SỞ GD&ĐT BẾN TRE
ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi : 27/02/2019

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC 2018 - 2019
MÔN: TOÁN – Hệ : THPT
Thời gian: 180 phút

Họ và tên:...**SBD:**... .

Câu 1 (8 điểm).

a) Giải phương trình: $\sqrt{2}.\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{6}.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(y-2).\sqrt{x+2}-x\sqrt{y}=0\\ \sqrt{x+1}.\left(\sqrt{y}+1\right)=(y-3)\left(1+\sqrt{x^2+y-3x}\right)\end{cases}$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) biết (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AB=\sqrt{10}.OA$ (với O là gốc tọa độ).

Câu 2 (4 điểm).

a) Bạn An có đồng xu mà khi tung có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\frac{1}{3}$ và bạn Bình có đồng xu mà khi tung có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\frac{2}{5}$. Hai bạn An và Bình lần lượt chơi trò chơi tung đồng xu của mình đến khi có người được mặt ngửa ai được mặt ngửa trước thì thắng. Các lần tung là độc lập với nhau và bạn An chơi trước. Xác suất bạn An thắng là $\frac{p}{q}$ trong đó p và q là các số nguyên tố cùng nhau, tìm $q-p$.

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển nhi thức $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa: $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=64n$.

Câu 3 (4 điểm).

a) Trong không gian cho 4 điểm A,B,C,D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3,\left|\overrightarrow{BC}\right|=7,\left|\overrightarrow{CD}\right|=11,\left|\overrightarrow{DA}\right|=9$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

b) Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-3b\le 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$.

Câu 4 (4 điểm).

Cho hình chóp $S.ABC$, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=2a$ và tam giác ABC vuông tại C với $AB=2a$ $BAC=30^\circ$. Gọi M là điểm di động trên cạnh AC, đặt $AM=x$, $\left(0\le x\le a\sqrt{3}\right)$. Tính khoảng cách từ S đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này lớn nhất.

----- HẾT -----

SỞ GD&ĐT BẾN TRE
ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
CẤP TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC 2018 - 2019

Câu 1 (8 điểm).

a) Giải phương trình: $\sqrt{2}.\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{6}.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(y-2).\sqrt{x+2}-x\sqrt{y}=0\\ \sqrt{x+1}.\left(\sqrt{y}+1\right)=(y-3)\left(1+\sqrt{x^2+y-3x}\right)\end{cases}$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) biết (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AB=\sqrt{10}.OA$ (với O là gốc tọa độ).

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{2}.\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{6}.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x+\sqrt{3}.(\sin x-\cos x)-1=0$

$\Leftrightarrow(\sin x-\cos x)^2+\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)-\sqrt{3}(\sin x-\cos x)=0\Leftrightarrow(\sin x-\cos x)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ 2\sin x-\sqrt{3}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right..$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm là: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(y-2).\sqrt{x+2}-x\sqrt{y}=0 & (1)\\ \sqrt{x+1}.\left(\sqrt{y}+1\right)=(y-3)\left(1+\sqrt{x^2+y-3x}\right) & (2)\end{cases}$.

* Điều kiện: $\begin{cases}x\geq -1\\ y\geq 0\\ x^2+y-3x\geq 0\end{cases}$.

\- Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x+2}\geq 1\\ b=\sqrt{y}\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a^2-2\\ y=b^2\end{cases}$.

Khi đó (1) trở thành: $\left(b^2-2\right)a-b\left(a^2-2\right)=0\Leftrightarrow ab(b-a)+2(b-a)=0$

$\Leftrightarrow(b-a)(ab+2)=0\Leftrightarrow a=b$ $(\text{do } ab+2>0)$

$\Rightarrow\sqrt{x+2}=\sqrt{y}\Leftrightarrow y=x+2$.

\- Thay vào phương trình (2) ta được phương trình:

$\sqrt{x+1}.\left(\sqrt{x+2}+1\right)=(x-1).\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x+1}.\left(1+\sqrt{(x+1)+1}\right)=(x-1).\left(1+\sqrt{(x-1)^2+1}\right)$ (3).

\- Nếu $x<1$ thì (3) vô nghiệm.

- Với $x\ge 1$, xét hàm số: $f(t)=t.\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)$ trên $[0;+\infty)$.

Có: $f'(t)=1+\sqrt{1+t^2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}>0,\ \forall t\in[0;+\infty)$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow(3)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-1)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x-1\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow x=3$ (do $x\ge 1$)

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;5)$.

c) TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-3}{(2x-1)^2}$.

- Giả sử tiếp tuyến (d) của (C) cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B thỏa mãn $AB=\sqrt{10}.OA$.

Khi đó tam giác OAB vuông tại O và có $AB=\sqrt{10}.OA\Rightarrow OB=3.OA$

$\Rightarrow\tan OAB=\dfrac{OB}{OA}=3\Rightarrow k=\pm 3$, với k là hệ số góc của tiếp tuyến (d)

$\Rightarrow y'=-3\Leftrightarrow\dfrac{-3}{(2x-1)^2}=-3\Leftrightarrow(2x-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=1\\2x-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(1;2)\\M(0;-1)\end{array}\right.$ là các tiếp điểm.

Vậy có 2 tiếp tuyến (d) thỏa mãn yêu cầu bài toán là : $y=-3x+5$ và $y=-3x-1$.

Câu 2 (4 điểm).

a) Bạn An có đồng xu mà khi tung có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\dfrac{1}{3}$ và bạn Bình có đồng xu mà khi tung có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\dfrac{2}{5}$. Hai bạn An và Bình lần lượt chơi trò chơi tung đồng xu của mình đến khi có người được mặt ngửa ai được mặt ngửa trước thì thắng. Các lần tung là độc lập với nhau và bạn An chơi trước. Xác suất bạn An thắng là $\dfrac{p}{q}$ trong đó p và q là các số nguyên tố cùng nhau, tìm $q-p$.

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển nhi thức $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa: $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=64n$.

Lời giải

a) Giả sử ở lần gieo thứ n bạn An thắng cuộc, khi đó ở $n-1$ lần gieo trước bạn An đều chỉ gieo ra mặt sấp và bạn Bình chỉ gieo được $n-1$ lần đều có kết quả là mặt sấp.

Xác suất để có được điều đó ở lần gieo thứ n là $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}.\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

Do đó, điều kiện thuận lợi để bạn An thắng là

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)^2+...+\left(\frac{2}{5}\right)^n+...\right]=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{9}.$$

Suy ra $q-p=9-5=4$.

b) Ta xét khai triển $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k$. Lấy đạo hàm 2 vế ta được: $n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}kC_n^kx^{k-1}$.

Chọn $x=1\Rightarrow C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=n.2^{n-1}$

Do đó $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=64n\Leftrightarrow n2^{n-1}=64n\Leftrightarrow n=7$.

Tiếp tục khai triển

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\left(\sqrt{x}\right)^k\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^{7-k}=\sum_{k=0}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7-k}C_7^kx^{\frac{k}{2}}x^{\frac{k-7}{4}}=\sum_{k=0}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7-k}C_7^kx^{\frac{3k-7}{4}}.$$

Do đó để tìm được số hạng chứa x^2 thì ta cần tìm k để $\frac{3k-7}{4}=2\Leftrightarrow k=5$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^2 là $\left(\frac{1}{2}\right)^{7-5}C_7^5=\frac{21}{4}$.

Câu 3 (4 điểm).

a) Trong không gian cho 4 điểm A,B,C,D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3,\left|\overrightarrow{BC}\right|=7,\left|\overrightarrow{CD}\right|=11,\left|\overrightarrow{DA}\right|=9$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

b) Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-3b\le 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$.

Lời giải

a) Ta có $AB^2-BC^2+CD^2-DA^2=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right)\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)=$

$=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right)\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}(9-49+121-81)=0$.

b) Cách 1:

Áp dụng BĐT A-G: $a^2+1\ge 2a; b^2+4\ge 4b; c^2+1\ge 2c$

suy ra $2a+4b+2c\le 6+a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow 2a+b+2c\le 6$ (1). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=c=1\\b=2\end{cases}$.

Ta lại có với x,y là các số thực dương: $(x+y)^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\ge 8\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{8}{(x+y)^2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Do đó

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{b}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{8}{\left(a+\frac{b}{2}+2\right)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{64}{\left(a+\frac{b}{2}+c+5\right)^2}\ge\frac{256}{(2a+b+2c+10)^2}$$

Kết hợp (1) suy ra $P\ge 1$. Vậy $\min P=1\Leftrightarrow\begin{cases}a=c=1\\b=2\end{cases}$.

Cách 2:

Ta có: $a^2+b^2+c^2-3b\le 0\Rightarrow b^2-3b\le -a^2-c^2\le 0\Rightarrow 0\le b\le 3$.

Ta có $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{9}{(a+1)^2+\frac{(c+3)^2}{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{18}{2a^2+4a+c^2+6c+11}\ (1)$.

Lại có $4a\le 2(a^2+1)$ và $6c\le 3(c^2+1)$

$\Rightarrow 2a^2+4a+c^2+6c+11\le 2a^2+2(a^2+1)+c^2+3(c^2+1)+11$

$\Rightarrow 2a^2+4a+c^2+6c+11\le 4a^2+4c^2+16\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{9}{2a^2+2c^2+8}\ (3)$.

Lại có từ giả thiết $a^2+b^2+c^2-3b\le 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 3b\Rightarrow a^2+c^2+b^2+4\le 3b+4$ mà $b^2+4\ge 4b\Rightarrow a^2+c^2+4b\le 3b+4\Rightarrow a^2+c^2\le 4-b\Rightarrow 2a^2+2c^2\le 8-2b\ (4)$.

Từ (3) và (4) ta có $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{9}{16-2b}$

$\Rightarrow P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{9}{16-2b}$.

Xét hàm số $f(b)=\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{9}{16-2b}$ với $0\le b\le 3$.

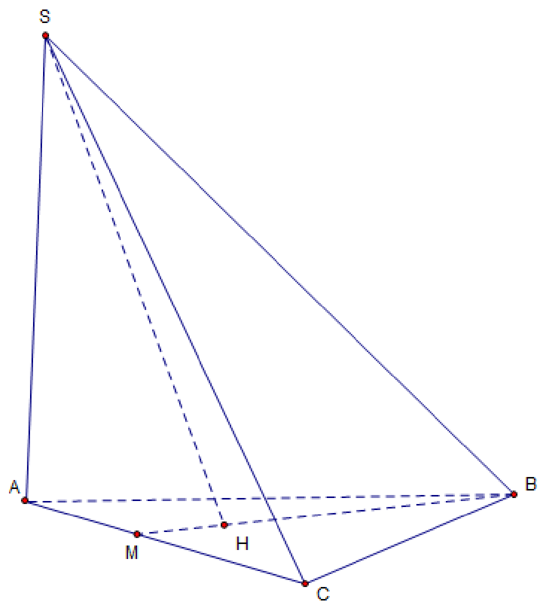
Ta có $\min\limits_{b\in[0;3]} f(b)=1$ khi $b=2\Rightarrow P\ge f(b)\ge\min\limits_{b\in[0;3]} f(b)=1$ và $\min P=1\Leftrightarrow\begin{cases}a=c=1\\ b=2\end{cases}$

Câu 4 (4 điểm).

Cho hình chóp $S.ABC$, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=2a$ và tam giác ABC vuông tại C với $AB=2a$ $BAC=30^\circ$. Gọi M là điểm di động trên cạnh AC, đặt $AM=x$, $(0\le x\le a\sqrt{3})$. Tính khoảng cách từ S đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này lớn nhất.

Lời giải

Cách 1



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BM. Suy ra $BM \perp (SAH)$.

Ta có $\Delta MAH \sim \Delta MBC \Rightarrow AH = \dfrac{BC.AM}{BM} = \dfrac{a.x}{\sqrt{4a^2 + x^2 - 2xa\sqrt{3}}}$.

hình $\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = a\sqrt{\dfrac{5x^2 - 8xa\sqrt{3} + 16a^2}{x^2 - 2xa\sqrt{3} + 4a^2}}$

Cách 2

Ta có $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{4a^2 + x^2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a\sqrt{2}$,

$BM = \sqrt{BA^2 + AM^2 - 2AB.AM\cos BAM} = \sqrt{4a^2 + x^2 - 2xa\sqrt{3}}$, $p = \dfrac{SM + SB + BM}{2}$

Diện tích tam giác SBM là $S_{SBM} = \sqrt{p(p - SB)(p - MB)(p - SM)}$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{5x^2 - 8xa\sqrt{3} + 16a^2}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BM. Ta có $S_{SBM} = \dfrac{1}{2}SH.BM$

$$\Rightarrow SH = \frac{2S_{SBM}}{BM} = a\sqrt{\frac{5x^2 - 8xa\sqrt{3} + 16a^2}{x^2 - 2xa\sqrt{3} + 4a^2}} \Rightarrow d(S, BM) = SH = a\sqrt{\frac{5x^2 - 8xa\sqrt{3} + 16a^2}{x^2 - 2xa\sqrt{3} + 4a^2}}.$$

Cách 3

Ta có $BC = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $C(0;0;0), B(a;0;0)$, $A\left(0; a\sqrt{3}; 0\right), S\left(0; a\sqrt{3}; 2a\right)$

Do H thuộc AC, $AM = x$ nên $M\left(0; a\sqrt{3} - x; 0\right)$

Ta có $\overrightarrow{MB} = \left(a; x - a\sqrt{3}; 0\right)$, $\overrightarrow{BS} = \left(-a; a\sqrt{3}; 2a\right)$.

$\left[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BS}\right] = \left(2ax - 2a^2\sqrt{3}; -2a^2; xa\right)$.

Khoảng cách từ S đến BM là $d(S, BM) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BS}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|} = a\sqrt{\dfrac{5x^2 - 8xa\sqrt{3} + 16a^2}{x^2 - 2xa\sqrt{3} + 4a^2}}$.

*** Tìm các giá trị của x để khoảng cách này lớn nhất.**

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{5x^2 - 8xa\sqrt{3} + 16a^2}{x^2 - 2xa\sqrt{3} + 4a^2}$ $\left(0 \le x \le a\sqrt{3}\right)$

$f'(x) = \dfrac{-2a\sqrt{3}x^2 + 8xa^2}{\left(x^2 - 2xa\sqrt{3} + 4a^2\right)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4\sqrt{3}a}{3} \notin \left[0; a\sqrt{3}\right] \end{array}\right.$. Có $f(0) = 4$, $f\left(\sqrt{3}\right) = 7$.

----- HẾT -----