìa khác nhau ghi 10 chữ “NƠI”, “NÀO”, “CÓ”, “Ý”, “CHÍ”, “NƠI”, “ĐÓ”, “CÓ”, “CON”, “ĐƯỜNG”. Một người xếp ngẫu nhiên 10 tấm bìa cạnh nhau. Tính xác suất để xếp các tấm bìa được dòng chữ “NƠI NÀO CÓ Ý CHÍ NƠI ĐÓ CÓ CON ĐƯỜNG”.

Câu 5 (3 điểm): Bạn Hà cần làm một khung ảnh hình chữ nhật sao cho phần trong của khung là hình chữ nhật có kích thước $17\text{cm} \times 25\text{cm}$, độ rộng viền xung quanh là x (cm) (tham khảo hình vẽ).

Hỏi bạn Hà cần phải làm độ rộng viền khung ảnh tối đa bao nhiêu cm để diện tích của cả khung ảnh lớn nhất là 513cm^2 ?



Câu 6 (4 điểm): Trong hình bên dưới, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài $31m$, độ cao của điểm M so với mặt đất là $30m$, khoảng cách từ trục quay của tua-bin tới mặt đất là $60m$. Biết góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α như hình vẽ



- Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.
- Tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.

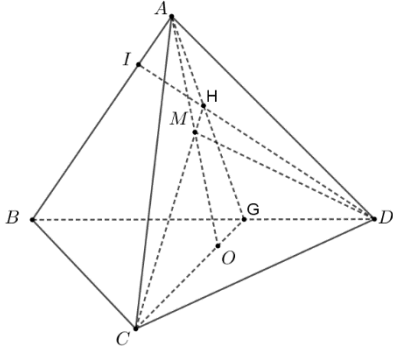
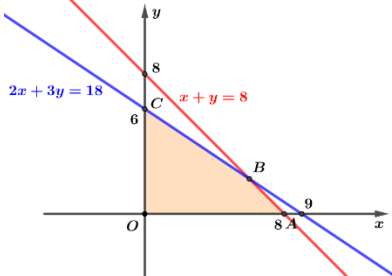
----- HẾT -----

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:Số báo danh:

Chữ kí của giám thị 1:Chữ kí của giám thị 2:

THANG ĐIỂM ĐÁP ÁN THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG MÔN TOÁN KHỐI 11

1a) Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$. Tính $\cos 2\alpha, \sin \frac{\alpha}{2}$.	2 điểm
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$.	0.5
$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$.	0.5
$-\frac{3}{5} = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.	1
b) Với mọi $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. Chứng minh rằng: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$.	2 điểm
$VT = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = VP$.	0.5x4
Câu 2 (3 điểm): Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O là điểm bên trong tam giác BCD , M là điểm trên AO .	
	
$D \in (MCD) \cap (ABD)$ (1)	0.5
Gọi $G = CO \cap BD, H = MC \cap AG$	0.5
$H \in AG, AG \subset (ABD); H \in CM, CM \subset (MCD)$. Suy ra $H \in (MCD) \cap (ABD)$ (2)	1.5
$(1)(2) \Rightarrow (MCD) \cap (ABD) = DH$	0.5
Câu 3 (3 điểm): Gọi $x, y (x \geq 0, y \geq 0)$ lần lượt là số ha đất trồng rau và hoa.	
Diện tích đất trồng canh tác không vượt quá 8 ha nên ta có: $x + y \leq 8$.	0.25
Số ngày công sử dụng không vượt quá 180 ngày nên $20x + 30y \leq 180$.	0.25
Từ đó, ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \end{cases} \quad (1)$	1
	
Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền trong của tứ giác $OABC$, kể cả 4 cạnh của tứ giác đó, với $O(0;0), A(8;0), B(6;2), C(0;6)$	
Ta có: $T(0,0) = 0; T(8;0) = 21; T(6;2) = 26; T(0;6) = 24$	

Vậy: Số lợi nhuận cao nhất mà gia đình thu được từ trồng rau và hoa là 26 triệu đồng.	0.25
Câu 4 (3 điểm): $n(\Omega) = 10!$ Gọi A là biến cố xếp các tấm bìa được dòng chữ “NƠI NÀO CÓ Ý CHÍ NƠI ĐÓ CÓ CON ĐƯỜNG”. +) Có C_2^1 cách chọn một chữ “NƠI” và đặt vào đầu câu. +) Có C_2^1 cách chọn một chữ “CÓ” và đặt vào vị trí thứ ba. +) Các vị trí còn lại chỉ có một cách đặt chữ. Khi đó $n(A) = C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot 1 = 4$. Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{10!} = \frac{1}{907200}$.	0.5 2 0.5
Câu 5 (3 điểm): Kích thước của cả khung ảnh là: $(17 + 2x)$ cm x $(25 + 2x)$ cm , với điều kiện: $x > 0$ Diện tích cả khung ảnh là: $S = (17 + 2x)(25 + 2x) = 4x^2 + 84x + 425$ (cm^2) Để diện tích của cả khung ảnh lớn nhất là 513 cm^2 thì: $4x^2 + 84x + 425 \leq 513 \Leftrightarrow 4x^2 + 84x - 88 \leq 0 \Leftrightarrow -22 \leq x \leq 1$ Do điều kiện: $x > 0$ nên ta được: $0 < x \leq 1$. Kết luận: Vậy cần phải làm độ rộng viền khung ảnh tối đa 1 cm .	0.5 0.5 1.5 0.5
Câu 6 (4 điểm):	
a)	
$\sin \alpha = -\frac{30}{31}; \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{30}{31}\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{31}.$	0.5x2
b)	
$\sin(OA, ON) = \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \alpha \sin \frac{2\pi}{3} = \left(-\frac{30}{31}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{61}}{31}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30 - \sqrt{183}}{62}$ Khoảng cách từ N đến mặt đất là $60 + 31 \sin(OA, ON) \approx 68,2(m)$	1.5
$\sin(OA, OP) = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{2\pi}{3} = \left(-\frac{30}{31}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{61}}{31}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30 + \sqrt{183}}{62}$ Khoảng cách từ P đến mặt đất là $60 + 31 \sin(OA, OP) \approx 81,8(m)$	1.5