

PHẦN MỞ ĐẦU

1.1. Lý do chọn đề tài

Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất nói chung và bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối là một trong những bài toán khá hấp dẫn và khó trong chương trình Toán THPT. Đã có nhiều tài liệu trình bày về kỹ thuật tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức nhiều biến, lượng giác, ... bằng nhiều phương pháp khác nhau như đạo hàm, bất đẳng thức, lượng giác ... (Chuyên đề Bồi dưỡng Học sinh giỏi, Phan Huy Khải). Tuy nhiên, việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối thì còn hạn chế. Trong quá trình giảng dạy, thông qua việc tham khảo nhiều tài liệu riêng lẻ, tôi thấy đây là một trong những nội dung rất hay và rất thích hợp với việc thi Toán với hình thức thi trắc nghiệm nên tôi chọn đề tài: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối để làm chuyên đề chuyên môn trắng năm học này.

1.2. Điểm mới của đề tài

- Xây dựng được quy trình tính nhanh các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

PHẦN NỘI DUNG

2.1. Thực trạng của vấn đề tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Như đã nói trên, trong các kì thi và gần gũi nhất là kì thi Tốt nghiệp THPT Quốc gia thường có các câu hỏi về việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối. Học sinh thường gặp khá nhiều khó khăn và mất khá nhiều thời gian cho bài toán này.

2.1. Nội dung giải pháp

1. Một số kiến thức, kí hiệu ban đầu

Định nghĩa:

Cho hàm f xác định trên $D \subset \mathbb{R}, D \neq \emptyset$.

+ Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số f trên D nếu $f(x) \leq M, \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $\max_{x \in D} f(x) = M$ hay $\max_D f = M$.

+ Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên D nếu $f(x) \geq m, \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu: $\min_{x \in D} f(x) = m$ hay $\min_D f = m$.

Một số định lí

Định lí 1. Cho $f(x)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}$ và $A, B \subset D$ và $A \subseteq B$. Giả sử $\min_A f; \min_B f; \max_A f; \max_B f$ tồn tại. Khi đó ta có, $\max_A f \leq \max_B f; \min_A f \geq \min_B f$.

Chứng minh:

+ Giả sử, $\max_A f(x) = f(x_0)$, với $x_0 \in A$.

Do $x_0 \in A \subseteq B \Rightarrow x_0 \in B \Rightarrow f(x_0) \leq \max_B f(x)$.

+ Chứng minh tương tự cho $\min_A f \geq \min_B f$.

Định lí 2. Cho f, g là hai hàm số cùng xác định trên D và $f(x) \geq g(x), \forall x \in D$.
Giả sử $\max_D f; \max_D g$ tồn tại. Khi đó ta có, $\max_D f \geq \max_D g$.

Chứng minh

Giả sử $\max_D g(x) = g(x_0)$, với $x_0 \in D$.

Do $f(x) \geq g(x), \forall x \in D \Rightarrow f(x_0) \geq g(x_0)$.

Lại có, $f(x_0) \leq \max_D f(x)$. Suy ra, $\max_D f \geq \max_D g$.

Định lí 3. Cho f là hàm số xác định trên $D = D_1 \cup D_2$. Giả sử, $\max_{D_i} f, \min_{D_i} f$, (với $i = 1, 2$) đều tồn tại. Khi đó ta có:

$$\max_D f = \max \left\{ \max_{D_1} f; \max_{D_2} f \right\}, \quad (1)$$

$$\min_D f = \min \left\{ \min_{D_1} f; \min_{D_2} f \right\}. \quad (2)$$

Chứng minh

Ta chứng minh (1), ((2) được chứng minh tương tự).

Vì $D_1, D_2 \subset D$ nên theo định lí 2, ta có

$$\max_{D_i} f \leq \max_D f \Rightarrow \max \left\{ \max_{D_1} f; \max_{D_2} f \right\} \leq \max_D f. \quad (3)$$

Giả sử, $\max_D f = f(x_0), x_0 \in D$.

Do $D = D_1 \cup D_2$ nên hoặc $x_0 \in D_1$ hoặc $x_0 \in D_2$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x_0 \in D_1$.

Theo định nghĩa, ta phải có

$$f(x_0) \leq \max_{D_1} f \Rightarrow \max_D f = f(x_0) \leq \max \left\{ \max_{D_1} f; \max_{D_2} f \right\} \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra điều phải chứng minh.

Định lý 4. Cho hàm số f xác định trên D . Giả sử $\min_D f, \max_D f$ đều tồn tại.

Khi đó ta có: $\max_D f = -\min_D \{-f\}; \min_D f = -\max_D \{-f\}$.

Chứng minh

+ Giả sử, $\max_D f = f(x_0), x_0 \in D$.

Suy ra, $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in D \Rightarrow -f(x) \geq -f(x_0), \forall x \in D \Rightarrow \min_D \{-f\} = -f(x_0) = -\max_D f$. Hay $\max_D f = -\min_D \{-f\}$.

+ Phần còn lại chứng minh tương tự.

Định lý 5. Cho có hàm số $f_1, f_2, \dots, f_n$ cùng xác định trên D . Đặt $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$. Giả sử $\min_D f, \min_D f_i, \max_D f, \max_D f_i, \forall i = \overline{1, n}$ đều tồn tại. Khi đó, ta có:

$$\max_D f \leq \sum_{i=1}^n \max_D f_i.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\exists x_0 \in D$ sao cho $\max_D f_i = f_i(x_0), \forall i = \overline{1, n}$.

và $\min_D f \geq \sum_{i=1}^n \min_D f_i$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\exists x_0 \in D$ sao cho $\min_D f_i = f_i(x_0), \forall i = \overline{1, n}$.

Chứng minh

Lấy tùy ý $x \in D$. Khi đó ta có, $f_i(x) \leq \max_D f_i, \forall i = \overline{1, n}$.

Từ đó suy ra, $f = \sum_{i=1}^n f_i \leq \sum_{i=1}^n \max_D f_i, \forall x \in D$.

Do điều này đúng với mọi x tùy ý thuộc D nên suy ra $\max_D f \leq \sum_{i=1}^n \max_D f_i$. (5)

Bây giờ ta xét điều kiện để dấu bằng xảy ra, tức $\max_D f = \sum_{i=1}^n \max_D f_i$.

Giả sử, tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $\max_D f_i = f(x_0), \forall i = \overline{1, n}$. Khi đó,

$$\sum_{i=1}^n \max_D f_i = \sum_{i=1}^n f_i(x_0) = f(x_0).$$

Mặt khác, do $x_0 \in D$ nên $f(x_0) \leq \max_D f$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $\max_D f(x) = \sum_{i=1}^n \max_D f_i$. Hơn nữa, $\max_D f = f(x_0)$.

+ Trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Định lý 6. Cho có hàm số $f_1, f_2, \dots, f_n$ cùng xác định trên D và $f_i(x) > 0, \forall x \in D$.

Đặt $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$. Giả sử $\min_D f, \min_D f_i, \max_D f, \max_D f_i, \forall i = \overline{1, n}$ đều tồn tại. Khi đó, ta có:

$$\max_D f \leq \left(\max_D f_1 \right) \cdot \left(\max_D f_2 \right) \cdot \dots \cdot \left(\max_D f_n \right).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\exists x_0 \in D$ sao cho $\max_D f_i = f_i(x_0), \forall i = \overline{1, n}$.

và

$$\min_D f \geq \left(\min_D f_1 \right) \cdot \left(\min_D f_2 \right) \cdot \dots \cdot \left(\min_D f_n \right).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\exists x_0 \in D$ sao cho $\min_D f_i = f_i(x_0), \forall i = \overline{1, n}$.

Chứng minh

Chứng minh tương tự định lý 5.

Định lí 7. Cho f, g là hai hàm số xác định trên D . Đặt $h = f - g$. Giả sử $\min_D f; \min_D g; \min_D h; \max_D f; \max_D g; \max_D h$ đều tồn tại. Khi đó ta có:

$$\max_D h \leq \max_D f - \min_D g. \quad (7)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $\max_D f = f(x_0)$ và $\min_D g = g(x_0)$.

$$\min_D h \geq \min_D f - \max_D g.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $\min_D f = f(x_0)$ và $\max_D g = g(x_0)$.

Chứng minh

$$\text{Ta có, } h(x) = f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x)).$$

$$\text{Theo định lí 5, ta có: } \max_D h(x) \leq \max_D f(x) + \max_D (-g(x)). \quad (8)$$

$$\text{Theo định lí 2, ta có: } \max_D (-g(x)) = -\min_D [-(-g(x))] = -\min_D g(x). \quad (9)$$

Từ (8) và (9), suy ra $\max_D h(x) \leq \max_D f(x) - \min_D g(x)$. Vậy (7) đúng.

Vẫn theo tính chất 5 thì dấu bằng trong (8) xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $\max_D f(x) = f(x_0); \max_D (-g(x)) = -g(x_0)$.

$$\text{Nhưng } \max_D (-g(x)) = -g(x_0) \Leftrightarrow -\min_D g(x) = -g(x_0) \Leftrightarrow \min_D g(x) = g(x_0). \quad \square$$

Định lí 8. Cho f, g là hai hàm số xác định và dương trên D . Đặt $h = \frac{f}{g}$. Giả sử $\min_D f; \min_D g; \min_D h; \max_D f; \max_D g; \max_D h$ đều tồn tại. Khi đó ta có:

$$\max_D h \leq \frac{\max_D f}{\min_D g}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $\max_D f = f(x_0)$ và $\min_D g = g(x_0)$.

$$\min_D h \geq \frac{\min_D f}{\max_D g}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $\min_D f = f(x_0)$ và $\max_D g = g(x_0)$.

Chúng minh tương tự định lí 7.

Định lí 9. Giả sử hàm f xác định và liên tục trên D . Khi đó, nếu đặt

$$M = \max_D f(x), m = \min_D f(x) \text{ thì } \min_D |f(x)| = \begin{cases} 0 & \text{nếu } Mm \leq 0 \\ \min\{|M|; |m|\} & \text{nếu } Mm > 0. \end{cases}$$

Chúng minh

Trước hết, ta có $|f(x)| \geq 0, \forall x \in D$ và với mọi $c \in [m; M]$ thì tồn tại $x \in D: f(x) = c$. (10)

1. Nếu $Mm \leq 0$, khi đó $m \leq 0 \leq M$ nên tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Kết hợp với (10), suy ra $\min_D f(x) = 0$.

2. Nếu $M.m > 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $M \geq m > 0$ khi đó $f(x) \geq m > 0, \forall x \in D$ nên $|f(x)| \geq m, \forall x \in D$ và $f(x_0) = m$ nên $\min_D |f(x)| = \min_D f(x) = m = \min\{M; m\} = \min\{|M|; |m|\}$.

Trường hợp $m \leq M < 0$, chứng minh tương tự.

Định lí 10. Cho f là hàm số xác định trên D và tồn tại $\max_D f(x), \min_D f(x)$. Khi đó ta có:

$$\max_D |f(x)| = \max\left\{\left|\max_D f(x)\right|; \left|\min_D f(x)\right|\right\}. \quad (11)$$

Chứng minh

Áp dụng định lí 4, thì (11) tương đương với

$$\max_D |f(x)| = \max \left\{ \left| \max_D f(x) \right|; \left| \max_D (-f(x)) \right| \right\}.$$

Lấy x_0 tùy ý thuộc D , xảy ra hai khả năng sau:

1. $f(x_0) \geq 0$. Khi đó,

$$|f(x_0)| = f(x_0) \leq \max_D f(x) \leq \left| \max_D f(x) \right| \leq \max \left\{ \left| \max_D f(x) \right|; \left| \max_D (-f(x)) \right| \right\}.$$

2. $f(x_0) < 0$. Khi đó,

$$|f(x_0)| = -f(x_0) \leq \max_D (-f(x)) \leq \left| \max_D (-f(x)) \right| \leq \max \left\{ \left| \max_D f(x) \right|; \left| \max_D (-f(x)) \right| \right\}.$$

Do x_0 tùy ý thuộc D nên suy ra, $\max_D |f(x)| \leq \max \left\{ \left| \max_D f(x) \right|; \left| \max_D (-f(x)) \right| \right\}. (12)$

Bây giờ, không giảm tính tổng quát, giả sử $\max \left\{ \left| \max_D f(x) \right|; \left| \max_D (-f(x)) \right| \right\} = \left| \max_D f(x) \right| = |f(c)|, c \in D$. (Trường hợp còn lại chứng minh tương tự).

$$\text{Khi đó, } \max_D |f(x)| = f(c) \geq \max \left\{ \left| \max_D f(x) \right|; \left| \max_D (-f(x)) \right| \right\} \quad (13)$$

$$\text{Từ (12) và (13), suy ra } \max_D |f(x)| = \max \left\{ \left| \max_D f(x) \right|; \left| \max_D (-f(x)) \right| \right\}$$

Định lí 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên D . Đặt $D_1 = \{x \in D : f(x) > 0\}; D_2 = \{x \in D : f(x) \leq 0\}$. Giả sử $\min_{D_1} f(x)$ và $\max_{D_2} f(x)$ đều

tồn tại. Khi đó ta có: $\min_D |f(x)| = \min \left\{ \min_{D_1} f(x); \max_{D_2} f(x) \right\}.$

Chứng minh.

$$\text{Từ các giả thiết, ta suy ra } \min_{D_1} |f(x)| = \min_{D_1} f(x) \quad (14)$$

$$\text{và } \left| \max_{D_2} f(x) \right| \leq |f(x)|, \forall x \in D_2. \quad (15)$$

$$\text{Giả sử, } \max_{D_2} f(x) = f(x_0), x_0 \in D_2 \text{ nên ta có } |f(x_0)| = \left| \max_{D_2} f(x) \right|. \quad (16)$$

$$\text{Từ đó (15) và (16) suy ra, } \min_{D_2} |f(x)| = \left| \max_{D_2} f(x) \right|. \quad (17)$$

Áp dụng tính chất 4, và (14), (17) suy ra:
 $\min_D |f(x)| = \min \left\{ \min_{D_1} f(x); \min_{D_2} |f(x)| \right\} = \min \left\{ \min_{D_1} f(x); \left| \max_{D_2} f(x) \right| \right\}. \quad \square$

Định lý 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên D . Giả sử

$$\min_D f(x) := m; \max_D f(x) := M;$$

Khi đó

$$\max_D |f(x)| = \frac{|M+m| + |M-m|}{2}; \min_D |f(x)| = \begin{cases} \frac{|M+m| - |M-m|}{2} & \text{nếu } p.q \geq 0; \\ 0 & \text{nếu } p.q < 0 \end{cases};$$

Chứng minh

$$\text{Theo định lý 10, ta có } \max_D |f(x)| = \max \left\{ \left| \max_D f(x) \right|; \left| \min_D f(x) \right| \right\}. \quad (18)$$

+ Nếu $M \geq m \geq 0$ thì

$$\max_D |f(x)| = \max \{M, m\} = M = \frac{M+m+M-m}{2} = \frac{|M+m| + |M-m|}{2}.$$

+ Nếu $M, m < 0$ thì do $M > m \Rightarrow -M < -m$ và $M-m > 0 \Rightarrow$

$$\max_D |f(x)| = \max \{-M, -m\} = -m.$$

$$\text{Mặt khác, } \frac{|M+m| + |M-m|}{2} = \frac{-M-m+M-m}{2} = -m.$$

+ Nếu $M > -m \geq 0$ thì $\max_D |f(x)| = \max \{M, -m\} = M$

Mặt khác, $\frac{|M+m|+|M-m|}{2} = \frac{M+m+M-m}{2} = M.$

+ Nếu $M > 0, m < 0$ và $M < -m$ thì $\max_D |f(x)| = \max\{M, -m\} = -m.$

Mặt khác, $\frac{|M+m|+|M-m|}{2} = \frac{-M-m+M-m}{2} = -m.$

Vậy, trong mọi trường hợp, ta đều có: $\max_D |f(x)| = \frac{|M+m|+|M-m|}{2}.$

Chúng minh tương tự cho kết quả $\min_D |f(x)| = \begin{cases} \frac{|M+m|-|M-m|}{2} & \text{nếu } p.q \geq 0; \\ 0 & \text{nếu } p.q < 0 \end{cases}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + 2|$ trên $[0; 4]$.

A. 5.

B. 25.

C. 18.

D. 32.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ trên đoạn $[0; 4]$.

Ta có, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [0; 4], x = 3 \in [0; 4].$

Lại có $f(0) = 2; f(3) = -25, f(4) = -18$ nên $\max_{[0;4]} f(x) = 2, \min_{[0;4]} f(x) = -25$

Theo định lí 12, suy ra $\max_{[0;4]} |f(x)| = \frac{|2+(-25)|+|2-(-25)|}{2} = 25 = f(3).$

Ví dụ 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - m|$ trên $[-1; 2]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -2.

B. 7.

C. 14.

D. 3.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 - m$ thì

$$f'(x) = 4x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = 1.$$

Ta có $f(-1) = -m - 1; f(0) = -m; f(1) = -m - 1; f(2) = -m + 8$

nên $\min_{[-1;2]} f(x) := -m - 1; \max_{[-1;2]} f(x) := -m + 8;$

+ Nếu $(-m - 1)(-m + 8) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 8$ thì $\min_{[-1;2]} |x^4 - 2x^2 - m| = 0$ (không thỏa mãn)

+ Nếu $m \leq -1$ hoặc $m \geq 8$ thì

$$\max_{[-1;2]} y = \frac{|(-m - 1) + (-m + 8)| - |(-m - 1) - (-m + 8)|}{2} = \frac{|2m - 7| - 9}{2}$$

Ta phải có: $\frac{|2m - 7| - 9}{2} = 2 \Leftrightarrow |2m - 7| = 13 \Rightarrow m = 10, m = -3$ (thỏa mãn)

Vậy, $S = \{-3; 10\}$ nên tổng các phần tử của S bằng 7.

Chọn B.

Ví dụ 3: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên $[-1; 1]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $-\frac{8}{3}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{3}$.

D. -1.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2}$ thì

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 4 \notin [-1; 2].$$

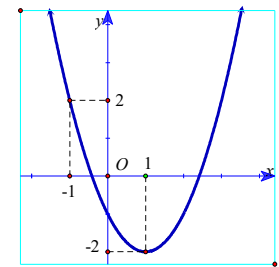
Ta có $f(-1) = -m - \frac{1}{3}; f(0) = -m; f(1) = -m - 1;$ nên $\min_{[-1; 2]} f(x) := -m - 1;$
 $\max_{[-1; 2]} f(x) := -m;$

Suy ra, $\max_{[-1; 1]} y = \frac{|(-m-1) + (-m)| + |(-m-1) - (-m)|}{2} = \frac{|2m+1| + 1}{2}$

Ta phải có: $\frac{|2m+1| + 1}{2} = 3 \Leftrightarrow |2m+1| + 1 = 6 \Rightarrow m = 2, m = -3$ (thỏa mãn)

Vậy, $S = \{-3; 2\}$ nên tổng các phần tử của S bằng -1 .

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ trên đoạn $[-1; 5]$ bằng 10. Tính tổng các phần tử của tập S .



- A. -12. B. 12.
C. 8. D. 4.

Lời giải

Ta thấy, đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua các điểm $(-1; 2), (1; -2)$ và có đỉnh là $(1; -2)$

nên ta có
$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1, c = -1 \text{ nên } f(x) = x^2 - 2x - 1.$$

Trên đoạn $[-1; 5]$, hàm số $f(x)$ có một cực trị là $x = 1$.

Lại có $f(-1)=2, f(1)=-2, f(5)=14$ nên $\max_{[-1;5]} f(x)=14, \min_{[-1;5]} f(x)=-2$.

Xét hàm số $h(x)=f(x)+m$ thì $\min_{[-1;5]} h(x)=m-2, \max_{[-1;5]} h(x)=m+14$ nên

$$\max_{[-1;5]} g(x) = \frac{|m+14+m-2|+|m+14-(m-2)|}{2} = |m+6|+8.$$

Theo đề bài, ta phải có $\max_{[-1;5]} g(x)=10 \Rightarrow |m+6|+8=10 \Rightarrow m=-4, m=-8$.

Vậy $S=\{-4;-8\}$ nên tổng các phần tử của S bằng -12 .

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=|x^3-x^2-x+m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min_{[1;3]} y$ nhỏ hơn 3?

A. 21.

B. 22.

C. 4.

D. 20.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-x^2-x+m$ thì

$$f'(x)=3x^2-2x-1 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1, x=-\frac{1}{3} \notin [1;3]$$

Ta có $f(1)=m-1; f(3)=m+15$ nên $\min_{[1;3]} f(x)=m-1; \max_{[1;3]} f(x)=m+15;$

+ Nếu $(m-1)(m+15) \leq 0 \Leftrightarrow -15 \leq m \leq 1$ thì $\min_{[1;3]} y=0$ (thỏa mãn).

Vậy, trường hợp này thì $|S|=17$.

+ Nếu $m < -15$ hoặc $m > 1$ thì

$$\min_{[1;3]} y = \frac{|(m-1)+(m+15)|-|(m-1)-(m+15)|}{2} = |m+7|-8$$

Ta phải có: $|m+7|-8 < 3 \Leftrightarrow |m+7| < 11 \Rightarrow -18 < m < 4$.

Kết hợp với điều kiện $m < -15$ hoặc $m > 1$ thì ta được $m \in \{-16; -17; 2; 3\}$. Tức $|S| = 4$.

Vậy, có 21 số nguyên m thỏa mãn.

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét hàm $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$ có $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lại có, $g(0) = m; g(1) = m + 1; g(2) = m; g(3) = m + 9$ nên $\max_{[0;3]} g(x) = m + 9;$

$$\min_{[0;3]} g(x) = m \text{ do đó } \max_{[0;3]} f(x) = \frac{|m + 9 + m| + |m + 9 - m|}{2} = \frac{|2m + 9| + 9}{2} \geq \frac{9}{2}, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = -\frac{9}{2}$.

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $m = -\frac{9}{2}$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để $\min_{[0;2]} |y| + \max_{[0;2]} |y| = 6$. Tính số phần tử của S.

A. 0.

B. 6.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Ta có, $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$.

$$f(0) = m; f(1) = m - 2; f(2) = m + 2 \text{ nên } \min_{[0;2]} y = m - 2; \max_{[0;2]} y = m + 2.$$

$$\text{Ta có, } \max_{[0;2]} |y| = \frac{|m - 2 + m + 2| + |m - 2 - (m + 2)|}{2} = |m| + 2.$$

+ Nếu $-2 \leq m \leq 2$ thì $\min_{[0;2]} |y| = 0$ nên ta phải có $|m| + 2 + 0 = 6 \Rightarrow m = \pm 4$ (không thỏa mãn).

+ Nếu $m < -2$ hoặc $m > 2$ thì $\min_{[0;2]} |y| = |m| - 2$ nên ta phải có $|m| + 2 + |m| - 2 = 6 \Rightarrow m = \pm 3$ (Thỏa mãn)

Vậy, $|S| = 2$.

Ví dụ 8 (Phú Thọ - 2020). Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + m$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ sao cho $\max_{[0;2]} |y| < 3 \min_{[0;2]} |y|$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 63.

B. 51.

C. 195.

D. 23.

Lời giải

Ta có, $f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1 \notin [0; 2], x = 1$.

$$f(0) = m; f(1) = m - 1; f(2) = m + 8 \text{ nên } \max_{[0;2]} f(x) = m + 8; \min_{[0;2]} f(x) = m - 1.$$

$$\text{Ta có, } \max_{[0;2]} |y| = \frac{|2m + 7| + 9}{2}.$$

+ Nếu $-8 \leq m \leq 1$ thì $\min_{[0;2]} |y| = 0$ nên không thể có $\max_{[0;2]} |y| < 3 \min_{[0;2]} |y|$.

+ Nếu $m < -8$ hoặc $m > 1$ thì $\min_{[0;2]} |y| = \frac{|2m + 7| - 9}{2}$

$$\text{Để } \max_{[0;2]} |y| < 3 \min_{[0;2]} |y| \quad \text{thì} \quad \frac{|2m+7|+9}{2} < 3 \cdot \frac{|2m+7|-9}{2} \Leftrightarrow |2m+7| > 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+7 > 18 \\ 2m+7 < -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{11}{2} \\ m < -\frac{25}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m < -8$ hoặc $m > 1$ thì ta phải có $m < -12,5$ hoặc $m > 5,5$.

Theo đề bài thì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2020; 2020]$ nên $m \in \{-2020; -2019; -2018; \dots; -13; 6; 7; \dots; 2020\} = S$

$$\text{Vậy } S = 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = \frac{7}{2} \cdot (6 + 12) = 63.$$

Chọn A.

Ví dụ 9 (Lương Gia Huy). Biết rằng hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và $f(1) = -1, f'(1) = 0$. Gọi $S = \{m \in \mathbb{N}^* \mid |f(x) - m| \leq 12, \forall x \in [0; 2]\}$. Số phần tử của tập S là

A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 0.

Lời giải

Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng 3 điểm chung với trục hoành nên đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ nên $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

$$\text{Lại do } f'(1) = 0 \text{ nên } 4a + 2b = 0. \quad (1)$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow a + b = -1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $a = 1, b = -2$.

$$\text{Vậy } f(x) = x^4 - 2x^2.$$

Theo đề, ta phải có $|f(x) - m| \leq 12, \forall x \in [0; 2] \Leftrightarrow \max_{[0; 2]} g(x) \leq 12$ với
 $g(x) = f(x) - m$.

Ta thấy, $g'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$ và
 $g(0) = -m; g(1) = -m - 1; g(2) = -m + 8$ nên
 $\max_{[0; 2]} g(x) = \frac{|(-m + 8) + (-m - 1)| + |(-m + 8) - (-m - 1)|}{2} = \frac{|2m - 7| + 9}{2}$.

Suy ra, ta có: $|2m - 7| + 9 \leq 24 \Rightarrow -15 \leq 2m - 7 \leq 15 \Rightarrow -4 \leq m \leq 11$.

Vậy, $S = \{1; 2; \dots, 11\}$ nên $|S| = 11$.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tích của các phân tử của S là

A. 4.

B. -4.

C. 8.

D. -8.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x \in [-3; -1]$.

Lại có $f(-3) = 6 - 3m^2, f(-1) = 26 - m^2$.

Ta thấy, $26 - m^2 - (6 - 3m^2) = 20 + 2m^2 > 0 \Rightarrow 26 - m^2 > 6 - 3m^2$ nên
 $\max_{[-3; -1]} f(x) = 26 - m^2, \min_{[-3; -1]} f(x) = 6 - 3m^2$.

Suy ra, $\max_{[-3; -1]} |f(x)| = \frac{|6 - 3m^2 + 26 - m^2| + |6 - 3m^2 - 26 + m^2|}{2} = 2|8 - m^2| + |m^2 + 10| = g(m)$

+ Nếu $8 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$ thì $g(m) = -m^2 + 26 \geq 18, \forall m \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$.

+ Nếu $8 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2\sqrt{2}, m \geq 2\sqrt{2}$ thì $g(m) = 3m^2 - 6 \geq 18, \forall m \in (-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$.

Vậy, $\min \left\{ \max_{[-3; -1]} |f(x)| \right\} = 18 \Leftrightarrow m = -2\sqrt{2}, m = 2\sqrt{2}$. Hay $S = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$ nên tích tất cả các phần tử của S là -8 .

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Cho hàm số $y = |x^4 + 4x^3 - m|$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để $\min_{[-4; -2]} y = 2020$?

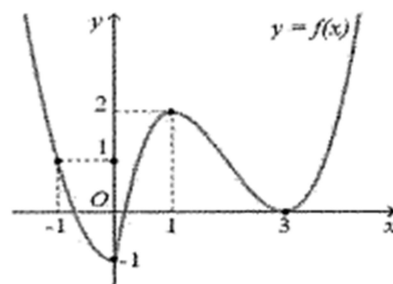
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Bài tập 2. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + 3m}{x + 3} \right|$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 5. Tính tổng các phần tử của S .

- A. 4. B. -5. C. 1. D. -4.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ.

Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{|f(x) + m|}$ trên đoạn $[-1; 3]$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{2020}$.



Giá trị của S bằng

- A. -2019. B. 2018. C. -1. D. 0.

Bài tập 4. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |-4\cos^2 x + 2\sin x + m + 4|$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 4?

- A. 12. B. 14. C. 13. D. 15.

Bài tập 5. Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2mx + 3|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$ không lớn hơn 3?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Bài tập 6. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị của hàm số $y = |x^2 - (m+1)x + m|$ trên $[2; m-1]$ nhỏ hơn 2020.

- A. 2043210. B. 2034201. C. 3421020. D. 3412020.

Bài tập 7. Cho hàm số $y = |\sin x + \cos x + m|$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên bé hơn 2?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Bài tập 8. Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn $3 \max_{[1;3]} f(x) - 2 \min_{[1;3]} f(x) = 17$.

- A. $m \in \{9; -5; 29\}$. B. $m \in \left\{9; -5; -\frac{5}{3}\right\}$.
C. $m \in \{9; -5\}$. D. $m \in \{9; -5; 5\}$.

Bài tập 9. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-4	-3	-1	0	2	4	$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	0	+
f	$-\infty$	-4	4	2	3	-3	1	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để $\max_{[-1;1]} \{f(|x^3| + 3|x|) + f(m)\} = \frac{11}{2}$.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

PHẦN KẾT LUẬN

3.1. Ý nghĩa, phạm vi áp dụng của đề tài

Thông qua đề tài này, chúng ta thấy rằng, với một số bài toán thoát nhìn ta thấy việc giải bài toán đó theo cách thông thường đôi khi gặp khá nhiều khó khăn. Tuy nhiên, bằng sự linh hoạt, sáng tạo và hiểu được bản chất của vấn đề chúng ta có thể giải quyết nó một cách nhanh chóng và kết quả hết sức bất ngờ.

Với đề tài này, bản thân tôi đã vận dụng trong quá trình dạy học sinh ôn thi THPT Quốc gia năm học 2020 – 2021, 2021 – 2022 và nhận thấy rằng, đa số học sinh rất hào hứng tiếp nhận phương pháp và cũng thực hiện rất tốt các bài tập có dạng liên quan. Vì vậy, tôi cho rằng, với đề tài này, các đồng nghiệp có thể vận dụng trong quá trình giảng dạy và học sinh học tập trong chương trình Giải tích lớp 12, đặc biệt là chuyên đề tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số một cách có hiệu quả.

3.2. Kiến nghị, đề xuất

Trong quá trình thực hiện, chắc chắn sẽ không tránh khỏi những sơ suất. Rất mong được quý đồng nghiệp cũng như học sinh góp ý đề tài này thực sự một tài liệu tham khảo có giá trị cho giáo viên và học sinh trong giải toán.