DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

BÀI GIẢNG PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC. DÃY SỐ

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

+ Biết được thứ tự các bước giải toán bằng phương pháp quy nạp.
+ Biết khái niệm dãy số, cách cho dãy số, tính chất đơn điệu và bị chặn của dãy số.
+ Nắm được phương pháp giải các dạng bài tập của dãy số như tìm số hạng tổng quát, xét tính tăng, giảm và bị chặn.

❖ **Kĩ năng**

+ Chứng minh được các bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học.
+ Biết cách xác định dãy số.
+ Xét được tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số.
+ Tính được tổng của một dãy số.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh mệnh đề *A(n)* đúng với mọi giá trị nguyên dương *n*, ta thực hiện như sau:

- ***Bước 1:*** Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.
- ***Bước 2:*** Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương $n = k$ tùy ý $(k \geq 1)$, chứng minh rằng mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Chú ý: *Nếu phải chứng minh mệnh đề A(n) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq p$ thì:*

+) Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.

+) Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Dãy số

a) Mỗi hàm số *u* xác định trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số).

Kí hiệu: $\begin{aligned} u &: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n). \end{aligned}$

Dạng khai triển: $u_1; u_2; u_3; ...; u_n; ...$

Trong đó ta gọi: u_1 là số hạng đầu, $u_n = u(n)$ là số hạng thứ *n* hay số hạng tổng quát của dãy số.

b) Mỗi hàm số *u* xác định trên tập $M = \{1; 2; 3; ...; m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$

c) Các cách cho một dãy số:

Cách 1: Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ 1: *Cho dãy (u_n) với* $u_n = 3n^2 + n - 1$

Cách 2: Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi (hay quy nạp):

Ví dụ 2: *Cho dãy số (u_n) xác định bởi*

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).
- Với $n \ge 2$, cho một công thức tính u_k nếu biết u_{k-1} (hoặc vài số hạng đứng ngay trước nó).

Cách 3: Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n^3 \end{cases} \forall n \ge 1$$

Ví dụ 3: *Cho đường tròn (O) bán kính R. Cho dãy (u_n) với u_n là độ dài cung tròn có số đo là $\frac{2\pi}{n}$ của đường tròn (O).*

Dãy số tăng, dãy số giảm

a) Dãy số *(u_n)* được gọi là tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \left(u_n > 0\right)$

b) Dãy số *(u_n)* được gọi là giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \left(u_n > 0\right)$

Dãy số bị chặn

a) Dãy số *(u_n)* được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số *M* sao cho $u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dãy số *(u_n)* được gọi bị chặn dưới nếu tồn tại số *m* sao cho $u_n \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) Dãy số *(u_n)* được gọi bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số *m, M* sao cho

$m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1:Quy nạp toán học

Phương pháp giải

Để chứng minh một mệnh đề *P(n)* phụ thuộc vào số tự nhiên *n* đúng với mọi $n \ge n_o$ (n_o là só tự nhiên cho trước), ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Kiểm tra *P(n)* đúng với $n = n_o$

Bước 2: Giả sử *P(n)* đúng khi $n = k\left(k \ge n_o\right)$ (xem đây là giả thiết để chứng minh bước 3).

Bước 3: Ta cần chứng minh *P(n)* đúng khi $n = k+1$

Ví dụ: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$, ta luôn có $2^{n+1} > 2n+3$ (*)

Hướng dẫn giải:

Với *n = 2* ta có $2^{2+1} > 2.2+3 \Leftrightarrow 8 > 7$ (đúng). Vậy (*) đúng với *n = 2.*

Giả sử với $n = k, k \ge 2$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có $2^{k+1} > 2k+3$ (1)

Ta phải chứng minh (*) đúng với *n = k + 1*, có nghĩa ta phải chứng minh $2^{k+2} > 2(k+1)+3$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2 ta được

Bước 4: Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta kết luận rằng *P(n)* đúng với mọi $n \ge n_o$

$2.2^{k+1} > 2(2k+3) \Leftrightarrow 2^{k+2} > 4k+6 > 2(k+1)+3$

Vậy $2^{k+2} > 2(k+1)+3$ (đúng).

Do đó theo nguyên lí quy nạp (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \ge 2$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương *n*, ta có

$1.4+2.7+...+n(3n+1)=n(n+1)^2$ (1)

Hướng dẫn giải

Với *n = 1*, ta có $VT(1)=1.4=4;\ VP(1)=1.(1+1)^2=4$

Suy ra *VT(1) = VP(1)* với *n = 1.*

Vậy (1) đúng với *n = 1.*

Giả sử (1) đúng với *n = k*

Khi đó ta có $1.4+2.7+...+k(3k+1)=k(k+1)^2$

Ta phải chứng minh (1) đúng với *n = k + 1* hay

$1.4+2.7+...+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=(k+1)(k+2)^2$

Thật vậy $\underbrace{1.4+2.7+...+k(3k+1)}_{=k(k+1)^2}+(k+1)(3k+4)=k(k+1)^2+(k+1)(3k+4)$

$=(k+1)(k+2)^2$ (điều phải chứng minh).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$

Do đó theo nguyên lí quy nạp (1) đúng với mọi số nguyên dương *n*.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \ge 2$, ta có

$1.2^2+2.3^3+3.4^4+...+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ (1)

Hướng dẫn giải

Với *n = 2*, ta có $VT(1)=1.2^2=4;\ VP(1)=\dfrac{2.3.8}{12}=4$

Suy ra *VT(1) = VP(1)* với *n = 2.*

Vậy (1) đúng với *n = 2.*

Giả sử (1) đúng với *n = k*. Khi đó ta có

$1.2^2+2.3^3+3.4^4+...+(k-1)k^2=\dfrac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh

$$1.2^2+2.3^3+3.4^4+...+(k-1)k^2+k(k+1)^2=\frac{(k+1)\left((k+1)^2-1\right)\left[3(k+1)+2\right]}{12}$$

$$\Leftrightarrow 1.2^2+2.3^3+3.4^4+...+(k-1)k^2+k(k+1)^2=\frac{(k+1)\left(k^2+2k\right)(3k+5)}{12}$$

Thật vậy $1.2^2+2.3^3+3.4^4+...+(k-1)\ k^2+k(k+1)^2$

$$=\frac{k\left(k^2-1\right)(3k+2)}{12}+k(k+1)^2=\frac{k(k+1)\left(3k^2+11k+10\right)}{12}$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{12}=\frac{(k+1)\left(k^2+2k\right)(3k+5)}{12}$$ (điều phải chứng minh)

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$.

Do đó theo nguyên lí quy nạp (1) đúng với mọi số nguyên dương $n\geq 2$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương *n*, ta có

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Với $n=1$, ta có $VT(1)=\frac{1}{6};VP(1)=\frac{1.4}{4.2.3}=\frac{1}{6}$

Suy ra $VT(1)=VP(1)$ khi $n=1$.

Vậy (1) đúng với $n=1$

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

Thật vậy $\underbrace{\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}}_{=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{4(k+1)(k+2)}\left[k(k+3)+\frac{4}{k+3}\right]$$

$$=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$ (điều phải chứng minh).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$.

Do đó theo nguyên lí quy nạp (1) đúng với mọi số nguyên dương *n*.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \ge 2$, ta có

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24} \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Đặt $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}$

Với $n = 2$ ta có $u_2=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{7}{12}>\frac{13}{24}$ (đúng)

Giả sử với $n = k$ thì (1) đúng, có nghĩa ta có $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{k+k}>\frac{13}{24}$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{k+k}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}>\frac{13}{24}$$

Thật vậy, xét hiệu

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{k+k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{k+k}\right)$$

$$=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}>0$$

Suy ra

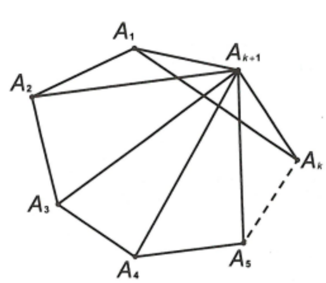
$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{k+k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}>\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{k+k}$$

Do đó $u_{k+1}>u_k>\frac{13}{24}$. Vậy (1) đúng với $n=k+1$.

Suy ra (1) đúng với mọi số nguyên dương $n \ge 2$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác lồi *n* cạnh $(n \ge 4)$ là $\frac{n(n-3)}{2}$.

Hướng dẫn giải



Đặt $S(n)=\frac{n(n-3)}{2}$

Khi $n = 4$, ta có $S(4) = 2$. Suy ra mệnh đề đúng với $n = 4$.

Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k \geq 4$, tức là $S(k) = \frac{k(k-3)}{2}$

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng khi $n = k + 1$, tức là chứng minh

$S(k+1) = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$

Thật vậy, ta tách đa giác $(k+1)$ cạnh thành đa giác k cạnh và tam giác $A_1A_kA_{k+1}$ bằng cách nối đoạn A_1A_k.

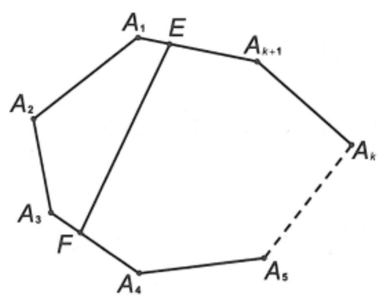
Khi đó trừ đi đỉnh A_{k+1} và 2 đỉnh kề với nó là A_1, A_k thì ta còn lại $(k+1) - 3 = k - 2$ đỉnh, tương ứng với *(k – 2)* đường chéo kẻ từ đỉnh A_{k+1} cộng với đường chéo A_1A_k thì ta có số đường chéo của đa giác $(k+1)$ cạnh là $S(k+1) = \frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\Rightarrow$ mệnh đề đúng khi $n = k + 1$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp toán học ta có mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*, (n \geq 4)$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng mọi n – giác lồi $(n \geq 5)$ đều được chia thành hữu hạn ngũ giác lồi.

Hướng dẫn giải



Khi *n = 5*, ta có một ngũ giác lồi nên mệnh đề đúng với *n = 5*.

Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k \geq 5$, tức là ta có $k-$ giác lồi được chia thành hữu hạn ngũ giác lồi.

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng khi $n = k + 1$, tức là chứng minh mọi $(k+1)-$giác lồi đều được chia thành hữu hạn các ngũ giác lồi.

Thật vậy, trên các cạnh A_1A_{k+1} và A_3A_4 ta lấy các điểm *E, F* không trùng với các đỉnh. Khi đó đoạn *EF* chia $(k+1)-$ giác lồi thành 2 đa giác lồi, đó là ngũ giác lồi $A_1A_2A_3FE$ và $k-$giác lồi $EFA_4A_5...A_{k+1}$.

Theo giả thiết quy nạp thì $k-$ giác lồi $EFA_4A_5...A_{k+1}$ sẽ được chia thành hữu hạn ngũ giác lồi đồng thời ta có thêm một ngũ giác lồi $A_1A_2A_3FE$ nên $(k+1)-$ giác lồi sẽ được chia thành hữu hạn các ngũ giác lồi $\Rightarrow$ mệnh đề đúng khi $n = k + 1$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp toán học ta có mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^* (n \geq 4)$

Ví dụ 7: Với mỗi số nguyên dương *n*, kí hiệu $u_n = 9^n - 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương *n* thì u_n luôn chia hết cho 8.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_1 = 9^1 - 1 = 8$ chia hết cho 8 (đúng)

Giả sử $u_k = 9^k - 1$ chia hết cho 8

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 9^{k+1} - 1$ chia hết cho 8

Thật vậy, ta có $u_{k+1} = 9^{k+1} - 1 = 9.9^k - 1 = 9\left(9^k - 1\right) + 8 = 9u_k + 8$

Vì $9u_k$ và 8 chia hết cho 8 nên u_{k+1} chia hết cho 8.

Theo quy nạp với mọi số nguyên dương *n, u_n* chia hết cho 8.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ chia hết cho 120.

Hướng dẫn giải

Trước hết chứng minh bổ đề *"Tích của hai số chẵn liên tiếp sẽ chia hết cho 8"*.

Thật vậy, với *n* là số nguyên thì *2n* và $(2n+2)$ là hai số chẵn liên tiếp.

Khi đó $2n(2n+2) = 4n(n+1)$

Mà $n(n+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $n(n+1) \vdots 2$

Suy ra $4n(n+1) \vdots 8$

Đặt $P(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

Khi $n = 1$, ta có $P(1) = 120 \vdots 120$. Suy ra mệnh đề đúng với *n = 1*.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$P(k) = k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \vdots 120$

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là chứng minh

$P(k+1) = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5) \vdots 120$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}P(k+1) &= (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)\\ &= k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) + 5(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\\ &= P(k) + 5(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\end{aligned}$$

Mà $k+1, k+2, k+3, K=4$ là số tự nhiên liên tiếp nên chắc chắn có 2 sỗ chẵn liên tiếp và một số chia hết cho 3 trong bốn số đó.

Suy ra $5(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \vdots 5.3.8 = 120$

Mặt khác $P(k) \vdots 120$ nên $P(k+1) \vdots 120 \Rightarrow$ mệnh đề đúng khi $n = k+1$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến *A(n)* đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (*p* là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề *A(n)* đúng với *n = k*. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $k > p.$ **B.** $k \geq p.$ **C.** $k = p.$ **D.** $k < p.$

Câu 2: Với mỗi số nguyên dương, kí hiệu $u_n = 5.2^{3n-2} + 3^{3n-1}$

Một học sinh chứng minh u_n luôn chia hết cho 19 như sau:

Bước 1: Khi $n=1$, ta có $u_1 = 5.2^1 + 3^2 = 19 \Rightarrow u_1 \vdots 19$

Bước 2: Giả sử $u_k = 5.2^{3k-2} + 3^{3k+1}$ chia hết cho 19 với $k \geq 1$.

Khi đó ta có $u_{k+1} = 5.2^{3k+1} + 3^{3k+2} = 8\left(5.2^{3k-2} + 3^{3k-1}\right) + 19.3^{3k-1}$

Bước 3: Vì $5.2^{3k-2} + 3^{3k-1}$ và 19.3^{3k-1} chia hết cho 19 nên u_{k+1} chia hết cho 19, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy u_n chia hết cho 19, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Lập luận trên đúng hay sai? Nếu sai thì bắt đầu từ bước nào?

A. Sai từ bước 1. **B.** Sai từ bước 3.

C. Sai từ bước 2. **D.** Lập luận hoàn toàn đúng.

Câu 3: Giả sử *A* là tập con của tập hợp các số nguyên dương sao cho

(I) $k \in A$; (II) $n \in A \Rightarrow n+1 \in A, \forall n \geq k$

Lúc đó ta có

A. Mọi số nguyên bé hơn *k* đều thuộc *A*.

B. Mọi số nguyên dương đều thuộc *A*.

C. Mọi số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng *k* đều thuộc *A*.

D. Mọi số nguyên đều thuộc *A*.

Câu 4: Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến *A(n)* đúng với mọi giá trị nguyên $n \geq p$, với *p* là số nguyên dương ta sẽ tiến hành 2 bước

Bước 1 **(bước cơ sở)**. Chứng minh rằng *A(n)* đúng khi $n=1$

Bước 2 **(bước quy nạp)**. Với số nguyên dương tùy ý *k*, ta giả sử *A(n)* đúng khi $n=k$ (theo giả thiết quy nạp). Ta sẽ chứng minh rằng *A(n)* đúng khi $n=k+1$

Hãy chọn câu trả lời đúng tương ứng với lí luận trên.

A. Chỉ có bước 2 đúng. **B.** Cả hai bước đều đúng.

C. Cả hai bước đều sai. **D.** Chỉ có bước 1 đúng.

Câu 5: Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$ **B.** $1+3+5+...+(2n-1) = n^2.$

C. $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}.$ **D.** $2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Câu 6: Cho $S_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \dfrac{n-1}{n}.$ **B.** $S_n = \dfrac{n}{n+1}.$ **C.** $S_n = \dfrac{n+1}{n+2}.$ **D.** $S_n = \dfrac{n+2}{n+3}.$

Câu 7: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + n.$ **B.** $u_n = 1 - n.$ **C.** $u_n = 1 + (-1)^{2n}.$ **D.** $u_n = n.$

Câu 8: Cho dãy xác định bởi công thức $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy u_n là

A. $u_n = \dfrac{3}{2^{n-1}}.$ **B.** $u_n = \dfrac{3}{2^n}.$ **C.** $u_n = \dfrac{3}{2^n + 1}.$ **D.** $u_n = \dfrac{3}{2^n - 1}.$

Câu 9: Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ được xác định như sau $u_1 = 3, v_1 = 2$ và $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n=1} = 2u_n.v_n \end{cases}$ với $n \geq 2.$

Công thức tổng quát của hai dãy (u_n) và (v_n) là

A. $\begin{cases} u_n = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n} \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right] \end{cases}.$

B. $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right] \end{cases}.$

C. $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right] \end{cases}.$

D. $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{4}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\right] \end{cases}.$

Câu 10: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \cos\alpha\left(0 < \alpha < \pi\right) \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Số hạng thứ 2020 của dãy số đã cho là

A. $u_{2020} = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^{2020}}\right).$ **B.** $u_{2020} = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^{2019}}\right).$

C. $u_{2020} = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2^{2021}}\right).$ **D.** $u_{2020} = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2^{2020}}\right).$

Dạng 2: Tìm số hạng và xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số

Phương pháp giải

Tìm số hạng của dãy số

Dãy số $(u_n): u_n = f(n)$ với $f(n)$ là một biểu thức của *n*.

Bài toán yêu cầu tìm số hạng u_k ta thay trực tiếp $n = k$ vào $u_n = f(n)$

Dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ với $f(u_n)$ là một biểu thức của u_n. Bài toán yêu cầu tìm số hạng u_k ta tính lần lượt

Ví dụ 1: Cho dãy số (a_n)

Đặt $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ với $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$

a) Tính $u_1; u_2; u_3; u_4$.

b) Tính u_{2020}.

Hướng dẫn giải

$u_2;u_3;...;u_k$ bằng cách thế *u1* vào *u2*, thế *u2* vào *u3*,… thế u_{k-1} vào u_{k+1}.

Dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a; u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$

Bài toán yêu cầu tìm số hạng u_k. Ta tính lần lượt $u_3;u_4;...;u_k$ bằng cách thế *u1;u2* vào thế *u3*; thế *u2, u3* vào *u4*;…; thế u_{k-2}, u_{k-1} vào u_k.

Dãy số (u_n) cho bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(n;u_n) \end{cases}$ với $f(n;u_n)$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và *n*. Bài toán yêu cầu tìm số hạng u_k ta tính lần lượt $u_2;u_3;...;u_k$ bằng cách thế $(1;u_1)$ vào *u2*; thế $(2;u_2)$ vào *u3*; ...; thế $(k-1;u_{k-1})$ vào u_k.

Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số

Nếu (u_n) có dạng $u_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ (kí hiệu $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$) thì ta biến đổi a_k thành hiệu của hai số hạng, dựa vào đó thu gọn u_n.

Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi, ta tính một số số hạng đầu của dãy số (chẳng hạn tính $u_1;u_2;u_3;...$), từ đó dự đón công thức u_n theo *n*, rồi chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp.

Có thể tính hiệu $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó để tìm công thức u_n theo *n*.

a) Ta có $u_1 = a_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$;

$$u_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.(2+1)} = \frac{2}{3};$$

$$u_3 = a_1 + a_2 + a_3 = u_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3.(3+1)} = \frac{3}{4};$$

$$u_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = u_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}.$$

b) Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

do đó $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ...$

$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Suy ra có thể quy nạp

$$u_{2020} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

Ví dụ 2:Xác định công thức $u_n = \frac{n}{n+1}; n \ge 1$

số hạng tổng quát u_n của dãy số

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5$;

$u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7$;
$u_4 = u_3 + 2 = 7 + 2 = 9$;
$u_5 = u_4 + 2 = 9 + 2 = 11$.

Từ các số hạng trên, ta dự đoán số hạng tổng quát có dạng $u_n = 2n + 1, n \ge 1$ (*)

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh công thức (*) đúng.

Với $n = 1; u_1 = 2.1 + 1 = 3$ (đúng).

Vậy (*) đúng với *n = 1*.

Giả sử (*) đúng với *n = k*.

Khi đó ta có $u_k = 2k + 1$ (1)

Ta cần chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$.

Có nghĩa là ta phải chứng minh

$u_{k+1} = 2(k+1) + 1 = 2k + 3$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (1) ta có $u_{k+1} = u_k + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 3$

Do đó (*) đúng khi $n = k + 1$.

Vậy số hạng tổng quát của dãy số là

$$u_n = 2n + 1, \forall n \geq 1.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$. Tìm số hạng u_{50}.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có

$u_1 = 1;$

$u_2 = u_1 + 2;$

$u_3 = u_2 + 2;$

...

$u_{50} = u_{49} + 2.$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được $u_{50} = 1 + 2.49 = 99$

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng u_7.

Hướng dẫn giải

Ta có

$u_3 = 2u_2 + u_1 + 5 = 12;$ $\quad u_4 = 2u_3 + 3u_2 + 5 = 35;$

$u_5 = 2u_4 + 3u_3 + 5 = 111;$ $\quad u_6 = 2u_5 + 3u_4 + 5 = 332;$

Vậy $u_7 = 2u_6 + 3u_5 + 5 = 1002.$

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$. Tìm số hạng u_8.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_2 = \dfrac{u_1 + 2}{u_1 + 1} = \dfrac{1 + 2}{1 + 1} = \dfrac{3}{2};$ $\quad u_3 = \dfrac{u_2 + 2}{u_2 + 1} = \dfrac{\frac{3}{2} + 2}{\frac{3}{2} + 1} = \dfrac{7}{5};$

$$u_4 = \frac{u_3+2}{u_3+1} = \frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \frac{17}{12}; \qquad u_5 = \frac{u_4+2}{u_4+1} = \frac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1} = \frac{41}{29};$$

$$u_6 = \frac{u_5+2}{u_5+1} = \frac{\frac{41}{29}+2}{\frac{41}{29}+1} = \frac{99}{70}; \qquad u_7 = \frac{u_6+2}{u_6+1} = \frac{\frac{99}{70}+2}{\frac{99}{70}+1} = \frac{239}{169};$$

Vậy $u_8 = \frac{u_7+2}{u_7+1} = \frac{\frac{239}{169}+2}{\frac{239}{169}+1} = \frac{577}{408};$

Ta có thể sử dụng máy tính bỏ túi để tính số hạng u_8 như sau

Quy trình bấm phím:

Nhập : 1 $\boxed{=}$

Nhập: $\frac{\boxed{ANS}+2}{\boxed{ANS}+1}$

Lặp dấu $\boxed{=}$ *(ấn dấu "=" 7 lần)*

ta được giá trị số hạng $u_8 = \frac{577}{408}$.

Ví dụ 4: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$

a) Tìm công thức của số hạng tổng quát.

b) Tính số hạng thứ 10 của dãy số.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = \frac{u_1}{2} \\ ... \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{2} \end{cases}$

Nhân vế với vế của các đẳng thức trên, ta được

$$u_1.u_2.u_3...u_n = (-1).\frac{u_1.u_2.u_3...u_{n-1}}{\underbrace{2.2.2...2}_{n-1 \text{số } 2}} \Leftrightarrow u_n = (-1).\frac{1}{2^{n-1}} = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Vậy $u_n = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-}$.

b) Số hạng thức 10 của dãy là $u_{10} = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{1}{512}$.

Ví dụ 5: Dãy số (u_n) được xác định bằng công thức $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^{3'} \end{cases} n \geq 1$

a) Tìm công thức của số hạng tổng quát.

b) Tính số hạng thứ 30 của dãy số.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $u_{n+1}=u_n+n^3 \Rightarrow u_{n+1}-u_n=n^3$. Từ đó suy ra

$u_1=1;$

$u_2-u_1=1^3;$

$u_3-u_2=2^3;$

...

$u_{n-1}-u_{n-2}=(n-2)^3;$

$u_n-u_{n-1}=(n-1)^3.$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được

$$u_1+u_2-u_1+u_1-u_2+...+u_{n-1}-u_{n-2}+u_n-u_{n-1}$$
$$=1+1^3+2^3+3^3+...+(n-2)^3+(n-1)^3$$
$$\Leftrightarrow u_n=1+1^3+2^3+3^3+...+(n-2)^3+(n-1)^3$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3=\frac{(n-1)^2.n^2}{4}$$

Vậy $u_n=1+\dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$

b) Số hạng thứ 30 của dãy số là $u_{30}=1+\dfrac{30^2.29^2}{4}=189226$

Ví dụ 6: Cho dãy số (u_n), biết $u_1=3; u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ với $n\ge 1$

a) Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$u_2=\sqrt{1+u_1^2}=\sqrt{10};\qquad u_3=\sqrt{1+u_2^2}=\sqrt{11};$

$u_4=\sqrt{1+u_3^2}=\sqrt{12};\qquad u_5=\sqrt{1+u_4^2}=\sqrt{13};$

b) Ta có $u_1=\sqrt{1+8}$, $u_2=\sqrt{2+8}$, $u_3=\sqrt{3+8}$, $u_4=\sqrt{4+8}$, $u_5=\sqrt{5+8}$

Ta dự đoán $u_n=\sqrt{n+8}$ (1)

Với $n=1$, ta có $u_1=\sqrt{1+8}=3$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n=1$

Giả sử (1) đúng với $n=k$, có nghĩa ta có $u_k=\sqrt{k+8}$ (2)

Ta cần chứng minh (1) đúng với $n=k+1$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có

$$u_{k+1}=\sqrt{1+u_k^2}=\sqrt{1+\left(\sqrt{k+8}\right)^2}=\sqrt{k+9}$$

Do đó (1) đúng với $n=k+1$

Vậy công thức số hạng tổng quát của dãy số là $u_n=\sqrt{n+8}, n\ge 1$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho dãy số (u_n) có $u_1=7; u_{n+1}=2u_n+3$. Khi đó u_3 bằng

A. 17. **B.** 77. **C.** 37. **D.** 9.

Câu 2: Số 7922 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số $u_n=n^2+1$?

A. 79. **B.** 89. **C.** 69. **D.** 99.

Câu 3: Cho dãy số (u_n) có $u_n=-n^2+n+1$. Số -19 là số hạng thứ mấy của dãy?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 4: Cho dãy số $u_n=\dfrac{n^2+2n-1}{n+1}$. Giá trị u_{11} là

A. $u_{11}=\dfrac{182}{12}$. **B.** $u_{11}=\dfrac{1142}{12}$. **C.** $u_{11}=\dfrac{1422}{12}$. **D.** $u_{11}=\dfrac{71}{6}$.

Câu 5: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n+5, n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$. Giá trị u_{10} là

A. 57. **B.** 62. **C.** 47. **D.** 52.

Câu 6: Cho dãy số có các số hạng đầu là 8, 15, 22, 29, 36,… Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $u_n=7n+7$. **B.** $u_n=7.n$. **C.** $u_n=7.n+1$. **D.** $u_n=n+7$.

Câu 7: Cho dãy số có các số hạng đầu là $0;\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5};...$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $u_n=\dfrac{n+1}{n}$. **B.** $u_n=\dfrac{n}{n+1}$. **C.** $u_n=\dfrac{n-1}{n}$. **D.** $u_n=\dfrac{n^2-n}{n+1}$.

Câu 8: Cho dãy số (u_n) với $u_n=2n+1$. Số hạng thứ 2019 của dãy là

A. 4039. **B.** 4390. **C.** 4930. **D.** 4093.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$. Số $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy của dãy?

A. 300. **B.** 212. **C.** 250. **D.** 249.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{an^2}{n+1}$ (*a* là hằng số). Hỏi u_{n+1} là số hạng nào sau đây?

A. $u_{n+1}=\dfrac{a.(n+1)^2}{n+2}$. **B.** $u_{n+1}=\dfrac{a.(n+1)^2}{n+1}$. **C.** $u_{n+1}=\dfrac{a.n^2+1}{n+1}$. **D.** $u_{n+1}=\dfrac{a.n^2}{n+2}$.

Câu 11: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1=5 \\ u_{n+1}=u_n+n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=\dfrac{(n-1)n}{2}$. **B.** $u_n=5+\dfrac{(n-1)n}{2}$. **C.** $u_n=5+\dfrac{(n+1)n}{2}$. **D.** $u_n=5+\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}(u_n + 1) \end{cases}$. Số hạng u_{11} là

A. $u_{11} = \dfrac{11}{2}$. **B.** $u_{11} = 4$. **C.** $u_{11} = \dfrac{9}{2}$. **D.** $u_{11} = 5$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n là

A. $u_n = n^2$. **B.** $u_n = 2n^2$. **C.** $u_n = n^2 + 1$. **D.** $u_n = 3n^2 - 1$.

Câu 14: Dãy số (u_n) được cho bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$. Hãy tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $\forall n, u_n$ là số lẻ. **B.** $u_1 + u_2 + ... + u_n = n^2$.

C. $\forall n, u_n = 2n - 1$. **D.** $u_n + u_{n+1} = 4n$.

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số là

A. $u_n = -2^{n-1}$. **B.** $u_n = \dfrac{-1}{2^{n-1}}$. **C.** $u_n = \dfrac{-1}{2^n}$. **D.** $u_n = 2^{n-2}$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_n = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số là

A. $u_n = -\dfrac{n-1}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

Câu 17: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$ Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **B.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. **D.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$, biết $u_k = \dfrac{2}{13}$. Hỏi u_k là số hạng thứ mấy của dãy số đã cho?

A. Thứ năm. **B.** Thứ sáu. **C.** Thứ ba. **D.** Thứ tư.

Câu 19: Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_n = u_{n-1} + 2n$ với mọi $n \geq 2$. Số hạng u_{50} bằng

A. 1274,5. **B.** 2548,5. **C.** 5096,5. **D.** 2550,5.

Câu 20: Cho dãy số có các số hạng đầu là 0,1; 0,001; 0,001; 0,0001;… Số hạng tổng quát của dãy số có dạng

A. $u_n = \underbrace{0{,}00...01}_{n \text{ chữ số } 0}$. **B.** $u_n = \underbrace{0{,}00...01}_{n-1 \text{ chữ số } 0}$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{10^{n-1}}$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{10^{n+1}}$.

Câu 21: Số hạng âm trong dãy số $x_1;x_2;x_3;...;x_n$ với $x_n=C_{n+5}^4-\dfrac{143P_{n+5}}{96P_{n+3}}$ là

A. $x_1;x_2$. **B.** $x_1;x_2;x_3$. **C.** $x_1;x_2;x_3...x_n$. **D.** $x_1;x_2;x_3;x_4$.

Câu 22: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}-u_n=2n-1\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là

A. $u_n=n^2+1$. **B.** $u_n=2+n^2$. **C.** $u_n=2+(n+1)^2$. **D.** $u_n=2-(n-1)^2$.

Câu 23: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+(-1)^{2n+1}\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=2-n$. **B.** không xác định. **C.** $u_n=1-n$. **D.** $u_n=-n$ với mọi n.

Câu 24: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=\sqrt{2}$ và $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ với mọi $n\geq 1$. Số hạng u_{2018} là

A. $u_{2018}=\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{2^{2017}}$. **B.** $u_{2018}=2\cos\dfrac{\pi}{2^{2019}}$. **C.** $u_{2018}=\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{2^{2018}}$. **D.** $u_{2018}=2$.

Câu 25: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+n^3,\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $\sqrt{u_n-1}\geq 2039190$ là

A. $n=2017$. **B.** $n=2019$. **C.** $n=2020$. **D.** $n=2018$.

Dạng 3: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số

Bài toán 1: Xét tính tăng, giảm của dãy số

Phương pháp giải

Phương pháp xét tính tăng, giảm của dãy số

Cách 1: Xét hiệu $u_{n+1}-u_n$

- Nếu $u_{n+1}-u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1}-u_n<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm

Cách 2: Khi $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 3: Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1}>u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$).

Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số

- Dãy số (u_n) có $u_n=an+b$ tăng khi $a>0$ và giảm khi $a<0$.

- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$

- Không tăng, không giảm khi $q < 0$.
- Giảm khi $0 < q < 1$.
- Tăng khi $q > 1$.

- Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn + d > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

- Tăng khi $ad - bc > 0$.
- Giảm khi $ad - bc < 0$

- Dãy số đan dấu là dãy số không tăng, không giảm.
- Nếu dãy số (u_n) tăng hoặc giảm thì dãy số $(q^n.u_n)$ (với $q < 0$) không tăng, không giảm.
- Dãy số (u_n) có $u_{n+1} = au + b$ tăng nếu $\begin{cases} a > 0 \\ u_2 - u_1 > 0 \end{cases}$; giảm nếu $\begin{cases} a > 0 \\ u_2 - u_1 < 0 \end{cases}$ và không tăng, không

giảm nếu *a < 0.*

- Dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d} \\ c, d > 0, u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ tăng nếu $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ u_2 - u_1 > 0 \end{cases}$ và giảm nếu $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ u_2 - u_1 < 0 \end{cases}$

- Dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d} \\ c, d > 0, u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ không tăng, không giảm nếu $ad - bc < 0$

- Nếu $\begin{cases} (u_n) \uparrow \\ (v_n) \uparrow \end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n) \uparrow$.
- Nếu $\begin{cases} (u_n) \downarrow \\ (v_n) \downarrow \end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n) \downarrow$.
- Nếu $\begin{cases} (u_n) \uparrow; u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n) \uparrow; v_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ thì dãy số $(u_n; v_n) \uparrow$.
- Nếu $\begin{cases} (u_n) \downarrow; u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n) \downarrow; v_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ thì dãy số $(u_n; v_n) \downarrow$.
- Nếu $(u_n) \uparrow$ và $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $(\sqrt{u_n}) \uparrow$ và dãy số $((u_n)^m) \uparrow, \forall m \in \mathbb{N}^*$
- Nếu $(u_n) \downarrow$ và $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $(\sqrt{u_n}) \downarrow$ và dãy số $((u_n)^m) \downarrow, \forall m \in \mathbb{N}^*$.
- Nếu $(u_n) \uparrow$ và $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right) \downarrow$.
- Nếu $(u_n) \downarrow$ và $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\dfrac{1}{u_n}\right) \uparrow$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n+5}{n+2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_n = \dfrac{n+5}{n+2} = 1 + \dfrac{3}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = 1 + \dfrac{3}{n+3}$

Chú ý: *Dãy số có dạng*

$u_n = \dfrac{an+d}{cn+d}$

Với $cn + d > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

- Nếu $c; d > 0$ *và* $ad - bc > 0$ *thì*

Xét hiệu $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{n+3}-\frac{3}{n+2}=\frac{-3}{(n+2)(n+3)}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

(u_n) là dãy số tăng.

- Nếu $ad-bc<0$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Ví dụ 2: Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\ u_n=\frac{3u_{n-1}+1}{4},\forall n\ge 2\end{cases}$. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n).

Hướng dẫn giải

Dãy số này cho bởi công thức truy hồi.

Ta dự đoán dãy số giảm dựa trên việc thử giá trị ban đầu $u_k>1$

Ta có $u_n-u_{n-1}=\frac{3u_{n-1}+1}{4}-u_{n-1}=\frac{1-u_{n-1}}{4}$

Để chứng minh dãy (u_n) giảm, ta chứng minh $u_n>1,\forall n\ge 1$ bằng phương pháp quy nạp.

Thật vậy.

Với $n=1\Rightarrow u_1=2>1$ (đúng).

Giả sử $u_k>1\Rightarrow u_{k+1}=\frac{3u_k+1}{4}>\frac{3+1}{4}=1$

Theo nguyên lí quy nạp ta có $u_n>1,\forall n\ge 1$.

Suy ra $u_n-u_{n-1}<0\Leftrightarrow u_n<u_{n-1},\forall n\ge 2$ hay dãy (u_n) là dãy số giảm.

Ví dụ 3: Cho dãy (a_n) được xác định bởi $\begin{cases}a_1=1\\ a_{n+1}a_n-a_n^2=1\end{cases}$. Xét tính tăng giảm của dãy số (a_n).

Hướng dẫn giải

Ta có $a_{n+1}.a_n-a_n^2=1\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n.}$ Ta đi chứng minh $a_n>0$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$

Thật vậy.

- Với $n=1$ thì $a_n=1>0$ (đúng).
- Với $n=2$ thì $a_2=a_1+\frac{1}{2}=2>0$ (đúng).

Giả sử $a_n>0$ đúng với $n=k$ ta chứng minh nó cũng đúng với $n=k+1$

Ta có $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{a_k}$ là tổng của hai số dương nên nó cũng dương.

Do đó $a_n>0$ đúng với $n=k+1$.

Suy ra $a_n>0$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy $a_{n+1}-a_n>0\Leftrightarrow a_{n+1}>a_n$.Do đó dãy (a_n) là một dãy tăng.

Ví dụ 4: Xét tính tăng, giảm của dãy số $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $u_1 = 0; u_2 = \frac{1}{2}; u_3 = \frac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} u_2 > u_1 \\ u_3 < u_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Dãy số không tăng, không giảm.

Bài toán 2. Xét tính bị chặn của dãy số

- **Phương pháp giải**

Phương pháp 1: Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức.

- Dãy số (u_n) có $u_n = f(n)$ là hàm số có biểu thức.

Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $u_n = f(n) \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hoặc $u_n = f(n) \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$

- Dãy số (u_n) có $u_n = v_1 + v_2 + ... + v_k + ... + v_n$ (tổng hữu hạn). Ta làm trội kiểu $v_k \le a_k - a_{k+1}$

Lúc đó $u_n \le (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ...(a_n - a_{n+1})$.

Suy ra $u_n \le a_1 - a_{n+1} \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

- Dãy số (u_n) có $u_n = v_1.v_2.v_3....v_n$ với $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (tích hữu hạn). Ta làm trội kiểu $v_k \le \frac{a_{k+1}}{a_k}$.

Lúc đó $u_n \le \frac{a_2}{a_1}.\frac{a_3}{a_2}...\frac{a_{n+1}}{a_n}$

Suy ra $u_n \le \frac{a_{n+1}}{a_1} \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Phương pháp 2: Dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh.

Chú ý: Nếu dãy số (u_n) giảm thì nó bị chặn trên, dãy số (u_n) tăng thì nó bị chặn dưới.

Công thức giải nhanh một số dạng toán về dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n \left(|q| \le 1\right)$ bị chặn.
- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n (q < -1)$ không bị chặn.
- Dãy số (u_n) có $u_n = q$ với $q > 1$ bị chặn dưới.
- Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$.
- Dãy số (u_n) có $u_n = an^2 + bn + c$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$.
- Dãy số (u_n) có $u_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_o$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$ và bị chặn trên nếu $a_m < 0$.

- Dãy số (u_n) có $q^n\left(a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + ... + a_1 n + a_o\right)$ với $a_m \neq 0$ và $q < -1$ không bị chặn.
- Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + ... + a_1 n + a_o}$ bị chặn dưới với $a_m > 0$.
- Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt[3]{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + ... + a_1 n + a_o}$ bị chặn dưới với $a_m > 0$ và bị chặn trên nếu $a_m < 0$.
- Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó *P(n)* và *Q(n)* là các đa thức, bị chặn nếu bậc của *P(n)* nhỏ hơn hoặc bằng bậc của *Q(n)*.
- Dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó *P(n)* và *Q(n)* là các đa thức, chỉ bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của *P(n)* lớn hơn bậc của *Q(n)*.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{-1}{2n+3}$. Xét tính bị chặn dãy số (u_n).

***Chú ý**: Dãy số (u_n) có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu thì bị chặn.*

Hướng dẫn giải

Ta có

$$2n+3 \geq 5, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n+3} \leq \frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow -\frac{1}{5} \leq \frac{-1}{2n+3} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{5} \leq u_n < 0.$ Suy ra dãy số (u_n) bị chặn.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{4n+5}{n+1}$. Xét tính bị chặn dãy số (u_n)

***Chú ý**: Dãy số (u_n) có bậc của tử bằng bậc của mẫu thì bị chặn.*

Hướng dẫn giải

Ta có $u_n = \dfrac{4n+5}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{4n+5}{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{n+1} = 4 + \frac{1}{n+1} \leq 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra $0 < u_n \leq \dfrac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6.2n}$. Xét tính bị chặn dãy số (u_n).

Hướng dẫn giải

Xét $\dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}} = \dfrac{\sqrt{(2k-1)^2}}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} = \dfrac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}, \forall k \geq 1.$

$$\Rightarrow u_n < \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}...\frac{\sqrt{2-1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

Ví dụ 4: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n+1}$

Hướng dẫn giải

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{n+2} - \dfrac{n^2+3n+1}{n+1} = \dfrac{n^2+5n+5}{n+2} - \dfrac{n^2+3n+1}{n1}$

$$= \frac{(n^2+5n+5)(n+1)-(n^2+3n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)} > 0, \forall n \ge 1$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \ge 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

Lại có $u_n > \dfrac{n^2+2n+1}{n+1} = n+1 \ge 2 \Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn dưới. Dãy U_n không bị chặn trên nên nó không bị chặn.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho dãy số $(u_n): u_n = \sin\dfrac{\pi}{n}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây.

A. Dãy số (u_n) tăng.

B. $u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không tăng, không giảm.

Câu 2: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

B. $u_n = \dfrac{n}{2n^2+1}$.

C. $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n+2}$.

D. $u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n\sqrt{n^2-1}$.

Câu 3: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{5^n}{n^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) tăng.

B. Dãy (u_n) giảm.

C. Dãy (u_n) không tăng, không giảm.

D. Dãy số (u_n) là dãy hữu hạn.

Câu 4: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}$.

B. $u_n = \dfrac{n}{2}$.

C. $u_n = \dfrac{2}{n^2}$.

D. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n}$.

Câu 5: Trong các dãy (u_n) sau đây, dãy nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + 2n + 2}$. **B.** $u_n = \dfrac{3n^2 - 1}{n - 5}$. **C.** $u_n = -n^2 - n + 1$. **D.** $u_n = n^3$.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 3n + 6$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) tăng.
B. Dãy số (u_n) giảm.
C. Dãy số (u_n) không tăng, không giảm.
D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 7: Xet tính tăng, giảm của dãy số $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2^n,}$ ta được kết quả

A. Dãy số (u_n) tăng.
B. Dãy số (u_n) giảm.
C. Dãy số (u_n) không tăng, không giảm.
D. Dãy số (u_n) khi tăng khi giảm.

Câu 8: Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n \sqrt{n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.
B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.
C. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.
D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Câu 9: Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $\begin{cases} a_1 = 1; a_2 = 2 \\ a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \end{cases}$. Phát biểu nào dưới đây về dãy số (a_n) là đúng?

A. Dãy số (a_n) không tăng, không giảm.
B. Dãy số (a_n) là một dãy giảm.
C. Dãy số (a_n) là một dãy tăng.
D. Dãy số (a_n) là một dãy không tăng.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = au_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tất cả các giá trị của a để (u_n) là dãy số tăng là

A. $a < 0$. **B.** $a \le 0$. **C.** $a > 0$. **D.** $a > 1$.

Câu 11: Trong các dãy số sau, dãy nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \sin n$. **B.** $v_n = \dfrac{n-1}{n+1}$. **C.** $I_n = (-1)^n .n$. **D.** $h_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = n.\cos n$. Trong các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu đúng?

(1). (u_n) là dãy số tăng.

(2). (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \le n$.

A. 0. **B.** 1. **C. 2.** **D.** 3.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n = \dfrac{1}{(1+n)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Trong các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu đúng?

(1). (u_n) là dãy số tăng.

(2). (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

(3). (u_n) là dãy số bị chặn trên.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ và $c > d > 0$. Dãy số (u_n) là dãy số tăng với điều kiện.

A. $a < 0, b < 0$. **B.** $b > a > 0$. **C.** $a > 0, b < 0$. **D.** $a < 0, b > 0$.

Câu 15: Phát biểu nào dưới đây về dãy số (a_n) được cho bởi $a_n = 2^n + n$ là đúng?

A. Dãy số (a_n) là dãy số giảm. **B.** Dãy số (a_n) là dãy số tăng.

C. Dãy số (a_n) là dãy không tăng. **D.** Dãy số (a_n) là dãy không tăng và không giảm.

Câu 16: Trong các phát biẻu sau, có bao nhiêu phát biểu đúng?

(1) Dãy số được xác định bởi $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ là một dãy bị chặn.

(2) Dãy số được xác định bởi $a_n = n^2$ là một dãy giảm.

(3) Dãy số được xác định bởi $a_n = 1 - n^2$ là một dãy số giảm và không bị chặn dưới.

(4) Dãy số được xác định bởi $a_n = (-1)^n n^2$ là một dãy không tăng, không giảm.

A. 1. **B.** 2. **C.**3. **D.** 4.

Câu 17: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Các giá trị của *a* để dãy số (u_n) tăng là

A. $a > 0$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $a < 1$. **D.** $a > 1$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) có $u_1 = \frac{1}{5}$ và $u_{n+1} = \frac{n+1}{5n} u_n, \forall n \geq 1$. Tất cả các giá trị *n* để $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} < \frac{5^{2018} - 1}{4.5^{2018}}$ là

A. $n > 2019$. **B.** $n < 2018$. **C.** $n < 2020$. **D.** $n > 2017$.

Câu 19: Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$, ta thu được kết quả

A. Dãy số (u_n) tăng. **B.** Dãy số (u_n) giảm.

C. Dãy số (u_n) không tăng, không giảm. **D.** Dãy số (u_n) khi tăng, khi giảm.

Câu 20: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (u_n) là dãy số tăng. **B.** (u_n) là dãy số giảm.

C. (u_n) là dãy số không tăng, không giảm. **D.** (u_n) là dãy số không đổi.

Câu 21: Xét tính bị chặn của dãy số $u_n = 3n - 1,$ ta thu được kết quả

A. Dãy số bị chặn.
B. Dãy số không bị chặn.
C. Dãy số bị chặn trên.
D. Dãy số bị chặn dưới.

Câu 22: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$, ta thu được kết quả

A. Dãy số tăng, bị chặn trên.
B. Dãy số tăng, bị chặn dưới.
C. Dãy số giảm, bị chặn.
D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 23: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$, ta thu được kết quả

A. Dãy số tăng, bị chặn trên.
B. Dãy số tăng, bị chặn dưới.
C. Dãy số giảm, bị chặn.
D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 24: Xét tính bị chặn của dãy số $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{2.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+2)}$, ta thu được kết quả

A. Dãy số bị chặn.
B. Dãy số không bị chặn.
C. Dãy số bị chặn trên.
D. Dãy số bị chặn dưới.

Câu 25: Xét tính tăng, giảm của dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3 + 1}, n \geq 1 \end{cases}$, ta thu được kết quả

A. Dãy số tăng.
B. Dãy số giảm.
C. Dãy số không tăng, không giảm.
D. Cả A, B, c đều sai.

Câu 26: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn.
B. Dãy số (u_n) bị chặn trên.
C. Dãy số (u_n) bị chặn dưới.
D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 27: Trong các dãy số sau dãy số nào bị chặn?

A. Dãy (a_n), với $a_n = \sqrt{n^3 + n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
B. Dãy (b_n), với $b_n = n^2 + \dfrac{1}{2}n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
C. Dãy (c_n), với $c_n = (-2)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
D. Dãy (d_n), với $d_n = \dfrac{3n}{n^3 + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 28: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn dưới.
B. Dãy số (u_n) bị chặn trên.
C. Dãy số (u_n) bị chặn.
D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 29: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = a\sin n + b\cos n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) không bị chặn.
B. Dãy số (u_n) bị chặn.

C. Dãy số (u_n) bị chặn dưới.

D. Dãy số (u_n) bị chặn trên.

Câu 30: Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng về dãy số (u_n)?

A. Dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

B. Dãy số (u_n) giảm và không bị chặn.

C. Dãy số (u_n) tăng và bị chặn.

D. Dãy số (u_n) tăng và không bị chặn.

Dạng 4. Tính tổng của dãy số

Phương pháp giải

Tính tổng của dãy số cách đều

Giả sử cần tính tổng $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$

Trong đó $a_n = a_{n-1} + d$

Ta có $2S = (a_1 + a_n) + ... + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$

Từ đó suy ra $S = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2}$

Công thức tính:

+ Số hạng tổng quát của dãy số cách đều là $u_n = u_1 + (n-1)d$ với d là khoảng cách giữa 2 số hạng liên tiếp.

+ Số số hạng = (số hạng cuối – số hạng đầu) : (khoảng cách) + 1.

+ Tổng = (số hạng đầu + số hạng cuối) x (số số hạng) : 2.

Ví dụ 1: Tính tổng $S = 1 + 3 + 5 + ... + 2021$

Hướng dẫn giải

Ta có $2S = (1 + 2021) + (3 + 2019) + (5 + 2017) + ...$

$+ (2021 + 1) = 2022.2021$

Vậy $S = \frac{2022.2021}{2} = 2043231.$

Tính tổng của dãy số bằng phương pháp khử liên tiếp

Bước 1: Ta tìm cách tách

$a_1 = b_1 - b_2; a_2 = b_2 - b_3; ...$

Bước 2: Rút gọn

$S = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + ... + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$

+ Một số công thức tách thường sử dụng

$\frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$;

Ví dụ 2: Tính tổng $S = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + ... + \frac{2}{97.99}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{2}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}; \frac{2}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}; ...$

Do đó $S = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$

$$\frac{2a}{n(n+a)(n+2a)}=\frac{1}{n(n+a)}-\frac{1}{(n+a)(n+2a)};$$

$$\frac{2na+a^2}{n^2(n+a)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+a)^2};$$

$$n.n!=(n+1)!-n!$$

Bước 3: Nhận định kết quả của tổng là $S=b_1-b_{n+1}$

Tính tổng bằng cách đưa về các tổng đã biết

Tìm cách tách $S_n=S_1+S_2+S_3+...$ trong đó $S_1;S_2;S_3...$ đã biết công thức tính tổng.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho tổng $S_n=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Tính S_{100}

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{2.1}{1.2.3}=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3};\frac{2.1}{2.3.4}=\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4};...$

Suy ra $2S_n=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

Vậy $S_n=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\Rightarrow S_{100}=\frac{2575}{10302}$.

Ví dụ 2: Cho $S_n=1.2+3.4+5.6+...+(2n-1).2n$. Tính S_{100} biết rằng

$$\sum_{i=1}^{n}2i=2+4+6+...2n=n(n+1);\sum_{i=1}^{n}i^2=1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $S_n=\sum_{i=1}^{n}2i(2i-1)=\sum_{i=1}^{n}\left(4i^2-2i\right)=4\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{n}2i$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-n(n+1)=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

$$\Rightarrow S_{100}=\frac{100.(100+1)(4.100-1)}{3}=1343300$$

Ví dụ 3: Cho tổng $S_n=1.4+2.7+3.10+...+n(3n+1)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết $S_k=294$ và

$$\sum_{i=1}^{n}i=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2};\ \sum_{i=1}^{n}i^2=1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tính giá trị của *k*.

Hướng dẫn giải

Ta có $S_n=\sum_{i=1}^{n}i\left(3i+1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(3i^2+1\right)=3\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i$

$=\dfrac{3n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}+\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}=n\left(n+1\right)^2$

$\Rightarrow S_k=k\left(k+1\right)^2=294\Leftrightarrow k^3+2k^2+k=294$

$\Leftrightarrow\left(k-6\right)\left(k^2+8k+49\right)=0\Leftrightarrow k=6.$

Ví dụ 4: Cho $S_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(1-\dfrac{1}{8}\right)+...+\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$. Tính S_{10}.

Hướng dẫn giải

Ta có $S_n=n-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+...+\dfrac{1}{2^n}\right)$

Đặt $M=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+...+\dfrac{1}{2^n}\Rightarrow 2M=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$\Rightarrow 2M-M=M=\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}...+\dfrac{1}{2^n}\right)=1-\dfrac{1}{2^n}$

$\Rightarrow S_n=n-1+\dfrac{1}{2^n}\Rightarrow S_{10}=10-1+\dfrac{1}{2^{10}}=9+\dfrac{1}{2^{10}}$

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Cho tổng $S\left(n\right)=2+4+6+...+2n$. Khi đó S_{30} bằng

A. 900. **B.** 930. **C.** 901. **D.** 830.

Câu 2: Cho tổng $S\left(n\right)=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$. Khi đó công thức tính tổng *S(n)* là

A. $S\left(n\right)=\dfrac{n}{n+2}$. **B.** $S\left(n\right)=\dfrac{n}{n+1}$. **C.** $S\left(n\right)=\dfrac{2n}{n+1}$. **D.** $S\left(n\right)=\dfrac{n}{2^n}$.

Câu 3: Cho tổng $S_n=\dfrac{3}{\left(1.2\right)^2}+\dfrac{5}{\left(2.3\right)^2}+\dfrac{7}{\left(3.4\right)^2}+...+\dfrac{2n+1}{\left[n\left(n+1\right)\right]^2}$. Giá trị S_{10} là

A. 1. **B.** $\dfrac{121}{120}$. **C.** $\dfrac{119}{121}$. **D.** $\dfrac{120}{121}$.w

Câu 4: Tổng $S=\sin x+\sin 2x+...+\sin nx$ (với $x\neq k\pi$) có công thức thu gọn là

A. $S=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$. **B.** $S=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{2n-1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$.

C. $S=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{2\cos\dfrac{x}{2}}$. **D.** $S=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{2n-1}{2}x}{2\cos\dfrac{x}{2}}$.

Câu 5: Tổng $S_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, n \in \mathbb{N}^*$ có công thức thu gọn là

A. $S_n = \frac{3n}{3n+1}$. **B.** $S_n = \frac{n}{3n-1}$. **C.** $S_n = \frac{n}{3n+1}$. **D.** $S_n = \frac{n}{3n-2}$.

Câu 6: Tổng $S_n = 1.3 + 2.5 + 3.7 + ... + n(2n+1)$ có công thức thu gọn là

A. $\frac{n(n+1)(4n+1)}{4}$. **B.** $\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$. **C.** $\frac{n(n+1)(4n+5)}{4}$. **D.** $\frac{n(n+1)(4n+1)}{6}$.

Câu 7: Tổng $S = 4.5^{100}.\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{1}{5^{100}}\right) + 1$ có kết quả bằng

A. $5^{100} - 1$. **B.** 5^{100}. **C.** $5^{101} - 1$. **D.** 5^{101}.

Câu 8: Tổng $S = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + ... + \frac{2}{97.99}$ có kết quả bằng

A. $\frac{99}{98}$. **B.** $\frac{90}{99}$. **C.** $\frac{98}{99}$. **D.** 1.

Câu 9: Cho $S_n = 1 + 2.3 + 3.3^2 + ... + n.3^{n-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng với mọi n nguyên dương?

A. $S_n = -\frac{3^n - 1}{4} + \frac{1}{2}3^n$. **B.** $S_n = -\frac{3^n - 1}{4} + \frac{n}{2}3^n$.

C. $S_n = \frac{3^n - 1}{4} + \frac{n}{2}3^n$. **D.** $S_n = -\frac{3^n + 1}{4} + \frac{n}{2}3^n$.

ĐÁP ÁN

BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC, DÃY SỐ

Dạng 1. Quy nạp toán học

1-B	**2-D**	**3-C**	**4-C**	**5-D**	**6-B**	**7-D**	**8-A**	**9-B**	**10-B**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn B

Mệnh đề *A(n)* đúng với $n = k$ với $k \geq p$

Câu 2. Chọn D

Lập luận hoàn toàn đúng.

Câu 3. Chọn C

$(I) k \in A$: số nguyên dương *k* thuộc tập *A*.

$(II) n \in A \Rightarrow n+1 \in A, \forall n \geq k$: nếu số nguyên dương n $\left(n \geq k\right)$ thuộc tập *A* thì số nguyên dương đứng ngay sau nó $\left(n+1\right)$ cũng thuộc *A*. Mọi số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng *k* đều thuộc *A*.

Câu 4. Chọn C

Bước 1 sai, vì theo bài toán $n \geq p$ nên ta phải chứng minh rằng *A(n)* đúng khi $n = p$.

Bước 2 sai, không thể "Với số nguyên dương tùy ý *k*" mà phải là "Với số nguyên dương k, $\left(k \geq p\right)$".

Câu 5. Chọn D

Thử với $n = 1, n = 2, n = 3$ ta kết luận được đáp án **D** sai.

Ta có $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + \left(2n\right)^2 = \dfrac{2n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{3}$ mới là kết quả đúng.

Câu 6. Chọn B

Ta có $S_1 = \dfrac{1}{2}, S_2 = \dfrac{2}{3}, S_3 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ dự đoán $S_n = \dfrac{n}{n+1}$

Với $n = 1,$ ta được $S_1 = \dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{1+1}$ (đúng)

Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k\left(k \geq 1\right)$, tức là $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{k\left(k+1\right)} = \dfrac{k}{k+1}$

Ta có $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{k\left(k+1\right)} = \dfrac{k}{k+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k\left(k+1\right)}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k\left(k+1\right)}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\frac{k^2+2k+1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k\left(k+1\right)}+\frac{1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\frac{k+1}{k+2}$

Suy ra mệnh đề đúng với $n=k+1$

Câu 7. Chọn D

Ta có $u_{n+1}=u_n+\left(-1\right)^{2n}=u_n+1\Rightarrow u_2=2;u_3=3;u_4=4;...$

Dễ dàng dự đoán được $u_n=n.$

Thật vậy, ta chứng minh được $u_n=n$ (*) bằng phương pháp quy nạp như sau

Với $n=1\Rightarrow u_1=1$. Vậy (*) đúng với $n=1$.

Giả sử (*) đúng với $n=k\ \left(k\in\mathbb{N}^*\right)$, ta có $u_k=k$

Ta đi chứng minh (*) cũng đúng với $n=k+1$, tức là $u_{k+1}=k+1$

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số $\left(u_n\right)$ ta có $u_{k+1}=u_k+\left(-1\right)^{2k}=k+1$

Vậy (*) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n=n.$

Câu 8. Chọn A

Ta có $u_1=3;u_2=\frac{1}{2}u_1=\frac{3}{2};u_3=\frac{1}{2}u_2=\frac{3}{2^2};...$

Ta đi chứng minh cho dãy số có số hạng tổng quát là $u_n=\frac{3}{2^{n-1}}$

Thật vậy, $n=1$ thì $u_1=3$ (đúng).

Giả sử với $n=k\ \left(k\geq 1\right)$ thì $u_k=\frac{3}{2^{k-1}}$. Ta đi chứng minh $u_{k+1}=\frac{3}{2^k}$

Ta có $u_{k+1}=\frac{1}{2}u_k=\frac{1}{2}.\frac{3}{2^{k-1}}=\frac{3}{2^k}$ (điều phải chứng minh).

Vậy số hạng tổng quát của dãy số là $u_n=\frac{3}{2^{n-1}}$

Câu 9. Chọn B

Chứng minh $u_n-\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}$ (1)

Ta có $u_n=\sqrt{2}v_n=u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2-2\sqrt{2}u_{n-1}v_{n-1}=\left(u_{n-1}-\sqrt{2}v_{n-1}\right)^2$

Mặt khác $u_1-\sqrt{2}v_1=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ nên (1) đúng với $n=1$

Giả sử $u_k - \sqrt{2}v_k = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2k}$, ta có $u_{k-1} - \sqrt{2}v_{k+1} = \left(u - \sqrt{2}v_k\right)^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2k+1}$

Vậy (1) đúng với $\forall n \ge 1$

Ta có $u_n + \sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}$

Do đó ta suy ra $\begin{cases} 2u_n = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n} \\ 2\sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \\ v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \end{cases}$

Câu 10. Chọn B

Do $0 < \alpha < \pi$ nên $u_2 = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \cos\dfrac{\alpha}{2}; u_3 = \sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2}} = \sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \cos\dfrac{\alpha}{4}$

Vậy $u = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}\right)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 1$ thì $u_1 = \cos\alpha$ (đúng).

Giả sử với $n = k \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_k = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^{k-1}}\right)$. Ta chứng minh $u_{k+1} = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^{k-1}}\right)$

Thật vậy $u_{k+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_k}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\alpha}{2^{k-1}}\right)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2^k}\right)} = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^k}\right)$

Từ đó ta có $u_{2020} = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^{2019}}\right)$

Dạng 2. Tìm số hạng và xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số

1-C	**2-B**	**3-A**	**4-D**	**5-C**	**6-C**	**7-B**	**8-A**	**9-C**
10-A	**11-B**	**12-D**	**13-A**	**14-C**	**15-D**	**16-C**	**17-C**	**18-A**
19-B	**20-A**	**21-B**	**22-A**	**23-A**	**24-B**	**25-C**		

HƯỚNG DẪN CHI TIẾT

Câu 1. Chọn C

Ta có $u_3 = 2u_2 + 3 = 2.\left(2u_1 + 3\right) + 3 = 4u_1 + 9 - 4.7 + 9 = 37.$

Câu 2. Chọn B

Ta có $7922 = 7921 + 1 = 89^2 + 1 \Rightarrow n = 89$

Câu 3. Chọn A

Giả sử $u_n = -19\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Suy ra $-n^2+n+1=-19 \Leftrightarrow -n^2+n+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow n=5$ (do $n \in \mathbb{N}^*$).

Vậy số -19 là số hạng thứ 5 của dãy.

Câu 4. Chọn D

Ta có $u_{11}=\dfrac{11^2+2.11-1}{11+1}=\dfrac{71}{6}$

Câu 5. Chọn C

Từ $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=u_n+5, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, ta có $u_{n+1}-u_n=5$

$\Rightarrow$ dãy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d=5$ nên $u_{10}=u_1+9d=2+45=47$

Câu 6. Chọn C

Ta có $8=7.1+1; 15=7.2+1; 22=7.3+1; 29=7.4+1; 36=7.5+1$

Suy ra số hạng tổng quát $u_n=7n+1$

Câu 7. Chọn B

Ta có $0=\dfrac{0}{0+1}; \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1+1}; \dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{2+1}; \dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{3+1}; \dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{4+1}$

Suy ra $u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

Câu 8. Chọn A

Ta có $u_{2019}=2.2019+1=4039$

Câu 9. Chọn C

Ta có $u_n=\dfrac{167}{84} \Leftrightarrow \dfrac{2n+1}{n+2}=\dfrac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2+1)=167(n+2) \Leftrightarrow n=250$

Vậy $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n)

Câu 10. Chọn A

Ta có $u_{n+1}=\dfrac{a.(n+1)^2}{(n+1)+1}=\dfrac{a(n+1)^2}{n+2}$

Câu 11. Chọn B

Ta có $u_n=5+1+2+3+...+n-1=5+\dfrac{n(n-1)}{2}$

Câu 12. Chọn D

$u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + 1) = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{2}{3}(u_2 + 1) = 1$; $u_4 = \frac{3}{4}(u_3 + 1) = \frac{3}{2}$;

$u_5 = \frac{4}{5}(u_4 + 1) = 2$; $u_6 = \frac{5}{6}(u_5 + 1) = \frac{5}{2}$; $u_7 = \frac{6}{7}(u_6 + 1) = 3$;

$u_8 = \frac{7}{8}(u_7 + 1) = \frac{7}{2}$; $u_9 = \frac{8}{9}(u_8 + 1) = 4$; $u_{10} = \frac{1}{2}(u_9 + 1) = \frac{9}{2}$;

$u_{11} = \frac{10}{11}(u_{10} + 1) = 5$;

Câu 13. Chọn A

Ta có $u_1 = 1; u_2 = u_1 + 3; u_3 = u_2 + 5; u_4 = u_3 + 7; ...; u_n = u_{n-1} + (2n-1)$

Cộng từng vế với vế của các đẳng thức trên và rút gọn ta được $u_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2$.

Câu 14. Chọn C

$u_1 = 1;$

$u_2 = 1 + 2 = 1 + 1.2;$

$u_3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 2.2;$

$u_4 = 1 + 2 + 2 + 2 = 1 + 3.2;$

...

$u_n = 1 + 2 + ... + 2 = 1 + (n-1).2$

Chứng minh quy nạp ta được $u_n = 2n - 1$.

Câu 15. Chọn D

Ta có $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 2u_2 \\ ... \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$.

Nhân vế với vế của các đẳng thức trên, ta được $u_1.u_2.u_3...u_n = \frac{1}{2}.2^{n-1}.u_1.u_2...u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^{n-2}$.

Câu 16. Chọn C

Ta có $u_1 = -\frac{3}{2}; u_2 = -\frac{4}{3}; u_3 = -\frac{5}{4};$ … suy ra được $u_n = -\frac{n+1}{n}$.

Câu 17. Chọn C

Ta có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1^2 \\ u_3 = u_2 + 2^2 \\ ... \\ u_n = u_{n-1} + (n-1)^2 \end{cases}$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên, ta được $u_n = 1+1^2+2^2+...+(n-1)^2 = 1+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Câu 18. Chọn A

$u_k = \dfrac{k-1}{k^2+1} \Rightarrow \dfrac{k-1}{k^2+1} = \dfrac{2}{13} \Rightarrow k=5$ (do $k \in \mathbb{N}^*$).

Câu 19. Chọn B

Ta có $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = u_1 + 2 \\ u_3 = u_2 + 4 \\ ... \\ u_{49} = u_{48} + 2.49 \\ u_{50} = u_{49} + 2.50 \end{cases}$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta được $u_{50} = \dfrac{1}{2} + 2(2+3+...+50) = \dfrac{1}{2} + 2(25.51-1) = 2548,5$.

Câu 20. Chọn A

Ta có

Số hạng thứ 1 có 1 chữ số 0;

Số hạng thứ 2 có 2 chữ số 0;

Số hạng thứ 3 có 3 chữ số 0;

…

Suy ra u_n có *n* chữ số 0.

Công thức số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = \dfrac{1}{10^n} = \underbrace{0,00...01}_{n \text{ chữ số } 0}$

Câu 21. Chọn B

Ta có $c_{n+5}^4 = \dfrac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}{24}, \dfrac{143P_{n+5}}{96P_{n+3}} = \dfrac{143(n+5)(n+4)}{96}$

$x_n = C_{n+5}^4 - \dfrac{143P_{n+5}}{96P_{n+3}} = \dfrac{(n+5)(n+4)(2n+17)(2n-7)}{96} > 0, \forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}^*$

Vậy các số hạng âm là $x_1; x_2; x_3$.

Câu 22. Chọn A

Ta có $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = u_1 + 2.2 - 1; \\ u_3 = u_2 + 2.3 - 1; \\ ... \\ u_n = u_{n-1} + 2.n - 1 \end{cases}$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên rồi rút gọn, ta được

$u_n = 2 + 2.(2+3+...+n) - (n-1) = 2 + (n-1)(n+2) - n + 1 = n^2 + 1$

Câu 23. Chọn A

Ta có $u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n+1} = u_n - 1$

$u_1 = 1; u_2 = u_1 - 1; u_3 = u_2 - 1; ...; u_n = u_{n-1} - 1$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên, ta được $u_n = 1 - (n-1) = 2 - n$.

Câu 24. Chọn B

Ta có $u_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}; u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$

Dự đoán $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

Chứng minh theo quy nạp ta có: $u_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, công thức (1) đúng với *n = 1*.

Giả sử công thức (1) đúng với $n = k, k \geq 1$ ta có $u_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$

Ta có $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$

(vì $0 < \frac{\pi}{2^{k+2}} < \frac{\pi}{2}$ với mọi $k \geq 1$).

Suy ra công thức (1) đúng với $n = k + 1$

Vậy $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $u_{2018} = 2\cos\frac{\pi}{2^{2019}}$

Câu 25. Chọn C

Ta có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1^3 \\ u_3 = u_2 + 2^3 \\ ... \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \Rightarrow u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3$

Ta lại có $1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n - 1)^2 = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$

Suy ra $u_n = 1 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$

Theo giả thiết ta có $\sqrt{u_n - 1} \geq 2039190 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} \geq 2039190 \Leftrightarrow n(n-1) \geq 4078380 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n \geq 2020 \\ n \leq -2019 \end{array}\right.$

Mà *n* là số nguyên dương nhỏ nhất nên *n = 2020*.

Dạng 3. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số

1-A	**2-C**	**3-A**	**4-C**	**5-A**	**6-A**	**7-A**	**8-D**	**9-C**	**10-C**
11-B	**12-B**	**13-D**	**14-C**	**15-B**	**16-C**	**17-D**	**18-B**	**19-B**	**20-B**
21-D	**22-C**	**23-C**	**24-A**	**25-A**	**26-A**	**27-D**	**28-C**	**29-B**	**30-C**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn A

$u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$ nên **B** đúng.

Do $-1 \le \sin\dfrac{\pi}{n} \le 1$ nên dãy số bị chặn, do đó **C** đúng.

$u_1 = \sin\pi = 0, u_2 = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1, u_3 = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Do $\begin{cases} u_1 < u_2 \\ u_2 > u_3 \end{cases}$ nên dãy số không tăng, không giảm.

Vậy **D** đúng. Do đó **A** sai.

Câu 2. Chọn C

Ta xét đáp án **A**: $u_n = \dfrac{n}{2^n} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = \dfrac{2}{4} \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow$ Loại **A**

Ta xét đáp án **B**: $u_n = \dfrac{n}{2n^2+1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_2 = \dfrac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow u_1 > u_2 \Rightarrow$ Loại **B**

Ta xét đáp án **C**: $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n+2} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{5} = \dfrac{16}{40} \\ u_2 = \dfrac{5}{8} = \dfrac{25}{40} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2 \Rightarrow$ Chọn **C**

Ta xét đáp án **D**: $u_n = (-2)^n \sqrt{n^2-1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 4\sqrt{3} \\ u_3 = -8\sqrt{8} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2 > u_3 \Rightarrow$ Loại **D**

Câu 3. Chọn A

Ta có $u_n = \dfrac{5^n}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)^2}$

Xét tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)^2}.\dfrac{n^2}{5^n} = \dfrac{5n^2}{n^2+2n+1} = \dfrac{n^2+2n+1+4n^2-2n-1}{n^2+2n+1} = 1 + \dfrac{2n(n-1)+2n^2-1}{n^2+2n+1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Câu 4. Chọn C

Xét đáp án **A**:

Ta có $u_n = \frac{n-3}{n+1}; u_{n+1} = \frac{n-2}{n+2}$. Khi đó $u_{n+1} - u_n = \frac{n-2}{n+2} - \frac{n-3}{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Xét đáp án **B**:

Ta có $u_n = \frac{n}{2}; u_{n+1} = \frac{n+1}{2}$. Khi đó $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Xét đáp án **C**:

Ta có $u_n = \frac{2}{n^2}; u_{n+1} = \frac{2}{(n+1)^2} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < \frac{n^2}{n^2} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

Xét đáp án **D**:

Ta có $u_1 = \frac{-1}{3}; u_2 = \frac{1}{9}; u_3 = \frac{-1}{27}$

Vậy (u_n) là dãy số không tăng, không giảm.

Câu 5. Chọn A

$n^2 - n + 1 < n^2 + 2n + 2$ $(do \;\; n > 0)$

Suy ra $u_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 2n + 2} < 1,$ với mọi n.

Câu 6. Chọn A

Ta có $u_n = 3n + 6 \Rightarrow u_{n+1} = 3(n+1) + 6 = 3n + 9$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = (3n+9) - (3n+6) = 3 > 0, \forall n \in N^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Câu 7. Chọn A

Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2^{n+1}} - \frac{3^n - 1}{2^n} = \frac{3^{n+1} - 1 - 2.3^n + 2}{2^{n+1}} = \frac{3^n + 1}{2^{n+1}} > 0 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

Câu 8. Chọn D

Dãy số $u_n = (-1)^n \sqrt{n}$ là dãy số không bị chặn vì $\lim |u_n| = \lim \sqrt{n} = +\infty$

Câu 9. Chọn C

Nhận xét: Mỗi số hạng thứ ba trở đi luôn bằng tổng của hai số đứng ngay trước nó. Đồng thời số hạng đầu tiên và số hạng thứ hai của dãy là các số dương nên dễ thấy dãy số là một dãy tăng.

Câu 10. Chọn C

Xét hiệu $u_{n+1}-u_n=(au_n+1)-(au_{n-1}+1)=a(u_n-u_{n-1})$

Áp dụng, ta có $u_2=au_1+1=a+1\Rightarrow u_2-1=a\Rightarrow u_2-u_1=a$

$\Rightarrow u_3-u_2=a(u_2-u_1)=a^2;$

$\Rightarrow u_4-u_3=a(u_3-u_2)=a^3;$

...

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=a^n>0$

Để dãy số (u_n) tăng thì $u_n>u_{n-1}>...>u_2>u_1\Rightarrow a>0$

Câu 11. Chọn B

Đáp án **A, C** dãy không tăng, không giảm.

Xét đáp án **B**, ta có $v_n=1-\frac{2}{n+1}\Rightarrow v_{n+1}-v_n=\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (v_n) là dãy số tăng.

Câu 12. Chọn B

Vì $\cos n\le 1$ nên $u_n<n.$ Phát biểu (3) đúng.

Dãy không tăng, không giảm và không bị chặn dưới.

Vậy có 1 phát biểu đúng trong 3 phát biểu đã cho.

Câu 13. Chọn D

Ta có $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(1+n)^2>0}$ nên dãy số tăng. Phát biểu (1) đúng.

Vì dãy số tăng nên dãy số bị chặn dưới bởi u_1. Phát biểu (2) đúng.

Ta lại có $u_1=1;u_2=u_1+\frac{1}{2^2};u_3=u_2+\frac{1}{3^2};u_n=u_{n-1}+\frac{1}{n^2}$

Cộng các đẳng thức trên theo từng vế, ta được $u_n=u_1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ (*)

Mặt khác $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Rightarrow(*)\Leftrightarrow u_n=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow u_n=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{n}<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy dãy số bị chặn trên bởi 2 nên phát biểu (3) đúng.

Câu 14. Chọn C

Xét hiệu $u_{n+1}-u_n=\frac{ad-bc}{\left[c(n+1)+d(cn+d)\right]}$. Dãy số (u_n) là dãy số tăng khi $ad-bc>0$

Mà $c>d>0$ nên chỉ có điều kiện ở đáp án **C** để $ad-bc>0$.

Câu 15. Chọn B

Ta có $a_{n+1}-a_n=2^{n+1}+n+1-2^n-n=2.2^n-2^n+1=2^n+1>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy (a_n) là dãy số tăng.

Câu 16. Chọn C

$0<1+\frac{1}{n}<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy số xác định bởi $a_n=1+\frac{1}{n}$ là một dãy bị chặn.

$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy số xác định bởi $a_n=n^2$ là dãy tăng.

$a_{n+1}-a_n=\left(1-(n+1)^2\right)-\left(1-n^2\right)=2n-1>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy số xác định bởi $a_n=1-n^2$ là dãy số giảm và không bị chặn dưới.

$a_1=-1<a_2=4>a_3=-9$ nên dãy số xác định bởi $a_n=(-1)^n n^2$ là dãy không tăng không giảm.

Câu 17. Chọn D

Xét hiệu $u_{n+2}-u_{n+1}=au_{n+1}+(1-a)u_n-u_{n+1}=(a-1)(u_{n+1}-u_n)$

$\Rightarrow u_3-u_2=(a-1)(u_2-u_1)=(a-1);$

$\Rightarrow u_4-u_3=(a-1)(u_3-u_2)=(a-1)^2;$

...

$u_{n+1}-u_n=(a-1)^{n-1}>0$

Để dãy số (u_n) tăng suy ra $a-1>0\Leftrightarrow a>1$

Câu 18. Chọn B

Ta có $u_{n+1}=\frac{n+1}{5n}u_n\Leftrightarrow\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{5}.\frac{u_n}{n}$

Đặt $v_n=\frac{u_n}{n},\forall n\geq 1.$ Suy ra (v_n) là cấp số nhận có công bội $q=\frac{1}{5}$ và $v=\frac{1}{5}.$

Ta có $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k}=\sum_{k=1}^{n}v_k=v_1\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{5}.\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}.\frac{5^n-1}{5^n}=T_n$

Do $v_n>0,\forall n\geq 1$ nên *(Tn)* là dãy tăng. Suy ra $T_n<\frac{5^{2018}-1}{4.5^{2018}}=T_{2018}\Leftrightarrow n<2018$

Câu 19. Chọn B

Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}}-\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}<0$

Vậy dãy (u_n) là dãy số giảm.

Câu 20. Chọn B

Dự đoán dãy giảm sau đó chứng minh $u_{n+1}-u_n<0$ bằng quy nạp toán học.

Từ giả thiết suy ra $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*.$

Ta có $u_2-u_1=\frac{5}{4}-2=\frac{-3}{4}<0$

Giả sử: $u_{k+1}-u_k<0,\forall k\ge 1$

Xét hiệu $u_{k+2}-u_{k+1}=\dfrac{u_{k+1}^2+1}{4}-\dfrac{u_k^2+1}{4}=\dfrac{1}{4}\left(u_{k+1}+u_k\right)\left(u_{k+1}-u_k\right)<0$

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $u_{n+1}-u_n<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy dãy số $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

Câu 21. Chọn D

Ta có $u_n\ge 2,\forall n\Rightarrow\left(u_n\right)$ bị chặn dưới; dãy $\left(u_n\right)$ không bị chặn trên.

Câu 22. Chọn C

Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\dfrac{2^n}{n!}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}.\dfrac{n!}{2^n}=\dfrac{2}{n+1}<1,\forall n\ge 1$

Mà $u_n>0,\forall n$ nên $u_{n+1}<u_n,\forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

Vì $0<u_n\le u_1=2,\forall n\ge 1$ nên dãy $\left(u_n\right)$ là dãy bị chặn trên.

Câu 23. Chọn C

Ta có $u_n>0,\forall n\ge 1$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}}=\sqrt{\dfrac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}}<1,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow u_{n+1}<u_n,\forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

Mặt khác $0<u_n<1\Rightarrow$ dãy $\left(u_n\right)$ là dãy bị chặn.

Câu 24. Chọn A

Ta có $0<u_n<\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n.(n+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}<1$

Dãy $\left(u_n\right)$ bị chặn.

Câu 25. Chọn A

Ta có $u_{n+1}=\sqrt[3]{u_n^3+1}\Rightarrow u_{n+1}>\sqrt[3]{u_n^3}=u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left(u_n\right)$ là dãy số tăng.

Câu 26. Chọn A

Ta dự đoán dãy số này bị chặn.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $-2\le u_n\le 1,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Với *n = 1* ta có $-2\le u_1\le 1$ (đúng).

Giả sử mệnh đề trên đúng với $n=k\ge 1$. Tức là $-2\le u_k\le 1$

$\Rightarrow -1\le\dfrac{1}{2}u_k\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow -2\le\dfrac{1}{2}u_k-1\le-\dfrac{1}{2}\Rightarrow -2\le u_{k+1}\le 1$

Theo nguyên lí quy nạp ta đã chứng minh được $-2\le u_n\le 1,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy $\left(u_n\right)$là dãy số bị chặn.

Câu 27. Chọn D

Xét dãy (a_n) có $a_n=\sqrt{n^3+n}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy số (a_n) bị chặn dưới.

Xét dãy (b_n) có $b_n=n^2+\dfrac{1}{2n}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy số (b_n) bị chặn dưới.

Xét dãy (c_n) có $c_n=(-2)^n+3,\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy số (c_n) không bị chặn.

Xét dãy (d_n) có $d_n=\dfrac{3n}{n^2+2},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $n^3-3n+2=(n-1)^2(n+2)\ge 0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n^3+2\ge 3n\Rightarrow 0<\dfrac{3n}{n^2+2}\le 1\Rightarrow (d_n)$ bị chặn.

Câu 28. Chọn C

Xét $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{(k-1)k}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k},\forall\ge 2$

Suy ra $u_n<\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)+...+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{3}{2}\Rightarrow 0<u_n<\dfrac{3}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy dãu số (u_n) bị chặn.

Câu 29. Chọn B

Xét $|u_n|=|a\sin n+b\cos n|\le |a|+|b|\Rightarrow -(|a|+|b|)\le u_n\le |a|+|b|$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 30. Chọn C

Ta có $u_1=\sqrt{2};u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}};u_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};...;u_n=\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$

Do $u_{n+1}-u_n>0$ nên (u_n) là dãy số tăng.

Lại có $\sqrt{2}<u_n\le 2$ suy ra dãy số bị chặn.

Dạng 4. Tính tổng của dãy số

1-B	**2-B**	**3-D**	**4-A**	**5-C**	**6-C**	**7-B**	**8-C**	**9-B**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn B

Ta có $S_{30}=2+4+6+...+60$

$\Rightarrow 2S_{30}=(2+60)+(4+58)+(6+56)+...+(60+2)$ (có 30 ngoặc đơn)

$\Rightarrow S_{30}=\dfrac{(2+60).30}{2}=930$

Câu 2. Chọn B

$$S\left(n\right)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Câu 3. Chọn D

Cách 1:

Ta có $\frac{3}{\left(1.2\right)^2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4};\frac{5}{\left(2.3\right)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9};...$

Suy ra $S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}=\frac{n\left(n+2\right)}{\left(n+1\right)^2}$

Vậy $S_{10}=\frac{10\left(10+2\right)}{\left(10+1\right)^2}=\frac{120}{121}$.

Cách 2:

Ta có $S_{10}=\frac{3}{\left(1.2\right)^2}+\frac{5}{\left(2.3\right)^2}+\frac{7}{\left(3.4\right)^2}+...+\frac{21}{\left(10.11\right)^2}$

Suy ra $S_{10}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{11^2}=\frac{120}{121}$.

Câu 4. Chọn A

Ta có $2\sin\frac{x}{2}.S=2\sin x.\sin\frac{x}{2}+2\sin 2x.\sin\frac{x}{2}+..+2\sin nx.\sin\frac{x}{2}$

$=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos x\frac{5x}{2}+...+\cos x\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x$

Vậy $S=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$

Câu 5. Chọn C

$$S_n=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)+...+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

Câu 6. Chọn C

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}i\left(2i+1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(2i^2+1\right)=2\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i=\frac{2n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}=\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\frac{n\left(n+1\right)\left(4n+5\right)}{6}$$

Câu 7. Chọn B

Đặt $M=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^{100}}$

Ta có $5M=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^{99}}$

$\Rightarrow 5M-M=\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^{99}}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}...+\frac{1}{5^{100}}\right)=1-\frac{1}{5^{100}}$

$$\Rightarrow 4M = 1 - \frac{1}{5^{100}} \Rightarrow M = \frac{5^{100}-1}{4.5^{100}} \Rightarrow S = 4.5^{100}.\frac{5^{100}-1}{4.5^{100}} + 1 = 5^{100}$$

Câu 8. Chọn C

Ta có $\frac{2}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}; \frac{2}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}; ...$

Do đó $S = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$

Câu 9. Chọn B

Ta có $3S_n = 3 + 2.3^2 + 3.3^3 + ... + n.3^n$

Từ đó $2S_n = -1 - 3 - 3^2 - ... - 3^{n-1} + n.3^n \Leftrightarrow 2S_n = -\frac{3^n - 1}{2} + n.3^n \Leftrightarrow S_n = -\frac{3^n - 1}{4} + \frac{n}{2}.3^n$