

# Mục lục

<b>Chương 1. MỘT SỐ VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC</b>	<b>3</b>
1.1 Khái niệm và các tính chất của bất đẳng thức . . . . .	3
1.1.1 Số thực dương, số thực âm . . . . .	3
1.1.2 Khái niệm bất đẳng thức . . . . .	3
1.1.3 Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức . . . . .	4
1.2 Một số vấn đề cần lưu ý khi giải bài toán về bất đẳng thức . . . . .	5
1.2.1 Dự đoán dấu “=” xảy ra . . . . .	5
1.2.2 Kỹ thuật chuẩn hóa . . . . .	8
1.2.3 Bài tập . . . . .	11
1.3 Hướng dẫn, đáp số . . . . .	12
<b>Chương 2. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN</b>	<b>13</b>
2.1 Bất đẳng thức AM-GM . . . . .	13
2.1.1 Bất đẳng thức AM-GM . . . . .	13
2.1.2 Các hệ quả . . . . .	16
2.1.3 Các ví dụ . . . . .	16
2.1.4 Bài tập . . . . .	27
2.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz . . . . .	32
2.2.1 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức . . . . .	32
2.2.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức . . . . .	33
2.2.3 Các ví dụ . . . . .	34
2.2.4 Bài tập . . . . .	42
2.3 Bất đẳng thức Schur . . . . .	45

---

2.3.1	Bất đẳng thức Schur . . . . .	45
2.3.2	Các trường hợp đặc biệt . . . . .	46
2.3.3	Bất đẳng thức Schur suy rộng . . . . .	46
2.3.4	Các ví dụ . . . . .	46
2.3.5	Bài tập . . . . .	50
2.4	Hướng dẫn, đáp số . . . . .	51
2.5	Tài liệu tham khảo . . . . .	51

## Chương 1

# MỘT SỐ VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

### 1.1 Khái niệm và các tính chất của bất đẳng thức

#### 1.1 Số thực dương, số thực âm

- Nếu  $x$  là số thực dương, ta ký hiệu  $x > 0$
- Nếu  $x$  là số thực âm, ta ký hiệu  $x < 0$
- Nếu  $x$  là số thực dương hoặc  $x = 0$ , ta nói  $x$  là số thực không âm, ký hiệu  $x \geq 0$
- Nếu  $x$  là số thực âm hoặc  $x = 0$ , ta nói  $x$  là số thực không dương, ký hiệu  $x \leq 0$ .

#### 1.1 Khái niệm bất đẳng thức

**Định nghĩa 1.1.** Số thực  $a$  được gọi là lớn hơn số thực  $b$ , ký hiệu  $a > b$  nếu  $a - b$  là một số dương, tức là  $a - b > 0$ . Khi đó ta cũng ký hiệu  $b < a$ .

Ta có:  $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ .

Nếu  $a > b$  hoặc  $a = b$ , ta viết  $a \geq b$ . Ta có:  $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$ .

**Định nghĩa 1.2.** Giả sử  $A, B$  là hai biểu thức bằng số. Khi đó các mệnh đề có dạng:

"  $A$  lớn hơn  $B$  ", ký hiệu :  $A > B$

"  $A$  nhỏ hơn  $B$  ", ký hiệu :  $A < B$

"  $A$  lớn hơn hay bằng  $B$  " ký hiệu  $A \geq B$

"  $A$  nhỏ hơn hay bằng  $B$  " ký hiệu  $A \leq B$

được gọi là một *bất đẳng thức*.

**Quy ước :**

- Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
- Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng.

### 1.1 Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

**Tính chất 1.1.** (Tính chất bắc cầu) nếu  $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$  thì  $a > c$

**Tính chất 1.2.**  $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

**Hệ quả 1:**  $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$ .

**Hệ quả 2:**  $a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$ .

**Tính chất 1.3.**  $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

**Tính chất 1.4.**  $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc \text{ nếu } c > 0 \\ ac < bc \text{ nếu } c < 0 \end{cases}$

**Hệ quả 3:**  $a > b \Leftrightarrow -a < -b$ .

**Hệ quả 4:**  $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ nếu } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ nếu } c < 0 \end{cases}$ .

**Tính chất 1.5.**  $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$

**Tính chất 1.6.**  $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

**Tính chất 1.7.**  $a > b > 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n > b^n$

**Tính chất 1.8.**  $a > b > 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

**Hệ quả 5:**

- Nếu  $a$  và  $b$  là hai số dương thì :  $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
- Nếu  $a$  và  $b$  là hai số không âm thì :  $a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$ .

**Tính chất 1.9.** Với mọi  $a, b \in \mathbb{R}$  ta có:

- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \leq |a| + |b|$
- $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geq 0$
- $|a - b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leq 0$ .

## 1.2 Một số vấn đề cần lưu ý khi giải bài toán về bất đẳng thức

### 1.2 Dự đoán dấu “=” xảy ra

Trong chứng minh bất đẳng thức, việc dự đoán dấu “=” xảy ra khi nào có ý nghĩa rất quan trọng. Trong một số trường hợp, việc dự đoán dấu “=” xảy ra giúp định hướng tìm lời giải. Thông thường, với các bất đẳng thức đối xứng ba biến thì đẳng thức xảy ra khi ba biến bằng nhau, với các bất đẳng thức hoán vị thì đẳng thức có khi hai biến bằng nhau, với các bất đẳng thức có biến thuộc đoạn  $[\alpha; \beta]$  thì đẳng thức xảy ra khi có một biến bằng  $\alpha$  hoặc  $\beta, \dots$

**Ví dụ 1.1**

Cho các số thực  $x, y, z > 0$  thỏa  $x + y + z \leq 3$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{3}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{3}{z^2}} \geq 6.$$

**Lời giải.** Ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi  $x = y = z = 1$ .

Khi  $x = 1$  thì  $x^2 = 1$  và  $\frac{3}{x^2} = 3$  nên ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 4 số ta được

$$x^2 + \frac{3}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \geq \frac{4}{x}.$$

Tương tự

$$y^2 + \frac{3}{y^2} \geq \frac{4}{y} \text{ và } z^2 + \frac{3}{z^2} \geq \frac{4}{z}.$$

Do đó

$$\sqrt{x^2 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{3}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{3}{z^2}} \geq 2 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) \geq \frac{18}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}.$$

Mặt khác  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3(x + y + z)} \leq 3$  nên ta có

$$\sqrt{x^2 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{3}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{3}{z^2}} \geq \frac{18}{3} = 6 \text{ (đpcm).}$$

■

**Ví dụ 1.2**

Cho các số thực không âm  $x, y, z$  đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left( \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right) \geq 4.$$

**Lời giải.** Vì  $x, y, z \geq 0$  nên ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi có một số bằng 0. Ta giả sử  $z = \min\{x, y, z\}$ , ta có

$$xy + yz + zx \geq xy; \frac{1}{(y-z)^2} \geq \frac{1}{y^2} \text{ và } \frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{1}{x^2}.$$

Suy ra

$$VT \geq xy \left[ \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right] = \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{t-2} + t$$

Với  $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ .

Ta chứng minh

$$\frac{1}{t-2} + t \geq 4 \Leftrightarrow 1 + t^2 - 2t \geq 4t - 8 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi  $z = 0, \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}y, y > 0.$  ■

### Ví dụ 1.3

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + 4b + 9c = 6$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{6}.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho ba số thực dương ta có

$$a^3 + x^3 + x^3 \geq 3x^2a \text{ hay } a^3 + 2x^3 \geq 3x^2a.$$

Tương tự:  $b^3 + 2y^3 \geq 3y^2b, c^3 + 2z^3 \geq 3z^2c$  với  $x, y, z$  là các số thực dương.

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có được:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 3(x^2a + y^2b + z^2c).$$

Ta chọn  $x, y, z$  sao cho

$$x^2 = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9} = k^2 \Rightarrow x = k, y = 2k, z = 3k.$$

Mà

$$a + 4b + 9c = 6 \Rightarrow k + 8k + 27k = 6 \Rightarrow k = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{2}.$$

Suy ra  $a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{6}$ . Đẳng thức xảy ra khi  $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{2}$ . ■

## 1.2 Kỹ thuật chuẩn hóa

• Bất đẳng thức thuần nhất: Bất đẳng thức có dạng

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0 \quad (1) \text{ với } a_i \in D.$$

Được gọi là thuần nhất nếu

$$f(ka_1, ka_2, \dots, ka_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ với mọi } k \in D.$$

• Nếu (1) là bất đẳng thức thuần nhất thì ta có thể giả sử  $g(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$  với  $g(a_1, a_2, \dots, a_n)$  là một biểu thức thuần nhất.

### Ví dụ 1.4

Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}.$$

**Lời giải.** Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $a+b+c=3$ . Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a(3-a)}{(3-a)^2+a^2} + \frac{b(3-b)}{(3-b)^2+b^2} + \frac{c(3-c)}{(3-c)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}.$$

Hay là

$$\frac{1}{2a^2-6a+9} + \frac{1}{2b^2-6b+9} + \frac{1}{2c^2-6c+9} \leq \frac{3}{5} \quad (1).$$

Ta tìm đánh giá

$$\frac{1}{2a^2-6a+9} \leq m(a-1) + \frac{1}{5} \quad (2).$$



Ta tìm  $m$  sao cho (2) đúng với mọi  $a \in (0;3)$  và đẳng thức xảy ra khi  $a = 1$ . Ta biến đổi (2) như sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} - \frac{1}{2a^2 - 6a + 9} + m(a - 1) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{2a^2 - 6a + 4}{2a^2 - 6a + 9} + 5m(a - 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 1) \left[ \frac{2(a - 2)}{2a^2 - 6a + 9} + 5m \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (3).$$

Ta chọn  $m$  sao cho phương trình  $\frac{2(a - 2)}{2a^2 - 6a + 9} + 5m = 0$  có nghiệm  $a = 1$ , hay là

$$-\frac{2}{5} + 5m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{25}.$$

Khi đó (3) tương đương với

$$(a - 1) \left( \frac{a - 2}{2a^2 - 6a + 9} + \frac{1}{5} \right) \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)(2a^2 - a - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2(2a + 1) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Vậy bài toán được chứng minh. ■

### Ví dụ 1.5

Cho các số thực  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$6(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 27abc + 10\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^3}.$$

**Lời giải.** Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$  và  $|a| \geq |b| \geq |c|$ . Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2(a + b + c) \leq abc + 10 \Leftrightarrow 2(a + b + c) - abc \leq 10.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} 2(a + b + c) - abc &= a(2 - bc) + 2(b + c) \leq \sqrt{[a^2 + (b + c)^2] \cdot [(2 - bc)^2 + 4]} \\ &= \sqrt{(9 + 2bc)(b^2c^2 - 4bc + 8)}. \end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$(9 + 2bc)(b^2c^2 - 4bc + 8) \leq 100 \Leftrightarrow 2(bc)^3 + (bc)^2 - 20bc - 28 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2bc - 7)((bc)^2 + 4(bc) + 4) \leq 0 \Leftrightarrow (2bc - 7)(bc + 2)^2 \leq 0 \quad (4).$$

Vì

$$9 = a^2 + b^2 + c^2 \leq 3a^2 \Rightarrow a^2 \geq 3 \Rightarrow b^2 + c^2 \leq 6.$$

Suy ra  $2bc - 7 \leq b^2 + c^2 - 7 \leq -1 < 0$  nên (4) đúng. Vậy bài toán được chứng minh. ■

**Ví dụ 1.6**

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

**Lời giải.** Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\frac{1}{a+b+\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{b+c+\sqrt[3]{abc}} + \frac{1}{c+a+\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Hay là

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz} + \frac{1}{y^3+z^3+xyz} + \frac{1}{z^3+x^3+xyz} \leq \frac{1}{xyz}.$$

Với  $x = \sqrt[3]{a}$ ,  $y = \sqrt[3]{b}$ ,  $z = \sqrt[3]{c}$ . Ta có

$$x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \Rightarrow x^3 + y^3 + xyz \geq xy(x+y+z)$$

Do đó

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz} \cdot \frac{z}{x+y+z}.$$

Tương tự:

$$\frac{1}{y^3 + z^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz} \cdot \frac{x}{x+y+z} \quad \text{và} \quad \frac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz} \cdot \frac{y}{x+y+z}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. ■

**Ví dụ 1.7**

Cho  $x, y, z > 0$  và  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x).$$

**Lời giải.** Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x)$$

Hay

$$x^3 + y^3 + z^3 + x^2z + y^2x + z^2y \geq 2(x^2y + y^2z + z^2x) \quad (5).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$x^3 + xy^2 \geq 2x^2y; y^3 + yz^2 \geq 2y^2z \text{ và } z^3 + zx^2 \geq 2z^2x.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức (5). Vậy bài toán được chứng minh. ■

## 1.2 Bài tập

**Bài tập 1.1.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:

$$abc(a + b + c) + (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 4\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}abc.$$

**Bài tập 1.2.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right) \geq 4.$$

**Bài tập 1.3.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$7(a + b + c)(ab + bc + ca) \leq 9abc + 2(a + b + c)^3.$$

**Bài tập 1.4.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

**Bài tập 1.5.** Cho các số thực dương thỏa mãn  $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} = 3$ .  
Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4}.$$

### 1.3 Hướng dẫn, đáp số

## Chương 2

# CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

### 2.1 Bất đẳng thức AM-GM

Bất đẳng thức AM – GM là bất đẳng thức cổ điển được sử dụng nhiều trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức. Ta biết trung bình cộng của  $n$  số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là số  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  và trung bình nhân của  $n$  số đó là  $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$  (với điều kiện là  $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$  tồn tại). Bất đẳng thức AM – GM cho chúng ta đánh giá giữa trung bình cộng của các số thực không âm và trung bình nhân của chúng. Cụ thể như sau:

### 2.1 Bất đẳng thức AM-GM

**Định lí 2.1. (BĐT AM-GM)** Cho  $n$  số thực không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

đẳng thức xảy ra khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Chứng minh.** Có nhiều cách để chứng minh bất đẳng thức AM – GM, dưới đây ta sẽ chứng minh bất đẳng thức AM – GM bằng phương pháp quy nạp.

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức AM – GM cho trường hợp

$n = 2$ . Tức là, cần chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi  $a_1 = a_2$ . Tiếp theo ta chứng minh cho trường hợp  $n = 4$ . Tức là cần chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}$$

Áp dụng trường hợp  $n = 2$  ta có

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$$

và

$$\frac{a_3 + a_4}{2} \geq \sqrt{a_3 \cdot a_4}$$

Do đó

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

Nên trường hợp  $n = 4$  được chứng minh.

Tiếp đến ta chứng minh trường hợp  $n = 3$ , tức là chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$$

Đặt  $a_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ . Áp dụng cho trường hợp  $n = 4$  ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}$$

Hay

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}$$

Suy ra

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$$

(đpcm). Để chứng minh cho trường hợp tổng quát ta chứng minh theo hai bước sau:

**Bước 1:** Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = 2^m$

+) Với  $m = 1$ , ta có  $n = 2$  nên bất đẳng thức đúng với  $m = 1$

+) Giả sử bất đẳng thức đúng với  $n = 2^{m-1}$ , ta chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = 2^m$ .

Tức là

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{m-1}} + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (1)$$

Đặt

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{m-1}}}{2^{m-1}}, y = \frac{a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \dots + a_{2^m}}{2^{m-1}}$$

Theo giả thiết quy nạp ta có

$$x \geq \sqrt[2^{m-1}]{a_1 a_2 \dots a_{2^{m-1}}}, y \geq \sqrt[2^{m-1}]{a_{2^{m-1}+1} \dots a_n}$$

Áp dụng cho trường hợp  $n = 2$  ta có:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Hay

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{m-1}} + a_{2^{m-1}+1} + \dots + a_n}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Hay (1) được chứng minh.

**Bước 2:** Ta chứng minh nếu bất đẳng thức đúng với  $n \geq 2$  thì cũng đúng với  $n - 1$

Gả sử

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Ta chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$$

Thật vậy: Đặt  $a_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}$ . Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho  $n$  số ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Hay

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}$$

Suy ra

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$$

(đpcm). Từ hai bước trên ta có bất đẳng thức AM – GM được chứng minh.  $\square$

## 2.1 Các hệ quả

Cho các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Ta có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

## 2.1 Các ví dụ

### Ví dụ 2.1

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq 3.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^5 + a^5 + 1 + 1 + 1 \geq 3a^2 \text{ hay } 2a^5 + 3 \geq 3a^2.$$

Tương tự

**Nguyễn Tất Thu**



$$2b^5 + 3 \geq 3b^2 \text{ và } 2c^5 + 3 \geq 3c^2.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. ■

**Nhận xét 1.** Ta có bài toán tổng quát như sau Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$  (hoặc  $abc = 1$ ) và  $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$ . Khi đó

$$a^m + b^m + c^m \geq a^n + b^n + c^n \quad (1).$$

Bất đẳng thức (1) còn đúng khi  $m, n$  là các số hữu tỉ dương. Và ta có thể tổng quát 3 biến thành  $k$  biến.

### Ví dụ 2.2

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^3 + b^3 + 1 \geq 3ab$$

$$b^3 + c^3 + 1 \geq 3bc$$

$$c^3 + a^3 + 1 \geq 3ca. \text{ Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. } \blacksquare$$

### Ví dụ 2.3

Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)} + \frac{b^4}{c^2(a+b)} + \frac{c^4}{a^2(b+c)} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c+a}{4} \geq 2a$$

hay

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)} + b + \frac{c+a}{4} \geq 2a.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{b^4}{c^2(a+b)} + c + \frac{a+b}{4} \geq 2b \text{ và } \frac{c^4}{a^2(b+c)} + a + \frac{b+c}{4} \geq 2c.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo về ta có đpcm. ■

#### Ví dụ 2.4

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^3} \geq 3.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a + b + c = a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2} \geq 3\sqrt[3]{a \frac{(b+c)^2}{4}},$$

suy ra

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2} \geq \frac{3a}{a+b+c}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^3} \geq \frac{3b}{a+b+c} \text{ và } \sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2} \geq \frac{3c}{a+b+c}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo về ta có đpcm. ■

#### Ví dụ 2.5

**(BDT AM-GM suy rộng)** Cho  $a_i \geq 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) và các số hữu tỉ dương  $\alpha_i$  thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \geq a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}.$$

**Lời giải.** Vì  $\alpha_i$  là các số hữu tỉ dương và  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  nên tồn tại các số nguyên dương  $N, k_1, k_2, \dots, k_n$  sao cho  $\alpha_i = \frac{k_i}{N}$ . Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho  $N$  số, ta có

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot a_i = \frac{\underbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{k_1 \text{ số}} + \dots + \underbrace{a_n + a_n + \dots + a_n}_{k_n \text{ số}}}{N} \geq a_1^{\frac{k_1}{N}} \dots a_n^{\frac{k_n}{N}} = a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

### Ví dụ 2.6

Cho các số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Chứng minh rằng

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})^n.$$

**Lời giải.** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)}} + \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)}} \leq 1 \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VT(1) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + a_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + a_i} = 1.$$

Bài toán được chứng minh. ■

### Ví dụ 2.7

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{Bất đẳng thức Nesbit}).$$

**Lời giải.** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \frac{9}{2}$$

Hay

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2} \quad (1).$$

Ta có

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+b+c+c+a} = \frac{9}{2(a+b+c)}$$

Nên (1) đúng. ■

### Ví dụ 2.8

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $a+b+c=1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30.$$

**Lời giải.** Ta có:

$$ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2} = 9.$$

Do đó

$$\begin{aligned} VT &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca} \geq 9 + \frac{7}{\frac{1}{3}} = 30. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. ■

### Ví dụ 2.9

Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn :  $xy+yz+zx=3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}.$$

**Lời giải.** Ta có:

$$\sqrt[3]{xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{3} = 2.$$

Suy ra

$$\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{xyz}{2}$$

Do đó

$$VT \geq \frac{1}{xyz} + \frac{xyz}{2} \geq \frac{1}{2xyz} + \frac{xyz}{2} + \frac{1}{2xyz} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Bài toán được chứng minh. ■

### Ví dụ 2.10

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}.$$

**Lời giải.** Ta có

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 = 9 \Rightarrow ab + bc + ca \leq 3$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}} = \frac{1}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right).$$

Do đó:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \right)$$

Tương tự:

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} \right) \text{ và } \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{ca}{b+a} + \frac{ca}{b+c} \right)$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{3}{2}.$$

**Ví dụ 2.11**

(IMO 2001) Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

**Lời giải.** Gọi  $P$  là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $a + b + c = 1$ .

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + a(a^2+8bc) \geq 3a \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{a^2+8bc}} + a(a^2+8bc) \geq 3a.$$

Tương tự :

$$\frac{2b}{\sqrt{b^2+8ca}} + b(b^2+8ca) \geq 3b ; \quad \frac{2c}{\sqrt{c^2+8ab}} + c(c^2+8ab) \geq 3c$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta được :

$$2P + a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \geq 3$$

Mặt khác ta lại có :

$$1 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

Suy ra :

$$2P \geq 3 - (a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) \geq 3 - 1 = 2 \Rightarrow P \geq 1 \text{ đpcm.}$$



**Ví dụ 2.12**

(IMO 2005) Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa  $xyz \geq 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

**Lời giải.** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$1 - \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + 1 - \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + 1 - \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{1}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{1}{z^5 + x^2 + y^2} \right) \leq 3 \quad (1).$$

Ta có

$$x^5 + y^2 + z^2 \geq \frac{x^4}{yz} + y^2 + z^2 \geq \frac{2x^4 + (y^2 + z^2)^2}{y^2 + z^2} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{y^2 + z^2}.$$

Do đó

$$\frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{3}{2} \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

Chứng minh tương tự

$$\frac{1}{y^5 + z^2 + x^2} \leq \frac{3}{2} \frac{z^2 + x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \quad \text{và} \quad \frac{1}{z^5 + x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{1}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{1}{z^5 + x^2 + y^2} \leq \frac{3}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Hay (1) đúng. ■

**Ví dụ 2.13**

(IMO Shortlist 2009) Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $ab + bc + ca \leq 3abc$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + 3 \leq \sqrt{2}(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}).$$

**Lời giải.** Ta có

$$\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{\frac{2(a+b)^2}{a+b}} = \sqrt{2\left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{2ab}{a+b}\right)} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{2ab}{a+b}}.$$

Suy ra

$$VP \geq \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{2bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{2ca}{c+a}} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}.$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)(x+y+z)^2 \geq 27$$

ta suy ra

$$x+y+z \geq 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{2bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{2ca}{c+a}} &\geq 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}\right)^2}} \\ &= 3\sqrt{\frac{3abc}{ab+bc+ca}} = 3. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có đpcm. ■



**Ví dụ 2.14**

(IMO 2012) Cho các số thực dương  $a_2, a_3, \dots, a_n$  thỏa mãn  $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ . Chứng minh rằng

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(1+a_k)^k = \left( \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1} + a_k \right)^k \geq \frac{k^k a_k}{(k-1)^{k-1}}.$$

Suy ra

$$(1+a_2)^2 \cdot (1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \geq \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \frac{4^4}{3^3} \cdots \frac{n^n}{(n-1)^n} a_1 a_2 \cdots a_n = n^n.$$

Ta thấy không có đẳng thức xảy ra. Vậy bài toán được chứng minh. ■

**Ví dụ 2.15**

(Moldova TST 2014) Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2} \geq \frac{9}{2}.$$

**Lời giải.** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \geq 9 \quad (1).$$

Ta có  $x^3 + y^3 \geq x^2y + y^2x$  với mọi  $x, y > 0$  nên

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{c(a^2 + b^2)}{2} + \frac{b(c^2 + a^2)}{2} + \frac{a(b^2 + c^2)}{2}$$

Suy ra

$$VT(1) \geq \left( \frac{c(a^2 + b^2)}{2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2} \right) + \left( \frac{b(c^2 + a^2)}{2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} \right) + \left( \frac{a(b^2 + c^2)}{2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \right) + 3abc$$

Bài toán được chứng minh. ■

**Ví dụ 2.16**

Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

**Lời giải.** Ta có

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = \frac{a(a^2+b^2) - ab^2}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a - \frac{b}{2}.$$

Tương tự

$$\frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b - \frac{c}{2} \quad \text{và} \quad \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq c - \frac{a}{2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm. ■

**Ví dụ 2.17**

Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa  $abc < 0$  và  $a + b + c = 0$ . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(1 - ab - bc - ca) + \frac{12abc - 8}{ab + bc + ca} \geq 16.$$

**Lời giải.** Gọi  $P$  là vế trái của bất đẳng thức.

Đặt  $m = -(ab + bc + ca)$ ,  $n = -abc$

Do  $a + b + c = 0 \Rightarrow 2(ab + bc + ca) = -(a^2 + b^2 + c^2) < 0 \Rightarrow m, n > 0$

Khi đó:

$$P = \frac{m(1+m)}{n} + \frac{12n+8}{m}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô sita có:

$$m^3 + 8n^2 + 8n \geq 12mn \quad \text{và} \quad m^2 + 4n^2 \geq 4mn$$

Suy ra

$$m^3 + m^2 + 12n^2 + 8n \geq 16mn$$

Do đó:

$$P = \frac{m(1+m)}{n} + \frac{12n+8}{m} \geq 16$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $m = 2, n = 1$ , tức là  $a, b, c$  là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

■

## 2.1 Bài tập

**Bài tập 2.1.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

- $(1+a)(1+b)(1+c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$ . Hãy tổng quát hóa lên  $n$  biến và chứng minh.
- $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$ .

**Lời giải.** 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1.$$

Đặt :

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \\ T &\leq \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right] + \frac{1}{3} \left[ \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \right] \\ T &\leq \frac{1}{3} \left[ \frac{a+1}{1+a} + \frac{b+1}{1+b} + \frac{c+1}{1+c} \right] = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \end{aligned}$$

Đấu đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c \geq 0$ .

2. ■

**Bài tập 2.2.** Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 64abc.$$

**Bài tập 2.3.** Cho  $2n$  số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}.$$

**Bài tập 2.4.** Cho  $3n$  số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; c_1, c_2, \dots, c_n$ . Chứng minh rằng

$$\left( \prod_{i=1}^n a_i + \prod_{i=1}^n b_i + \prod_{i=1}^n c_i \right)^n \leq \prod_{i=1}^n (a_i^n + b_i^n + c_i^n)$$

**Bài tập 2.5.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

**Bài tập 2.6.** Cho  $n$  số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và số nguyên dương  $k$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n} \geq \left( \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^k.$$

**Bài tập 2.7.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b}.$$

**Bài tập 2.8.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

**Bài tập 2.9.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn điều kiện  $a^3 b^3 + b^3 c^3 + c^3 a^3 = 3$ . Chứng minh rằng:

$$a^7 + b^7 + c^7 \geq 3.$$

**Bài tập 2.10.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \left(\frac{a+2b}{3}\right)^4 + \left(\frac{b+2c}{3}\right)^4 + \left(\frac{c+2a}{3}\right)^4.$$

**Bài tập 2.11.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq 1.$$

**Bài tập 2.12. (Baltic Way 2014)** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

**HD:**  $\sum \frac{1}{\sqrt{a^3+b}} \leq \sum \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a^3b}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \sqrt[4]{\left(\frac{1}{a}\right)^3 \cdot \frac{1}{b}} \leq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}.$

**Bài tập 2.13. (USA 2011)** Với  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$ , chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

**HD:** Ta có  $ab+1 \geq \frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{2} = \frac{(a+b)^2+(c+a)(c+b)}{2}.$

**Bài tập 2.14.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+a^3}{2}} + 6 \leq 3(a+b+c).$$

**HD:** Bài toán này có thể chứng minh bằng cách sử dụng đánh giá sau:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

Chú ý rằng:  $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a+b - \frac{2ab}{a+b}$   
 Như vậy ta phải chứng minh:

$$2 \left[ \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right] + a+b+c \geq 6$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM với  $abc = 1$ , ta có ngay:

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{a+b}{2} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{b+c}{2} + \frac{2ca}{c+a} + \frac{c+a}{2} \geq 6$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c = 1$ .

**Bài tập 2.15.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+15}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+15}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+15}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Bài tập 2.16.** Cho các số thực dương  $x, y$ . Chứng minh rằng

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \left( \frac{1}{\sqrt{x+3y}} + \frac{1}{\sqrt{y+3x}} \right) \leq 2.$$

**Bài tập 2.17. (JBMO 2014)** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a+b+c+1).$$

**Lời giải.** Ta có

$$\sum \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \sum \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) = \sum ab + \sum \frac{a}{c} + \sum \frac{1}{ab} + 3.$$

Áp dụng  $\sum \frac{1}{ab} = \sum a$  và  $\sum ab + \sum \frac{a}{c} \geq 2\sum a$ , ta có đpcm.

**Cách 2:** Ta có

$$a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{b}{c} \geq 3 \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{c}} = 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = 3 \sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot abc}{bc}} = 3a.$$

Tương tự

$$b^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{c}{a} \geq 3b,$$

và

$$c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{a}{b} \geq 3c.$$

Kết hợp với

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3.$$

ta có đpcm. ■

**Bài tập 2.18.** Cho các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn  $ab \geq 1$ . Chứng minh rằng

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right) \left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16.$$

**Lời giải.** Ta có  $b + 2a + \frac{2}{b+1} \geq \frac{5}{2} + \frac{3}{2}a$  nên

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right) \left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}a\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}b\right)$$

và

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}a\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}b\right) = \frac{25}{4} + \frac{15}{4}(a+b) + \frac{9}{4}ab \geq 16$$

nên ta có đpcm. ■

**Bài tập 2.19.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = \frac{7 - abc}{\sqrt{2}}.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

**Bài tập 2.20. (IMO Shortlist 2009)** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

**Bài tập 2.21.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\left(\frac{5}{8} + \frac{a}{b+c}\right)\left(\frac{5}{8} + \frac{b}{c+a}\right)} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} + \frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{5}{8} + \frac{c}{a+b}\right)} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} + \frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{5}{8} + \frac{a}{b+c}\right)}.$$

**Bài tập 2.22.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn:

$$\sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} + abc = 3.$$

Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3}{b^2 + c^2} + \frac{b^3}{c^2 + a^2} + \frac{c^3}{a^2 + b^2}$$

bằng  $\frac{m}{2\sqrt[3]{2}}$ , trong đó  $m$  là nghiệm của phương trình  $t^3 + 54t - 162 = 0$ .

**Bài tập 2.23. (VN TST 2010)** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $16(a + b + c) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a + b + \sqrt{2(a+c)})^3} + \frac{1}{(b + c + \sqrt{2(b+a)})^3} + \frac{1}{(c + a + \sqrt{2(c+b)})^3} \leq \frac{8}{9}.$$

**Bài tập 2.24. (USA TST 2010)** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^2(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(a+2b)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

## 2.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

### 2.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức

**Định lí 2.2.** Cho  $2n$  số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Khi đó, ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $a_i = kb_i$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$ .



**Chứng minh.** Nếu  $a_i = 0 \forall i = \overline{1, n}$  thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu  $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$ , ta xét tam thức

$$f(x) = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 - 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

Ta có

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2 \geq \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó

$$\Delta' = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0$$

Hay bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi  $a_i x - b_i = 0 \Leftrightarrow a_i = k \cdot b_i$ . □

## 2.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức

**Định lí 2.3.** Cho các  $n$  số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $n$  số thực dương  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Khi đó, ta có

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ .

**Chứng minh.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức ta có

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{b_i} \cdot \frac{a_i}{\sqrt{b_i}} \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \right)$$

Hay

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \text{ (đpcm).}$$

□

## 2.2 Các ví dụ

**Ví dụ 2.18**

**(Bất đẳng thức Mincopski)** Cho các  $2n$  số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2}.$$

**Lời giải.** Bình phương hai vế và rút gọn, ta có

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n).$$

Đây chính là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức. Đẳng thức xảy ra khi  $a_i = k b_i$ . ■

**Ví dụ 2.19**

Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + b)(b + c)(c + a).$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (a^2 + 1)(1 + b^2) \geq (a + b)^2.$$

Tương tự, ta cũng có

$$(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (b + c)^2, (c^2 + 1)(a^2 + 1) \geq (c + a)^2.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + b)(b + c)(c + a).$$

Đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c = 1$ . ■

**Ví dụ 2.20**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{82}$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{9} + 9\right) \geq \left(\frac{a}{3} + \frac{3}{b}\right)^2$$

hay

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{82}} \left(\frac{a}{3} + \frac{3}{b}\right).$$

Tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{82}} \left(\frac{b}{3} + \frac{3}{c}\right) \text{ và } \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{82}} \left(\frac{c}{3} + \frac{3}{a}\right).$$

Cộng ba bất đẳng thức theo vế ta có

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{82}} \left[ \frac{a+b+c}{3} + 3 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right].$$

Lại có  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = 9$  nên ta suy ra được

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{82}} \left( \frac{1}{3} + 27 \right) = \sqrt{82}.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c = \frac{1}{3}$ . ■

**Ví dụ 2.21**

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh

rằng

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 9 \left( \frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \right).$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(a^2 + b^2 + 1)(1 + 1 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = 9$$

hay là

$$a^2 + b^2 + 1 \geq \frac{9}{c^2 + 2}.$$

Tương tự

$$b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{9}{a^2 + 2} \text{ và } c^2 + a^2 + 1 \geq \frac{9}{b^2 + 2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 9 \left( \frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \right).$$

Đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c = 1$ . ■

### Ví dụ 2.22

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .

Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2}(a + b + c).$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c + \frac{1}{c}} \\ &\leq \sqrt{(a + b + c) \left( a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \right)} = \sqrt{2}(a + b + c). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c = 1$ . ■

**Ví dụ 2.23**

Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab} \leq 1.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3 + 8abc} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b^3 + 8abc} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c^3 + 8abc} \\ &\leq \sqrt{(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

Suy ra

$$VT \leq \sqrt{(a+b+c)(a+b+c)^3} = (a+b+c)^2 = 1.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c = \frac{1}{3}$ . ■

**Ví dụ 2.24**

Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} VT^2 &= \left( \sqrt{a+c} \sqrt{\frac{a}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{b+a} \sqrt{\frac{b}{(b+c)(b+a)}} + \sqrt{c+b} \sqrt{\frac{c}{(c+a)(c+b)}} \right)^2 \\ &\leq 2(a+b+c) \left( \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+a)(b+c)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \right) \\ &= \frac{4(a+b+c)[ab+bc+ca]}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{9}{8}.$$

Đây là một kết quả quen thuộc. ■

### Ví dụ 2.25

Cho các số thực  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1.$$

**Lời giải.** Gọi  $P$  là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^4}{a^3+2a^2b^2} + \frac{b^4}{b^3+2b^2c^2} + \frac{c^4}{c^3+2c^2a^2} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}. \end{aligned}$$

Với  $a + b + c = 3$  ta có

$$\begin{aligned} (a^4+b^4+c^4)(a^2+b^2+c^2) &\geq (a^3+b^3+c^3)^2 \\ (a^3+b^3+c^3)(a+b+c) &\geq (a^2+b^2+c^2)^2 \\ 3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$3(a^4+b^4+c^3) \geq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

Hay  $a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3$ . Do đó

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2)^2 &= a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ &\geq a^3+b^3+c^3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2). \end{aligned}$$

Vậy  $P \geq 1$ . Đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c = 1$ . ■

**Ví dụ 2.26**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 2$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{4a+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{4b+3ca}} + \frac{c}{\sqrt{4c+3ab}} \leq 1.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{\sqrt{4a+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{4b+3ca}} + \frac{c}{\sqrt{4c+3ab}} \right)^2 &\leq (a+b+c) \left( \frac{a}{4a+3bc} + \frac{b}{4b+3ca} + \frac{c}{4c+3ab} \right) \\ &= 2 \left( \frac{a}{4a+3bc} + \frac{b}{4b+3ca} + \frac{c}{4c+3ab} \right). \end{aligned}$$

Ta chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{a}{4a+3bc} + \frac{b}{4b+3ca} + \frac{c}{4c+3ab} &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{bc}{4a+3bc} + \frac{ca}{4b+3ca} + \frac{ab}{4c+3ab} &\geq \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (*)$$

Ta có

$$VT(*) \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(4a+bc)+ca(4b+ca)+ab(4c+ab)}$$

Do

$$bc(4a+bc)+ca(4b+ca)+ab(4c+ab) = 3(ab+bc+ca)^2.$$

Nên ta có:  $VT(*) \geq \frac{1}{3}$  (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = \frac{2}{3}$ . ■

**Ví dụ 2.27**

Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$\left( \frac{a}{a+b} \right)^2 + \left( \frac{b}{b+c} \right)^2 + \left( \frac{c}{c+a} \right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

**Lời giải.** Vì  $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$  nên tồn tại các số thực dương  $x, y, z$  sao cho

$$\frac{b}{a} = \frac{yz}{x^2}, \quad \frac{c}{b} = \frac{zx}{y^2}, \quad \frac{a}{c} = \frac{xy}{z^2}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^4}{(x^2 + yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2 + zx)^2} + \frac{z^4}{(z^2 + xy)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\frac{x^4}{(x^2 + yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2 + zx)^2} + \frac{z^4}{(z^2 + xy)^2} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 + yz)^2 + (y^2 + zx)^2 + (z^2 + xy)^2}.$$

Ta chứng minh

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 + yz)^2 + (y^2 + zx)^2 + (z^2 + xy)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Biến đổi và rút gọn ta thu được bất đẳng thức

$$x^4 + y^4 + z^4 + 5(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq 6xyz(x + y + z) \quad (*).$$

Ta có

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z).$$

Nên suy ra (\*) đúng. Vậy bài toán được chứng minh. ■

### Ví dụ 2.28

Cho các số thực  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + zx + zy}} + \frac{y + z}{\sqrt{y^2 + z^2 + xy + xz}} + \frac{z + x}{\sqrt{z^2 + x^2 + yz + xy}} \leq 3.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$VT^2 \leq 3 \left[ \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2 + zx + yz} + \frac{(y + z)^2}{y^2 + z^2 + xy + xz} + \frac{(z + x)^2}{z^2 + x^2 + zy + yx} \right].$$

**Nguyễn Tất Thu**



Mặt khác

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+zx+yz} = \frac{(x+y)^2}{x(x+z)+y(y+z)} \leq \frac{x^2}{x(x+z)} + \frac{y^2}{y(y+z)} = \frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z}$$

Tương tự

$$\frac{(y+z)^2}{y^2+z^2+xy+xz} \leq \frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+x} \quad \text{và} \quad \frac{(z+x)^2}{z^2+x^2+zy+yx} \leq \frac{z}{z+y} + \frac{x}{x+y}$$

Suy ra  $VT^2 \leq 9 \Leftrightarrow VT \leq 3$ , từ đây ta có đpcm. ■

### Ví dụ 2.29

**(VQB Cần)** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 6$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ . Chứng minh rằng

$$2 \leq \frac{4a+b}{c} \leq \frac{31}{2}.$$

**Lời giải.** Ta có

$$\frac{4a+b}{c} \geq 2 \Leftrightarrow -4a - b + 2c \leq 0 \Leftrightarrow 3a + 6b + 9c \leq 7(a+b+c) = 42 \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$3a + 6b + 9c \leq \sqrt{(3^2 + 6^2 + 9^2)(a^2 + b^2 + c^2)} = 42.$$

Suy ra (1) đúng. Đẳng thức xảy ra khi  $a = 1, b = 2, c = 3$ .

Tương tự

$$\frac{4a+b}{c} \leq \frac{31}{2} \Leftrightarrow 8a + 2b - 31c \leq 0 \Leftrightarrow 57a + 51b + 18c \leq 49(a+b+c) = 294 \quad (2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$57a + 51b + 18c \leq \sqrt{(57^2 + 51^2 + 18^2)(a^2 + b^2 + c^2)} = 294$$

Hay (2) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi  $a = \frac{19}{7}, b = \frac{17}{7}, c = \frac{6}{7}$ . ■

## 2.2 Bài tập

**Bài tập 2.25.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq 1.$$

**Bài tập 2.26.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1.$$

**Bài tập 2.27.** Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa  $x + y + z \leq 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất:

$$P = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{4z^2 + \frac{1}{z^2}}.$$

**Bài tập 2.28.** Cho  $x, y$  thỏa  $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 16 \\ y^2 + yz + z^2 = 3 \end{cases}$ . Chứng minh rằng:  
 $xy + yz + zx \leq 8$ .

**Bài tập 2.29.** Cho  $a, b > 0$ . Chứng minh rằng:

$$(4\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(3\sqrt{a} + 4\sqrt{b}) \leq 25(a + b).$$

**Bài tập 2.30.** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2 + c^2 + 7}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^2 + a^2 + 7}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + 7}} \geq 1.$$

**Bài tập 2.31.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{2}.$$

**Bài tập 2.32.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}.$$

**Bài tập 2.33.** Cho ba số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1.$$

**Bài tập 2.34.** Cho các số thực  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+zx+zy}} + \frac{y+z}{\sqrt{y^2+z^2+xy+xz}} + \frac{z+x}{\sqrt{z^2+x^2+yz+xy}} \leq 3.$$

**Bài tập 2.35.** Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{4x+5}{x^3+xy^2+3xyz} + \frac{4y+5}{y^3+yz^2+3xyz} + \frac{4z+5}{z^3+zx^2+3xyz} \geq \frac{162}{x^2+y^2+z^2+27}.$$

**Bài tập 2.36.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{(b+2c)^2(a+b)} + \frac{b^2}{(c+2a)^2(b+c)} + \frac{c^2}{(a+2b)^2(c+a)} \geq \frac{1}{2}.$$

**Bài tập 2.37.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c).$$

**Bài tập 2.38.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3.$$

**Bài tập 2.39.** Cho  $a, b, c \in (1; 2)$ . Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}} \geq 1.$$

**Bài tập 2.40.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b}{b + c} + \frac{b^2 + c}{c + a} + \frac{c^2 + a}{a + b} \geq 2.$$

**Bài tập 2.41.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a + b}{b + c} \cdot \frac{a}{2a + b + c} + \frac{b + c}{c + a} \cdot \frac{b}{2b + c + a} + \frac{c + a}{a + b} \cdot \frac{c}{2c + a + b} \geq \frac{3}{4}.$$

**Bài tập 2.42.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}.$$

**Bài tập 2.43.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a + b + 2c} + \frac{bc}{b + c + 2a} + \frac{ca}{c + a + 2b} \leq \frac{a + b + c}{4}.$$

**Bài tập 2.44.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a + b)(a + c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b + c)(b + a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c + a)(c + b)}} \leq 1.$$

**Bài tập 2.45.** Cho  $x, y, z > -1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1 + x^2}{1 + y + z^2} + \frac{1 + y^2}{1 + z + x^2} + \frac{1 + z^2}{1 + x + y^2} \leq 2.$$

**Bài tập 2.46.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

**Bài tập 2.47.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{1}{a + b + c}.$$

**Bài tập 2.48.** Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2 - a} + \frac{1}{2 - b} + \frac{1}{2 - c} \geq 3.$$

**Bài tập 2.49.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{4a+4b+c} + \frac{b}{4b+4c+a} + \frac{c}{4c+4a+b} \leq \frac{1}{3}.$$

**Bài tập 2.50.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+z+z^2} \geq 1.$$

**Bài tập 2.51.** Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xyz = 8$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x^2+2x+4} + \frac{y^2}{y^2+2y+4} + \frac{z^2}{z^2+2z+4} \geq 1.$$

**Bài tập 2.52.** Cho các số thực  $x, y, z \neq 1$  và  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \geq 1.$$

## 2.3 Bất đẳng thức Schur

### 2.3 Bất đẳng thức Schur

**Định lí 2.4.** Cho các số thực không âm  $x, y, z$  và số thực dương  $r$ . Khi đó, ta có bất đẳng thức sau

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $a = b = c$  hoặc  $c = 0, a = b$  và các hoán vị.

**Chứng minh.** Vì bất đẳng thức cần chứng minh là đối xứng ba biến nên ta giả sử  $x \geq y \geq z$ , khi đó  $z^r(z-x)(z-y) \geq 0$  và

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) \geq (x-y)(x^r(y-z) - y^r(y-z)) = (x-y)(y-z)(x^r - y^r) \geq 0.$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta suy ra đpcm. □

**Nguyễn Tất Thu**

### 2.3 Các trường hợp đặc biệt

- Xét  $r = 1$  ta có các dạng sau

$$1. x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

$$2. 4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq (a+b+c)^3$$

$$3. xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$$

$$4. x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy + yz + zx)$$

$$5. (x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy + yz + zx)$$

- $r = 2$  ta có các dạng sau

$$1. x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$$

$$2. 6xyz(x+y+z) \geq [2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)](x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx).$$

### 2.3 Bất đẳng thức Schur suy rộng

**Định lí 2.5.** Cho các số thực dương  $a, b, c, x, y, z$  sao cho các bộ  $(a, b, c)$  và  $(x, y, z)$  là các bộ đơn điệu. Khi đó, ta có bất đẳng thức

$$a(x-y)(x-z) + b(y-z)(y-x) + c(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Việc chứng minh bất đẳng thức này tương tự như chứng minh bất đẳng thức Schur ở trên.

### 2.3 Các ví dụ

#### Ví dụ 2.30

Cho các số thực không âm  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{ab(4a+4b+c)}} + \sqrt{\frac{(b+c)^3}{bc(4b+4c+a)}} + \sqrt{\frac{(c+a)^3}{ca(4c+4a+b)}} \geq 2\sqrt{2}.$$

**Lời giải.** Gọi  $P$  là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $a + b + c = 3$ . Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}} + \sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}} + \frac{ab(4a+4b+c)}{27} \geq \frac{1}{2}(a+b)$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}} + \frac{ab(4a+4b+c)}{54} \geq \frac{1}{4}(a+b).$$

Tương tự

$$\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}} + \frac{bc(4b+4c+a)}{54} \geq \frac{1}{4}(b+c)$$

và

$$\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}} + \frac{ca(4c+4a+b)}{54} \geq \frac{1}{4}(c+a).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}P + A \geq B.$$

Với

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{54} [ab(4a+4b+c) + bc(4b+4c+a) + ca(4c+4a+b)] \\ &= \frac{1}{54} [4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a) + 3abc] \\ &= \frac{1}{54} [4(a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc] \leq \frac{1}{54}(a+b+c)^3 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

và

$$B = \frac{1}{4} \cdot 2(a+b+c) = \frac{3}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}P \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow P \geq 2\sqrt{2}.$$

Bài toán được chứng minh. ■

**Ví dụ 2.31**

(APMO 2004) Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

**Lời giải.** Ta có

$$VT = a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8.$$

Mặt khác

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 = a^2b^2 + 1 + b^2c^2 + 1 + c^2a^2 + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

và

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2 + 2 &= a^2b^2c^2 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3abc}{\sqrt[3]{abc}} \\ &\geq \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} VT &\geq 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) + 2.2(ab + bc + ca) + 4(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 6(ab + bc + ca) + 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 6(ab + bc + ca) + 3(ab + bc + ca) \geq 9(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. ■

**Ví dụ 2.32**

(VMO 2014) Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq \mathcal{P} \geq (a + b + c)^2,$$

$$\text{với } \mathcal{P} = (a + b + c)(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$



**Lời giải.** Ta có

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq \mathcal{P} \Leftrightarrow a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Bất đẳng thức này là kết quả quen thuộc.

Đặt  $x = \sqrt{a}$ ,  $y = \sqrt{b}$ ,  $z = \sqrt{c}$ . Khi đó, bất đẳng thức

$$\mathcal{P} \geq (a + b + c)^2 \Leftrightarrow \sum x^4 + xyz \sum x + \sum xy(x^2 + y^2) \geq 4 \sum x^2 y^2 \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur (với trường hợp  $r = 2$ ) ta có

$$\sum x^4 + xyz \sum x \geq \sum xy(x^2 + y^2)$$

do đó

$$VT(1) \geq 2 \sum xy(x^2 + y^2) \geq 2 \cdot \sum xy \cdot 2xy = 4 \sum x^2 y^2.$$

Hay (1) được chứng minh. ■

### Ví dụ 2.33

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + bc}{a^2(b+c)} + \frac{b^2 + ca}{b^2(c+a)} + \frac{c^2 + ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

**Lời giải.** Ta có

$$\frac{a^2 + bc}{a^2(b+c)} - \frac{1}{a} = \frac{a^2 + bc - a(b+c)}{a^2(b+c)} = \frac{(a-b)(a-c)}{a^2(b+c)}.$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0 \quad (1).$$

Với  $x = \frac{1}{a^2(b+c)}$ ,  $y = \frac{1}{b^2(c+a)}$ ,  $z = \frac{1}{c^2(a+b)}$ .

Giả sử  $a > b > c$ , ta có  $\frac{1}{a^2(b+c)} - \frac{1}{b^2(c+a)} = \frac{ab(b-a) + c(b^2 - a^2)}{a^2 b^2 (b+c)(c+a)} > 0$   
 hay  $x < y$ .

Do đó, bộ  $(x, y, z)$  là bộ đơn điệu giảm. Do đó, theo bất đẳng thức Schur suy rộng, ta có (1) đúng. ■

## 2.3 Bài tập

**Bài tập 2.53. (Hello IMO 2007- Trần Nam Dũng)** Chứng minh rằng với mọi  $a, b, c \geq 0$ , ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 5(a + b + c).$$

**HD:** Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} & 12(a^2 + b^2 + c^2) + 6abc + 48 - 30(a + b + c) \\ &= 12(a^2 + b^2 + c^2) + 3(2abc + 1) + 45 - 5 \cdot 2 \cdot 3(a + b + c) \\ &\geq 12(a^2 + b^2 + c^2) + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 45 - 5 \cdot ((a + b + c)^2 + 9) \\ &= 7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}} - 10(ab + bc + ca) \\ &\geq 7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27}{a + b + c} - 10(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Schur,

$$\frac{9}{a + b + c} \geq 4(ab + bc + ca) - (a + b + c)^2 = 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)$$

Do đó

$$\begin{aligned} & 7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27}{a + b + c} - 10(ab + bc + ca) \\ &\geq 7(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca) - 3(a^2 + b^2 + c^2) - 10(ab + bc + ca) \\ &= 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

**Bài tập 2.54.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a + b + c).$$

**HD:**

Đặt  $x = \frac{1}{a}$ ,  $y = \frac{1}{b}$ ,  $z = \frac{1}{c}$ . Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 3) \geq 2(x + y + z)(xy + yz + zx)$$

Hay

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z) \geq x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 6 \quad (1).$$

Ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 9 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz + 6 \geq VP(1).$$

Vậy bài toán được chứng minh.

**Bài tập 2.55.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq a + b + c.$$

**Bài tập 2.56.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} + bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} + ca\sqrt{2(c^2 + a^2)}.$$

**Bài tập 2.57. (Iran 1996)** Cho các số thực dương  $x, y, z$ . Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left( \frac{1}{(x + y)^2} + \frac{1}{(y + z)^2} + \frac{1}{(z + x)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

## 2.4 Hướng dẫn, đáp số

### 2.5 Tài liệu tham khảo

1. Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, Sử dụng bất đẳng thức AM-GM để chứng minh bất đẳng thức, NXB ĐHSP.
2. Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức, NXB ĐHSP.
3. Tuyển tập các đề thi HSGQG THPT từ năm 1990-2006, NXBGD
4. Các chuyên đề trên mạng và các lời giải và bình luận đề thi VMO, VN TST của Thầy Trần Nam Dũng chủ biên.