

Câu 1 (1 điểm). Cho hàm số: $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
- Tìm trên đồ thị (C) hai điểm phân biệt M, N đối xứng nhau qua trục tung.

Câu 2 (1 điểm). Giải phương trình: $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

Câu 3 (1 điểm). Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \sin x \cos^5 x dx$

Câu 4 (1 điểm).

- Giải phương trình sau trên tập hợp các số phức: $\frac{4z - 3 - 7i}{z - i} = z - 2i$
- Giải phương trình: $\log_2(x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$

Câu 5 (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có đường chéo BD nằm trên đường thẳng $\Delta: x - y - 2 = 0$. Điểm $M(4; -4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh BC, điểm $N(-5; 1)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB. Biết $BD = 8\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD, biết điểm D có hoành độ âm.

Câu 6 (1 điểm). Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn.

Câu 7 (1 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang cân (BC//AD). Biết đường cao SH = a với H là trung điểm AD, AB = BC = CD = a và AD = 2a. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.

Câu 8 (1 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): $5x - 2y + 5z - 1 = 0$ và (Q): $x - 4y - 8z + 12 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm M trùng với gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (P) và tạo với mặt phẳng (Q) một góc $\alpha = 45^\circ$.

Câu 9 (1 điểm). Giải bất phương trình: $(x+3)\sqrt{x+1} + (x-3)\sqrt{1-x} + 2x \leq 0$

Câu 10 (1 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh:

$$4(a+b+c)^3 \geq 27(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc)$$

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu khi làm bài. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

LỜI GIẢI CHI TIẾT TỪ TOÁN MATH
(Đăng kí nhận đề mới tại facebook.com/toanmath)

Câu 1.

- a) Câu khảo sát hàm số bậc 3 cơ bản, bạn đọc tự giải.
b) Giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$. Vì N đối xứng với M qua trục tung nên $N(-x_0; y_0)$.

Vì $M \in (C)$ nên: $y_0 = -\frac{x_0^3}{3} + x_0^2 + 3x_0 - \frac{11}{3}$

Vì $N \in (C)$ nên: $y_0 = \frac{x_0^3}{3} + x_0^2 - 3x_0 - \frac{11}{3}$

Từ đó ta có phương trình: $-\frac{x_0^3}{3} + 3x_0 = \frac{x_0^3}{3} - 3x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm 3 \end{cases}$

Ta loại giá trị $x_0 = 0$ vì khi đó M, N trùng nhau.

Vậy $M\left(3; \frac{16}{3}\right)$ và $N\left(-3; \frac{16}{3}\right)$ hoặc $M\left(-3; \frac{16}{3}\right)$ và $N\left(3; \frac{16}{3}\right)$

Câu 2.

Giải phương trình: $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

Điều kiện xác định phương trình: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Phân tích:

$$1 - \tan x = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}$$

$$1 + \sin 2x = 1 + 2 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$$

$$1 + \tan x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x}$$

Vậy nhân tử chung là $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}$

Biến đổi

$$(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x} (\sin x + \cos x)^2 = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} ((\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} (\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} (\cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 3.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \sin x \cos^5 x dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \Rightarrow t^6 = 1 - \cos^3 x \Rightarrow 6t^5 dt = 3 \sin x \cos^2 x dx \Rightarrow 2t^5 dt = \sin x \cos^2 x dx$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ và } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \cos^3 x \sin x \cos^2 x dx = \int_0^1 t(1-t^6) \cdot 2t^5 dt = \int_0^1 (2t^6 - 2t^{12}) dt = \left(2\frac{t^7}{7} - 2\frac{t^{13}}{13} \right) \Big|_0^1 = \frac{12}{91}$$

Câu 4.

a) $\frac{4z-3-7i}{z-i} = z-2i \Leftrightarrow z^2 - (4+3i)z + 1+7i = 0$ (với $z \neq i$)

$$\Delta = (4+3i)^2 - 4(1+7i) = 3-4i = (2-i)^2$$

Vậy $z = \frac{4+3i+2-i}{2} = 3+i$ hoặc $z = \frac{4+3i-2+i}{2} = 1+2i$ (Thỏa mãn điều kiện)

b) $\log_2(x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$

Điều kiện xác định phương trình: $x > 0$

Đặt $t = \log_6 x \Rightarrow x = 6^t$

Phương trình đã cho trở thành: $\log_2(6^t + 3^t) = t \Leftrightarrow 6^t + 3^t = 2^t \Leftrightarrow 3^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 \Leftrightarrow t = -1$

Vậy $x = \frac{1}{6}$

Câu 5.

Lấy M' là điểm đối xứng với M qua BD $\Rightarrow M'(-2; 2)$

Dễ thấy $M' \in AB$ nên phương trình đường thẳng AB là $x - 3y + 8 = 0$

Điểm B là giao điểm của BD và AB nên $B(7; 5)$

Giả sử $D(d; d-2) \in \Delta$, do $BD = 8\sqrt{2}$ nên $(d-7)^2 + (d-7)^2 = 128 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow D(-1; -3)$

Gọi I là tâm hình thoi, suy ra I là trung điểm BD nên $I(3; 1)$

Đường thẳng AC đi qua I và vuông góc với BD nên AC: $x + y - 4 = 0$

Điểm A là giao điểm của AC và AB nên $A(1; 3) \Rightarrow C(5; -1)$

Câu 6.

Số cách chọn 8 học sinh từ 18 học sinh của đội tuyển là:

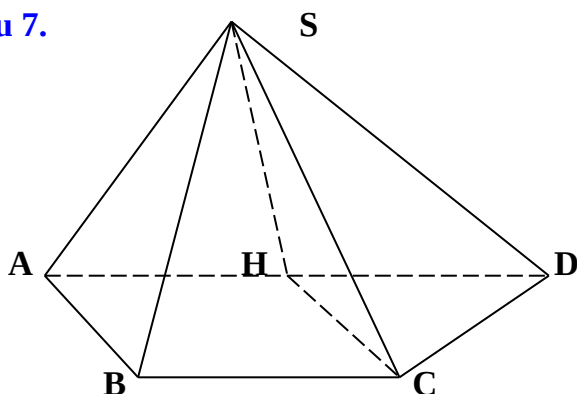
$$C_{18}^8 = 43758 \text{ cách}$$

Số cách chọn 8 học sinh chỉ gồm có hai khối là:

- Số cách chọn 8 học sinh khối 12 và 11 là C_{13}^8
- Số cách chọn 8 học sinh khối 11 và 10 là C_{11}^8
- Số cách chọn 8 học sinh khối 10 và 12 là C_{12}^8

Suy ra số cách chọn theo yêu cầu bài toán là: $43758 - C_{13}^8 - C_{11}^8 - C_{12}^8 = 41811$ cách

Câu 7.



Thể tích khối chóp S.ABCD là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$

Ta có $d(SB, AD) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$

Ta thấy thể tích khối chóp S.ABC là $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ (đường cao hạ từ A xuống BC là $\frac{\sqrt{3}}{2}a$)

Ta có $BC = a, SC = SB = \sqrt{BH^2 + SH^2} = a\sqrt{2}$

Do đó diện tích tam giác SBC là:

$$S_{\Delta SBC} = \sqrt{p(p-SB)(p-SC)(p-BC)} = \frac{\sqrt{7}}{4}a^2 \text{ với } p = \frac{a+a\sqrt{2}+a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } d(SB, AD) = d(A, (SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a$$

Câu 8.

Giả sử phương trình mặt phẳng (R) là $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

Ta có $(R) \perp (P) \Leftrightarrow 5a - 2b + 5c = 0$ (1)

$$\cos((R), (Q)) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a - 4b - 8c|}{9\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 7a^2 + 6ac - c^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ c = 7a \end{cases}$$

Với $a = -c$ chọn $a = 1, b = 0, c = -1$, suy ra phương trình mặt phẳng (R) là $x - z = 0$

Với $c = 7a$ chọn $a = 1, b = 20, c = 7$, suy ra phương trình mặt phẳng (R) là $x + 20y + 7z = 0$

Câu 9.

$$(x+3)\sqrt{x+1} + (x-3)\sqrt{1-x} + 2x \leq 0$$

Điều kiện xác định phương trình: $-1 \leq x \leq 1$

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+1} + (x+1) + 2\sqrt{x+1} \leq (1-x)\sqrt{1-x} + (1-x) + 2\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 + (\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1} \leq (\sqrt{1-x})^3 + (\sqrt{1-x})^2 + 2\sqrt{1-x}$$

Dễ thấy hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

$$\text{Từ đó } f(\sqrt{x+1}) \leq f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \leq \sqrt{1-x}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $-1 \leq x \leq 0$

Câu 10.

Các bạn quan tâm có thể tham khảo lời giải tại: <http://goo.gl/yEm81z> (Bài 5 trang 8)