CHỦ ĐỀ 4. PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b \ (a>0,\ a\neq 1)$.

- Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b>0$.
- Phương trình vô nghiệm khi $b\leq 0$.

2. Biến đổi, quy về cùng cơ số

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow a=1 \text{ hoặc } \begin{cases} 0<a\neq 1 \\ f(x)=g(x) \end{cases}.$$

3. Đặt ẩn phụ

$$f\left[a^{g(x)}\right]=0 \quad (0<a\neq 1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t=a^{g(x)}>0 \\ f(t)=0 \end{cases}.$$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p=0$
- $m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p=0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)},\ \ t>0$, suy ra $b^{f(x)}=\dfrac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)}+n.(a.b)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}=0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}=t>0$.

4. Logarit hóa

- Phương trình $a^{f(x)}=b \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a\neq 1,\ b>0 \\ f(x)=\log_a b \end{cases}$.
- Phương trình $a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x).\log_a b$

  hoặc $\log_b a^{f(x)}=\log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a=g(x)$.

5. Giải bằng phương pháp đồ thị

- Giải phương trình: $a^x=f(x) \ \ (0<a\neq 1)$. $\ (*)$
- Xem phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=a^x \ \ (0<a\neq 1)$ và $y=f(x)$. Khi đó ta thực hiện hai bước:

➢ **Bước 1**. Vẽ đồ thị các hàm số $y=a^x \ \ (0<a\neq 1)$ và $y=f(x)$.

➢ **Bước 2**. Kết luận nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của hai đồ thị.

6. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

- **Tính chất 1.** Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a;b)$ thì số nghiệm của phương trình $f(x)=k$ trên $(a;b)$ không nhiều hơn một và $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$, $\forall u,v\in(a;b)$.
- **Tính chất 2.** Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) ; hàm số $y=g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x)=g(x)$ không nhiều hơn một.
- **Tính chất 3.** Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì bất phương trình $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u>v \ (\text{hoac } u<v),\quad \forall u,v\in D$.

7. Sử dụng đánh giá

- Giải phương trình $f(x)=g(x)$.
- Nếu ta đánh giá được $\begin{cases} f(x)\ge m \\ g(x)\le m \end{cases}$ thì $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=m \end{cases}$.

8. Bất phương trình mũ

- Khi giải bất phương trình mũ, ta cần chú ý đến tính đơn điệu của hàm số mũ.

$\boxed{a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<g(x) \end{cases} \end{array}\right.}$. Tương tự với bất phương trình dạng: $\left[\begin{array}{l} a^{f(x)}\ge a^{g(x)} \\ a^{f(x)}<a^{g(x)} \\ a^{f(x)}\le a^{g(x)} \end{array}\right.$

- Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì: $\boxed{a^M>a^N\Leftrightarrow (a-1)(M-N)>0}$.
- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:
  - \+ Đưa về cùng cơ số.
  - \+ Đặt ẩn phụ.
  - \+ Sử dụng tính đơn điệu: $\begin{cases} y=f(x) \text{ đồng biến trên } D \text{ thì: } f(u)<f(v)\Rightarrow u<v \\ y=f(x) \text{ nghịch biến trên } D \text{ thì: } f(u)<f(v)\Rightarrow u>v \end{cases}$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Cho phương trình $3^{x^2-4x+5}=9$ tổng lập phương các nghiệm thực của phương trình là:

A. 28. **B.** 27. **C.** 26. **D.** 25.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$3^{x^2-4x+5}=9\Leftrightarrow 3^{x^2-4x+5}=3^2\Leftrightarrow x^2-4x+5=2\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Suy ra $1^3+3^3=28$. Chọn đáp án **A**

Câu 2. Cho phương trình : $3^{x^2-3x+8}=9^{2x-1}$, khi đó tập nghiệm của phương trình là:

A. $S=\{2;5\}$

B. $S=\left\{\frac{-5-\sqrt{61}}{2};\frac{-5+\sqrt{61}}{2}\right\}$

C. $S=\left\{\frac{5-\sqrt{61}}{2};\frac{5+\sqrt{61}}{2}\right\}$

D. $S=\{-2;-5\}$.

Hướng dẫn giải

$3^{x^2-3x+8}=9^{2x-1}$

$\Leftrightarrow 3^{x^2-3x+8}=3^{4x-2}\Leftrightarrow x^2-3x+8=4x-2\Leftrightarrow x^2-7x+10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy $S=\{2;5\}$

Câu 3. Phương trình $3^{1-x}=2+\left(\frac{1}{9}\right)^x$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với $\frac{3}{3^x}=2+\left(\frac{1}{9}\right)^x \Leftrightarrow 3.\left(\frac{1}{3}\right)^x=2+\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$.

Đặt $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $t>0$. Phương trình trở thành $3t=2+t^2 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$.

● Với $t=1$, ta được $\left(\frac{1}{3}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

● Với $t=2$, ta được $\left(\frac{1}{3}\right)^x=2 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{1}{3}}2=-\log_3 2<0$.

Vậy phương trình có một nghiệm âm.

Câu 4. Số nghiệm của phương trình $9^{\frac{x}{2}}+9.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2}-4=0$ là:

A. 2. **B**. 4. **C**. 1. **D**. 0.

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với $3^x+9.\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-4=0$

$\Leftrightarrow 3^x+3.\left(\frac{1}{3}\right)^x-4=0 \Leftrightarrow 3^x+3.\frac{1}{3^x}-4=0 \Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3=0$.

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Phương trình trở thành $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$.

● Với $t=1$, ta được $3^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

● Với $t=3$, ta được $3^x=3 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$, $x=1$.

Câu 5. Cho phương trình : $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Tích các nghiệm của phương trình là một số âm.

B. Tổng các nghiệm của phương tình là một số nguyên .

C. Nghiệm của phương trình là các số vô tỉ.

D. Phương trình vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

$$2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1} \Leftrightarrow \left|\frac{28}{3}x+4\right|=4\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\le -1 \vee x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} 7x+3=3x^2-3 \\ 7x+3=-3x^2+3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\le -1 \vee x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \vee x=-\frac{2}{3} \\ x=0 \vee x=-\frac{7}{3} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\frac{7}{3} \end{array}\right..$$

Nghiệm của phương trình là : $S=\left\{-\frac{7}{3};3\right\}$.

Vì $-\frac{7}{3}.3=-7<0$. Chọn đáp án A

Câu 6. Phương trình $2^{8-x^2}.5^{8-x^2}=0,001.\left(10^5\right)^{1-x}$ có tổng các nghiệm là:

A. 5. **B**. 7. **C**. -7 . **D**. -5 .

Hướng dẫn giải

$(2.5)^{8-x^2}=10^{-3}.10^{5-5x} \Leftrightarrow 10^{8-x^2}=10^{2-5x} \Leftrightarrow 8-x^2=2-5x \Leftrightarrow \boxed{x=-1;x=6}$

Ta có : $-1+6=5$. Chọn đáp án A

Câu 7. Phương trình $9^x-5.3^x+6=0$ có nghiệm là:

A. $x=1,x=\log_3 2$. **B.** $x=-1,x=\log_3 2$. **C.** $x=1,x=\log_2 3$. **D.** $x=-1,x=-\log_3 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=3^x$ ($t>0$), khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$t^2-5t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3 2\\x=1\end{array}\right.$$

Câu 8. Cho phương trình $4.4^x-9.2^{x+1}+8=0$. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Khi đó, tích $x_1.x_2$ bằng :

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=2^x$ ($t>0$), khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$4t^2-18t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=-1\end{array}\right.$$

Vậy $x_1.x_2=-1.2=-2$. Chọn đáp án A

Câu 9. Cho phương trình $4^x-4^{1-x}=3$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Phương trình vô nghiệm.

B. Phương trình có một nghiệm.

C. Nghiệm của phương trình là luôn lớn hơn 0.

D. Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $4^{2x}-3.4^x-4=0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=4^x$ ($t>0$), khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$t^2-3t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=-1(L)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$$

Chọn đáp án A

Câu 10. Cho phương trình $9^{x^2+x-1}-10.3^{x^2+x-2}+1=0$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là:

A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=3^{x^2+x-1}$ ($t>0$), khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$3t^2-10t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{x^2+x-1}=3\\3^{x^2+x-1}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\\x=0\\x=-1\end{array}\right.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng -2.

Câu 11. Nghiệm của phương trình $2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x+1}$ là:

A. $x=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3}{4}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=\log_{\frac{4}{3}}\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x+1}\Leftrightarrow 3.2^x=4.3^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}$$

Câu 12. Nghiệm của phương trình $2^{2x}-3.2^{x+2}+32=0$ là:

A. $x\in\{2;3\}$. **B.** $x\in\{4;8\}$. **C.** $x\in\{2;8\}$. **D.** $x\in\{3;4\}$.

Hướng dẫn giải

$$2^{2x}-3.2^{x+2}+32=0\Leftrightarrow 2^{2x}-12.2^x+32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=8\\2^x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$$

Câu 13. Nghiệm của phương trình $6.4^x-13.6^x+6.9^x=0$ là:

A. $x\in\{1;-1\}$. **B.** $x\in\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right\}$. **C.** $x\in\{-1;0\}$. **D.** $x\in\{0;1\}$.

Hướng dẫn giải

$6.4^x-13.6^x+6.9^x=0\Leftrightarrow 6\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\left(\frac{3}{2}\right)^x+6=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2}\\ \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$

Câu 14. Nghiệm của phương trình $12.3^x+3.15^x-5^{x+1}=20$ là:

A. $x=\log_3 5-1$. **B.** $x=\log_3 5$. **C.** $x=\log_3 5+1$. **D.** $x=\log_5 3-1$.

Hướng dẫn giải

$12.3^x+3.15^x-5^{x+1}=20\Leftrightarrow 3.3^x\left(5^x+4\right)-5\left(5^x+4\right)=0\;\Leftrightarrow\left(5^x+4\right)\left(3^{x+1}-5\right)=0$

$\Leftrightarrow 3^{x+1}=5\;\Leftrightarrow x=\log_3 5-1$

Câu 15. Phương trình $9^x-5.3^x+6=0$ có tổng các nghiệm là:

A. $\log_3 6$. **B.** $\log_3\frac{2}{3}$. **C.** $\log_3\frac{3}{2}$. **D.** $-\log_3 6$.

Hướng dẫn giải

$9^x-5.3^x+6=0\quad(1)$

$(1)\Leftrightarrow\left(3^2\right)^x-5.3^x+6=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-5.3^x+6=0\quad(1')$

Đặt $t=3^x>0$. Khi đó: $(1')\Leftrightarrow t^2-5t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\;(N)\\ t=3\;(N)\end{array}\right.$

Với $t=2\Rightarrow 3^x=2\Leftrightarrow\boxed{x=\log_3 2}$.

Với $t=3\Rightarrow 3^x=3\Leftrightarrow\boxed{x=\log_3 3=1}$.

Suy ra $1+\log_3 2=\log_3 3+\log_3 2=\log_3 6$

Câu 16. Cho phương trình $2^{1+2x}+15.2^x-8=0$, khẳng định nào sau dây đúng?

A. Có một nghiệm. **B.** Vô nghiệm.

C. Có hai nghiệm dương. **D.** Có hai nghiệm âm.

Hướng dẫn giải

$2^{1+2x}+15.2^x-8=0\quad(2)$

$(2)\Leftrightarrow 2.2^{2x}+15.2^x-8=0\Leftrightarrow 2.\left(2^x\right)^2+15.2^x-8=0\quad(2')$

Đặt $t=2^x>0$. Khi đó: $(2')\Leftrightarrow 2t^2+15t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2}\quad(N)\\ t=-8\quad(L)\end{array}\right.$

Với $t=\frac{1}{2}\Rightarrow 2^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\log_2\frac{1}{2}\Leftrightarrow\boxed{x=-1}$

Câu 17. Phương trình $5^x+25^{1-x}=6$ có tích các nghiệm là :

A. $\log_5\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$. **B.** $\log_5\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$. **C.** 5. **D.** $5\log_5\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

$5^x+25^{1-x}=6\quad(1)$

$(1) \Leftrightarrow 5^x + \dfrac{25}{25^x} - 6 = 0 \Leftrightarrow 5^x + \dfrac{25}{\left(5^2\right)^x} - 6 = 0 \Leftrightarrow 5^x + \dfrac{25}{\left(5^x\right)^2} - 6 = 0 \quad (6').$ Đặt $t = 5^x > 0$.

Khi đó: $(6') \Leftrightarrow t + \dfrac{25}{t^2} - 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 6t + 25 = 0 \Leftrightarrow (t-5)\left(t^2 - t - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 5 & (N) \\ t = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} & (N) \\ t = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} & (L) \end{array}\right.$

Với $t = 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$.

Với $t = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \Rightarrow 5^x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \log_5\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)}$.

Suy ra: $1.\log_5\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) = \log_5\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

Câu 18. Phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 6$ có nghiệm là:

A. $x = \log_{\left(2+\sqrt{3}\right)} 2$. **B.** $x = \log_2 3$. **C.** $x = \log_2\left(2+\sqrt{3}\right)$. **D.** $x = 1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x$ ($t > 0$), khi đó phương trình đã cho tương đương với

$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \log_{\left(2+\sqrt{3}\right)} 2$

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 32$ là:

A. $x \in (-\infty; -5)$. **B.** $x \in (-\infty; 5)$. **C.** $x \in (-5; +\infty)$. **D.** $x \in (5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < -5$

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = 2^{2x}.3^{\sin^2 x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\ln 4 + \sin^2 x \ln 3 < 0$. **B.** $f(x) < 1 \Leftrightarrow 2x + 2\sin x \log_2 3 < 0$.

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\log_3 2 + \sin^2 x < 0$. **D.** $f(x) < 1 \Leftrightarrow 2 + x^2 \log_2 3 < 0$.

Hướng dẫn giải

$f(x) < 1 \Leftrightarrow \ln\left(2^{2x}.3^{\sin^2 x}\right) < \ln 1 \Leftrightarrow x\ln 4 + \sin^2 x \ln 3 < 0$

Chọn đáp án A

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x + 2^{x+1} \le 3^x + 3^{x-1}$

A. $x \in [2; +\infty)$. **B.** $x \in (2; +\infty)$. **C.** $x \in (-\infty; 2)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

$2^x + 2^{x+1} \le 3^x + 3^{x-1} \Leftrightarrow 3.2^x \le \dfrac{4}{3}.3^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x \ge \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x \ge 2$

Câu 22. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}}$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{array}\right.$. **B.** $x < -2$. **C.** $-1 < x < 0$. **D.** $-1 \le x < 0$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq -1$

$pt \Leftrightarrow 3^{-2x} > 3^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow -2x > \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} + 2x < 0 \Leftrightarrow 2x\left(\frac{1}{x+1}+1\right) < 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x(x+2)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ -1<x<0 \end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ -1<x<0 \end{array}\right.$

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $16^x - 4^x - 6 \leq 0$ là

A. $x \leq \log_4 3$. **B.** $x > \log_4 3$. **C.** $x \geq 1$. **D.** $x \geq 3$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 4^x$ $(t > 0)$, khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$t^2 - t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 0 < t \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \log_4 3$.

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{3^x}{3^x - 2} < 3$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<\log_3 2 \end{array}\right.$. **B.** $x > \log_3 2$. **C.** $x < 1$. **D.** $\log_3 2 < x < 1$.

Hướng dẫn giải

$\frac{3^x}{3^x-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{3^x - 3}{3^x - 2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x > 3 \\ 3^x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<\log_3 2 \end{array}\right.$

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x$ là:

A. $-6 \leq x \leq 3$. **B.** $x < -6$. **C.** $x > 3$. **D.** $\varnothing$.

Hướng dẫn giải

$$11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} \geq x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x+6\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x+6 \geq x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < 0 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 3$$

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$ là:

A. $-1 < x \leq 1$. **B.** $x \leq -1$. **C.** $x > 1$. **D.** $1 < x < 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = 3^x$ $(t > 0)$, khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$\frac{1}{t+5} \leq \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-1>0 \\ 3t-1 \leq t+5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t \leq 3 \Leftrightarrow -1 < x \leq 1$.

Câu 27. Cho bất phương trình $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}$, tập nghiệm của bất phương trình có dạng $S = (a;b)$.

Giá trị của biểu thức $A = b - a$ nhận giá trị nào sau đây?

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

$\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1;2)$. Chọn đáp án A

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $4^x - 3.2^x + 2 > 0$ là:

A. $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$. **B.** $x \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.

C. $x \in (0;1)$. **D.** $x \in (1;2)$.

Hướng dẫn giải

$4^x-3.2^x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x>2\\2^x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\x<0\end{array}\right.$

Câu 29. Tập nghiệm của bất phương trình $3^x.2^{x+1}\geq 72$ là:

A. $x\in[2;+\infty)$. **B.** $x\in(2;+\infty)$. **C.** $x\in(-\infty;2)$. **D.** $x\in(-\infty;2]$.

Hướng dẫn giải

$3^x.2^{x+1}\geq 72\Leftrightarrow 2.6^x\geq 72\Leftrightarrow x\geq 2$

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+1}-2^{2x+1}-12^{\frac{x}{2}}<0$ là:

A. $x\in(0;+\infty)$. **B.** $x\in(1;+\infty)$. **C.** $x\in(-\infty;0)$. **D.** $x\in(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

$3^{x+1}-2^{2x+1}-12^{\frac{x}{2}}<0\Leftrightarrow 3.9^{\frac{x}{2}}-2.16^{\frac{x}{2}}-12^{\frac{x}{2}}<0\Leftrightarrow 3.-2.\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{x}{2}}-\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{x}{2}}<0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{x}{2}}>1\Leftrightarrow x>0$

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\leq 1$ là:

A. $x\in\left(0;\log_{\frac{3}{2}}3\right]$. **B.** $x\in(1;3)$. **C.** $x\in(1;3]$. **D.** $x\in\left[0;\log_{\frac{3}{2}}3\right]$.

Hướng dẫn giải

$\frac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\leq 1\Leftrightarrow\frac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^x-4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\leq 1\Leftrightarrow\frac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^x-4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}-1\leq 0$

$\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-3}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\leq 0\Leftrightarrow 1<\left(\frac{3}{2}\right)^x\leq 3\Leftrightarrow 0<x\leq\log_{\frac{3}{2}}3$

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{x}}\leq\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3$ là:

A. $\left(0;\frac{1}{3}\right]$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Vì $\frac{2}{\sqrt{5}}<1$ nên bất phương trình tương đương với $\frac{1}{x}\geq 3\Leftrightarrow\frac{1-3x}{x}\geq 0\Leftrightarrow 0<x\leq\frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(0;\frac{1}{3}\right]$

Câu 33. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x+4.5^x-4<10^x$ là:

A. $\left[\begin{array}{l}x<0\\x>2\end{array}\right.$. **B.** $x<0$. **C.** $x>2$. **D.** $0<x<2$.

Hướng dẫn giải

$2^x+4.5^x-4<10^x\Leftrightarrow 2^x-10^x+4.5^x-4<0\Leftrightarrow 2^x\left(1-5^x\right)-4\left(1-5^x\right)<0\Leftrightarrow\left(1-5^x\right)\left(2^x-4\right)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-5^x<0\\2^x-4>0\end{cases}\\\begin{cases}1-5^x>0\\2^x-4<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5^x>1\\2^x>4\end{cases}\\\begin{cases}5^x<1\\2^x<4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$$

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}<1$ là:

A. $-1\le x\le 1$. **B.** $(-8;0)$. **C.** $(1;9)$. **D.** $(0;1]$.

Hướng dẫn giải

$2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}<1 \quad (1)$. Điều kiện: $x\ge 0$

$(1)\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{2^{\sqrt{x}}}<1 \quad (2)$. Đặt $t=2^{\sqrt{x}}$. Do $x\ge 0\Rightarrow t\ge 1$

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases}t\ge 1\\t-\dfrac{2}{t}<1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}t\ge 1\\t^2-t-2<0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le t<2\Leftrightarrow 1\le 2^{\sqrt{x}}<2\Leftrightarrow 0\le x<1$$

VẬN DỤNG

Câu 35. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$.

A. $x\in\{-5;-1;1;2\}$. **B.** $x\in\{-5;-1;1;3\}$. **C.** $x\in\{-5;-1;1;-2\}$. **D.** $x\in\{5;-1;1;2\}$.

Hướng dẫn giải

$$4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{x^2-3x+2}.4^{x^2+6x+5}+1$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}\left(1-4^{x^2+6x+5}\right)-\left(1-4^{x^2+6x+5}\right)=0\Leftrightarrow\left(4^{x^2-3x+2}-1\right)\left(1-4^{x^2+6x+5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^{x^2-3x+2}-1=0\\1-4^{x^2+6x+5}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0\\x^2+6x+5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\vee x=-5\\x=1\vee x=2\end{array}\right.$$

Câu 36. Phương trình $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{10}\right)^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{10}\right)^x\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x=1$$

Xét hàm số $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x+\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x$

Ta có: $f(2)=1$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do các cơ số $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}<1;\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}<1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=2$.

Câu 37. Phương trình $3^{2x}+2x\left(3^x+1\right)-4.3^x-5=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm không âm ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$$3^{2x}+2x\left(3^x+1\right)-4.3^x-5=0\Leftrightarrow\left(3^{2x}-1\right)+2x\left(3^x+1\right)-\left(4.3^x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(3^x-1\right)\left(3^x+1\right)+(2x-4)\left(3^x+1\right)=0\Leftrightarrow\left(3^x+2x-5\right)\left(3^x+1\right)=0\Leftrightarrow 3^x+2x-5=0$$

Xét hàm số $f(x)=3^x+2x-5$, ta có : $f(1)=0$.

$f'(x)=3^x\ln 3+2>0;\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x=1$

Câu 38. Phương trình $2^{x-3}=3^{x^2-5x+6}$ có hai nghiệm x_1,x_2 trong đó $x_1<x_2$, hãy chọn phát biểu đúng?

A. $3x_1-2x_2=\log_3 8$. **B.** $2x_1-3x_2=\log_3 8$.

C. $2x_1+3x_2=\log_3 54$. **D.** $3x_1+2x_2=\log_3 54$.

Hướng dẫn giải

Logarit hóa hai vế của phương trình (theo cơ số 2) ta được: $(3)\Leftrightarrow \log_2 2^{x-3}=\log_2 3^{x^2-5x+6}$

$\Leftrightarrow (x-3)\log_2 2=(x^2-5x+6)\log_2 3 \Leftrightarrow (x-3)-(x-2)(x-3)\log_2 3=0$

$$\Leftrightarrow (x-3).[1-(x-2)\log_2 3]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ 1-(x-2)\log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ (x-2)\log_2 3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x-2=\dfrac{1}{\log_2 3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\log_3 2+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\log_3 2+\log_3 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\log_3 18 \end{array}\right.$$

Câu 39. Cho phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình có một nghiệm vô tỉ. **B.** Phương trình có một nghiệm hữu tỉ.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu. **D.** Tích của hai nghiệm bằng -6 .

Hướng dẫn giải

$$\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6 \quad (8)$$

$$(8)\Leftrightarrow \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^2\right]^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-6=0 \Leftrightarrow \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^x\right]^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-6=0 \quad (8')$$

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x>0$.

Khi đó: $(8')\Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=2 & (N) \\ t=-3 & (L) \end{array}\right.$. Với $t=2 \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x=2 \Leftrightarrow \boxed{x=\log_{(2+\sqrt{3})} 2}$

Chọn đáp án A

Câu 40. Phương trình $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3$ có tổng các nghiệm là ?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4 .

Hướng dẫn giải

$$3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3 \qquad (7)$$

$$(7)\Leftrightarrow 27.3^{3x}+\frac{27}{3^{3x}}+81.3^x+\frac{81}{3^x}=10^3 \Leftrightarrow 27.\left(3^{3x}+\frac{1}{3^{3x}}\right)+81.\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)=10^3 \quad (7')$$

Đặt $t=3^x+\dfrac{1}{3^x}\overset{Côsi}{\geq} 2\sqrt{3^x.\dfrac{1}{3^x}}=2$

$$\Rightarrow t^3=\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)^3=3^{3x}+3.3^{2x}.\frac{1}{3^x}+3.3^x.\frac{1}{3^{2x}}+\frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x}+\frac{1}{3^{3x}}=t^3-3t$$

Khi đó: $(7')\Leftrightarrow 27\left(t^3-3t\right)+81t=10^3 \Leftrightarrow t^3=\dfrac{10^3}{27} \Leftrightarrow t=\dfrac{10}{3}>2 \quad (N)$

Với $t=\dfrac{10}{3}\Rightarrow 3^x+\dfrac{1}{3^x}=\dfrac{10}{3} \quad (7'')$

Đặt $y=3^x>0$. Khi đó: $(7'')\Leftrightarrow y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow 3y^2-10y+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y=3 & (N) \\ y=\dfrac{1}{3} & (N) \end{array}\right.$

Với $y=3\Rightarrow 3^x=3\Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Với $y=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \boxed{x=-1}$

Câu 41. Phương trình $9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=6$ có họ nghiệm là ?

A. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$.

Hướng dẫn giải

$9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=6 \Leftrightarrow 9^{1-\cos^2 x}+9^{\cos^2 x}=6 \Leftrightarrow \frac{9}{9^{\cos^2 x}}+9^{\cos^2 x}-6=0 \quad (*)$

Đặt $t=9^{\cos^2 x},\ (1\le t\le 9)$. Khi đó: $(*)\Leftrightarrow \frac{9}{t}+t-6=0 \Leftrightarrow t^2-6t+9=0 \Leftrightarrow t=3$

Với $t=3 \Rightarrow 9^{\cos^2 x}=3 \Leftrightarrow 3^{2\cos^2 x}=3^1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}},\ (k\in\mathbb{Z})$

Câu 42. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=m$ vô nghiệm?

A. $m<2$. **B.** $m>2$. **C.** $m=2$. **D.** $m\le 2$.

Câu 43. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=m$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m>2$. **B.** $m<2$. **C.** $m=2$. **D.** $m\le 2$.

Hướng dẫn giải câu 8 & 9

Nhận xét: $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1$.

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{t}, \forall t\in(0,+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=m \Leftrightarrow f(t)=t+\frac{1}{t}=m \quad (1'), \forall t\in(0,+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{t}$ xác định và liên tục trên $(0,+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$. Cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	0		1		$+\infty$
$f'(t)$			$-$	0	$+$	
$f(t)$		$+\infty$		2		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên:

+ Nếu $m<2$ thì phương trình $(1')$ vô nghiệm $\Rightarrow pt(1)$ vô nghiệm.

Câu 8 chọn đáp án A

+ Nếu $m=2$ thì phương trình $(1')$ có đúng một nghiệm $t=1 \Rightarrow pt(1)$ có đúng một nghiệm $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x=1 \Rightarrow x=0$.

+ Nếu $m>2$ thì phương trình $(1')$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow pt(1)$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 9 chọn đáp án A

Câu 44. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2+4}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{2^{2(x^2+2)}-2^{x^2+3}+1}$. Khi đó, tổng hai nghiệm bằng?

A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

$2^{x^2+4}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{2^{2(x^2+2)}-2^{x^2+3}+1}\Leftrightarrow 8.2^{x^2+1}=2^{2(x^2+1)}+\sqrt{4.2^{2(x^2+1)}-4.2^{x^2+1}+1}$

Đặt $t=2^{x^2+1}\left(t\ge 2\right)$, phương trình trên tương đương với

$8t=t^2+\sqrt{4t^2-4t+1}\Leftrightarrow t^2-6t-1=0\Leftrightarrow t=3+\sqrt{10}$ (vì $t\ge 2$). Từ đó suy ra

$$2^{x^2+1}=3+\sqrt{10}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\sqrt{\log_2\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}}\\ x_2=-\sqrt{\log_2\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}}\end{array}\right.$$

Vậy tổng hai nghiệm bằng 0 .

Câu 45. Với giá trị của tham số m thì phương trình $(m+1)16^x-2(2m-3)4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. $-4<m<-1$. B. Không tồn tại m . C. $-1<m<\dfrac{3}{2}$. D. $-1<m<-\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $4^x=t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $\underbrace{(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5}_{f(t)}=0.$ $(*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa mãn $0<t_1<1<t_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\ne 0\\(m+1)f(1)<0\\(m+1)(6m+5)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\ne 0\\(m+1)(3m+12)<0\Leftrightarrow -4<m<-1.\\(m+1)(6m+5)>0\end{cases}$$

Câu 46. Cho bất phương trình: $\dfrac{1}{5^{x+1}-1}\ge\dfrac{1}{5-5^x}$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình.

A. $S=(-1;0]\cup(1;+\infty)$. **B.** $S=(-1;0]\cap(1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;0]$. **D.** $S=(-\infty;0)$.

Hướng dẫn giải

$$\frac{1}{5^{x+1}-1}\ge\frac{1}{5-5^x}\Leftrightarrow\frac{6\left(1-5^x\right)}{\left(5.5^x-1\right)\left(5-5^x\right)}\ge 0\ (1).$$

Đặt $t=5^x$, BPT $(1)\Leftrightarrow\dfrac{6(1-t)}{(5t-1)(5-t)}\ge 0$. Đặt $f(t)=\dfrac{6(1-t)}{(5t-1)(5-t)}$.

Lập bảng xét dấu $f(t)=\dfrac{6(1-t)}{(5t-1)(5-t)}$, ta được nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l}5<t\\ \dfrac{1}{5}<t\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5<5^x\\ \dfrac{1}{5}<5^x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x\\ -1<x\le 0\end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của BPT là $S=(-1;0]\cup(1;+\infty)$.

Câu 47. Bất phương trình $25^{-x^2+2x+1}+9^{-x^2+2x+1}\ge 34.15^{-x^2+2x}$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right]\cup[0;2]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$. **B.** $S=(0;+\infty)$.

C. $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=\left(1-\sqrt{3};0\right)$.

Hướng dẫn giải

$25^{-x^2+2x+1}+9^{-x^2+2x+1}\ge 34.15^{-x^2+2x} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2\left(-x^2+2x+1\right)}+1\ge \frac{34}{15}.\left(\frac{5}{3}\right)^{\left(-x^2+2x+1\right)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x\le 2 \\ x\le 1-\sqrt{3} \\ x\ge 1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Câu 48. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2=3$?

A. $m=4$. B. $m=2$. C. $m=1$. D. $m=3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $4^x-m.2^{x+1}+2m=0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2m.2^x+2m=0 \quad (*)$

Phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn 2^x có: $\Delta'=(-m)^2-2m=m^2-2m$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2-2m\ge 0 \Leftrightarrow m(m-2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le 0 \end{array}\right.$

Áp dụng định lý Vi-ét ta có: $2^{x_1}.2^{x_2}=2m \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2m$

Do đó $x_1+x_2=3 \Leftrightarrow 2^3=2m \Leftrightarrow m=4$.

Thử lại ta được $m=4$ thỏa mãn. **Chọn A.**

Câu 49. Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}\ge m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm?

A. $m\le 4$. B. $m\ge 4$. C. $m\le 1$. D. $m\ge 1$.

Hướng dẫn giải

Chia hai vế của bất phương trình cho $3^{\sin^2 x}>0$, ta được

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}\ge m$

Xét hàm số $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}$ là hàm số nghịch biến.

Ta có: $0\le \sin^2 x\le 1$ nên $1\le y\le 4$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m\le 4$. Chọn đáp án A

Câu 50. Cho bất phương trình: $9^x+(m-1).3^x+m>0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x>1$.

A. $m\ge -\frac{3}{2}$. B. $m>-\frac{3}{2}$. C. $m>3+2\sqrt{2}$. D. $m\ge 3+2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=3^x$

Vì $x>1\Rightarrow t>3$ Bất phương trình đã cho thành: $t^2+(m-1).t+m>0$ nghiệm đúng $\forall t\ge 3$

$\Leftrightarrow \frac{t^2-t}{t+1}>-m$ nghiệm đúng $\forall t>3$.

Xét hàm số $g(t)=t-2+\frac{2}{t+1},\forall t>3, g'(t)=1-\frac{2}{(t+1)^2}>0,\forall t>3$. Hàm số đồng biến trên $[3;+\infty)$ và $g(3)=\frac{3}{2}$. Yêu cầu bài toán tương đương $-m\le \frac{3}{2} \Leftrightarrow m\ge -\frac{3}{2}$.