

CHƯƠNG 4. GIỚI HẠN

BÀI 1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định nghĩa 2

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ hay $v_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$.

Chú ý: Từ nay về sau thay cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

II – ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lý 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

$$\bullet \lim (u_n + v_n) = a + b \quad \bullet \lim (u_n - v_n) = a - b$$

$$\bullet \lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b \quad \bullet \lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0 \text{)}.$$

b) Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases}$.

III – TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q , với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

IV – GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

- Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Nhận xét: $u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau

- $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

3. Định lí 2

- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n \cdot v_n = +\infty$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Sử dụng nguyên lý kẹp

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1 : Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ và $v_n = \frac{1}{n^2 + 2}$. Khi đó $\lim(u_n + v_n)$ có giá trị bằng:

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\ 0 \leq |v_n| \leq \frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{cases} \longrightarrow \lim u_n = \lim v_n = 0 \longrightarrow \lim (u_n + v_n) = 0.$$

Ví dụ 2: Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sin 5n}{3n} - 2 \right)$ bằng:

- A. -2. B. 3. C. 0. D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 0 \leq \left| \frac{\sin 5n}{3n} \right| \leq \frac{1}{n}, \text{ mà } \lim \frac{1}{n} = 0 \text{ nên } \lim \frac{\sin 5n}{3n} = 0, \text{ do đó } \lim \left(\frac{\sin 5n}{3n} - 2 \right) = -2.$$

Nhận xét : Có thể dùng MTCT để tính (có thể chính xác hoặc gần đúng) giới hạn như sau (các bài sau có thể làm tương tự) :

$$\text{Nhập } \frac{\sin(5X)}{3X} - 2.$$

Bấm CALC và nhập 999999999 (một số dòng MTCT khi bấm nhiều số « 9 » thì nó báo lỗi, khi đó ta cần bấm ít số « 9 » hơn.

Bấm « = » ta được kết quả (có thể gần đúng), sau đó chọn đáp án có giá trị gần đúng với kết quả hiện trên MTCT.

Ví dụ 3 : Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n+1}$ bằng:

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 0 \leq \left| \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n+1} \right| \leq \frac{7}{n+1} \leq \frac{7}{n} \rightarrow 0 \longrightarrow \lim \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n+1} = 0.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim \left(4 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$ bằng:

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 0 \leq \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \longrightarrow \lim \frac{(-1)^n}{n+1} = 0 \longrightarrow \lim \left(4 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) = 4.$$

Câu 2: Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn k để $\lim \frac{n - 2\sqrt{n^k} \cos \frac{1}{n}}{2n} = \frac{1}{2}$.

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{n-2\sqrt{n^k} \cos \frac{1}{n}}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{n^k} \cos \frac{1}{n}}{n}.$$

$$\text{Điều kiện bài toán trở thành } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^k} \cos \frac{1}{n}}{n} = 0.$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n} = \cos 0 = 1$ nên bài toán trở thành tìm k sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^k}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{k}{2}-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2} - 1 < 0 \Leftrightarrow k < 2 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}^+, k=3l} \text{ không tồn tại } k \text{ (do } k \text{ nguyên dương và chẵn)}.$$

Câu 3: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right)$ bằng:

A. 4.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 5.

D. -4.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$0 \leq \left| \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} = 0 \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right) = 5.$$

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \sin \frac{n\pi}{5} - 2n^3 \right)$ là:

A. $-\infty$.

B. -2.

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \sin \frac{n\pi}{5} - 2n^3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} - 2 \right).$$

Vì

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty \\ 0 \leq \left| \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} - 2 \right) = -2 < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} - 2 \right) = -\infty.$$

Dạng 2. Giới hạn hữu tỉ

1. Phương pháp

Chú ý: Cho $P(n), Q(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m, k theo biến n :

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_m \neq 0)$$

$$Q(n) = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0 \quad (b_k \neq 0)$$

Khi đó $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim \frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, viết tắt $\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, ta có các trường hợp sau :

Nếu « bậc tử » < « bậc mẫu » ($m < k$) thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$.

Nếu « bậc tử » = « bậc mẫu » ($m = k$) thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m}{b_k}$.

Nếu « bậc tử » > « bậc mẫu » ($m > k$) thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a_m b_k > 0 \\ -\infty & \text{khi } a_m b_k < 0 \end{cases}$.

Để ý rằng nếu $P(n), Q(n)$ có chứa « căn » thì ta vẫn tính được bậc của nó. Cụ thể $\sqrt[m]{n^k}$ thì có bậc là $\frac{k}{m}$. Ví dụ $\sqrt{n}$ có bậc là $\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{n^4}$ có bậc là $\frac{4}{3}, \dots$

Trong các bài sau ta có thể dùng dấu hiệu trên để chỉ ra kết quả một cách nhanh chóng !

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tính $\lim \frac{3n^3 - 5n^2 + 1}{2n^3 + 6n^2 + 4n + 5}$.

Giải

$$\lim \frac{3n^3 - 5n^2 + 1}{2n^3 + 6n^2 + 4n + 5} = \lim \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^3}} = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 2: Tính $\lim \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1} = \lim \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » < « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Ví dụ 3 : Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b bằng bao nhiêu

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim u_n = \lim \frac{2n+b}{5n+3} = \lim \frac{2 + \frac{b}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{2}{5} \quad (\forall b \in \mathbb{R})$$

Giải nhanh : $\frac{2n+b}{5n+3} \sim \frac{2n}{5n} = \frac{2}{5}$ với mọi $b \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a bằng bao nhiêu

Lời giải

$$2 = \lim u_n = \lim \frac{4n^2+n+2}{an^2+5} = \lim \frac{4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{a+\frac{5}{n^2}} = \frac{4}{a} \quad (a \neq 0) \Leftrightarrow a = 2.$$

Giải nhanh : $2 \sim \frac{4n^2+n+2}{an^2+5} \sim \frac{4n^2}{an^2} = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = 2$.

Ví dụ 5 : Tính giới hạn $L = \lim \frac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)}$.

Lời giải

$$L = \lim \frac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)} = \lim \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n^3}\right)\left(4+\frac{5}{n}\right)}{\left(1-\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)\left(3-\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1.2.4}{1.3} = \frac{8}{3}.$$

Giải nhanh: $\frac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)} \sim \frac{n^2.2n^3.4n}{n^4.3n^2} = \frac{8}{3}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{-3}{4n^2-2n+1}$ là:

A. $-\frac{3}{4}$.

B. $-\infty$.

C. 0.

D. -1 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim \frac{-3}{4n^2-2n+1} = \lim \frac{\frac{-3}{n^2}}{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{4} = 0.$$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » < « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là:

A. $+\infty$.

B. 0.

C. $\frac{2}{7}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{0}{4} = 0.$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » < « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

- Câu 3:** Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng:
- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{1} = 1.$

Giải nhanh : $\frac{n+1}{n+2} \sim \frac{n}{n} = 1.$

- Câu 4:** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:
- A. $a = 10.$ B. $a = 8.$ C. $a = 6.$ D. $a = 4.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+4}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{4}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{a}{5}.$ Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{5} = 2 \Leftrightarrow a = 10$$

Giải nhanh : $2 \sim \frac{an+4}{5n+3} \sim \frac{an}{5n} = \frac{a}{5} \Leftrightarrow a = 10.$

- Câu 5:** Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1}.$
- A. $L = \frac{3}{2}.$ B. $L = \frac{1}{2}.$ C. $L = 2.$ D. $L = 1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$

Giải nhanh: $\frac{n^2+n+5}{2n^2+1} \sim \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$

Câu 6: Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}.$

A. $L = -\frac{3}{2}.$

B. $L = \frac{1}{5}.$

C. $L = \frac{1}{2}.$

D. $L = 0.$

Lời giải

Chọn A

$$L = \lim \frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2} = \lim \frac{\frac{1}{n}-3}{2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = \frac{-3}{2}$$

Giải nhanh: $\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2} \sim \frac{-3n^3}{2n^3} = -\frac{3}{2}.$

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim \frac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1} > 0.$

A. $a \leq 0; a \geq 1.$

B. $0 < a < 1.$

C. $a < 0; a > 1.$

D. $0 \leq a < 1.$

Lời giải

Chọn C

$$L = \lim \frac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1} = \lim \frac{\frac{5}{n^2}-3a}{(1-a)+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}} = \frac{-3a}{(1-a)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 1 \end{cases}$$

Câu 8: Tính giới hạn $L = \lim \frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}.$

A. $L = -\frac{3}{2}.$

B. $L = 1.$

C. $L = 3.$

D. $L = +\infty.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$L = \lim \frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)} = \lim \frac{n^3\left(\frac{2}{n^2}-1\right).n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right).n^4\left(1-\frac{7}{n^4}\right)} = \lim \frac{\left(\frac{2}{n^2}-1\right)\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{7}{n^4}\right)} = \frac{-1.3}{2.1} = -\frac{3}{2}.$$

Giải nhanh: $\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)} \sim \frac{-n^3.3n^2}{2n.n^4} = -\frac{3}{2}.$

Câu 9: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{n^3-2n}{1-3n^2}$ là:

A. $-\frac{1}{3}.$

B. $+\infty.$

C. $-\infty.$

D. $\frac{2}{3}.$

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 3\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3}. \text{ Ta có}$$

$$\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3} = -\frac{1}{3} < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = \lim n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3} = -\infty$$

Giải nhanh : $\frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} \sim \frac{n^3}{-3n^2} = -\frac{1}{3}n \longrightarrow -\infty.$

Câu 10: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1}$ là:

A. $\frac{3}{4}.$

B. $+\infty.$

C. 0

D. $\frac{5}{7}.$

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{2}{n^2} + 3\right)}{n^2 \left(4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}. \text{ Ta có}$$

$$\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4} > 0 \end{cases} \longrightarrow \lim \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1} = \lim n \cdot \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = +\infty.$$

Giải nhanh : $\frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1} \sim \frac{3n^3}{4n^2} = \frac{3}{4}n \longrightarrow +\infty.$

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - n^4}{4n - 5}$ là:

A. 0.

B. $+\infty.$

C. $-\infty.$

D. $\frac{3}{4}.$

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - n^4}{4n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(\frac{3}{n^3} - 1\right)}{n \left(4 - \frac{5}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \cdot \frac{\frac{3}{n^3} - 1}{4 - \frac{5}{n}}. \text{ Ta có}$$

$$\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim \frac{\frac{3}{n^3}-1}{4-\frac{5}{n}} = -\frac{1}{4} < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim \frac{3n-n^4}{4n-5} = \lim n^3 \cdot \frac{\frac{3}{n^3}-1}{4-\frac{5}{n}} = -\infty.$$

Giải nhanh : $\frac{3n-n^4}{4n-5} \sim \frac{-n^4}{4n} = -\frac{1}{4}n^3 \longrightarrow -\infty.$

Câu 12: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim \frac{3+2n^3}{2n^2-1}.$

B. $\lim \frac{2n^2-3}{-2n^3-4}.$

C. $\lim \frac{2n-3n^3}{-2n^2-1}.$

D. $\lim \frac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}.$

Lời giải

Chọn B

. Theo dấu hiệu ở đã nêu ở phần **Chú ý** trên thì ta chọn giới hạn nào rơi vào trường hợp « bậc tử » < « bậc mẫu » !

$$\lim \frac{3+2n^3}{2n^2-1} = +\infty : \text{« bậc tử »} > \text{« bậc mẫu »} \text{ và } a_m b_k = 2.2 = 4 > 0.$$

$$\lim \frac{2n^2-3}{-2n^3-4} = 0 : \text{« bậc tử »} < \text{« bậc mẫu »}.$$

$$\lim \frac{2n-3n^3}{-2n^2-1} = +\infty : \text{« bậc tử »} > \text{« bậc mẫu »} \text{ và } a_n b_k = (-3).(-2) > 0.$$

$$\lim \frac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} : \text{« bậc tử »} = \text{« bậc mẫu »} \text{ và } \frac{a_m}{b_k} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 13: Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}.$

B. $u_n = \frac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}.$

C. $u_n = \frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}.$

D. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+1}.$

Lời giải

Chọn C

Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » = « bậc mẫu » và $a_m b_k < 0$.

$$u_n = \frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3} : \text{« bậc tử »} > \text{« bậc mẫu »} \text{ và } a_m b_k = -3.2 = -6 < 0 \longrightarrow \lim u_n = -\infty.$$

Chú ý : (i) $\lim (a_m n^m + a_{n-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0) = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a_n > 0 \\ -\infty & \text{khi } a_n < 0 \end{cases}$

(ii) Giả sử $|q| > \max \{|q_i| : i = 1; 2, \dots, m\}$ thì

$$\lim (a.q^n + a_m q_m^n + \dots + a_1 q_1^n + a_0) = \begin{cases} a_0 & \text{khi } |q| < 1 \\ +\infty & \text{khi } a > 0, q > 1. \\ -\infty & \text{khi } a < 0, q > 1 \end{cases}$$

Ta dùng « dấu hiệu nhanh » này để đưa ra kết quả nhanh chóng cho các bài sau.

Câu 14: Tính giới hạn $L = \lim (3n^2 + 5n - 3)$.

- A. $L = 3$. B. $L = -\infty$. C. $L = 5$. D. $L = +\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$L = \lim (3n^2 + 5n - 3) = \lim n^2 \left(3 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n^2 = +\infty \\ \lim \left(3 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = 3 > 0 \end{cases}$$

Giải nhanh : $3n^2 + 5n - 3 \sim 3n^2 \longrightarrow +\infty$.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $L = \lim (5n - 3(a^2 - 2)n^3) = -\infty$.

- A. 19. B. 3. C. 5. D. 10.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim (5n - 3(a^2 - 2)n^3) = \lim n^3 \left(\frac{5}{n^2} - 3(a^2 - 2) \right) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim \left(\frac{5}{n^2} - 3(a^2 - 2) \right) = a^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2} \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}, a \in (-10; 10)} a = -1; 0; 1.$$

Câu 16: Tính giới hạn $\lim (3n^4 + 4n^2 - n + 1)$.

- A. $L = 7$. B. $L = -\infty$. C. $L = 3$. D. $L = +\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\lim (3n^4 + 4n^2 - n + 1) = \lim n^4 \left(3 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n^4 = +\infty \\ \lim \left(3 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right) = 3 > 0 \end{cases}$$

Giải nhanh : $3n^4 + 4n^2 - n + 1 \sim 3n^4 \longrightarrow +\infty$.

Câu 17: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \dots + (\sqrt{2})^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. $\lim u_n = -\infty$. B. $\lim u_n = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$. C. $\lim u_n = +\infty$. D. Không tồn tại $\lim u_n$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, \dots, (\sqrt{2})^n$ lập thành cấp số nhân có $u_1 = \sqrt{2} = q$ nên

$$u_n = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}} = (2 - \sqrt{2}) \left[(\sqrt{2})^n - 1 \right] \longrightarrow \lim u_n = +\infty \text{ vì } \begin{cases} a = 2 - \sqrt{2} > 0 \\ q = \sqrt{2} > 1 \end{cases}.$$

Câu 18: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}}{n^2 + 1}$ bằng:

A. $\frac{1}{8}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{4n^2 + 4} = \frac{1}{4} \text{ (“bậc tử” = “bậc mẫu”).}$$

Câu 19: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ bằng:

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \dots + n-1) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)(1+n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2n^2}$. Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 20: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)}{3n^2 + 4} \right)$ bằng:

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = \frac{n(1+2n+1)}{2} = n^2$ nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)}{3n^2 + 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 + 4} = \frac{1}{3} \longrightarrow$$

Câu 21: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ là:

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có

$$\lim \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Câu 22: Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải**Chọn A**Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ thì $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$, do đó

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) &= \lim \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right] \\ &= \lim \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 23: Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right)$ bằng:

A. $\frac{11}{18}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} &= \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \lim \left(\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right) = \lim \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{11}{18}.$$

Câu 24: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n(n^2 + 1)}$ bằng:

- A. 4. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $P(n) = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$ thì ta có

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= (P(2) - P(1)) + (P(3) - P(2)) + \dots + (P(n+1) - P(n)) \\ &= P(n+1) - P(1) = \frac{n(n+1)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \lim \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n(n^2 + 1)} = \lim \frac{n(n+1)(2n+3)}{6n(n^2 + 1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Câu 25: Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

- A. $\lim u_n = -1$. B. $\lim u_n = 0$. C. $\lim u_n = \frac{1}{2}$. D. $\lim u_n = 1$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $\lim u_n = a$ thì ta có

$$a = \lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - a} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a(2 - a) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a^2 - 2a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Câu 26: Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

- A. $\lim u_n = 1$. B. $\lim u_n = 0$. C. $\lim u_n = 2$. D. $\lim u_n = +\infty$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $\lim u_n = a$ thì ta có

$$a = \lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n + 1}{2} = \frac{a + 1}{2} \Leftrightarrow a = 1 \longrightarrow$$

Câu 27: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$ bằng:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{4}$. C. 0. D. 3.

Lời giải**Chọn B**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{4 - \frac{2}{n}} = \frac{3}{4}$$

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} \sim \frac{\sqrt{9n^2}}{4n} = \frac{3}{4}.$

Câu 28: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}}$ bằng:

A. $-\frac{2}{3}.$

B. $\frac{1}{2}.$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}.$

D. $-\frac{1}{2}.$

Lời giải**Chọn C**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{3 + \frac{2}{n^4}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Giải nhanh : $\frac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}} \sim \frac{-n^2}{\sqrt{3n^4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 29: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}$ là:

A. $\frac{5}{2}.$

B. $\frac{5}{7}.$

C. $+\infty.$

D. 1.

Lời giải**Chọn D**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{2 + \frac{5}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}} \sim \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}} = 1.$

Câu 30: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - 4}{\sqrt{n+1} + n}$ bằng:

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. $\frac{1}{2}.$

Lời giải**Chọn B**

$$\lim \frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n} = \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$

Câu 31: Biết rằng $\lim \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2} = a \sin \frac{\pi}{4} + b.$ Tính $S = a^3 + b^3.$

A. $S = 1.$

B. $S = 8.$

C. $S = 0.$

D. $S = -1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2} = \lim \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}}} = \frac{1+\sqrt{1}}{1} = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 0 \end{cases} \longrightarrow S = 8$$

Câu 32: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ là:

A. $+\infty.$

B. 10.

C. 0.

D. $-\infty.$

Lời giải

Chọn C

$$\lim \frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}} = \lim \frac{\frac{10}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Giải nhanh: $\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}} \sim \frac{10}{\sqrt{n^4}} = \frac{10}{n^2} \longrightarrow 0.$

Câu 33: Kết quả của giới hạn $\lim (n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$ là:

A. $+\infty.$

B. 1.

C. 0.

D. $-\infty.$

Lời giải

Chọn C

$$\lim (n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}} = \lim \sqrt{\frac{2(n+1)^3}{n^4+n^2-1}} = 0 \text{ (“bậc tử” < “bậc mẫu”).}$$

Giải nhanh: $(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}} \sim n\sqrt{\frac{2n}{n^4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$

Câu 34: Biết rằng $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}} = b\sqrt{3} + c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a+c}{b^3}.$$

A. $P = 3.$

B. $P = \frac{1}{3}.$

C. $P = 2.$

D. $P = \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}} &= \lim \frac{\sqrt[3]{a + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^3}}}{\sqrt{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{3} \sqrt{3} \\ &= b\sqrt{3} + c \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a} = \frac{b}{3} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Câu 35: Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2}$ là:

A. $+\infty.$

B. 1.

C. 0.

D. $-\infty.$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\lim \sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2} = \lim n \left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5} - 3 + \frac{2}{n^3}} \right) = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5} - 3 + \frac{2}{n^3}} \right) = -\sqrt[5]{3} < 0 \end{cases}$$

Giải nhanh: $\sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2} \sim \sqrt[5]{-3n^5} = -\sqrt[5]{3} \cdot n \longrightarrow -\infty.$

Dạng 3. Dãy số chứa căn thức

1. Phương pháp

- Nếu biểu thức chứa căn thức cần nhân một lượng liên hiệp để đưa về dạng cơ bản.

$$\begin{aligned} A - B & \quad \text{lượng liên hiệp là: } A + B \\ \sqrt{A} - \sqrt{B} & \quad \text{lượng liên hiệp là: } \sqrt{A} + \sqrt{B} \\ \sqrt{A} - \sqrt[3]{B} & \quad \text{lượng liên hiệp là: } \sqrt{A} + \sqrt[3]{B} \\ \sqrt[3]{A} - B & \quad \text{lượng liên hiệp là: } \left(\sqrt[3]{A^2} + B\sqrt[3]{A} + B^2 \right) \\ \sqrt[3]{A} + B & \quad \text{lượng liên hiệp là: } \left(\sqrt[3]{A^2} - B\sqrt[3]{A} + B^2 \right) \end{aligned}$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Tính $\lim \left(\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 5} \right)$

Giải

$$\lim \left(\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 5} \right) = \lim \frac{n^2 + 7 - n^2 - 5}{\sqrt{n^2 + 7} + \sqrt{n^2 + 5}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n^2 + 7} + \sqrt{n^2 + 5}} = 0$$

Ví dụ 2. Tính $\lim \left(\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2} \right)$

Giải

$$\lim \left(\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2} \right) = \lim \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + \sqrt{n^2}} = \lim \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 3. Tính $\lim \left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n \right)$

Lời giải

• $\sqrt{n^2 - n + 1} - n \sim \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n \right) = \lim \frac{-n + 1}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} = \lim \frac{-1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2 - n + 1} - n = \frac{-n + 1}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} \sim \frac{-n}{\sqrt{n^2} + n} = -\frac{1}{2}.$

Ví dụ 4. Tính $\lim \left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \right)$

Lời giải

$\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \sim \sqrt[3]{-n^3} + n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \right) = \lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2 - n^3)^2} - n\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{n} - 1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n = \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2 - n^3)^2} - n\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n^2} \sim \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^6} - n\sqrt[3]{-n^3} + n^2} = \frac{1}{3}.$

Ví dụ 5. Tính $\lim \left[\sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \right]$

Lời giải

$\sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \sim \sqrt{n} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n} \right) = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim \left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1} \right)$ bằng:

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}-\sqrt{n}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}) = \lim \frac{4}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}} = 0$$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2})$ là:

A. -2 .

B. 0 .

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}) = \lim n \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{3+\frac{2}{n^2}} \right) = -\infty \text{ vì}$$

$$\lim n = +\infty, \lim \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{3+\frac{2}{n^2}} \right) = 1 - \sqrt{3} < 0.$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{3n^2} = (1-\sqrt{3})n \longrightarrow -\infty$.

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})$ là:

A. 1 .

B. 2 .

C. 4 .

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}) = \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}} = \lim \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} = 2.$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n} = \frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}} \sim \frac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = 2$.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}) = 0$.

A. 0 .

B. 2 .

C. 1 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

$$\text{Ta có } \lim(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}) = \lim \frac{(a^2-a-2)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim \frac{a^2 - a - 2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a^2 - a - 2}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2})$ là:

- A. 0. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2} \sim \sqrt{2n^2} - \sqrt{2n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2}) &= \lim \frac{2n - 1}{\sqrt{2n^2 - n + 1} + \sqrt{2n^2 - 3n + 2}} \\ &= \lim \frac{2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Giải nhanh :

$$\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2} = \frac{2n - 1}{\sqrt{2n^2 - n + 1} + \sqrt{2n^2 - 3n + 2}} \sim \frac{2n}{\sqrt{2n^2} + \sqrt{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n})$ là:

- A. -1 . B. $1 - \sqrt{2}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh : $\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{2n^2} = (1 - \sqrt{2})n \longrightarrow -\infty$.

Cụ thể : $\lim (\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n}) = \lim n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{n}} \right) = -\infty$ vì

$$\lim n = +\infty, \lim \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{n}} \right) = 1 - \sqrt{2} < 0$$

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim (\sqrt{n^2 - 8n - n + a^2}) = 0$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Nếu $\sqrt{n^2 - 8n - n + a^2} \sim \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\text{Ta có } \lim \left(\sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2 \right) = \lim \frac{(2a^2 - 8)n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim \frac{2a^2 - 8}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

$$= a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2.$$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim \left(\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n \right)$ là:

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n \sim \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow \text{nhân lượng liên hợp :}$$

$$\lim \left(\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n \right) = \lim \frac{-2n + 3}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} = \lim \frac{-2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = -1$$

$$\text{Giải nhanh : } \sqrt{n^2 - 2n + 3} - n = \frac{-2n + 3}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} \sim \frac{-2n}{\sqrt{n^2} + n} = -1.$$

Câu 9: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n = -1$.

A. 3.

B. 2.

C. -2.

D. -3.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{n^2} = 0 \longrightarrow \text{nhân lượng liên hợp :}$$

$$\begin{aligned} -1 &= \lim u_n = \lim \left(\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = \lim \frac{an + 4}{\sqrt{n^2 + an + 5} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \lim \frac{a + \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2. \end{aligned}$$

Giải nhanh :

$$-1 \sim \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{an + 4}{\sqrt{n^2 + an + 5} + \sqrt{n^2 + 1}} \sim \frac{an}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2.$$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2} \right)$ bằng:

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2} \sim \sqrt[3]{n^3} - \sqrt[3]{n^3} = 0 \longrightarrow \text{nhân lượng liên hợp :}$$

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)=\lim\frac{-1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{(n^3+2)}}=0.$$

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$ bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n \sim \sqrt[3]{n^3}-n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-\frac{2}{3}.$$

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n=\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}\sim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^6}+n\sqrt[3]{n^3}+n^2}=-\frac{2}{3}.$

Câu 12: Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]$ là:

- A. -1. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) \sim \sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\sim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=1.$

Câu 13: Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\right]$ bằng:

- A. -1. B. 2. C. 4. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right) \sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}=2$$

Giải nhanh : $n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}) = \frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}} \sim \frac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = 2.$

Câu 14: Giá trị của giới hạn $\lim \left[n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}) \right]$ là:

A. $\sqrt{7}-1.$

B. 3.

C. $\frac{7}{2}.$

D. $+\infty.$

Lời giải

Chọn C

$n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}) \sim n(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}) = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\begin{aligned} \lim n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}) &= \lim \frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}} \\ &= \lim \frac{7}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}}} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Giải nhanh : $n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}) = \frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}} \sim \frac{7n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \frac{7}{2}.$

Câu 15: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là:

A. 1.

B. 0.

C. $-\infty.$

D. $+\infty.$

Lời giải

Chọn C

$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}} = \lim -\frac{1}{2}(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}) = \lim n \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{n^2}} \right) \right] = -\infty$$

vì $\lim n = +\infty, \lim \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{n^2}} \right) \right] = -1 < 0$

Giải nhanh :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}) \sim -\frac{1}{2}(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}) = -n \longrightarrow -\infty.$$

Câu 16: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. $+\infty.$

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2} \sim \sqrt{9n^2} = 3n \neq 0 \longrightarrow$ giải nhanh :

$$\frac{\sqrt{9n^2 - n} - \sqrt{n+2}}{3n-2} \sim \frac{\sqrt{9n^2}}{3n} = 1$$

$$\text{Cụ thể : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - n} - \sqrt{n+2}}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1.$$

Câu 17: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1} - n}$ là:

A. 2.

B. 0.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{n^3+1} - n \sim \sqrt[3]{n^3} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2} = 0$$

Dạng 4. Dãy số chứa hàm lũy thừa

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n}$

Lời giải

$$\text{Giải nhanh : } \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n} \sim \frac{-2 \cdot 5^{n+1}}{5^n} = -10$$

$$\text{Cụ thể : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 10}{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = -10.$$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$

Lời giải

$$\text{Giải nhanh : } \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} \sim \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow 0.$$

$$\text{Cụ thể : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

Ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\frac{(-1)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}} \sim (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5n} = 0.$$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}.$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

Ta có: $\frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{4}\right)^n - \frac{3}{n^4}}{3 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^n + 1}$ (chia tử và mẫu cho n^4).

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \frac{0}{1} = 0.$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} \sim \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

Ví dụ 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0; 20)$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2}} - \frac{1}{2^n}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 1} = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2}} - \frac{1}{2^n} = \sqrt{3 + a}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a \in (0; 20), a \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{a + 3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow a \in \{1; 6; 13\}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2 \cdot 5^n}$ bằng:

A. $-\frac{25}{2}.$

B. $\frac{5}{2}.$

C. 1.

D. $-\frac{5}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Cụ thể : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)^n - 25}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2} = -\frac{25}{2}.$$

$$\text{Giải nhanh : } \frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n} \sim \frac{-5^{n+2}}{2.5^n} = -\frac{25}{2}$$

Câu 2: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ bằng:

A. -1.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Giải nhanh : } \frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1} \sim \frac{3^n}{-2.3^n} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Cụ thể : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-2+\left(\frac{1}{3}\right)^n} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 3: Biết rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sqrt{5})^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+(\sqrt{5})^{n+1}-3} + \frac{2n^2+3}{n^2-1} \right) = \frac{a\sqrt{5}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức

$$S = a^2 + b^2 + c^2.$$

A. $S = 26$.

B. $S = 30$.

C. $S = 21$.

D. $S = 31$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sqrt{5})^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+(\sqrt{5})^{n+1}-3} + \frac{2n^2+3}{n^2-1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n + \sqrt{5} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n} + \frac{2+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2. \end{aligned}$$

Giải nhanh :

$$\frac{(\sqrt{5})^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+(\sqrt{5})^{n+1}-3} + \frac{2n^2+3}{n^2-1} \sim \frac{(\sqrt{5})^n}{(\sqrt{5})^{n+1}} + \frac{2n^2}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2 \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5. \\ c=2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = 1^2 + 5^2 + 2^2 = 30.$$

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}$ là:

A. 1.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $+\infty$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh: $\frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}} = \frac{\pi^n + 3^n + 4^n}{3\pi^n - 3^n + 4 \cdot 4^n} \sim \frac{4^n}{4 \cdot 4^n} = \frac{1}{4}$

Cụ thể: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{3 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4} = \frac{1}{4}$.

Câu 5: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} [3^n - \sqrt{5}^n]$ là:

A. 3.

B. $-\sqrt{5}$.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh: Vì $3 > \sqrt{5}$ nên $3^n - \sqrt{5}^n \sim 3^n \longrightarrow +\infty$.

Cụ thể: $\lim_{n \rightarrow \infty} [3^n - \sqrt{5}^n] = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left(1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n\right) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n = 1 > 0 \end{cases}$.

Câu 6: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n)$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. -1.

C. $-\infty$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh: $3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n \sim -5 \cdot 3^n = -\infty$ ($-5 < 0$).

Cụ thể: $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left(162 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 5\right) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(162 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 5\right) = -5 < 0 \end{cases}$.

Câu 7: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

Giải nhanh: $\frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n} \sim \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow 0$.

Cụ thể : $0 \leq \left| \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} \right| \leq \frac{8 \cdot 3^{n+1}}{4^n} = 24 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^n \rightarrow 0 \longrightarrow \lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = 0.$

Câu 8: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2}$ là:

- A. $+\infty$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

. Ta có $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \Rightarrow 2^n \geq C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \sim \frac{n^3}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2^n} \rightarrow 0 \\ \frac{2^n}{n^2} \rightarrow +\infty \end{cases}$. Khi đó:

$$\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2} = \lim \frac{2^n}{n^2} \cdot \frac{2 + 3 \cdot \frac{n}{2^n} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim \frac{2^n}{n^2} = +\infty \\ \lim \frac{2 + 3 \cdot \frac{n}{2^n} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3} > 0 \end{cases}.$$

Câu 9: Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0; 2018)$ để $\lim \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{1024}$.

- A. 2007. B. 2008. C. 2017. D. 2016.

Lời giải

Chọn B

$$\lim \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} = \lim \sqrt[4]{\frac{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4^a}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4^a}} = \sqrt{\frac{1}{(2^a)^2}} = \frac{1}{2^a}.$$

Giải nhanh: $\sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+2}}} \sim \sqrt[4]{\frac{4^n}{4^{n+a}}} = \frac{1}{2^a} \leq \frac{1}{1024} \Leftrightarrow 2^a \geq 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow a \geq 10.$

Mà $a \in (0; 2018)$ và $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{10; 2017\} \longrightarrow$ có 2008 giá trị a .

Câu 10: Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n-1} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. -1 . C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

. Ta có $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n-1} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) = \lim \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n-1} + \lim \frac{(-1)^n}{3^n}$. Ta có

$$\begin{cases} \lim \frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \\ 0 \leq \left| \frac{(-1)^n}{3^n} \right| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{(-1)^n}{3^n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) = \frac{1}{3}.$$

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. -1 .

Lời giải

Chọn B

• $\lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right) = \lim \left(\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1} + \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}} \right)$. Ta có :

$$\begin{cases} \lim \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\ 0 \leq \left| \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}-1} \right) = \sqrt{3}.$$

Câu 12: Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2}$ là:

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2} = \lim \sqrt{3^n} \cdot \sqrt{2 - \frac{n}{3^n} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n}$. Vì

$$\left. \begin{array}{l} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ 0 \leq \frac{n}{3^n} \leq \frac{n}{C_n^2} = \frac{n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{n}{3^n} = 0 \\ \lim \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ \lim \sqrt{2 - \frac{n}{3^n} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n} = \sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

do đó $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2} = +\infty$.

Dạng 5. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

1. Phương pháp

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là $|q| < 1$.

✓ Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q}$$

✓ Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của 10

$$X = N, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$

Hướng dẫn giải

Theo đề cho ta có: $u_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$.

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 0,212121\dots$ (chu kỳ là 21). Tìm a dưới dạng phân số.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

Ta có: $a = 0,212121\dots$

$$= 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + \dots$$

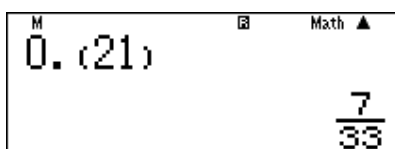
$$= 21 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots \right)$$

Tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots$ là tổng cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{1}{10^2}, q = \frac{1}{10^2}$.

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{99}. \text{ Do đó } A = 21 \cdot \frac{1}{99} = \frac{7}{33}.$$

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $0,(21)$ và ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $\frac{7}{33}$.



Ví dụ 3: Tổng $S_n = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$ có kết quả bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

$$S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \dots + (0,9)^{n-1} + \dots$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 1, q = 0,9$.

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-0,9} = 10.$$

Ví dụ 4: Cho $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, |q| < 1$

$$T = 1 + Q + Q^2 + Q^3 + \dots, |Q| < 1$$

$$E = 1 + qQ + q^2Q^2 + q^3Q^3 + \dots$$

Biểu thị biểu thức E theo S, T

Hướng dẫn giải

- $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, |q| < 1$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, có $u_1 = 1, q = q$.

Khi đó: $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-q} \Rightarrow q = \frac{S-1}{S}. \quad (1)$

- Tương tự: $T = \frac{1}{1-Q} \Rightarrow Q = \frac{T-1}{T}. \quad (2)$

- $E = 1 + q.Q + q^2.Q^2 + q^3.Q^3 + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội qQ (vì $|qQ| < 1$, và $u_1 = 1$).

$$E = \frac{u_1}{1-qQ} \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3): $E = \frac{u_1}{1 - \frac{T-1}{T} \cdot \frac{S-1}{S}} \Rightarrow E = \frac{ST}{S+T-1}.$

Ví dụ 5: Tìm số hạng U_1 của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S = 4; q = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = \frac{u_1}{1-q} \left(|q| < 1 \right) \Rightarrow 4 - \frac{u_1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow u_1 = 2.$

Ví dụ 6: Tìm công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S = -6; U_1 = -3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = \frac{u_1}{1-q} \left(|q| < 1 \right) \Rightarrow -6 = \frac{-3}{1-q} \Rightarrow q = \frac{1}{2}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là:

- A. $u_1 = 3.$ B. $u_1 = 4.$ C. $u_1 = \frac{9}{2}.$ D. $u_1 = 5.$

Lời giải

Chọn A

Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có :

$$\begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = 2 \\ S_3 = u_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2(1-q) \\ 2(1-q^3) = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ u_1 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3 \end{cases}.$$

Câu 2: Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$.

A. $S = \frac{27}{2}$.

B. $S = 14$.

C. $S = 16$.

D. $S = 15$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots = 9 \left(\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=\frac{1}{3}} \right) = 9 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \right) = \frac{27}{2}.$$

Câu 3: Tính tổng $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$.

A. $S = \sqrt{2} + 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = 2\sqrt{2}$.

D. $S = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S = \sqrt{2} \left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=\frac{1}{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \right) = 2\sqrt{2}.$$

Câu 4: Tính tổng $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$.

A. $S = 3$.

B. $S = 4$.

C. $S = 5$.

D. $S = 6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots = 1 + \underbrace{\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=\frac{2}{3}} + \dots = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

Câu 5: Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}, \dots$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải**Chọn D**

. Ta có :

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}} + \dots = \frac{1}{2} \left(\underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=-\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}} \right) = \frac{3}{8}.$$

Câu 6: Tính tổng $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) + \dots$.

A. 1.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải**Chọn D**

Ta có

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) + \dots$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=q=\frac{1}{2}} \right) - \left(\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=q=\frac{1}{3}} \right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} (|a|<1, |b|<1)$ bằng:

A. 0.

B. $\frac{1-b}{1-a}$.

C. $\frac{1-a}{1-b}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $1+a+a^2+\dots+a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1 và công bội là a , nên $1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{1 \cdot (1-a^{n+1})}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

$$\text{Tương tự: } 1+b+b^2+\dots+b^n = \frac{1(1-b^{n+1})}{1-b} = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}.$$

$$\text{Do đó } \lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} = \lim \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \lim \frac{1-a}{1-a} \cdot \frac{1-b^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \frac{1-b}{1-a} \quad (|a|<1, |b|<1).$$

Câu 8: Rút gọn $S = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots + \cos^{2n} x + \dots$ với $\cos x \neq \pm 1$.

A. $S = \sin^2 x$. B. $S = \cos^2 x$. C. $S = \frac{1}{\sin^2 x}$. D. $S = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S = \underbrace{1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots + \cos^{2n} x + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Câu 9: Rút gọn $S = 1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \dots + (-1)^n \cdot \sin^{2n} x + \dots$ với $\sin x \neq \pm 1$.

A. $S = \sin^2 x$. B. $S = \cos^2 x$. C. $S = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$. D. $S = \tan^2 x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S = \underbrace{1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \dots + (-1)^n \cdot \sin^{2n} x + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=-\sin^2 x} = \frac{1}{1 + \sin^2 x}.$$

Câu 10: Thu gọn $S = 1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha - \tan^3 \alpha + \dots$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

A. $S = \frac{1}{1 - \tan \alpha}$. B. $S = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}$. C. $S = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$. D. $S = \tan^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan \alpha \in (0; 1)$ với mọi $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4} \right)$, do đó

$$S = \underbrace{1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha - \tan^3 \alpha + \dots}_{\text{CSN lvh: } u_1=1, q=-\tan \alpha} = \frac{1}{1 + \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}.$$

Câu 11: Cho m, n là các số thực thuộc $(-1; 1)$ và các biểu thức:

$$M = 1 + m + m^2 + m^3 + \dots$$

$$N = 1 + n + n^2 + n^3 + \dots$$

$$A = 1 + mn + m^2 n^2 + m^3 n^3 + \dots$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A = \frac{MN}{M + N - 1}$. B. $A = \frac{MN}{M + N + 1}$. C. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} - \frac{1}{MN}$. D. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{1}{MN}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} M = \frac{1}{1-m} \\ N = \frac{1}{1-n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 - \frac{1}{M} \\ n = 1 - \frac{1}{N} \end{cases}, \text{ khi đó}$$

$$A = \frac{1}{1-mn} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right)} = \frac{MN}{M+N-1}.$$

Câu 12: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng

$$T = a + b.$$

A. 17.

B. 68.

C. 133.

D. 137.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 0,5111\ldots = 0,5 + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n} + \ldots$$

Dãy số $10^{-2}; 10^{-3}; \ldots; 10^{-n}; \ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1 = 10^{-2}$, công bội bằng $q = 10^{-1}$ nên $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{10^{-2}}{1-10^{-1}} = \frac{1}{90}$.

$$\text{Vậy } 0,5111\ldots = 0,5 + S = \frac{46}{90} = \frac{23}{45} \longrightarrow \begin{cases} a = 23 \\ b = 45 \end{cases} \longrightarrow T = a + b = 68.$$

Câu 13: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính

$$T = ab.$$

A. 3456.

B. 3465.

C. 3645.

D. 3546.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$A = 0,353535\ldots = 0,35 + 0,0035 + \ldots = \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + \ldots = \frac{\frac{35}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{35}{99} \Rightarrow \begin{cases} a = 35 \\ b = 99 \end{cases} \Rightarrow T = 3465.$$

Câu 14: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B = 5,231231\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính

$$T = a - b.$$

A. 1409.

B. 1490.

C. 1049.

D. 1940.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$B = 5,231231... = 5 + 0,231 + 0,000231 + ...$$

$$= 5 + \frac{231}{10^3} + \frac{231}{10^6} + ... = 5 + \frac{231}{1 - \frac{1}{10^3}} = 5 + \frac{231}{999} = \frac{1742}{333} \longrightarrow \begin{cases} a = 1742 \\ b = 333 \end{cases} \Rightarrow T = 1409$$

Câu 15: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng

định nào dưới đây đúng?

A. $a - b > 2^{15}$.

B. $a - b > 2^{14}$.

C. $a - b > 2^{13}$.

D. $a - b > 2^{12}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned} 0,17232323... &= 0,17 + 23 \left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^8} + ... \right) \\ &= \frac{17}{100} + 23 \cdot \frac{\frac{1}{10^4}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{17}{100} + \frac{23}{100 \cdot 99} = \frac{1706}{9900} = \frac{853}{4950} \\ &\longrightarrow \begin{cases} a = 853 \\ b = 4950 \end{cases} \Rightarrow 2^{12} < T = 4097 < 2^{13}. \end{aligned}$$

Dạng 6: Giới hạn dãy số có quy luật công thức, dãy cho bởi hệ thức truy hồi

1. Phương pháp

- ✓ Dãy tăng và bị chặn trên hoặc giảm và bị chặn dưới thì tồn tại giới hạn.
- ✓ Phương pháp quy nạp thường được sử dụng.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Hướng dẫn giải

Ta luôn có: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ áp dụng vào u_n :

$$\begin{aligned} \bullet \quad u_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Do đó: $\lim u_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

Ví dụ 2: Cho $u_n = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Hướng dẫn giải

Ta luôn có: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$.

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right).
 \end{aligned}$$

Do đó $\lim u_n = \lim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 3: $\lim \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Vì $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ nên: $\lim \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2} = \lim \frac{n(n+1)}{4n^2} = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 4: Tính giới hạn: $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right]$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \dots \frac{n^2-1}{n^2}$
 $= \frac{(2+1) \cdot (2-1) \cdot (3+1) \cdot (3-1) \dots (n+1) \cdot (n-1)}{2^2 \cdot 3^2 \dots n^2} = \frac{n+1}{2n}$.

Vậy $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{2}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

Ta chứng minh dãy (U_n) là bị chặn: $1 < U_n \leq 2$.

Dãy (U_n) là dãy giảm.

Thật vậy ta xét $U_{k+1} < U_k \Leftrightarrow \frac{U_k + 1}{2} < U_k \Leftrightarrow 2U_k > U_k + 1 \Leftrightarrow U_k > 1$ (đúng).

Vậy dãy (U_n) có giới hạn. Đặt $\lim U_n = a$.

Ta có: $\lim (U_{n+1}) = \lim \left(\frac{U_n + 1}{2} \right)$ hay $a = \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Khai báo: $1 \rightarrow X$ {biến đếm}; $2 \rightarrow A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : A = \frac{A+1}{2}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$, quan sát ta thấy dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1. Vậy $\lim U_n = 1$.

Ví dụ 6: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

Ta sẽ chứng minh dãy bị chặn: $\sqrt{2} \leq U_n < 2$ (bằng phương pháp quy nạp).

- $U_1 = \sqrt{2}$ (đúng).
- Giả sử $U_k \geq \sqrt{2}, \forall k \geq 1$.

Ta có: $U_{k+1} = \sqrt{2 + U_k} \geq \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} (\forall k \geq 1)$.

Vậy $U_k \geq \sqrt{2} \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tương tự: $U_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh dãy (U_n) là dãy tăng (bằng phương pháp quy nạp).

+ $U_1 = \sqrt{2}; U_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow U_1 < U_2$.

+ Giả sử $U_{k-1} < U_k \forall k \geq 2$. Ta xét $U_k < U_{k+1}; \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow U_k < \sqrt{2 + U_k} \Leftrightarrow U_k^2 < 2 + U_k \Leftrightarrow U_k^2 - U_k - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < U_k < 2 \text{ (luôn đúng vì } \sqrt{2} < U_k < 2, \forall k \in \mathbb{N}^*)$$

Vậy dãy (U_n) tăng; bị chặn trên nên có giới hạn, gọi $a = \lim U_n = \lim U_{n+1}$.

$$\text{Ta có: } \lim U_n = \sqrt{2 + \lim U_n} \Leftrightarrow a = \sqrt{2 + a} \Leftrightarrow a^2 = 2 + a$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ (nhận)} \\ a = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Khai báo: $1 \rightarrow X$ {biến đếm}; $\sqrt{2} \rightarrow A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $X = X + 1; A = \sqrt{2 + A}$

Ấn **[CALC]** và lặp lại phím **[=]**, quan sát ta thấy dãy tăng và bị chặn dưới bởi 2. Vậy $\lim U_n = 2$.

Ví dụ 7: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{3}{U_n} \right); n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có: $U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{3}{U_n} \right) \geq \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (U_n) là dãy bị chặn dưới.

$$\begin{aligned} \text{Vì } U_n \geq \sqrt{3} \Rightarrow U_n^2 \geq 3 \Rightarrow U_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{3}{U_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{U_n^2}{U_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} (U_n + U_n) = U_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Dãy đã cho là giảm. Vậy dãy có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1} = \lim U_n = a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim U_n &= \lim \left[\frac{1}{2} \left(U_n + \frac{3}{U_n} \right) \right] \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{3}{a} \right) \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính giới hạn: $\lim \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } \lim \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2+4} &= \lim \frac{(n+1)^2}{3n^2+4} \\ &= \lim \frac{n^2+2n+1}{3n^2+4} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Câu 2: Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

- A. 0. B. 1.
C. $\frac{3}{2}$. D. Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] &= \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

Câu 3: Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(2n-1)(2n+1)} \right]$.

- A. 1. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Lời giải

ĐÁP ÁN C.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n(2n-1)(2n+1)} \right] \\ = \frac{1}{2} \lim \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \lim \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 4: Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right]$.

A. $\frac{3}{4}$. B. 1. C. 0. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

ĐÁP ÁN A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right] = \frac{3}{4}.$$

Câu 5: Tính giới hạn: $\lim \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right]$.

A. $\frac{11}{18}$. B. 2. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

ĐÁP ÁN A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \\ = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \text{ vậy:} \\ = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ \lim \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} \right] = \frac{11}{18}. \end{aligned}$$

Câu 6: Cho dãy (u_n) với $u_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n = 0$. B. $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

C. $\lim u_n = 1$.

D. $\lim u_n$ không tồn tại.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

- Dãy số $1, 2, 3, \dots, n$ là cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 1$ số hạng cuối cùng $u_n = n$, công sai $d = 1$.

Khi đó $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(u_1 + n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Viết lại: $u_n = \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$

$$\lim u_n = \lim \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{2}{n^2}\right)} = \lim \frac{1}{2}.$$

Câu 7: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{U_n^2}{2}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

A. 2.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $U_1 = \frac{1}{2}; U_2 = \frac{5}{8}; U_3 = \frac{57}{64}; \dots$

Ta chứng minh: $U_n < 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$ (bằng phương pháp quy nạp). Vậy dãy bị chặn trên.

Ta chứng minh (U_n) là dãy tăng. Thật vậy:

Ta có: $U_{n+1} > U_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{U_n^2}{2} > U_n$

$\Leftrightarrow U_n^2 - 2U_n + 1 > 0 \Leftrightarrow (U_n - 1)^2 > 0$ luôn đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, vì $U_n < 1$.

Vậy dãy có giới hạn. Đặt $a = \lim U_n = \lim U_{n+1}$.

Ta có: $\lim U_{n+1} = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{U_n^2}{2} \right) \Rightarrow a = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 2a = 1 + a^2$

$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.

Câu 8: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{2 + U_n^2}{2U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $U_{n+1} = \frac{1}{U_n} + \frac{1}{2}U_n \geq \sqrt{2}$ (theo bất đẳng thức Cô-si với $U_n > 0$). Vậy (U_n) là dãy bị chặn dưới.

Dấu “=” không xảy ra, nên $U_n > \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lại có: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2 + U_n^2}{2U_n^2} = \frac{1}{U_n^2} + \frac{1}{2}$. Vì $U_n > \sqrt{2} \Rightarrow U_n^2 > 2$

$\Rightarrow \frac{1}{U_n^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{U_n^2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow U_{n+1} < U_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy giảm, khi đó U_n có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1} = \lim U_n = a$ ($a > 0$).

Ta có: $\lim U_{n+1} = \lim \frac{2 + U_n^2}{2U_n} \Rightarrow a = \frac{2 + a^2}{2a} \Rightarrow 2a^2 = 2 + a^2$

$\Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ (vì $a > 0$).

Câu 9: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 \cdot U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

A. 2.

B. $1 + \sqrt{2}$.

C. $\frac{1 + \sqrt{7}}{2}$.

D. Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $U_1 = \sqrt{2}; U_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}; \dots$

• Ta sẽ chứng minh $U_n < 2; \forall n \in \mathbb{N}^*$ (bằng phương pháp quy nạp).

$n = 1, U_1 = \sqrt{2} < 2$. Giả sử $U_k < 2, \forall k \geq 1$.

Ta có: $U_{k+1} = \sqrt{2U_k} < \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$.

Vậy $U_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Lại có: $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Lại có: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{2U_n}}{U_n} = \sqrt{\frac{2}{U_n}} > \sqrt{\frac{2}{2}} = 1 \Rightarrow$ dãy tăng.

Vậy dãy đã cho có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1} = \lim U_n = a$ ($a > 0$)

Ta có: $\lim U_{n+1} = \lim \sqrt{2U_n} \Rightarrow a = \sqrt{2a} \Rightarrow a^2 = 2a \Rightarrow a = 2$.

BÀI 2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần đến x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in K \setminus \{x_0\}, x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow L$$

2. Định lý về giới hạn hữu hạn:

Ta thừa nhận định lý sau:

a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M} \quad (\text{nếu } M \neq 0).$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

(Dấu của $f(x)$ được xác định trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x \neq x_0$)

3. Giới hạn một bên

* Định nghĩa:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ ta có: $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_0 < x_n < b, x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow L$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ ta có: $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), a < x_n < x_0, x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow L.$$

*** Định lí**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

*** Định nghĩa**

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ ta có: $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n > a, x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow L.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ ta có: $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n < a, x_n \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow L.$$

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định nghĩa 1,2 hay 3 ở trên. Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số $y = f(x)$ khi x dần đến dương vô cực được định nghĩa như sau:

*** Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có: $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n > a, x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow -\infty.$$

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = -\infty$.

2. Các giới hạn đặc biệt

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x} = 0$ với c là hằng số
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ nguyên dương} \\ 0 & \text{nếu } k \text{ nguyên âm} \end{cases}$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của tích $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
L > 0	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
L < 0		+	$-\infty$
		-	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp

$$x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dãy số có giới hạn hữu hạn

1. Phương pháp

Nếu hàm số $f(x)$ xác định trên $K \ni x_0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 7)$.

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 7) = 1 + 1 + 7 = 9.$$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1} = \frac{3 - 2}{5 + 3 + 1} = \frac{1}{9}.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow -1} |4x^3 - 2x - 3|$ là:

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A $\lim_{x \rightarrow -1} |4x^3 - 2x - 3| = |-4 + 2 - 3| = 5.$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2} = \frac{-1 + 1}{\sqrt[3]{4} - 2} = 0.$$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{7x^2 + 9x - 1}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{7x^2 + 9x - 1}} = \sqrt{\frac{16 - 16 + 3}{28 - 18 - 1}} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ là:

A. 37.

B. 38.

C. 39.

D. 40.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11) = 3.2^2 + 7.2 + 11 = 37$$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4| = \left| (\sqrt{3})^2 - 4 \right| = 1$$

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2}$ là:

A. $\sin \frac{1}{2}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2} = 0 \cdot \sin \frac{1}{2} = 0$$

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là:

A. 1.

B. -2.

C. 2.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2} = \frac{(-1)^2 - 3}{(-1)^3 + 2} = -2$$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)}$ là:

A. 1.

B. -2.

C. 0.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)} = \frac{1 - 1^3}{(2.1 - 1)(1^4 - 3)} = 0$$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-1|}{x^4+x-3} = \frac{|-1-1|}{1-1-3} = -\frac{2}{3}$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1} = \frac{\sqrt{3+1}+1}{-1-1} = -\frac{3}{2}$$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}$ là:

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3^2-3}{(2 \cdot 3-1)(3^4-3)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$ là:

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}} = \sqrt[3]{\frac{2^2-2+1}{2^2+2 \cdot 2}} = \frac{1}{2}$$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1} = \frac{\sqrt[3]{12-4}-\sqrt{6-2}}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

Dạng 2. giới hạn một bên

1. Phương pháp

Ta cần nắm các tính chất sau

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_0 < x_n < b, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), a < x_n < x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{2x-6}$

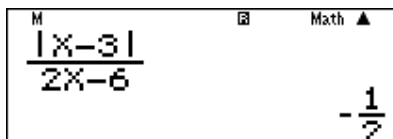
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{2(x-3)} = \frac{1}{2}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{|x-3|}{2x-6}$ và ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $3+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



M Math ▲

$$\frac{|x-3|}{2x-6} = -\frac{1}{2}$$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}} = \sqrt{\frac{0}{4}} = 0.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3-2x+3}{x^2+2x}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Tử số có giới hạn là -1 , mẫu số có giới hạn 0 và khi $x < -2$ thì $x^2 + 2x > 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3-2x+3}{x^2+2x} = -\infty$.

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{x}}{5x - \sqrt{x}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{x}}{5x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(5\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2\sqrt{x} + 1)}{(5\sqrt{x} - 1)} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x^3 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+3)}{\sqrt{x^2(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+1}(x+3)}{\sqrt{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{1 - x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x - 2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{1 - x} = +\infty \text{ vì tử số có giới hạn là 2, mẫu số có giới hạn 0 và } 1 - x > 0 \text{ với } x < 1.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2}$ là:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{15}{2}$. D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\cdot \text{ Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 15) = -13 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \text{ \& } x - 2 > 0, \forall x > 2 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2} = -\infty.$$

Câu 2: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

- A. $-\infty$. B. $+\infty$.
C. $-\frac{15}{2}$. D. Không xác định.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+2} = 2 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0 \text{ \& } \sqrt{x-2} > 0, \forall x > 2 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = +\infty.$$

Câu 3: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|3x+6|}{x+2}$ là:

A. $-\infty$.

B. 3.

C. $+\infty$.

D. Không xác định.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|x+2| = x+2$ với mọi $x > -2$, do đó :

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|3x+6|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{3|x+2|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{3(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} 3 = 3$$

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(2-x)(1-2x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{1-2x} = -\frac{1}{3}.$$

Câu 5: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là:

A. -2.

B. 2.

C. 0.

D. $\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x+3 > 0$ với mọi $x > -3$, nên:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+3)(x+10)}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+3} \cdot (x+10)}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{\sqrt{-3+3} \cdot (-3+10)}{\sqrt{(-3)^2+5}} = 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}.$$

Câu 6: Cho hàm số Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là:

A. $+\infty$.

B. 2.

C. 4.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{3x^2 + 1} = \sqrt{3 \cdot 1^2 + 1} = 2$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{1 - x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x - 2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là:

- A. $+\infty$. B. -1 . C. 0 . D. 1 .

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{1 - x} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0 \text{ \& } 1 - x > 0 \text{ (} \forall x < 1 \text{)} \end{cases}$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{với } x \geq 2 \\ x - 1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ là:

- A. -1 . B. 0 . C. 1 . D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$$

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 2} + 3 & \text{với } x \geq 2 \\ ax - 1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

- A. $a = 1$. B. $a = 2$. C. $a = 3$. D. $a = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x - 2} + 3) = 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ tồn tại} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2a - 1 = 3 \Leftrightarrow a = 2.$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x > 3 \\ 1 & \text{với } x = 3 \\ 3 - 2x^2 & \text{với } x < 3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$. B. Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.
C. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$. D. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -15$.

Lời giải

Chọn C

Ta có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 2x + 3) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - 2x^2) = -15 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

$\longrightarrow$ không tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow 3$.

Vậy chỉ có khẳng định C sai.

Dạng 3. Giới hạn tại vô cực

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1)$ là:

- A. 1. B. $-\infty$. C. 0. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0 \end{cases}$$

Giải nhanh: $x - x^3 + 1 \sim (-1)x^3 \longrightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Câu 12: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|)$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. 1. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x^2 - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = +\infty.$$

Giải nhanh: $|x|^3 + 2x^2 + 3|x| \sim |x|^3 \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Câu 13: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty: \sqrt{x^2 + 1} + x \sim \sqrt{x^2} + x = 2x \rightarrow +\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2 > 0 \end{cases}$$

Câu 14: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2})$ là:

A. $\sqrt[3]{3} + 1$.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt[3]{3} - 1$.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty : \sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2} \sim \sqrt[3]{3x^3} + \sqrt{x^2} = (\sqrt[3]{3} + 1)x \rightarrow +\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = \sqrt[3]{3} + 1 > 0 \end{cases}$$

Câu 15: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{4x^2+7x} + 2x)$ là:

A. 4.

B. $-\infty$.

C. 6.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Đặt x^2 làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{4x^2+7x} + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{4 + \frac{7}{x}} + 2 \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{7}{x}} + 2 \right) = 4 > 0 \end{cases}$$

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty : x(\sqrt{4x^2+7x} + 2x) \sim x(\sqrt{4x^2} + 2x) = 4x^2 \rightarrow +\infty$.

Dạng 4. Dạng vô định $\frac{0}{0}$

1. Phương pháp

✓ Nhận dạng vô định $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$.

✓ Phân tích tử và mẫu thành các nhân tử và giản ước

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)A(x)}{(x - x_0)B(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} \text{ và tính } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)}.$$

Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm là x_0 thì $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$

Đặc biệt:

*Giáo viên có nhu cầu sở hữu file word vui lòng
liên hệ. Face: Trần Đình Cu. SĐT: 0834332133*

- Nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, mà $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $f(x)$ được phân tích thành $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$)
 - $a + b + c + d = 0$ thì pt có một nghiệm là $x_1 = 1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner
 - $a - b + c - d = 0$ thì pt có một nghiệm là $x_1 = -1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner
- Nếu $u(x)$ và $v(x)$ có chứa dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hiệp, sau đó phân tích chúng thành tích để giản ước.

$$\begin{aligned} A - B & \quad \text{lượng liên hiệp là: } A + B. \\ \sqrt{A} - B & \quad \text{lượng liên hiệp là: } \sqrt{A} + B. \\ \sqrt{A} - \sqrt{B} & \quad \text{lượng liên hiệp là: } \sqrt{A} + \sqrt{B}. \\ \sqrt[3]{A} - B & \quad \text{lượng liên hiệp là: } \left(\sqrt[3]{A^2} + B\sqrt[3]{A} + B^2 \right). \\ \sqrt[3]{A} + B & \quad \text{lượng liên hiệp là: } \left(\sqrt[3]{A^2} - B\sqrt[3]{A} + B^2 \right). \end{aligned}$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

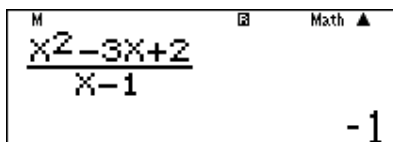
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{X^2 - 3X + 2}{X - 1}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1 + 10^{-10} \boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 2: Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2}$.

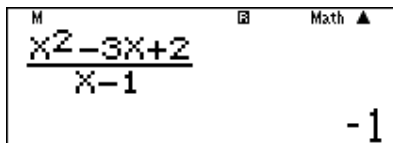
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 1)(x - 1)}{(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(2x - 1)}{(1 + x)} = \frac{-1}{2}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{2X^2 - 3X + 1}{1 - X^2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



The calculator screen displays the expression $\frac{X^2 - 3X + 2}{X - 1}$ and the result -1 .

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$

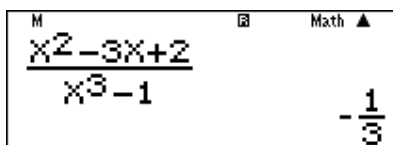
Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2 + x + 1} = \frac{-1}{3}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



The calculator screen displays the expression $\frac{X^2 - 3X + 2}{X^3 - 1}$ and the result $-\frac{1}{3}$.

Ví dụ 4: Tính $\lim_{t \rightarrow a} \frac{t^4 - a^4}{t - a}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{t^4 - a^4}{t - a} = \lim_{t \rightarrow a} (t^3 + t^2a + ta^2 + a^3) = 4a^3.$$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y^3 + y^2 + y + 1)}{(y-1)(y^2 + y + 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 + y^2 + y + 1}{y^2 + y + 1} = \frac{4}{3}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{Y^4 - 1}{Y^3 - 1}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả

Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x + 7} - 3}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x + 7} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2 - 4)(\sqrt{x + 7} + 3)}{(\sqrt{x + 7} - 3)(\sqrt{x + 7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 2)(x + 2)(\sqrt{x + 7} + 3)}{x + 7 - 9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[(x + 2)(\sqrt{x + 7} + 3) \right] = -24. \end{aligned}$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{4 - X^2}{\sqrt{X + 7} - 3}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1 + 10^{-5} \boxed{=}$ ta được kết quả ≈ -24 .

Lưu ý: Để ra kết quả chính xác -24 ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}(4 - X^2)}{\frac{d}{dx}(\sqrt{X + 7} - 3)} \Big|_{x=2}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác -24 .

Ví dụ 7: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $0+10^{-5}\boxed{=}$ ta được kết quả $\approx \frac{1}{2}$.

Calculator screen showing the expression $\frac{\sqrt{1+X}-1}{X}$ and the result 0.49999875.

Lưu ý: Để ra kết quả chính xác $\frac{1}{2}$ ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{1+X}-1)}{\frac{d}{dx}(X)}\bigg|_{x=0}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác $0,5 = \frac{1}{2}$.

Calculator screen showing the derivative calculation $\frac{d}{dx}(\sqrt{1+X}-1) / \frac{d}{dx}(X)$ at $x=0$ and the result 0.5.

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{\sqrt{x} - 2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-2)(\sqrt{x}+2) = 2 \times 4 = 8.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{x^2 - 6x + 8}{\sqrt{x} - 2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $4+10^{-5}\boxed{=}$ ta được kết quả ≈ 8 .

Calculator screen showing the expression $\frac{X^2-6X+8}{\sqrt{X}-2}$ and the result 8.000044992.

Lưu ý: Để ra kết quả chính xác 8 ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}(X^2-6X+8)}{\frac{d}{dx}(\sqrt{X}-2)}\bigg|_{x=4}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác 8.

Calculator screen showing the derivative calculation $\frac{d}{dx}(X^2-6X+8) / \frac{d}{dx}(\sqrt{X}-2)$ at $x=4$ and the result 8.

Ví dụ 9: Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{4-\sqrt{2x^2+8}}$ b

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

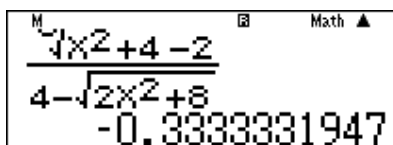
$$E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{4-\sqrt{2x^2+8}}$$

Nhân tử và mẫu hai lượng liên hợp:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\sqrt[3]{x^2+4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2+4} + 4 \right] \left[4 + \sqrt{2x^2+8} \right] \\ E &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2 \right) \left[\left(\sqrt[3]{x^2+4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2+4} + 4 \right] \left(4 + \sqrt{2x^2+8} \right)}{\left(4 - \sqrt{2x^2+8} \right) \left(4 + \sqrt{2x^2+8} \right) \left[\left(\sqrt[3]{x^2+4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2+4} + 4 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left(x^2+4-8 \right) \left(4 + \sqrt{2x^2+8} \right)}{\left(16-2x^2-8 \right) \left[\left(\sqrt[3]{x^2+4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2+4} + 4 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left(x^2-4 \right) \left(4 + \sqrt{2x^2+8} \right)}{\left[-2 \left(x^2-4 \right) \right] \left[\left(\sqrt[3]{x^2+4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2+4} + 4 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 + \sqrt{2x^2+8}}{-2 \left[\left(\sqrt[3]{x^2+4} \right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2+4} + 4 \right]} = \frac{8}{-24} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{4-\sqrt{2x^2+8}}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $4+10^{-5} \boxed{=}$ ta được kết quả $\approx -\frac{1}{3}$.



Lời bình: Nếu ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

$$\text{Nhập } \frac{\frac{d}{dx} \left(\sqrt[3]{x^2+4}-2 \right)}{\frac{d}{dx} \left(4-\sqrt{2x^2+8} \right)} \Big|_{x=2} \text{ rồi ấn phím } \boxed{=} \text{ ta được kết quả } -0,(\overline{3}) = -\frac{1}{3}.$$

$$\frac{d}{dx}(4 - \sqrt{2x^2 + 8}) \Big|_{x=-0.3333333333}$$

Ví dụ 10: Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[4]{x^2 + 12} - 2}{x^2 - 4}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\begin{aligned} E &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[4]{x^2 + 12} - 2}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} - 2\right)\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + 2\right)}{\left(x^2 - 4\right)\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + 2\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{\left(x^2 - 4\right)\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + 2\right)} \quad (\text{vẫn còn dạng vô định } \frac{0}{0}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 12} - 4\right)\left(\sqrt{x^2 + 12} + 4\right)}{\left(x^2 - 4\right)\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + 2\right)\left(\sqrt{x^2 + 12} + 4\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 12 - 16}{\left(x^2 - 4\right)\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + 2\right)\left(\sqrt{x^2 + 12} + 4\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} + 2\right)\left(\sqrt{x^2 + 12} + 4\right)} = \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt[4]{x^2 + 12} - 2\right)\Big|_{x=-2}}{\frac{d}{dx}(x^2 - 4)\Big|_{x=-2}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $0,03125 = \frac{1}{32}$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 4) \Big|_{x=-2} = 0.03125$$

Ví dụ 11: Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{x^2 - 1}$

Hướng dẫn giải

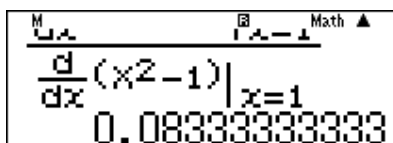
Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\begin{aligned} E &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[6]{x} - 1)(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(x^2 - 1)(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1)} \quad (\text{Vẫn dạng vô định } \frac{0}{0}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x + 1)(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

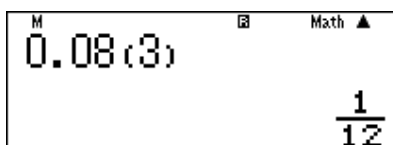
Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}(\sqrt[6]{x} - 1)}{\frac{d}{dx}(x^2 - 1)} \Big|_{x=1}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $0,08(3) = \frac{1}{12}$.



Đổi chuyển $0,08(3) = \frac{1}{12}$ ta bấm như sau 0.08Qs3=



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ là:

- A. 0. B. $+\infty$.
C. 3. D. Không xác định.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$ là:

A. $-\frac{3}{5}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $-\frac{5}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{5}{3}.$$

Câu 3: Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} = a\sqrt{3} + b$. Tính $a^2 + b^2$.

A. 10.

B. 25.

C. 5.

D. 13.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 3\sqrt{3}}{3 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2(x^2 - \sqrt{3}x + 3)}{\sqrt{3} - x} \\ &= \frac{2[(-\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}(-\sqrt{3}) + 3]}{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})} = \frac{18}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 10. \end{aligned}$$

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right|$ là:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right| = \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)} \right| = \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{x-2}{x} \right| = \left| \frac{-3-2}{-3} \right| = \frac{5}{3}.$$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ là:

A. $\frac{1}{3}$.

B. 0.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3-x > 0$ với mọi $x < 3$, do đó:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{(3-x)(9+3x+x^2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}} = \frac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{9+3.3+3^2}} = 0.\end{aligned}$$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{21})\sqrt[3]{1-2x} - \pi^{21}}{x}$ là:

- A. $-\frac{2\pi^{21}}{7}$. B. $-\frac{2\pi^{21}}{9}$. C. $-\frac{2\pi^{21}}{5}$. D. $\frac{1-2\pi^{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{21})\sqrt[3]{1-2x} - \pi^{21}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{21})(\sqrt[3]{1-2x} - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} x = -\frac{2\pi^{21}}{7}.$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}}{x^2}$ là:

- A. 0. B. $-\infty$. C. 1. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2+x) - x}{x^2(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}} = +\infty$$

vì $1 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}) = 0$ và $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x} > 0$ với mọi $x > 0$.

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x+4} - 2}$ là:

- A. -1. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x+4} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2} + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4\right)}{(4x+4-8)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2} + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4\right)}{4\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)} = \frac{12}{12} = 1.\end{aligned}$$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{13}{12}$.

C. $\frac{11}{12}$.

D. $-\frac{13}{12}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{1+x} - 2}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{x+1} + 1} + \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2}} \right) = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Câu 10: Biết rằng $b > 0$, $a + b = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $1 < a < 3$.

B. $b > 1$.

C. $a^2 + b^2 > 10$.

D. $a - b < 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{ax+1} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-bx}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} + \frac{bx}{x(1 + \sqrt{1-x})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} + \frac{b}{(1 + \sqrt{1-x})} \right) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta được: } \begin{cases} a + b = 5 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + 3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3, b = 2$$

Dạng 5. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

1. Phương pháp

✓ Nhận biết dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} \text{ khi } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \pm\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)} \text{ khi } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = \pm\infty.$$

✓ Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất của biến ở mẫu (Hoặc phân tích thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước)

- ✓ Nếu $u(x)$ hoặc $v(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (Với k là mũ cao nhất của biến x trong dấu căn), sau đó chia tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x (thường là bậc cao nhất ở mẫu).
- ✓ Cách tính giới hạn dạng này hoàn toàn tương tự giới hạn dãy số.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3}{x - 2x^4}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

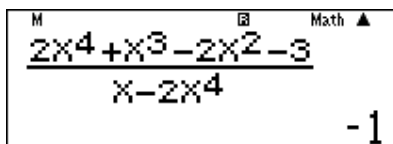
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3}{x - 2x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{\frac{1}{x^3} - 2} = -1.$$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3}{x - 2x^4} \sim \frac{2x^4}{-2x^4} = -1.$$

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3}{x - 2x^4}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $10^{15} \boxed{=}$ ta được kết quả -1 .



Lời bình: “Bậc tử bằng bậc mẫu” nên kết quả $\frac{2}{-2} = -1$.

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x}{5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right) = 5 > 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x) = -\infty.$$

$$\text{Do đó: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2} = -\infty.$$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2} \sim \frac{-2x^5}{5x^4} = -\frac{2}{5}x = -\infty.$$

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $10^{15} \boxed{=}$ ta được kết quả $\approx -\infty$.

$$\frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x + 2} \approx -4 \times 10^{14}$$

Lời bình: Bậc tử lớn hơn bậc mẫu nên kết quả là ∞ .

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}}{\frac{5}{x^2} + 3 + \frac{2}{x^6}} = \frac{0}{3} = 0.$$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 2} \sim \frac{-2x^5}{3x^6} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = 0.$$

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $10^{15} \boxed{=}$ ta được kết quả ≈ 0 .

$$\frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 2} \approx -6.666666667 \times 10^{-16}$$

Lời bình: “Bậc tử bé hơn bậc mẫu” nên kết quả là 0.

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\frac{3}{x} + 4 + \frac{2}{x^5}}{9 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5}}} = \frac{2}{3}.$$

Cách 2: Mẹo giải nhanh

$$\sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}} \sim \sqrt{\frac{4x^5}{9x^5}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Cách 3: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $10^{15} \boxed{=}$ ta được kết quả ≈ 0 .

Ví dụ 5: Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1 - x + 2}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1 - x + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + 3x}}{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2} - x + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + 3}}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2} - 1 + \frac{2}{x}}} = \frac{2}{-3}.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1 - x + 2}}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $-10^{15} \boxed{=}$ ta được kết quả $\frac{2}{3}$.

Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x + 5}}{2x - 7}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x + 5}}{2x - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}}{2 - \frac{7}{x}} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x + 5}}{2x - 7}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $10^{25} \boxed{=}$ ta được kết quả

Ví dụ 7: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+5) \sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+5) \sqrt{\frac{x}{x^3-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x(x+5)^2}{x^3-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)^2}{1-\frac{1}{x^3}}} = 1.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Nhập vào màn hình $(x+5) \sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$ ấn **CALC** 10^{25} ta được kết quả

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^2+1)^3 (1-2x)^{94}}{2x^{100}+3}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} E &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^2+1)^3 (1-2x)^{94}}{2x^{100}+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[x^2 \left(-1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]^3 \left[x \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \right]^{94}}{x^{100} \left(2 + \frac{3}{x^{100}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 \left(-1 + \frac{1}{x^2} \right)^3 x^{94} \left(\frac{1}{x} - 2 \right)^{94}}{x^{100} \left(2 + \frac{3}{x^{100}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(-1 + \frac{1}{x^2} \right)^3 \left(\frac{1}{x} - 2 \right)^{94}}{2 + \frac{3}{x^{100}}} = \frac{(-1)^3 \cdot (-2)^{94}}{2} = -2^{93}. \end{aligned}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2 .

B. $+\infty$.

C. 3 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2.$$

Giải nhanh : khi $x \rightarrow -\infty$ thì : $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} \sim \frac{2x^2}{x^2} = 2$.

Câu 2: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3}$ là:

A. -2 .

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. 2 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = -\infty.$$

Giải nhanh : khi $x \rightarrow -\infty$ thì : $\frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3} \sim \frac{2x^3}{x^2} = 2x \rightarrow -\infty$.

Câu 3: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5}$ là:

A. -2 .

B. $+\infty$.

C. 0 .

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{11}{x^6}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^6}} = \frac{0}{3} = 0.$$

Giải nhanh : khi $x \rightarrow -\infty$ thì : $\frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5} \sim \frac{2x^3}{3x^6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} \rightarrow 0$.

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ là:

A. -2 .

B. $+\infty$.

C. 3 .

D. -1 .

Lời giải

Chọn D

. Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $\sqrt{x^2} = -x \longrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = -x - x = -2x \neq 0$

—→ chia cả tử và mẫu cho x , ta được $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = -1$.

Câu 5: Biết rằng $\frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 - 2a + 4$.

A. $P_{\min} = 1$.

B. $P_{\min} = 3$.

C. $P_{\min} = 4$.

D. $P_{\min} = 5$.

Lời giải

Chọn B

Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $\sqrt{x^2} = x \rightarrow \sqrt{x^2+1}-x \sim \sqrt{x^2}-x = x-x = 0$

—→ Nhân lượng liên hợp:

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2-a)x-3)(\sqrt{x^2+1}+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(2-a-\frac{3}{x}\right) \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2-a-\frac{3}{x}\right) = 2-a > 0 \Rightarrow a < 2.$$

Giải nhanh : ta có $x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$$= ((2-a)x-3)(\sqrt{x^2+1}+x) \sim (2-a)x(\sqrt{x^2}+x) = 2(2-a)x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow a < 2.$$

Khi đó $P = a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3 \geq 3$, $P = 3 \Leftrightarrow a = 1 < 2 \Rightarrow P_{\min} = 3$.

Câu 6: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là:

A. -2 .

B. -1 .

C. -2 .

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh: khi $x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1} \sim \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \frac{-2x}{x} = -2$.

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{4}}{1} = -2.$$

Câu 7: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x+2x}}$ là:

A. $-\frac{1}{5}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải**Chọn D****Giải nhanh :** khi

$$x \rightarrow +\infty \longrightarrow \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x + 2x}} \sim \frac{\sqrt{4x^2} - x}{\sqrt{9x^2 + 2x}} = \frac{2x - x}{3x + 2x} = \frac{1}{5}.$$

Cụ thể : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x} - 1}{\sqrt{9 - \frac{3}{x} + 2}} = \frac{1}{5}.$

Câu 8: Biết rằng $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{ax^2 - 3x + bx}} > 0$ là hữu hạn (với a, b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng.

A. $a \geq 0$.

B. $L = -\frac{3}{a+b}$

C. $L = \frac{3}{b-\sqrt{a}}$

D. $b > 0$.

Lời giải**Chọn B**Ta phải có $ax^2 - 3x > 0$ trên $(-\infty; \alpha) \Leftrightarrow a \geq 0$.

$$\text{Ta có } x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x \sim \sqrt{4x^2} - x = -3x \neq 0.$$

Như vậy xem như “tử” là một đa thức bậc 1. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{ax^2 - 3x + bx}} > 0$ khi và

chỉ khi $\sqrt{ax^2 - 3x + bx}$ là đa thức bậc 1.

$$\text{Ta có } \sqrt{ax^2 - 3x + bx} \sim \sqrt{ax^2} + bx = (-\sqrt{a} + b)x \longrightarrow -\sqrt{a} + b \neq 0.$$

$$\text{Khi đó } \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{ax^2 - 3x + bx}} \sim \frac{-3x}{(-\sqrt{a} + b)x} = \frac{3}{b - \sqrt{a}} = L > 0 \Leftrightarrow b - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow b > \sqrt{a}.$$

Câu 9: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. 0.

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. 1.

Lời giải**Chọn C**

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}} \sim \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{x}{-\sqrt{2}x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + ax)$ là $+\infty$.

A. $a > \sqrt{2}.$

B. $a < \sqrt{2}.$

C. $a > 2.$

D. $a < 2.$

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} + ax \sim \sqrt{2x^2} + x$

$= -\sqrt{2}x + ax = (a - \sqrt{2})x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow a - \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}.$

Cụ thể: vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + a \right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + a \right) = a - \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}.$

Dạng 6. Dạng vô định $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$

1. Phương pháp

- ✓ Nếu biểu thức chứa biến số dưới dấu căn thì nhân và chia với biểu thức liên hợp
- ✓ Nếu biểu thức chứa nhiều phân thức thì quy đồng mẫu và đưa về cùng một biểu thức.
- ✓ Thông thường, các phép biến đổi này có thể cho ta khử ngay dạng vô định $\infty - \infty; 0 \cdot \infty$ hoặc chuyển về dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x+3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \right)} = 0.$$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 5} - x)$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 5} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{x^2 + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + 1} = \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5x} \right)$

Hướng dẫn giải

$$E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5x} \right)$$

Nhân và chia liên hợp $x + \sqrt{x^2 + 5x}$

$$E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 + 5x} \right) \left(x + \sqrt{x^2 + 5x} \right)}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 5x}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x + \sqrt{x^2 + 5x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{x + x\sqrt{1 + \frac{5}{x}}} \quad (\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}} = \frac{-5}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{5}{2}.$$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right)$

Hướng dẫn giải

$$E = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right) \quad (\text{Dạng vô định } 0 \cdot \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - x - 1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1.$$

Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 5} = 0.$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} = 1.$$

Ví dụ 7: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2} - x \right)$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{x^2 + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-x^2-x-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1}} = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

Ví dụ 9: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-7})$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-7}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5-x+7}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-7}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{12}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}} + \sqrt{1-\frac{7}{x}}} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-5x} - x) = \frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-5x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-5x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{\sqrt{x^2-5x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{\sqrt{1-\frac{5}{x}} + 1} = -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2+5} = 1$.

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} = -1.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2)$ là:

A. 1.

B. $+\infty$.

C. -1.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh : $x \rightarrow -\infty \longrightarrow 2x^3 - x^2 \sim 2x^3 \rightarrow -\infty$.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2 > 0 \end{cases}$.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ là:

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2-1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+1}{x^2-4} \right) = -\infty$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-4) = 0$ và $x^2-4 < 0$ với mọi $x \in (-2; 2)$.

Câu 3: Biết rằng $a+b=4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{b}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right)$.

A. 1.

B. 2.

C. 1.

D. -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a+ax+ax^2-b}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a+ax+ax^2-b}{(1-x)(1+x+x^2)}$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow 1+a \cdot 1 + a \cdot 1^2 - b = 0 \Leftrightarrow 2a-b=-1$.

Vậy ta có $\begin{cases} a+b=4 \\ 2a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow L = -\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$

$= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = 1$.

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+2x^2} - x)$ là:

A. 0.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt{2}-1$.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+2x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} - 1 \right) = +\infty$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} - 1 \right) = \sqrt{2} - 1 > 0$.

Giải nhanh : $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{1+2x^2} - x \sim \sqrt{2x^2} - x = \sqrt{2}x - x = (\sqrt{2}-1)x \rightarrow +\infty$.

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ là:

A. 0.

B. $+\infty$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

. $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = x - x = 0 \longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp.

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \sim \frac{1}{\sqrt{x^2} + x} = \frac{1}{2x} \rightarrow 0$.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{0}{2} = 0$.

Câu 6: Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5}) = a\sqrt{5} + b$. Tính $S = 5a + b$.

A. $S = 1$.

B. $S = -1$.

C. $S = 5$.

D. $S = -5$.

Lời giải

Chọn A

$x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5} \sim \sqrt{5x^2} + x\sqrt{5} = -\sqrt{5}x + x\sqrt{5} = 0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5}$

$= \frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5}} \sim \frac{2x}{\sqrt{5x^2} - x\sqrt{5}} = \frac{2x}{-2\sqrt{5}x} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Cụ thể: Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5}}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{5 + \frac{2}{x}} + \sqrt{5}} = \frac{2}{-2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow S = -1$.

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+4x})$ là:

A. $\frac{7}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $+\infty$.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

. Khi $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+4x} \sim \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} = 0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+4x}$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+4x}} \sim \frac{-x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+4x}) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{4}{x}}} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2})$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt[3]{3}-1$.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} \right) = -\infty$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} \right) = \sqrt[3]{3}-1 > 0.$$

Giải nhanh:

$$x \rightarrow -\infty \longrightarrow \sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2} \sim \sqrt[3]{3x^3} + \sqrt{x^2} = (\sqrt[3]{3}-1)x \rightarrow -\infty.$$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3-x^2})$ là:

A. $\frac{5}{6}$.

B. $+\infty$.

C. -1 .

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Khi } x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3-x^2} \sim \sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^3} = x - x = 0$$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3-x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x + x - \sqrt[3]{x^3-x^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Giải nhanh: $\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3-x^2} = (\sqrt{x^2+x} - x) + (x - \sqrt[3]{x^3-x^2})$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^2}+x} + \frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[6]{x^6}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} (x \rightarrow +\infty).$$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1})$ là:

A. 0.

B. $+\infty$.

C. -1.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} \sim \sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2x} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} = 0.$$

Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} =$

$$\frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{4x^2-1} - \sqrt[3]{(2x+1)^2}} \sim \frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}} \rightarrow 0.$$

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$ là:

A. $+\infty$.

B. -1.

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = 0 - 1 = -1.$$

Câu 12: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ là:

A. 1.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0.$$

Câu 13: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ là:

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $+\infty$.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2(2x+1)}{3x^3+x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Giải nhanh:

$$x \rightarrow +\infty \longrightarrow x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} \sim x \cdot \sqrt{\frac{2x}{3x^3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 14: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2} \right)$ là:

A. 0.

B. -1.

C. π .

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin \pi x - 1) = -1.$$

Câu 15: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$ là:

A. 3.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

. Với $x \in (-1; 0)$ thì $x+1 > 0$ và $\frac{x}{x-1} > 0$.

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1)(x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{x+1} (x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 0$$

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

II – HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

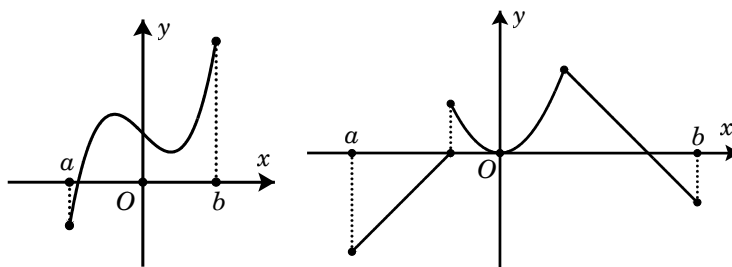
Định nghĩa 2

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Nhận xét: Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.



Hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$ Hàm số không liên tục trên khoảng $(a; b)$

III – MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1

- a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lý 2

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- a) Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ liên tục tại x_0 ;
- b) Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 3

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Định lý 3 có thể phát biểu theo một dạng khác như sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ liên tục trên:

- A. $[-4; 3]$. B. $[-4; 3)$.
C. $(-4; 3]$. D. $[-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \leq -3 \end{cases} \xrightarrow{TXD} D = (-4; 3] \longrightarrow$ hàm số liên tục trên $(-4; 3)$. Xét tại $x = 3$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} \right) = \frac{1}{\sqrt{7}} = f(3) \longrightarrow \text{Hàm số liên tục trái tại } x = 3.$$

Vậy hàm số liên tục trên $(-4; 3]$.

Câu 2: Hàm số $f(x) = \frac{x^3 + x \cos x + \sin x}{2 \sin x + 3}$ liên tục trên:

- A. $[-1; 1]$. B. $[1; 5]$. C. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $2 \sin x + 3 \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \xrightarrow{TXD} D = \mathbb{R} \longrightarrow$ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ với mọi $x \neq 1$. Tính $f(1)$.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

Lời giải

Chọn D

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3; 3]$ với $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x}$ với $x \neq 0$.

Tính $f(0)$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Vì $f(x)$ liên tục trên $[-3; 3]$ nên suy ra

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4; +\infty)$ với $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$ với $x \neq 0$.

Tính $f(0)$.

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Vì $f(x)$ liên tục trên $(-4; +\infty)$ nên suy ra

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4} + 2) = 4.$$

Dạng 2. Hàm số liên tục tại một điểm

1. Phương pháp

Ta cần phải nắm vững định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x}$ với $x \neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục tại $x = 0$?

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-2+x}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x})} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Như vậy để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì phải bổ sung thêm giá trị $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{với } x \neq 1 \text{ và } a \in \mathbb{R} \\ 3 & \text{với } x = 1 \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ là bao

nhiêu?

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (a - x^2) = a - 1.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a - 1 = 3 \Leftrightarrow a = 4$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}} & \text{với } x \neq 3 \text{ và } x \neq -2 \\ b+3 & \text{với } x = 3 \text{ và } b \in \mathbb{R} \end{cases}$. Tìm b để $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; f(3) = b+3.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow b + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow b = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a-2 & \text{khi } x < 2 \\ \sin \frac{\pi}{x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 2$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có

$$\left. \begin{aligned} &\bullet f(2) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ &\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a-2) = a-2 \\ &\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned} \right\}$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi $a - 1 = 2 \Leftrightarrow a = 3$.

Ví dụ 5: Tìm số a để hàm số sau liên tục tại điểm x_0 .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \\ ax+2 & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}; x_0 = 2.$$

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)}{(x-2) \left[\left(\sqrt[3]{3x+2} \right)^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4 \right]} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = ax + 2 = 2a + 2.$$

$$\text{Lại có: } f(2) = 2a + 2.$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ nếu $2a + 2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{7}{8}$.

Ví dụ 6: Xét tính liên tục của hàm số sau tại x_0 .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} & \text{nếu } x > 1 \\ \frac{1}{4} & \text{nếu } x = 1; x_0 = 0, x_0 = 1. \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x - 7} & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x+7} = \frac{1}{4}; f(1) = \frac{1}{4}.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \frac{1}{4}$, nên hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

Để thấy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x - 7} = \frac{1}{7} = f(0)$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$.

Ví dụ 7: Xét tính liên tục của hàm số sau tại x_0 .

$$f(x) = |x+2|; x_0 = -2, x_0 = 1.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } f(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{nếu } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{nếu } x < -2 \end{cases}$$

- Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3; f(1) = 3$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, nên hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

- Lại có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+2) = 0; \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0; f(-2) = 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = f(-2) = 0$ nên hàm số liên tục tại $x_0 = -2$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+5}} & \text{với } -5 < x < 4 \\ mx+2 & \text{với } x=4 \\ \frac{\sqrt{x}}{3} & \text{với } x > 4 \end{cases}$. Tìm giá trị của m để $f(x)$ liên tục tại $x=4$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-2}{\sqrt{x+5}} = \frac{2}{3}$; $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x}}{3} = \frac{2}{3}$.

Và $f(4) = 4m + 2$

Để hàm số liên tục tại $x=4$ thì $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$

$\Leftrightarrow 4m + 2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$.

Ví dụ 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-4x+3} & \text{nếu } x < 1 \\ \frac{1}{6}\cos \pi x + a^2 - x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

• $f(1) = \frac{1}{6}\cos \pi + a^2 - 1 = -\frac{1}{6} + a^2 - 1$.

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{6}\cos \pi x + a^2 - x \right) = -\frac{1}{6} + a^2 - 1$.

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+8}+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+8-9}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{(x-3)(\sqrt{x^2+8}+3)} = -\frac{1}{6}$.

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} + a^2 - 1 = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow a = \pm 1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Chọn D

. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, chứa $x = 2$. Theo giả thiết thì ta phải có

$$m = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3.$$

Câu 2: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = 0$.

B. $m = 2$.

C. $m = 4$.

D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn A

. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết ta phải có

$$3 + m = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ k + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $k = \frac{1}{2}$.

B. $k = 2$.

C. $k = -\frac{1}{2}$.

D. $k = 0$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $D = [0; +\infty)$. Điều kiện bài toán tương đương với

$$\text{Ta có: } k + 1 = y(1) = \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Câu 4: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x}{\sqrt{x + 1} - 2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$ (với m là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m \in (-3; 0)$.

B. $m \leq -3$.

C. $m \in [0; 5)$.

D. $m \in [5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-1; +\infty)$. Theo giả thiết ta phải có

$$m = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{\sqrt{x + 1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - x)(\sqrt{x + 1} + 2)}{x - 3} = -\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x + 1} + 2) = -4.$$

- Câu 5:** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.
- A.** $m \in (-2; -1)$. **B.** $m \leq -2$. **C.** $m \in [-1; 7)$. **D.** $m \in [7; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x \neq 0$ ta có

$$0 \leq |f(x)| = \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \rightarrow 0 \text{ khi } x \rightarrow 0 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Theo giả thiết ta phải có: $m = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

- Câu 6:** Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?
- A.** $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty; \frac{\pi}{4}\right)$. **C.** $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định:

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi \right) = \dots \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) \cup \dots$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1 \neq 0 = f(0) \longrightarrow f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

- Câu 7:** Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.
- A.** $m = -\pi$. **B.** $m = \pi$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Điều kiện bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} m = f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x - \pi + \pi)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin \pi(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(-\pi) \cdot \frac{\sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)} \right] (*). \end{aligned}$$

Đặt $t = \pi(x-1)$ thì $t \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow 1$. Do đó (*) trở thành: $m = \lim_{t \rightarrow 0} (-\pi) \cdot \frac{\sin t}{t} = -\pi$.

Câu 8: Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} & \text{khi } x \neq \pi \\ m & \text{khi } x = \pi \end{cases} \text{ liên tục tại } x = \pi.$$

A. $m = \frac{\pi}{2}$.

B. $m = -\frac{\pi}{2}$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều kiện của bài toán trở thành:

$$m = f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}{(x - \pi)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi} \left[\frac{\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \right]^2 \quad (*)$$

Đặt $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \pi$. Khi đó (*) trở thành: $m = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$.

Câu 9: Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x = 0, x = 1$.

B. mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

C. mọi điểm trừ $x = -1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3 = f(-1).$$

→ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x + 1) = 1 = f(0).$$

→ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Câu 10: Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{ khi } x = -1 \\ \frac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{ khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{ khi } x = 1 \end{cases}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

. Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ và $(1; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = f(-1) \longrightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 1$, ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \end{cases} \longrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ gián

đoạn tại $x = 1$.

Dạng 3. Hàm số liên tục trên một khoảng

1. Phương pháp

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trên (a, b) và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-3; 2)$.

B. $(-3; +\infty)$.

C. $(-\infty; 3)$.

D. $(2; 3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+5x+6}$ không liên tục tại $x = -2$; $x = -3$, suy ra $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2; 3)$.

Ví dụ 2: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{3x-1}{1-x^2}$.

B. $y = 3 + \tan x$.

C. $y = \frac{4+x}{2+\sqrt{1+x^2}}$.

D. $y = \frac{3+2x}{1+\sin x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có định lí: Mọi hàm sơ cấp đều liên tục trên từng khoảng xác định.

Do đó: Phương án A sai vì tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Phương án B sai vì $\tan x$ chỉ xác định khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Phương án D sai vì $1 + \sin x \neq 0$, nghĩa là hàm số chỉ xác định khi $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Phương án C đúng vì hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $(0; +\infty)$?

A. $y = \sqrt{x-1}$. B. $y = \frac{\sin x + 2}{x^2 - 1}$. C. $y = \frac{3-2x}{\sqrt{x+1}}$. D. $y = \sqrt{x^2 - x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ là $[1; +\infty)$ suy ra y không liên tục trên $(0; +\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x + 2}{x^2 - 1}$ là $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ suy ra y không liên tục trên $(0; +\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y = \frac{3-2x}{\sqrt{x+1}}$ là $(-1; +\infty)$. Suy ra y liên tục trên $(-1; +\infty)$. Mặt khác $(-1; +\infty) \supset (0; +\infty)$ nên y cũng liên tục trên $(0; +\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - x}$ là $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. Suy ra y không liên tục trên $(0; +\infty)$.

Ví dụ 4: Hàm số $y = \tan x \cdot \cot x$ liên tục trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(0; \pi)$. D. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Hàm số $y = \tan x \cdot \cot x$ xác định khi $\begin{cases} x \neq k_1\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi \end{cases}; k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Do đó trong bốn khoảng của đề bài thì chỉ có $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa điều kiện xác định của hàm số

$y = \tan x \cdot \cot x$. Nghĩa là nó liên tục trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{\pi}{4}\right)$. C. $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 0$ và $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, suy ra $f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2 x^2 & \text{với } x \leq \sqrt{2}, a \in \mathbb{R} \\ (2-a)x^2 & \text{với } x > \sqrt{2} \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

- A. 1 và 2. B. 1 và -1. C. -1 và 2. D. 1 và -2.

Hướng dẫn giải**ĐÁP ÁN D**

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^-} f(x) = 2a^2 = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^+} f(x) = 2(2-a) = f(\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow a^2 = 2 - a \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải**Chọn A**

. TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2); (2; +\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2). \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 4m^2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [(1-m)x] = 2(1-m) \longrightarrow (*) \Leftrightarrow 4m^2 = 2(1-m) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} m^2 x^2 = 4m^2 \end{cases}$$

Câu 2: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0; 4] \\ 1+m & \text{khi } x \in (4; 6] \end{cases}$ tục trên $[0; 6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m < 2$. B. $2 \leq m < 3$. C. $3 < m < 5$. D. $m \geq 5$.

Lời giải**Chọn A**

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0; 4)$ và $(4; 6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0; 6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 4, x = 0, x = 6$.

Tức là ta cần có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = f(6) \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \end{cases} \quad (*)$$

•
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ f(0) = \sqrt{0} = 0 \end{cases};$$

•
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (1+m) = 1+m \\ f(6) = 1+m \end{cases};$$

•
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (1+m) = 1+m; \\ f(4) = 1+m \end{cases}$$

Khi đó (*) trở thành $1+m=2 \Leftrightarrow m=1 < 2$.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liên tục tại $x=1$, tức là ta cần có

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1). \quad (*)$$

Ta có $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2-x & \text{khi } x < 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1 \end{cases} \longrightarrow (*)$ không thỏa mãn với

mọi $a \in \mathbb{R}$. Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu.

Câu 4: Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ (với a là tham số). Khẳng định

nào dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. B. a là một số vô tỉ. C. $a > 5$.

D. $a < 0$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên $[0;1]$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. (*)

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(x+1)(\sqrt{x}+1)] = 4 \end{cases} \xrightarrow{(*)} \Leftrightarrow a = 4.$$

Câu 5: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.
 B. $f(x)$ không liên tục trên $(0;2)$.
 C. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.
 D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(\sqrt{2-x}+1)] = -2 \end{cases} \xrightarrow{\quad} f(x) \text{ liên tục tại } x = 1.$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x > 3 \\ 1 - a^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

- A. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.
 B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
 C. $-\frac{4}{3}$.
 D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện bài toán trở thành: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$. (*)

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3) = 1 - 3a^2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x-3}-x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-2)(\sqrt{4x-3}+x)}{1-x} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1 - a^2x) = 1 - 3a^3. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} \Leftrightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\quad} a_{\min} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a^2x + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $a_{\max} = 3$.

B. $a_{\max} = 0$.

C. $a_{\max} = 1$.

D. $a_{\max} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta cần có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$. (*)

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 2a^2 - \frac{7}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} = \frac{1}{4} \longrightarrow (*) \Leftrightarrow a = \pm 1 \longrightarrow a_{\max} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(a^2 x + \frac{1}{4} \right) = 2a^2 - \frac{7}{4} \end{cases}$$

Câu 8: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
trên $(-\infty; 1)$.

B. $f(x)$ liên tục

C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos x) = 1 - \cos 0 = 0 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1 \end{cases}$$

Câu 9: Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x-1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là

sai?

A. Hàm số liên tục tại $x = -1$.

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty, -1); (1; +\infty)$.

C. Hàm số liên tục tại $x = 1$.

D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1, 1)$.

Lời giải

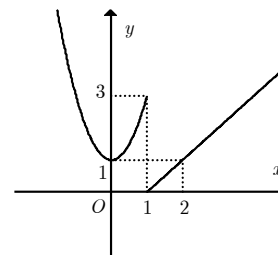
Chọn A

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$.

• Ta có $\begin{cases} f(-1) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x-1) = -2 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = -1.$

• Ta có $\begin{cases} f(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos\frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 1.$

Câu 10: Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



- A. $x = 0$.
- B. $x = 1$.
- C. $x = 2$.
- D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy tại điểm có hoành độ $x = 1$ đồ thị của hàm số bị "đứt" nên hàm số không liên tục tại đó.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

- A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.
- B. mọi điểm trừ $x = 0$.
- C. mọi điểm trừ $x = 1$.
- D. mọi điểm trừ $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x + 1} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

- A.** mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$. **B.** mọi điểm trừ $x = 1$.
C. mọi điểm trừ $x = 3$. **D.** mọi điểm trừ $x = 1$ và $x = 3$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$ và $(3; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 1. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) = 4 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 3. \end{cases}$$

Câu 13: Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ là:

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = h(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Ta có $\begin{cases} h(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x = 0.$

Ta có $\begin{cases} h(2) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 1) = 5 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 2.$

Câu 14: Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $S = -1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 1$.

D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. (*)

Ta có $\begin{cases} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (m^2x + 1) = m^2 + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2 \end{cases} \longrightarrow (*) \Leftrightarrow m^2 + 1 = 2$

$\Leftrightarrow m = \pm 1 \longrightarrow S = 0$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x \cos x & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ x^3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $x \in \mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 0$.

C. mọi điểm trừ $x = 1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0; x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0), (0; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x \cos x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{1+x} = 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 0.$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{2} \longrightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 = 1 \end{cases}$$

Dạng 4. Số nghiệm của phương trình trên một khoảng

1. Phương pháp

✓ Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm

- Tìm hai số a và b sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$
- Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a; b)$

✓ Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất k nghiệm

- Tìm k cặp số a_i, b_i sao cho các khoảng $(a_i; b_i)$ rời nhau và

$$f(a_i)f(b_i) < 0, i = 1, \dots, k$$

- Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_i \in (a_i; b_i)$.

✓ Khi phương trình $f(x) = 0$ có chứa tham số thì cần chọn a, b sao cho :

- $f(a), f(b)$ không còn chứa tham số hoặc chứa tham số nhưng dấu không đổi.
- Hoặc $f(a), f(b)$ còn chứa tham số nhưng tích $f(a) \cdot f(b)$ luôn âm.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $m(x-1)(x+2) + 2x + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = m(x-1)(x+2) + 2x + 1$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(1) = 3; f(-2) = -3 \Rightarrow f(1) \cdot f(-2) < 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi m .

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x \in [0; 2) \\ (x-4)^2 + 6 & x \in [2; 4] \end{cases}$. Phương trình $f(x) = 7$ có bao nhiêu nghiệm?

Hướng dẫn giải

- Xét phương trình: $x^2 + 4 = 7$ trên $[0; 2)$

$$\text{Ta có: } x^2 + 4 = 7 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ (nhận)} \\ x = -\sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

- Xét phương trình: $(x-4)^2 + 6 = 7$ trên $[2; 4]$

$$\text{Ta có: } (x-4)^2 + 6 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = 5 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình $f(x) = 7$ có đúng hai nghiệm.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.
- B. Phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- C. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$.
- D. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn B

(i) Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \longrightarrow$ A đúng.

(ii) Ta có $\begin{cases} f(-1) = -1 < 0 \\ f(-2) = 23 > 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm x_1 trên $(-2; 1)$, mà

$(-2; -1) \subset (-2; 0) \subset (-\infty; 1) \longrightarrow$ B sai và C đúng

(iii) Ta có $\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm x_2 thuộc $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. Kết hợp với (1) suy ra

$f(x) = 0$ có các nghiệm x_1, x_2 thỏa: $-3 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < \frac{1}{2} \longrightarrow$ D đúng.

Câu 2: Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.
- B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.
- C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.
- D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x + 1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

(i) $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \longrightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm x_1 thuộc $(-1; 0)$.

(ii) $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \longrightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm x_2 thuộc $(0; 1)$.

$$(iii) \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 15 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0 \longrightarrow f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm } x_3 \text{ thuộc } (1;2).$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ đã cho có các nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa

$$-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$.

Ta có

- $\begin{cases} f(-2) = -3 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(-1) < 0 \longrightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-2; -1).$
- $\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \longrightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-1; 0).$
- $\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(2) \cdot f(0) < 0 \longrightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (0; 2).$

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2; 2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x) = 0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Cách CASIO. (i) Chọn MODE 7 (chức năng TABLE) và nhập: $F(X) = X^3 - 3X - 1$.

(ii) Ấn “=” và tiếp tục nhập: **Start** $\leftrightarrow$ -5 (có thể chọn số nhỏ hơn).

End $\leftrightarrow$ 5 (có thể chọn số lớn hơn).

Step $\leftrightarrow$ 1 (có thể nhỏ hơn, ví dụ $\frac{1}{2}$).

(iii) Ấn “=” ta được bảng sau:

		Math
X	F(X)	
-2	-3	
-1	1	
0	-1	

Bên cột X ta cần chọn hai giá trị a và b ($a < b$) sao cho tương ứng bên cột F(X) nhận các giá trị trái dấu, khi đó phương trình có nghiệm $(a; b)$. Có bao nhiêu cặp số a, b như thế sao cho khác khoảng $(a; b)$ rời nhau thì phương trình $f(x) = 0$ có bấy nhiêu nghiệm.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

- A. Vô nghiệm. B. Có ít nhất một nghiệm. C. Có đúng một nghiệm.
D. Có đúng hai nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)-5=0$. Đặt $g(x)=f(x)-5$. Khi đó

$$\begin{cases} g(-1)=f(-1)-5=2-5=-3 \\ g(4)=f(4)-5=7-5=2 \end{cases} \Rightarrow g(-1)g(4)<0.$$

Vậy phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;4)$ hay phương trình $f(x)=5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;4)$.

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$?

- A. 19. B. 18. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

• Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1 < -1 < x_2 < x_3$. Khi đó $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có $f(-1)=(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)>0$ (do $x_1 < -1 < x_2 < x_3$).

Mà $f(-1)=-m-5$ nên suy ra $-m-5>0 \Leftrightarrow m<-5$.

• Thử lại: Với $m<-5$, ta có

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ nên tồn tại } a < -1 \text{ sao cho } f(a) < 0. \quad (1)$$

$$\blacksquare \text{ Do } m < -5 \text{ nên } f(-1) = -m - 5 > 0. \quad (2)$$

$$\blacksquare f(0) = m - 3 < 0. \quad (3)$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ nên tồn tại } b > 0 \text{ sao cho } f(b) > 0. \quad (4)$$

Từ (1) và (2), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; -1)$; Từ (2) và (3), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$; Từ (3) và (4), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy khi $m < -5$ thỏa mãn $\xrightarrow[m \in (-10; 10)]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-9; -8; -7; -6\}$.