

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN PHỨC HỢP (VDC)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Thể tích khối đa diện

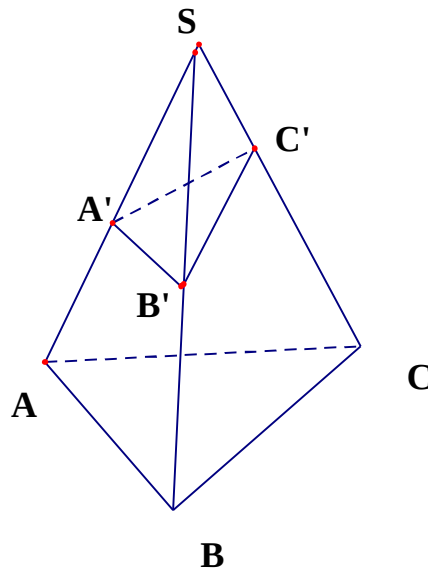
- Thể tích khối chóp : $V = \frac{1}{3} S_d . h$

- Thể tích khối lăng trụ : $V = S_d . h$.

- Thể tích khối lập phương : $V = a^3$, thể tích khối hộp chữ nhật : $V = a.b.c$.

2. Thể tích khối đa diện được phân chia :

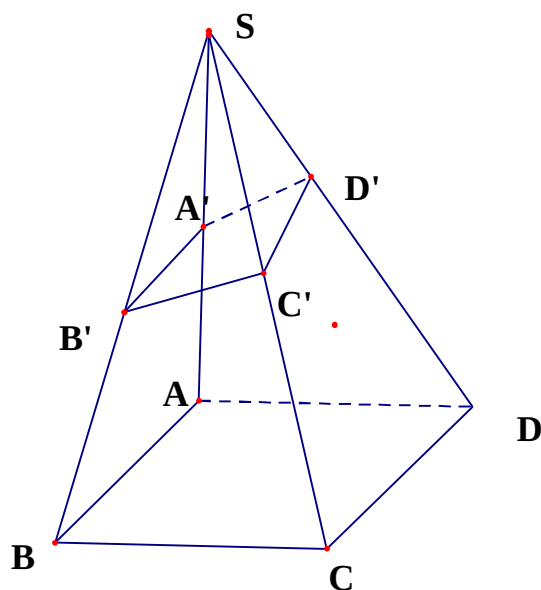
+) Khối chóp tam giác : $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \frac{SB}{SB'} \frac{SC}{SC'}$



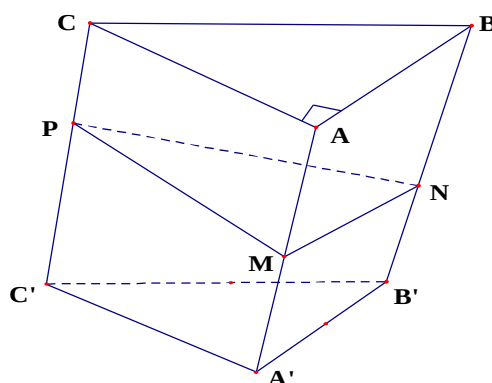
+) Khối chóp tứ giác có đáy là hình hành :

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{abcd}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right), a = \frac{SA'}{SA}, b = \frac{SB'}{SB}, c = \frac{SC'}{SC}, d = \frac{SD'}{SD}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$

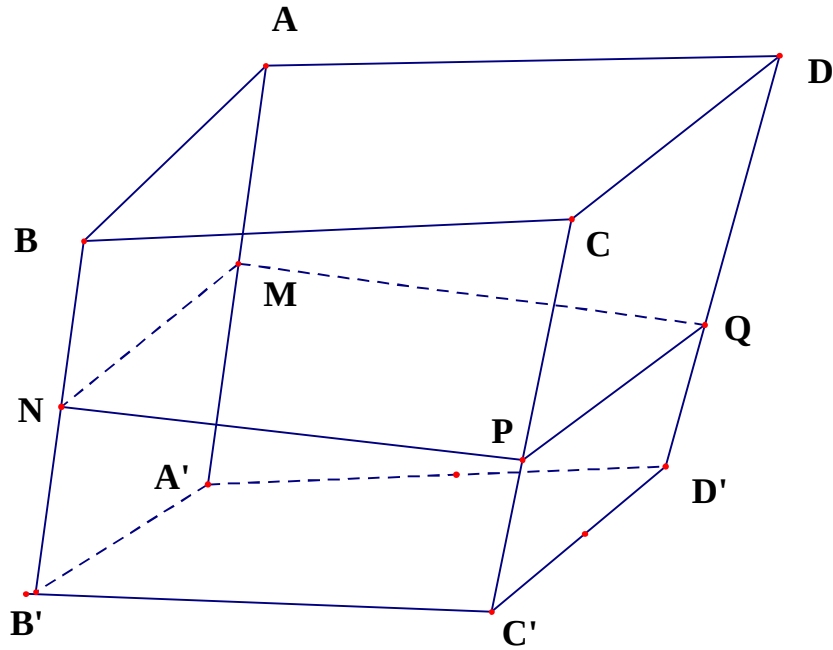


+) Thể tích khối lăng trụ tam giác : $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC,A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} \right)$

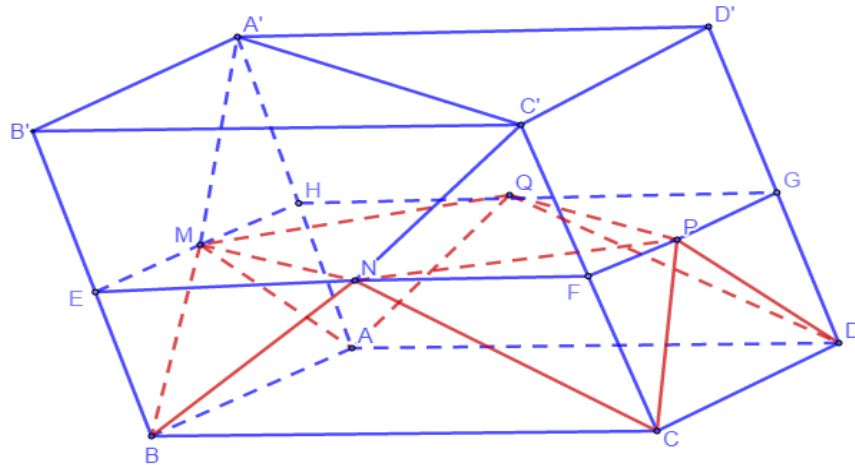


+) Khối hộp : $\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD,A'B'C'D'}} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{DQ}{DD'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} \right)$

$$\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$$



Chọn B



Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của BB', CC', DD' và AA' .

Ta có:

$$(EMN) \parallel (A'B'C') \Rightarrow \frac{V_{B.EMN}}{V_{B.A'B'C'}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow V_{B.EMN} = \frac{1}{8} V_{B.A'B'C'} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{24} V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

Hoàn toàn tương tự,

$$V_{C.NFP} = V_{D.GPQ} = V_{A.MHQ} = \frac{1}{48} V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

Thể tích khối đa diện cần tìm sẽ bằng thể tích khối $EFGH.ABCD$ trừ đi thể tích 4 khối nhỏ bằng nhau là $V_{B.EMN}; V_{C.NFP}; V_{D.GPQ}; V_{A.MHQ}$.

$$\text{Suy ra } V_{MNPQABCD} = \frac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{2} - \frac{4}{48} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{5}{12} V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

$$\text{Mà } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 8.9 = 72 \text{ nên } V_{MNPQABCD} = \frac{5}{12} \cdot 72 = 30 \text{ (đvtt)}.$$

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích đáy bằng 9, chiều cao bằng 3. Gọi Q, M, N, P, I là những điểm thỏa mãn $\overline{AQ} = \frac{1}{3} \overline{AB'}$, $\overline{DM} = \frac{1}{3} \overline{DA'}$, $\overline{CN} = \frac{1}{3} \overline{CD'}$, $\overline{BP} = \frac{1}{3} \overline{BC'}$, $\overline{BI} = \frac{1}{3} \overline{B'D'}$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm Q, M, N, P, I bằng

A. $\frac{27}{10}$.

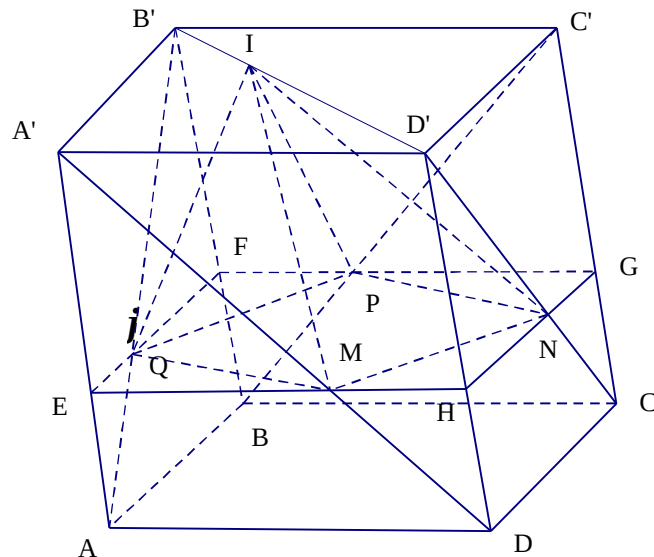
B. $\frac{10}{27}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng $(MNPQ)$ cắt hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo thiết diện là hình bình hành $EFGH$ và ta có $d((A'B'C'D'); (EFGH)) = 2d((EFGH); (ABCD))$

Ta có $V_{A'B'C'D'.EFGH} = \frac{2}{3}V_0$ và

$$S_{\Delta EQM} = \frac{1}{2}EQ.EM.\sin E = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{3} \cdot \frac{2AD}{3} \sin A = \frac{2}{9}S_{ABD} = \frac{1}{9}S_{ABCD} \Rightarrow S_{MNPQ} = 1 - 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9}S_{ABCD}.$$

$$V_{I.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}h \cdot \frac{5}{9}S_{ABCD} = \frac{10}{81}V_0 = \frac{10}{3}.$$

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC . Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh A và V_2 là thể tích của phần còn lại. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

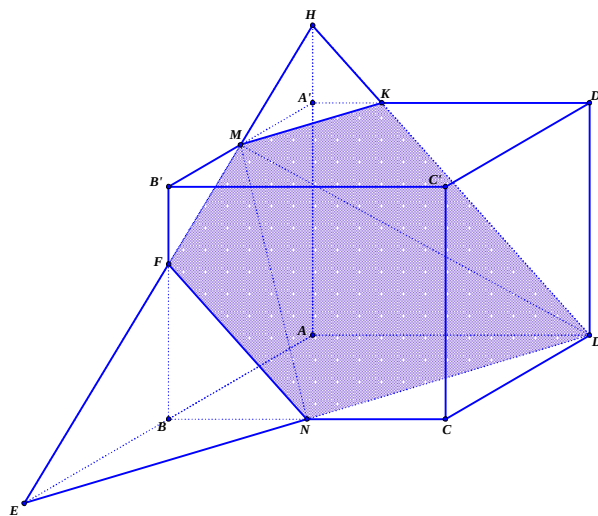
B. $\frac{37}{48}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{55}{89}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $E = DN \cap AB$, $F = EM \cap BB'$, $H = EM \cap AA'$, $K = A'D' \cap HD$. Khi đó (DMN) cắt khối lập phương theo thiết diện là ngũ giác $DNFMK$.

Ta có: $\frac{BN}{AD} = \frac{EF}{EH} = \frac{BF}{AH} = \frac{EB}{EA} = \frac{1}{2} \Rightarrow BN = \frac{1}{2}$ và $EB = AB = 1$

Mà M là trung điểm của FH nên $\frac{BF}{FB'} = \frac{EF}{FM} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{BF}{BB'} = \frac{2}{3}$ hay $BF = \frac{2}{3}$.

Vì $A'H = B'F$ nên $\frac{HA'}{AA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow HA' = \frac{1}{3}$; $\frac{HA'}{HA} = \frac{A'K}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow A'K = \frac{1}{4}$.

Thể tích khối tứ diện $HAFD$ là: $V_{H.AFD} = \frac{1}{6} \cdot AD \cdot AE \cdot AH = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$.

Thể tích $V_1 = V_{H.AFD} - (V_{E.BFN} + V_{H.A'MK}) = \frac{4}{9} - \frac{1}{6} \left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{55}{144} \Rightarrow V_2 = \frac{89}{144}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{55}{89}$.

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P, Q, R và S lần lượt là tâm của các mặt $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$, $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm M, N, P, Q, R và S bằng

A. 3.

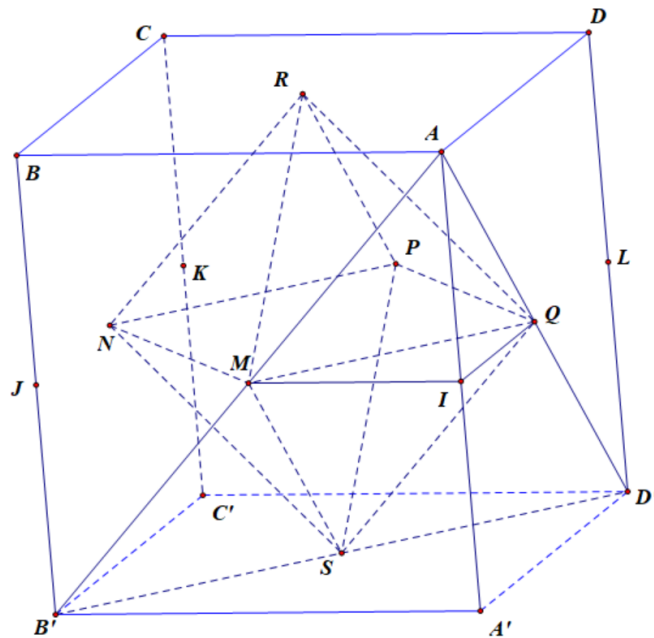
B. 24.

C. 9.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm các cạnh AA', BB', CC', DD' .

Do tam giác MIQ đồng dạng với tam giác $B'A'D'$ theo tỉ số $\frac{1}{2}$ nên

$$S_{MIQ} = \frac{1}{4} S_{B'A'D'} = \frac{1}{8} S_{A'B'C'D'} = \frac{9}{8}. \text{ Suy ra } S_{MNPQ} = S_{IJKL} - 4S_{MIQ} = 9 - 4 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{2}.$$

Gọi h_1, h_2 lần lượt là chiều cao của hai hình chóp $R.MNPQ, S.MNPQ \Rightarrow h_1 + h_2 = 8$.

Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm M, N, P, Q, R và S bằng

$$V = \frac{1}{3} (h_1 + h_2) S_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{9}{2} = 3.$$

Phương án nhiều B: nhằm $S_{MNPQ} = S_{IJKL} = 9$.

Phương án nhiều C: sử dụng công thức tìm thể tích hình chóp quen chia 3.

Phương án nhiều D: chỉ tính $V_{R.MNPQ}$, không tính $V_{S.MNPQ}$.

Câu 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k \cdot \overrightarrow{BB'} (k > 1)$, $\overrightarrow{CN} = l \cdot \overrightarrow{CC'} (l < 0)$. Thể tích của tứ diện $AA'MN$ bằng

A. $\frac{l+k-1}{72}$.

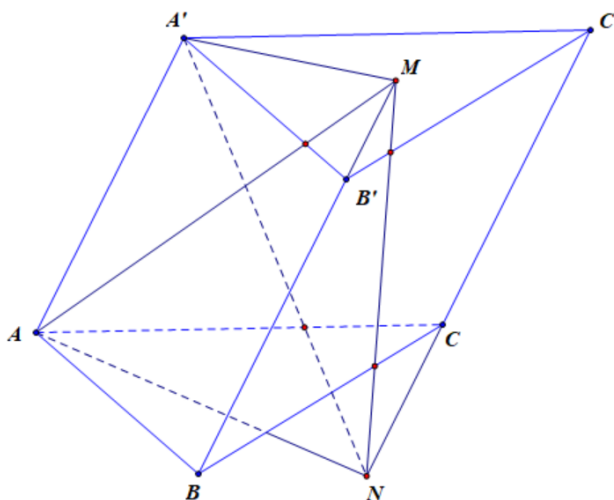
B. 24.

C. 72.

D. $\frac{l+k-1}{210}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết $\overrightarrow{BM} = k.\overrightarrow{BB'}$ ($k > 1$), $\overrightarrow{CN} = l.\overrightarrow{CC'}$ ($l < 0$) suy ra $M \in BB'$, $N \in CC'$ (như hình vẽ)
Do $BM \parallel (ACC'A') \Rightarrow d(M, (ANA')) = d(B, (ANA'))$.

Ta có $S_{\triangle ANA'} = S_{\triangle ACA'}$

Có

$$V_{AA'MN} = \frac{1}{3} d(M, (ANA')) . S_{\triangle ANA'} = \frac{1}{3} d(B, (ANA')) . S_{\triangle ACA'} = \frac{1}{3} d(B, (ACA')) . S_{\triangle ACA'} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} . 9.8 = 24.$$

Phương án nhiễu A: Học sinh không biết cách tính, chọn lụi và nghĩ rằng đáp số phải có k, l .

Phương án nhiễu C: sử dụng công thức tìm thể tích hình chóp quên chia 3.

Phương án nhiễu D: Học sinh không biết cách tính, chọn lụi và nghĩ rằng đáp số phải có k, l , nhưng vì hình tứ diện nên sẽ chia 3.

Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $AA' = 3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC . Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A , (H') là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

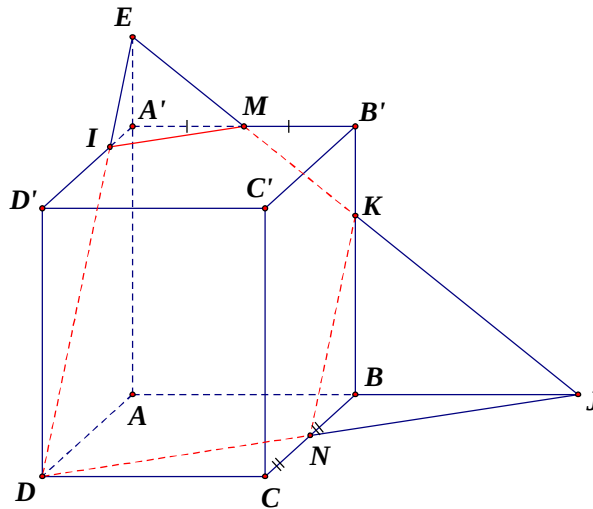
A. $\frac{37}{48}$.

B. $\frac{55}{41}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải



Chọn B

Gọi $AB \cap DN = J$, $BB' \cap MJ = K$, $AA' \cap JM = E$ và $ED \cap A'D = I$.
Suy ra thiết diện là ngũ giác $DNKMI$.

Dễ thấy $\begin{cases} BJ = CD = a \\ B'K = EA' \end{cases}$.

$$\text{Ta có: } \frac{BK}{B'K} = \frac{B'M}{BJ} = \frac{1}{2} \Rightarrow BK = 2B'K \Rightarrow \begin{cases} BK = 2a \\ B'K = EA' = a \end{cases}$$

$$\frac{IA'}{ID'} = \frac{EA'}{AA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow ID' = 3IA' \Rightarrow \begin{cases} ID' = \frac{3}{4}a \\ IA' = \frac{1}{4}a \end{cases}$$

$$V_{(H)} = V_{EADJ} - V_{EA'IM} - V_{KBNJ} = \frac{1}{3}EA.S_{\Delta ADJ} - \frac{1}{3}EA'.S_{\Delta IA'M} - \frac{1}{3}KB.S_{\Delta NBJ}$$

$$= \frac{1}{3}4a.\frac{1}{2}a.2a - \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}a.\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}a.a = \frac{55}{48}a^3$$

$$V_{(H')} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{(H)} = a^2.2a - \frac{55}{48}a^3 = \frac{41}{48}a^3$$

Suy ra: $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{55}{41}$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'C'$.

A. $a^3\sqrt{3}.$

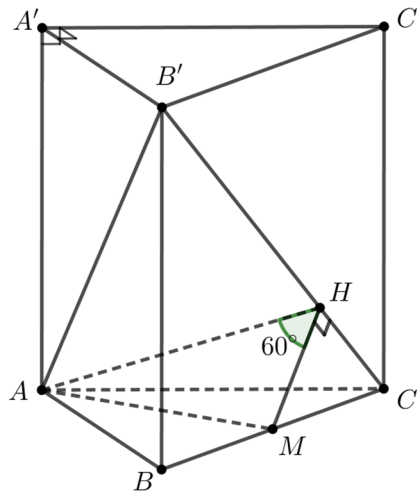
B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Khối đa diện $AB'CA'C'$ là hình chóp $B'.ACC'A'$ có $A'B' \perp (ACC'A')$.

Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$ ta suy ra $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC , suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'C \quad (1).$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên $B'C$, suy ra $MH \perp B'C \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta suy ra $B'C \perp (AMH)$. Từ đó suy ra góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa AH và MH . Mà tam giác AMH vuông tại H nên $\widehat{AHM} = 60^\circ$.

$$\Rightarrow MH = AM \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tam giác $B'BC$ đồng dạng với tam giác MHC nên suy ra $\sin \widehat{HCM} = \frac{MH}{MC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \widehat{MCH} = \frac{1}{1 - \sin^2 \widehat{MCH}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan \widehat{MCH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow BB' = BC \cdot \tan \widehat{MCH} = a\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{AB'CA'C'} = V_{B'.ACC'A'} = \frac{1}{3} B'A' \cdot AC \cdot AA' = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}.$$

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng a và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi I, J lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', CDD'C'$. Biết $AI = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $AA' = 2a$ và góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A'), (A'B'C'D')$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối tứ diện $AOIJ$.

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{64}.$

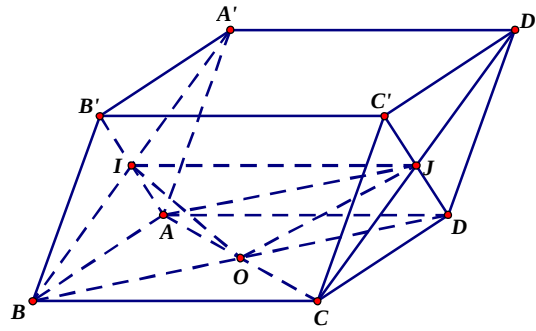
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{48}.$

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}.$

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{192}.$

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } AI^2 = \frac{AA'^2 + AB^2}{2} - \frac{A'B^2}{4} \Rightarrow A'B^2 = 2(AA'^2 + AB^2) - 4AI^2 = 3a^2 \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$$

$$\text{Do } A'B^2 + AB^2 = AA'^2 \text{ nên tam giác } A'AB \text{ vuông tại B} \Rightarrow S_{A'AB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều cạnh } a \text{ nên } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Theo đề góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$, $(A'B'C'D')$ bằng 60° , nên suy ra

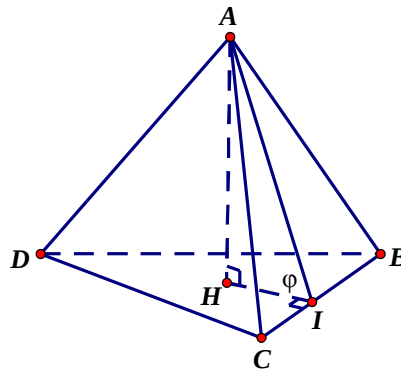
$$V_{A'ABC} = \frac{2S_{A'AB} \cdot S_{ABC} \sin 60^\circ}{3AB} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

$$V_{AOIJ} = \frac{1}{3}d(O; (IAJ)) \cdot S_{IAJ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d(B; (B'AD)) \cdot \frac{1}{2}S_{B'AD} = \frac{1}{4}V_{B'ABD} = \frac{1}{4}V_{A'ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}$$

Bổ sung: Công thức tính nhanh thể tích tứ diện theo góc giữa hai mặt phẳng

Cho tứ diện ABCD có diện tích tam giác ABC bằng S_1 , diện tích tam giác BCD là S_2 và góc

giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) là φ . Khi đó ta có: $V_{ABCD} = \frac{2S_1S_2 \cdot \sin \varphi}{3BC}$



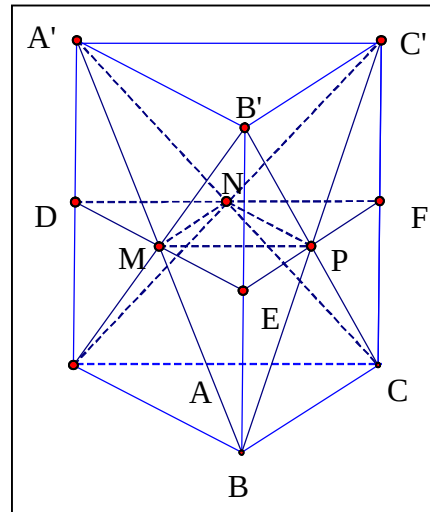
Chứng minh: Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD), kẻ $HI \perp BC$ tại I thì $AI \perp BC$ và $((ABC); (DBC)) = (AI; HI) = \widehat{AIH} = \varphi$; $AH = AI \sin \varphi$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH \cdot S_{DBC} = \frac{1}{3}AI \sin \varphi \cdot S_2 = \frac{1}{3} \frac{2S_{ABC}}{BC} \cdot \sin \varphi \cdot S_2 = \frac{2S_1S_2 \sin \varphi}{3BC}$$

Câu 8. (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 49) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A', ACC'A', BCC'B'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $9\sqrt{3}$.B. $10\sqrt{3}$.C. $7\sqrt{3}$.D. $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi DEF là thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (MNP) .

Dễ chứng minh được $(DEF) // (ABC)$ và D, E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn

thẳng AA', BB', CC' suy ra $V_{ABC.DEF} = \frac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{3}$.

Ta có $V_{ABCPNM} = V_{ABC.DEF} - V_{ADMN} - V_{BMPE} - V_{CPMF}$.

Mặt khác $V_{ADMN} = V_{BMPE} = V_{CPMF} = \frac{1}{12} V_{ABC.DEF} \Rightarrow V_{ABCPNM} = \frac{3}{4} V_{ABC.DEF} = 9\sqrt{3}$.

Câu 9. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' và G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (MNG) cắt BC, CA lần lượt tại E, F . Thể tích khối đa diện có các đỉnh là các điểm A, M, E, B, N, F bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

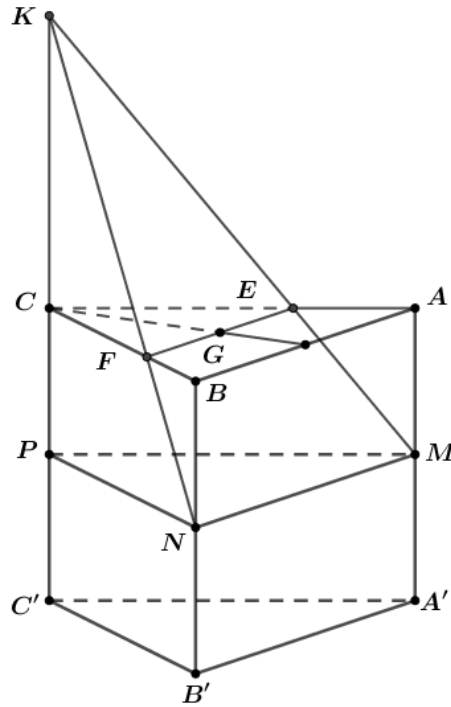
B. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{27}$.

D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi P là trung điểm CC' và K là điểm đồng quy của ba đường thẳng CC' , ME , NF , do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\frac{CK}{NB} = \frac{CF}{FB} = 2 \Rightarrow CK = 2NB = 2a$.

Theo giả thiết $V_{ABC.A'B'C'} = 2a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{ABC.MNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Khối chóp $K.MNP$ có thể tích là $V_{K.MNP} = \frac{1}{3} \cdot KP \cdot S_{MNP} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} = V_{ABC.MNP}$.

Vậy thể tích V của khối đa diện có các đỉnh là các điểm A, M, E, B, N, F bằng thể tích khối

chóp $K.CEF$ và $V = V_{K.CEF} = \frac{1}{3} \cdot KC \cdot S_{CEF} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{\left(\frac{2a}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{27}$.

Câu 10. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $AA' = A'D$, hình chiếu vuông góc của A' thuộc hình vuông $ABCD$, khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và AB' bằng $\frac{6a}{\sqrt{10}}$. Tính thể tích khối chóp $A'MNP$ trong đó M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh CD, CC', DD' .

A. $12a^3$.

B. a^3 .

C. $2a^3$.

D. $3a^3$.

Lời giải

Chọn B

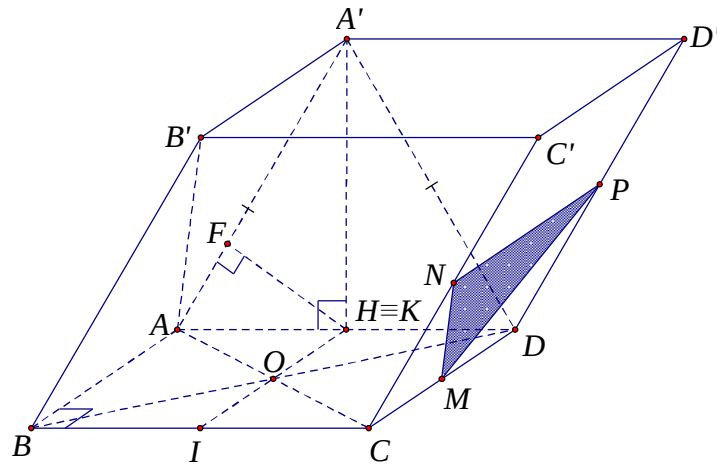
*) Gọi H là hình chiếu của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$; I, K lần lượt là trung điểm của AD, BC và O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $A'H \perp AD, A'K \perp AD$ (Do $A'H \perp (ABCD)$ và $A'A = A'D$) nên $HK \perp AD$

Mà $OK \perp AD$ nên suy ra ba điểm H, O, K thẳng hàng và theo giả thiết ta được H thuộc đoạn IK .

Theo giả thiết H thuộc hình vuông $ABCD$ nên H trùng K hoặc H trùng I .

Trường hợp 1: H trùng với K .



*) Kẻ $HF \perp AA'$, với F thuộc đoạn $A'A$.

Dễ thấy: $HA = \frac{BC}{2} = a$ và $AB \perp (A'AH) \Rightarrow AB \perp HF$ nên

$$HF \perp (ABB'A') \Rightarrow d(H, (ABB'A')) = HF.$$

Ta có $d(CD, AB') = d(CD, (ABB'A'))$ (do $CD \parallel (ABB'A')$)

$$= d(C, (ABB'A')) = \frac{DA}{DH} \cdot d(H, (ABB'A')) = 2HF. \text{ Nên } HF = \frac{3a}{\sqrt{10}}.$$

*) Xét tam giác $AA'H$ có $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{A'H^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{HF^2} - \frac{1}{AH^2} = \frac{10}{9a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{9a^2} \Rightarrow A'H = 3a.$$

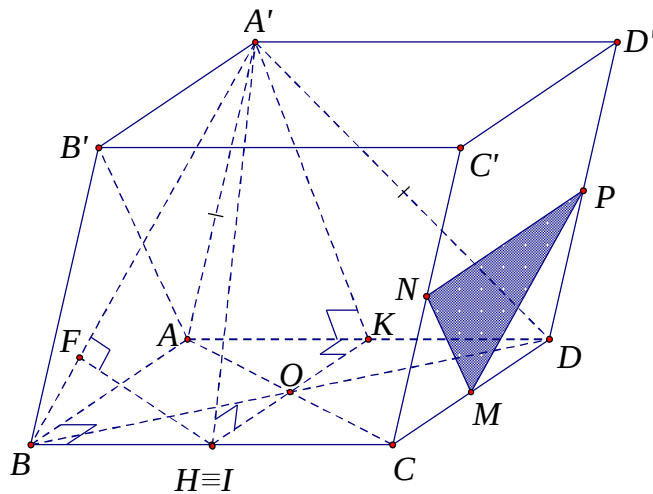
*) Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot S_{ABCD} = 3a \cdot (2a)^2 = 12a^3$

Lại có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = d(A', (CDD'C')) \cdot S_{CDD'C'}$

$$= 4 \cdot d(A', (CDD'C')) \cdot S_{MNP} \text{ (do } S_{CDD'C'} = 4S_{MNP}) = 12 \cdot \frac{1}{3} d(A', (CDD'C')) \cdot S_{MNP} = 12V_{A'MNP}.$$

Từ đó suy ra $12a^3 = 12V_{A'MNP} \Rightarrow V_{A'MNP} = a^3$.

Trường hợp 2: $H \equiv I$, tương tự trường hợp 1, kết quả $V_{A'MNP} = a^3$.



Câu 11. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a , O là tâm của đáy. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua S , song song với BD và cách A một khoảng bằng $\frac{3a\sqrt{10}}{10}$. Mặt phẳng (P)

chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V_1 và khối đa diện còn lại có thể tích V_2 . Biết mặt phẳng (P) cắt đoạn OC tại I . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

bằng:

A. 5.

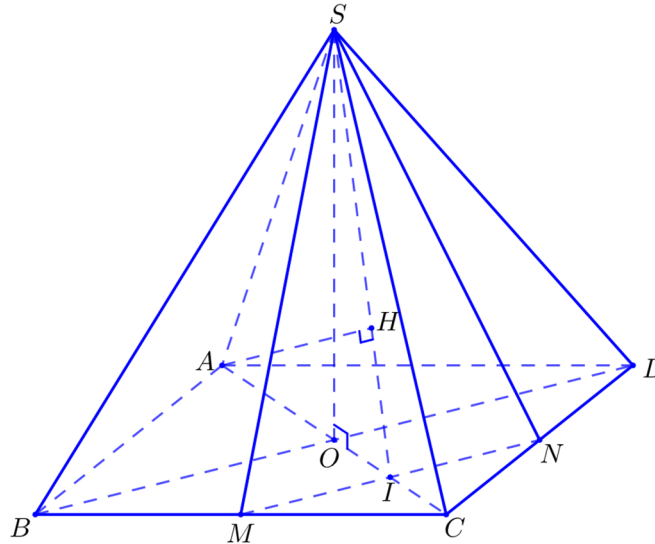
B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn C



Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$.

Đáy $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$, từ đây suy ra $BD \perp (SAC)$.

Mà $(P) \parallel BD \Rightarrow (P) \perp (SAC)$.

Mặt khác $(P) \cap AC = I$, suy ra $\Rightarrow (P) \cap (SAC) = SI$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SI

$$\Rightarrow AH \perp (P) \Rightarrow AH = d(A, (P)) = \frac{3a\sqrt{10}}{10}.$$

Ta có $AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (áp dụng Pi-ta-go cho tam giác vuông SOA).

$$\text{Đặt } AI = x, \left(AO < AI < AC \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} < x < a\sqrt{2} \right) \Rightarrow OI = x - \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow SI = \sqrt{a^2 + x^2 - ax\sqrt{2}} \text{ (áp dụng Pi-ta-go cho tam giác vuông } SOI \text{)}.$$

Dễ thấy các tam giác vuông SOI và AHI đồng dạng (chung góc $\widehat{OIH}$).

$$\Rightarrow \frac{AH}{SO} = \frac{AI}{SI} \Rightarrow AI = \frac{AH \cdot SI}{SO} \Rightarrow x = \frac{\frac{3a\sqrt{10}}{10} \cdot \sqrt{a^2 + x^2 - ax\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow 4x^2 - 9a\sqrt{2}x + 9a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \text{ (do } \frac{a\sqrt{2}}{2} < x < a\sqrt{2} \text{)}.$$

$$\Rightarrow AI = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CI = AC - AI = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \text{ Dễ thấy } \frac{CI}{CO} = \frac{1}{2}.$$

Từ I kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC , CD lần lượt tại M và N .

$$\Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CD} = \frac{MN}{BD} = \frac{CI}{CO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta CMN \text{ đồng dạng với } \Delta CBD \text{ theo tỉ số } \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{CMN}}{S_{CBD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{CMN} = \frac{1}{4} S_{CBD} = \frac{1}{4} \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{1}{8} S_{ABCD}.$$

$$\text{Khi đó } V_2 = V_{S.CMN} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{CMN} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = V_{S.ABCD} - V_2 = \frac{7}{8} V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = 7.$$

Câu 12. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi E , F lần lượt là trung điểm AA' và BB' ; đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E' , đường thẳng CF cắt đường thẳng $C'B'$ tại F' . Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

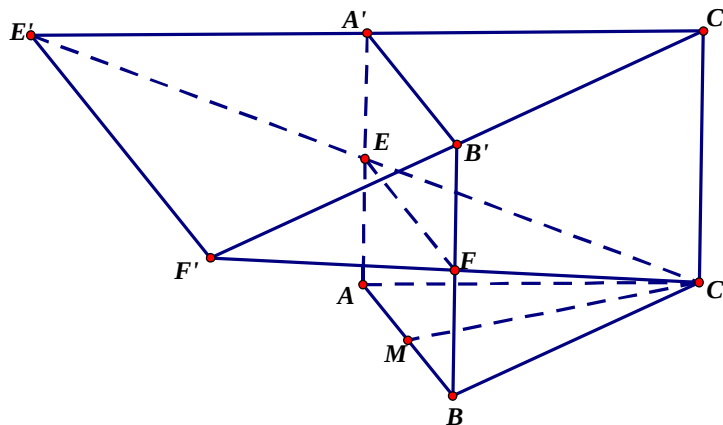
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow CM \perp (ABB'A')$ và $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó, thể tích khối chóp $C.ABFE$ là

$$V_{C.ABFE} = \frac{1}{3} S_{C.ABFE} \cdot CH = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Thể tích khối đa diện $A'B'C'E'F'$ là

$$V_{A'B'C'E'F'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABFE} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Do A' là trung điểm $C'E'$ nên $d(E', (BCC'B')) = 2d(A', (BCC'B')) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$$S_{CC'F'} = S_{F'B'F} + S_{FB'C'C} = S_{FBC} + S_{FB'C'C} = S_{BCC'B'} = 1.$$

Thể tích khối chóp $E'.CC'F'$ là

$$V_{E'.CC'F'} = \frac{1}{3} S_{CC'F'} \cdot d(E', (BCC'B')) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng

$$V_{EFA'B'E'F'} = V_{E'.CC'F'} - V_{A'B'C'EFC} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 6, diện tích đáy bằng 8. Gọi M là trung điểm AB . Mặt phẳng $(A'C'M)$ cắt BC tại N . Tính thể tích của khối đa diện có các đỉnh là D, M, N, A', C' .

A. 10.

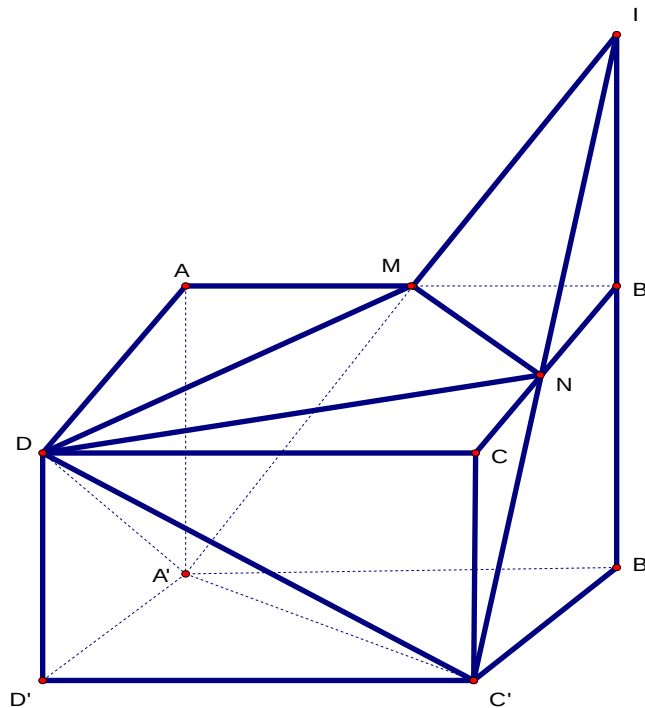
B. 18.

C. 12.

D. 24.

Lời giải

Chọn B



Trong $mp(ABB'A')$ gọi $I = BB' \cap A'M$

Trong $mp(BCC'B')$ gọi $N = BC \cap IC'$

Gọi S, h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

Ta có $V_{I.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S \cdot 2h = \frac{1}{3} S \cdot h$ và $V_{I.BMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot S \cdot h = \frac{1}{24} S \cdot h$

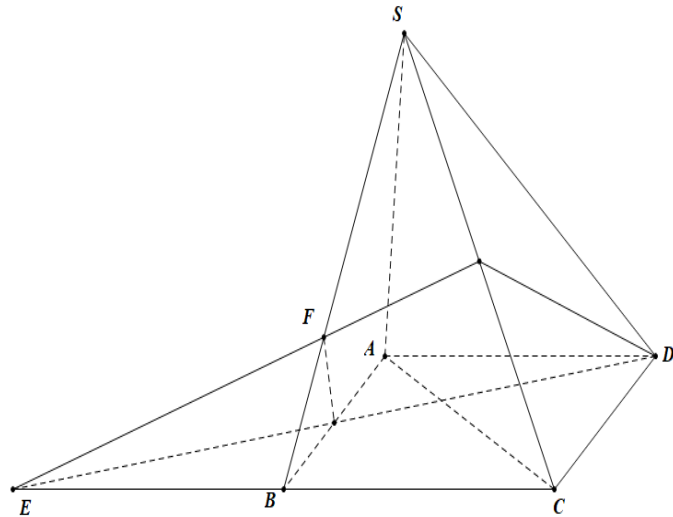
$$\text{Suy ra} \Rightarrow V_1 = V_{BMN.B'A'C'} = \frac{1}{3}Sh - \frac{1}{24}Sh = \frac{7}{24}Sh = \frac{7}{24}V$$

$$\text{Ta có } V_2 = V_{D.D'A'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S.h = \frac{1}{6} S.h = \frac{1}{6} V ;$$

$$V_3 = V_{A'.ADM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot S.h = \frac{1}{12} V; V_4 = V_{C'.DCN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot S.h = \frac{1}{12} V$$

$$\text{Do đó } V_{DMNC'A'} = V - V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = V - \frac{7}{24}V - \frac{1}{6}V - \frac{1}{12}V - \frac{1}{12}V = \frac{9}{24}V = 18$$

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E là điểm đối xứng với C qua B và F là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{SF} = -2\overrightarrow{BF}$. Mặt phẳng (DEF) chia khối chóp $S.ABCD$ thành 2 khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1 , khối đa diện còn lại có thể tích V_2 (tham khảo hình vẽ). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{3}{5}$.

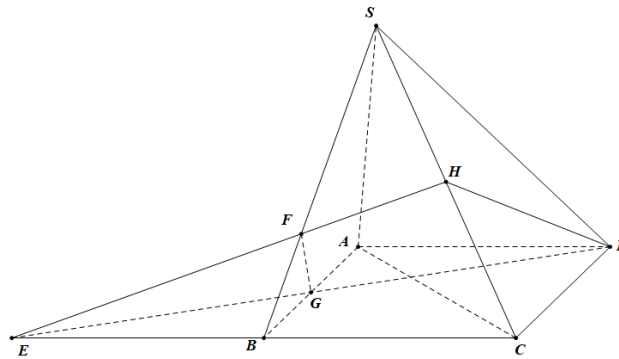
B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{7}{5}$.

D. $\frac{12}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là giao điểm của ED và AB , H là giao điểm của EF và SC .

Vì B là trung điểm của EC và $\overrightarrow{SF} = -2\overrightarrow{BF}$ nên F là trọng tâm $\triangle SEC$ suy ra H là trung điểm của SC , từ đó suy ra $V_{A.HCD} = \frac{1}{2}V_{A.SCD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

Ta có $EC = 2AD$ và $EC \parallel AD$ do đó $V_{E.HCD} = 2V_{A.HCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

$$\frac{V_{E.FBG}}{V_{E.HCD}} = \frac{EB}{EC} \cdot \frac{EG}{ED} \cdot \frac{EF}{EH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{E.FBG} = \frac{1}{6}V_{E.HCD} = \frac{1}{12}V_{S.ABCD}.$$

$$V_2 = V_{E.HCD} - V_{E.FBG} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} - \frac{1}{12}V_{S.ABCD} = \frac{5}{12}V_{S.ABCD}.$$

$$V_1 = V_{S.ABCD} - \frac{5}{12}V_{S.ABCD} = \frac{7}{12}V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$$

Câu 15. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a , chiều cao bằng a , góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi O là giao điểm của CA' và AC' . Gọi các điểm M, N, P, Q, R, S lần lượt đối xứng với O qua các mặt phẳng $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$, $(CDD'C')$, $(ABB'A')$, $(BCC'B')$, $(ADD'A')$. Thể tích khối đa diện lồi tạo bởi các đỉnh M, N, P, Q, R, S bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

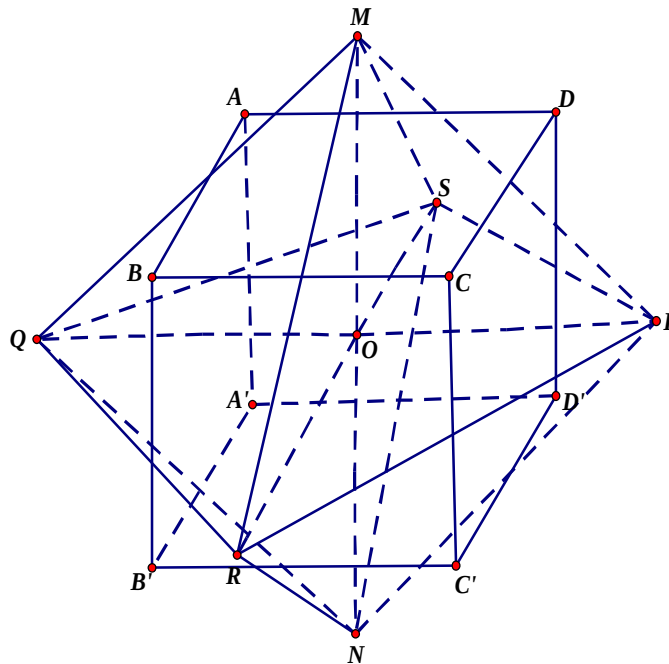
B. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

D. $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $PQ \perp (ABB'A')$, $RS \perp (BCB'C')$

$$\Rightarrow (PQ, RS) = ((ABB'A'), (BCC'B')) = (BA, BC) = 60^\circ.$$

$$\text{Lại có } PQ = 4.d(O, (ABA'B')) = 4 \cdot \frac{1}{2}.d(D, (ABA'B')) = 2.AD.\sin 60^\circ = 2.a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Tương tự } RS = 4.d(O, (ADA'D')) = 4 \cdot \frac{1}{2}.d(B, (ADA'D')) = 2.AB.\sin 60^\circ = 2.a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow S_{QRPS} = \frac{1}{2}.QP.RS.\sin(QP, RS) = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}.a^2}{4}.$$

Mặt khác $MN \parallel CC'$ mà $CC' \perp CB$; $CC' \perp CD$; $MN \perp RS \Rightarrow MN \perp (QRPS)$

Để thấy $(QRPS)$ là mặt phẳng đối xứng của hình bát diện $QRPSMN$

$$\Rightarrow V_{QRPSMN} = 2.V_{M.QRPS} = 2 \cdot \frac{1}{3}.MO.S_{QRPS} = 2 \cdot \frac{1}{3}.a \cdot \frac{3\sqrt{3}.a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}.$$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M là trung điểm của SA , E, F là điểm thỏa mãn $\overline{AE} = 2\overline{AB}$, $\overline{AF} = 2\overline{AC}$. Mặt phẳng (MEF) cắt SB, SC lần lượt tại N, P . Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N và P bằng

A. $\frac{9}{8}$.

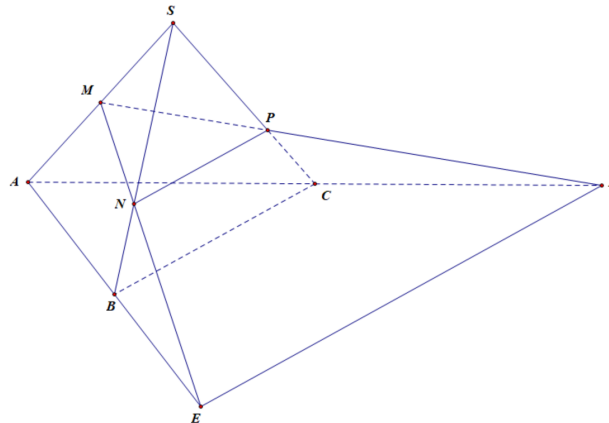
B. $\frac{56}{5}$.

C. $\frac{56}{3}$.

D. 18.

Lời giải

Chọn C



Do $\overline{AE} = 2\overline{AB}$, $\overline{AF} = 2\overline{AC}$ suy ra B, C lần lượt là trung điểm AE, AF nên $BC \parallel EF$.

Có $(MEF) \supset EF, (SBC) \supset BC$ suy ra $(MEF) \cap (SBC) = NP$, $N = SB \cap EM$, $P = SC \cap FM$ và $NP \parallel BC \parallel EF$.

Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 8 = 24$.

Do N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác SAE, SAF suy ra $\frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Có } \Rightarrow \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{2}{9} \cdot 24 = \frac{16}{3}.$$

Suy ra Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N và P bằng $24 - \frac{16}{3} = \frac{56}{3}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với cạnh $AD = 2CD$. Biết hai mặt phẳng $(SAC), (SBD)$ cùng vuông góc với mặt đáy và đoạn $BD = 6$; góc giữa (SCD) và mặt đáy bằng 60° . Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Thể tích khối đa diện $ABCDMN$ bằng

A. $\frac{128\sqrt{15}}{15}$.

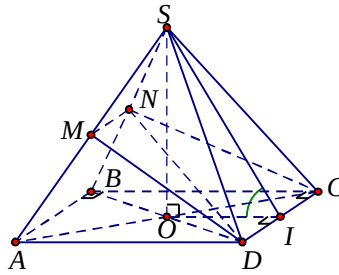
B. $\frac{16\sqrt{15}}{15}$.

C. $\frac{18\sqrt{15}}{5}$.

D. $\frac{108\sqrt{15}}{25}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$. Do $(SAC) \perp (ABCD), (SBD) \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Theo tính chất hình chữ nhật: $AD^2 + CD^2 = BD^2 \Leftrightarrow 5CD^2 = 6^2 \Leftrightarrow CD = \frac{6}{\sqrt{5}}$ và $AD = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

Khi đó diện tích đáy: $S_{ABCD} = AD \cdot CD = \frac{72}{5}$.

Gọi I là trung điểm của CD . Do $CD \perp SO, CD \perp OI \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow CD \perp SI \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (SI, OI) = \widehat{SIO} = 60^\circ$.

Trong tam giác SOI vuông tại O , $OI = \frac{AD}{2} = \frac{6}{\sqrt{5}}, \widehat{SIO} = 60^\circ$ có: $SO = OI \cdot \tan 60^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Thể tích $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{72}{5} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{144\sqrt{15}}{25}$.

Ta có $V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{V}{2}$.

Do $S_{\triangle SMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle SAB} \Rightarrow V_{SMND} = \frac{1}{4} V_{SABD} = \frac{1}{8} V$.

Do N là trung điểm của $SB \Rightarrow d(N, (SCD)) = \frac{1}{2} d(B, (SCD)) \Rightarrow V_{SCDN} = \frac{1}{2} V_{SBCD} = \frac{1}{4} V$.

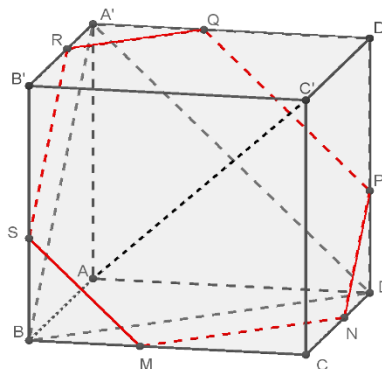
Ta có: $V_{S.CDMN} = V_{SMND} + V_{SCDN} = \frac{3}{8} V \Rightarrow V_{ABCDMN} = V - \frac{3}{8} V = \frac{5}{8} V = \frac{18\sqrt{15}}{5}$.

Câu 18. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là 10cm, gọi tắt là khối (L) . Mặt phẳng (α) vuông góc với AC' và cắt cạnh BC tại M với $MB < MC$. Khi đó, nếu thiết diện của (α) và (L) có diện tích là $74\sqrt{3}\text{cm}^2$ thì phần (L) nằm giữa (α) và $(A'BD)$ có thể tích là

- A. 484cm^3 . B. 408cm^3 . C. $\frac{548}{3}\text{cm}^3$. D. $\frac{776}{3}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn D



Hình 1

Ta có $A'B \perp (AB'C'D) \Rightarrow A'B \perp AC'$, $BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'$. Tức $AC' \perp (A'BD)$. Do đó $(\alpha) \equiv (A'BD)$ hoặc $(\alpha) // (A'BD)$.

a) Nếu $M \equiv B$ thì $(\alpha) \equiv (A'BD)$. Lúc này không có phần (L) nằm giữa (α) và $(A'BD)$.

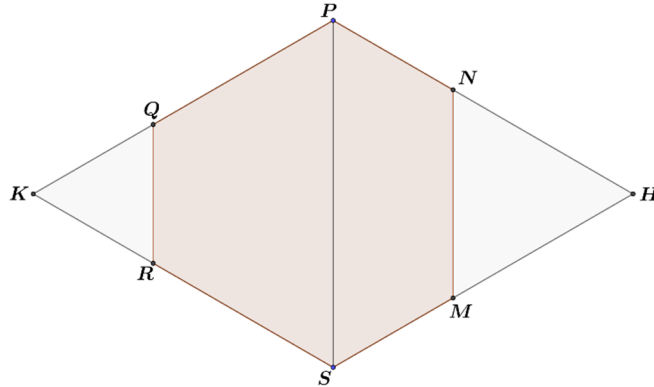
b) Nếu M khác B thì $(\alpha) // (A'BD)$. Lúc này thiết diện của (α) và (L) là lục giác $MNPQRS$

như **Hình 1**, trong đó $\begin{cases} MN, QR // BD \\ NP, RS // A'B \\ PQ, SM // A'D \end{cases}$

Đặt $BM = a$, điều kiện: $0 < a < 5(*)$, ta được $CM = 10 - a$.

Do $\frac{SM}{B'C} = \frac{a}{10}$ và $\frac{MN}{BD} = \frac{10-a}{10}$ nên $SM = a\sqrt{2}$ và $MN = (10-a)\sqrt{2}$.

Tương tự, ta được $SM = NP = QR = a\sqrt{2}$ và $MN = PQ = RS = (10-a)\sqrt{2}$.



Hình 2

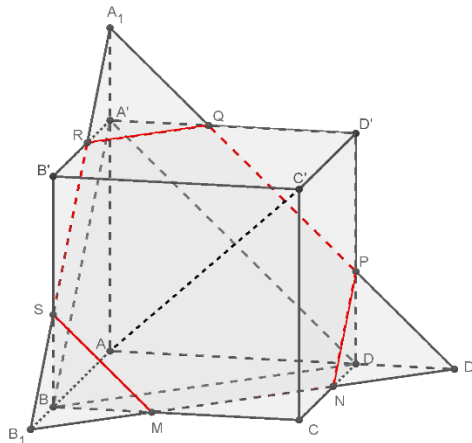
Gọi H là giao điểm của MS và NP , K là giao điểm của PQ và RS (tham khảo **Hình 2**) ta dễ dàng thấy MNH, QRK, SPH, SPK là các tam giác đều, $SP = MN + QR = 10\sqrt{2}$.

Do $S_{MNPQRS} = S_{SPH} + S_{SPK} - S_{MNH} - S_{QRK}$

$$= \left[(10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2 - (6\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2 \right] \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= -a^2\sqrt{3} + 10a\sqrt{3} + 50\sqrt{3}$$

nên ta có phương trình $-a^2\sqrt{3} + 10a\sqrt{3} + 50\sqrt{3} = 74\sqrt{3}$. Tìm được $a = 4$ ($a = 6$ bị loại vì không thỏa $(*)$).



Hình 3

Gọi A_1, B_1, D_1 lần lượt là giao điểm của (α) và các tia AA', AB, AD (tham khảo **Hình 3**).

Xét tam giác $A'A_1Q$: Do $\widehat{A'} = 90^\circ$, $\widehat{Q} = 45^\circ$, $A'Q = 4$ nên $A'A_1 = 4$.

Tương tự, ta được $BB_1 = DD_1 = 4$.

Ta có: $+V_{A.BDA'} = \frac{500}{3}$.

$+V_{A'.RQA_1} = \frac{32}{3}$ (do $A'R, A'Q, A'A_1$ đôi một vuông góc với nhau và cùng bằng 4).

Tương tự, ta được $V_{B.B_1MS} = V_{D.ND_1P} = \frac{32}{3}$.

+ $V_{A.B_1D_1A_1} = \frac{1372}{3}$ (do AB_1, AD_1, AA_1 đôi một vuông góc với nhau và cùng bằng 14).

Tóm lại, thể tích mà ta cần tính là $V = V_{A.B_1D_1A_1} - V_{A.BDA'} - 3 \cdot V_{A'.RQA_1} = \frac{776}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích là 2020. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD') chia khối hộp thành hai phần và cắt hình hộp theo một thiết diện có diện tích lớn nhất. Tính thể tích phần khối hộp chứa cạnh DD' .

A. 1010.

B. $\frac{2020}{3}$.

C. 505.

D. $\frac{505}{2}$.

Lời giải

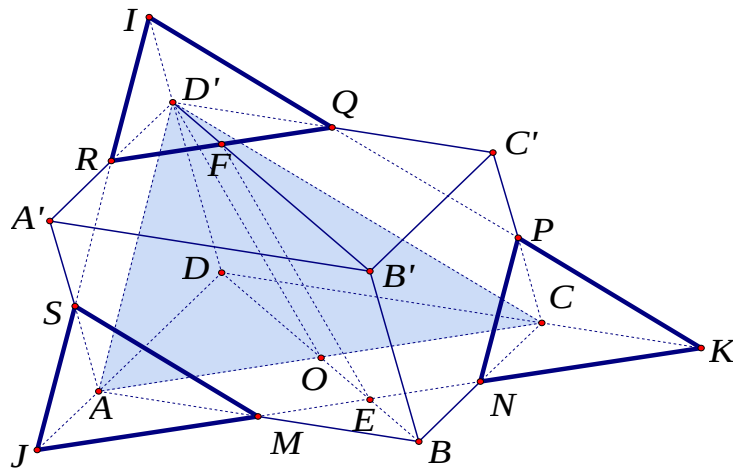
Chọn A

Trong $mp(ABCD)$, qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt DB, BC lần lượt tại E, N

Trong $mp(BDD'B')$ qua E vẽ đường thẳng song song với $D'O$ ($O = AC \cap BD$) cắt $B'D'$ tại F .

Trong $mp(A'B'C'D')$, qua F vẽ đường thẳng song song với AC cắt $A'D', D'C'$ lần lượt tại R và Q .

Trong $mp(AA'D'D)$, qua R vẽ đường thẳng song song với AD' cắt AA' tại S .



Trong $mp(CC'D'D)$, qua Q vẽ đường thẳng song song với CD' cắt CC' tại P .

Thiết diện là lục giác $MNPQRS$.

Do các mặt đối diện của hình hộp song song nên các cạnh đối của lục giác thiết diện $MNPQRS$ song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác ACD' .

$\Rightarrow$ Các tam giác JKI, ACD', RQI, JMS, NKP đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MJ}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} = \frac{NK}{NM} = \frac{PC}{PC'} = \frac{PK}{PQ} = \frac{QD'}{QC'} = \frac{QI}{QP} \Rightarrow MJ = NK \text{ và } PK = QI$$

$\Rightarrow$ Các tam giác RQI, JMS, NKP bằng nhau, gọi diện tích của chúng là S_1 và gọi diện tích các tam giác JKI, ACD' lần lượt là S_2, S .

Đặt $\frac{AM}{AB} = k$; ta có điều kiện $0 < k < 1$ và có:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{JM}{AC} \right)^2 = \left(\frac{KN}{NJ} \right)^2 = \left(\frac{KC}{CD} \right)^2 = \left(\frac{AM}{AB} \right)^2 = k^2 \Rightarrow S_1 = k^2 S.$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{JK}{AC} \right)^2 = \left(\frac{JM + MK}{AC} \right)^2 = \left(\frac{JM}{AC} + \frac{MK}{AC} \right)^2 = (k+1)^2 \Rightarrow S_2 = (k^2 + 2k + 1) \cdot S.$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích thiết diện: } S_{td} = S_2 - 3S_1$$

$$S_{td} = 2S \left(-k^2 + k + \frac{1}{2} \right) = 2S \left[\frac{3}{4} - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \leq \frac{3S}{2} \text{ (dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \text{)}$$

S lớn nhất $\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB . Khi đó S, R, Q, P, N lần lượt là trung

điểm của các cạnh $AA', A'D', D'C', C'C, CB$ và $\frac{IR}{IJ} = \frac{ID'}{ID} = \frac{IQ}{IK} = \frac{1}{3}$.

Các khối chóp $I.RQD', AMSJ, C.PNK$ có thể tích bằng nhau ta gọi thể tích đó là V_1 .

Ta

có:

$$V_1 = \frac{1}{3} d(I; (RQD')) \cdot S_{\Delta RQD'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(D; (A'B'C'D')) \cdot \frac{1}{8} S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{48} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{2020}{48} = \frac{505}{12}.$$

Gọi V là thể tích phần khối lăng trụ chứa cạnh DD' .

$$\text{Do } \frac{V_{I.RQD'}}{V_{I.DJK}} = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{V_1}{3V_1 + V} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow V = 24V_1 = 24 \cdot \frac{505}{12} = 1010.$$

Câu 20. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Các mặt phẳng (ABC') và $(A'B'C)$ chia khối lăng trụ đã cho thành bốn khối đa diện. Kí hiệu H_1, H_2 lần lượt là khối có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất trong bốn khối trên. Giá trị của $\frac{V_{(H_1)}}{V_{(H_2)}}$ bằng

A. 5.

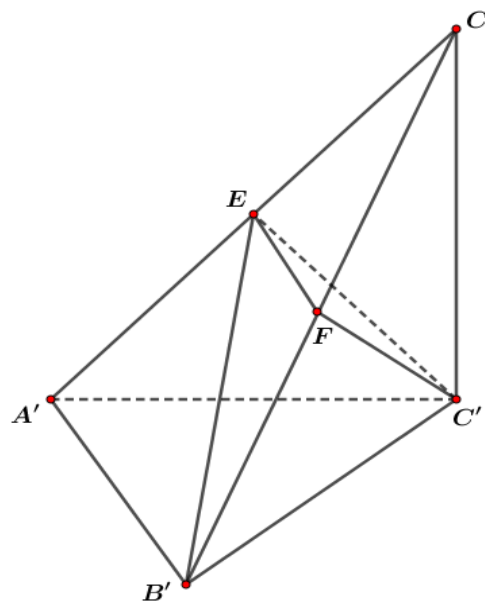
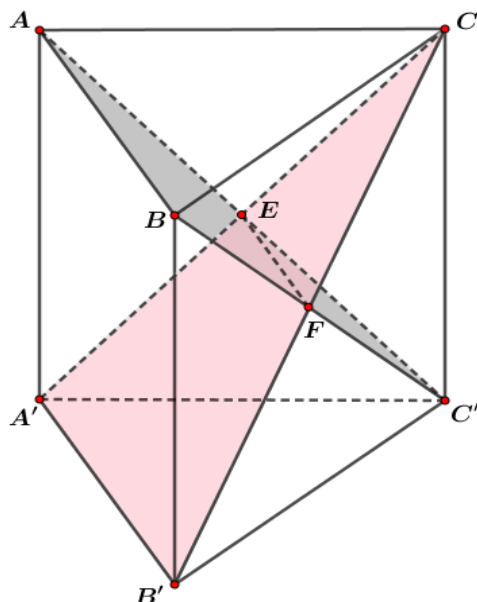
B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A



$$+ AC' \cap A'C = E, BC' \cap B'C = F.$$

$$+ \text{Ta có: } V = V_{ABC.A'B'C'} = V_{EFBAA'B'} + V_{EFABC} + V_{EFA'B'C'} + V_{CEFC'} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4.$$

$$+) V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3} V.$$

$$+) \frac{V_{CEFC'}}{V_{C.A'B'C'}} = \frac{CE}{CA'} \cdot \frac{CF}{CB'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_4 = V_{CEFC'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} V = \frac{1}{12} V.$$

$$+) V_3 = V_{C'.EFB'A'} = \frac{3}{4} \cdot V_{C'.CA'B'} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} V = \frac{1}{4} V.$$

$$+) V_2 = V_{C.ABFE} = V_{C'.EFB'A'} \Rightarrow V_2 = V_3 = \frac{1}{4} V.$$

$$+) V_1 = V_{EFBAA'B'} = V - \frac{1}{12} V - \frac{1}{4} V - \frac{1}{4} V = \frac{5}{12} V.$$

$$+) \text{ Suy ra } V_{(H_1)} = V_4 = \frac{1}{12} V; V_{(H_2)} = V_1 = \frac{5}{12} V.$$

$$+ \text{ Do đó } \frac{V_{(H_1)}}{V_{(H_2)}} = \frac{\frac{1}{12} V}{\frac{5}{12} V} = \frac{1}{5}. \text{ Chọn đáp án A.}$$

Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 15, một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA' , BB' , CC' , DD' lần lượt tại M , N , P , Q . Biết $AM = 5$, $CP = 6$. Thể tích khối đa diện $A'B'C'D'.MNPQ$ là

A. $\frac{4275}{2}$.

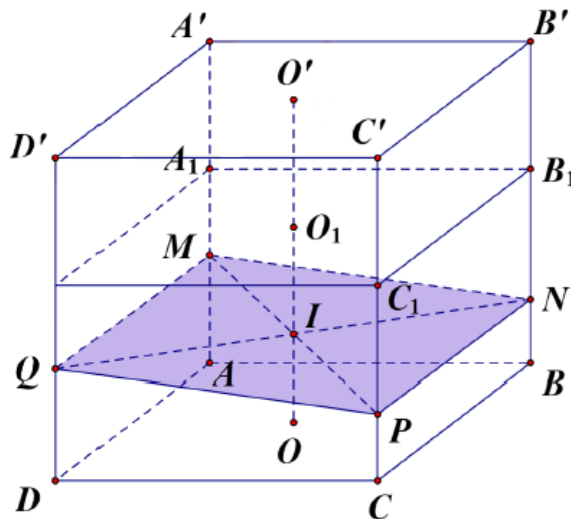
B. $\frac{2475}{2}$.

C. 2250.

D. 2475.

Lời giải.

Chọn A



Gọi O, O' lần lượt là tâm hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. Gọi I là tâm của $MNPQ \Rightarrow I$ thuộc đoạn thẳng OO' .

Xét hình thang $ACPM$ có: $OI = \frac{AM + CP}{2} = \frac{11}{2}$.

Gọi O_1 là điểm đối xứng của O qua $I \Rightarrow OO_1 = 2OI = 11 < 15$ nên O_1 thuộc đoạn OO' .

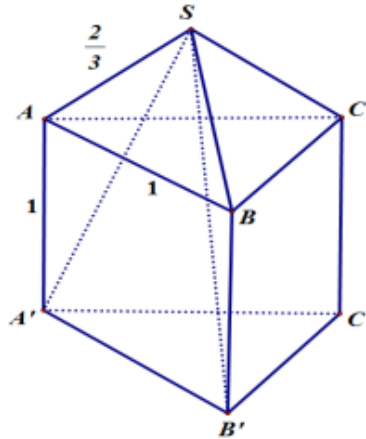
Gọi (P) là mặt phẳng qua O_1 và song song với $(ABCD)$.

Khi đó (P) cắt AA' , BB' , CC' , DD' tại A_1 , B_1 , C_1 , D_1 . Khi đó I là tâm của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD.MNPQ} = \frac{1}{2} V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} \cdot 15^2 \cdot 11 = \frac{2475}{2}$$

Vậy $V_{A'B'C'D'.MNPQ} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{ABCD.MNPQ} = 15^3 - \frac{2475}{2} = \frac{4275}{2}$.

Câu 22. Cho khối đa diện như hình vẽ bên. Trong đó $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng 1, $S.ABC$ là khối chóp tam giác đều có cạnh bên $SA = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng $(SA'B')$ chia khối đa diện đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích phần khối đa diện chứa đỉnh A , V_2 là thể tích phần khối đa diện **không** chứa đỉnh A . Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $72V_1 = 5V_2$.

B. $3V_1 = V_2$.

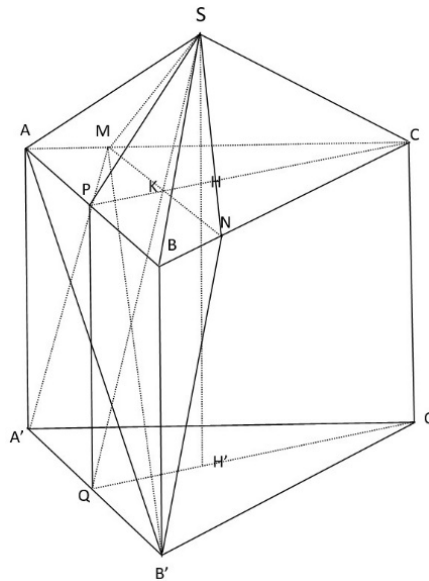
C. $24V_1 = 5V_2$.

D. $4V_1 = V_2$.

Lời giải

Chọn B

Dựng mặt phẳng $(S.CC'QP)$ như hình vẽ với P và Q là trung điểm AB và $A'B'$



Gọi H và H' là chân đường cao hạ từ S xuống (ABC) và $(A'B'C')$, khi đó H và H' là trọng tâm hai tam giác đáy.

Gọi K là giao điểm của CP và SQ , qua K kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC và BC tại M và N .

Mặt phẳng $(SA'B')$ cắt hình lăng trụ theo thiết diện là hình thang $A'B'MN$.

Dễ dàng tính được: $SH = \frac{1}{3}$; $HP = H'Q = \frac{1}{3}CP = \frac{\sqrt{3}}{6}$;

$$HK = \frac{1}{4}H'Q = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{24};$$

$$PK = HP - HK = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{8}; MN = \frac{3}{4}$$

Gọi V là thể tích của toàn bộ khối đa diện ta có

$$V = V_{ABC.A'B'C'} + V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{18}$$

$$V_{B'.ABMN} = \frac{1}{3}BB' \cdot S_{ABMN} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{192}$$

$$V_{B'.AA'M} = \frac{1}{3}d(B; (ACC'A')) \cdot S_{AA'M} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{48}$$

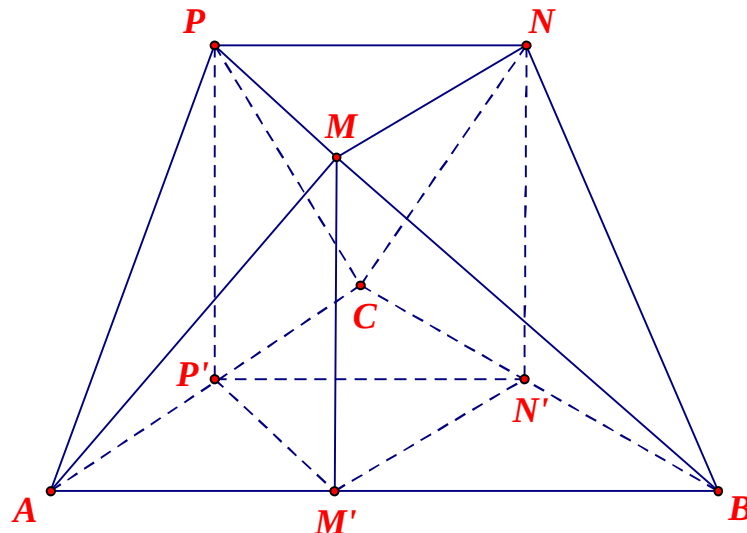
$$V_{S.ABNM} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABNM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{576}$$

$$V_1 = \frac{7\sqrt{3}}{192} + \frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{7\sqrt{3}}{576} = \frac{5\sqrt{3}}{72}$$

$$V_2 = V - V_1 = \frac{5\sqrt{3}}{18} - \frac{5\sqrt{3}}{72} = \frac{5\sqrt{3}}{24}$$

Từ đó suy ra $3V_1 = V_2$.

Câu 23. Cho khối đa diện lồi (H) gồm các đỉnh A, B, C, M, N, P trong đó hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) song song với nhau, $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ là các tam giác đều. Gọi M', N', P' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N, P lên mặt phẳng (ABC) . Biết M', N', P' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, AC , $\widehat{(MNN'M'), (BMN)} = 45^\circ$, $MN = a$. Thể tích của khối đa diện lồi (H) bằng?



A. $\frac{9a^3}{8}$

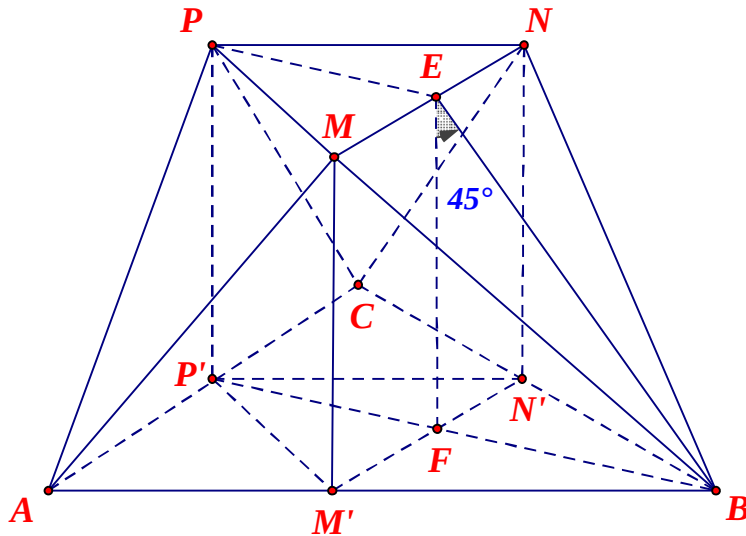
B. $\frac{9a^3}{16}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn A



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MN, MN' .

Đễ dàng thấy được $\overline{((MNN'M'), (BMN))} = \widehat{FEB} = 45^\circ$.

$$\text{Suy ra: } FE = FB = MM' = \frac{1}{2}BP' = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích của khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$ là: $V_{MNP.M'N'P'} = MM'.S_{\Delta MNP} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{8}$ (đvtt).

Ta có: $V_{(H)} = V_{MNP.MNP'} + 3V_{B.MNN'M'} \quad (1).$

Đồng thời $V_{B.MNN'M'} = V_{P'.MNN'M'} = \frac{2}{3}V_{MNP.MN'P'}$ (2).

$$\text{Từ (1),(2) suy ra: } V_{(H)} = V_{MNP.M'N'P'} + 3 \cdot \frac{2}{3} V_{MNP.M'N'P'} = 3V_{MNP.M'N'P'}.$$

$$\text{Vậy } V_{(H)} = 3 \cdot \frac{3a^3}{8} = \frac{9a^3}{8} \text{ (đvtt).}$$

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có chiều cao bằng 12 và diện tích đáy bằng 27. Đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SAD . Tính thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm M, N, E, F, A, B, C, D .

A. 52.

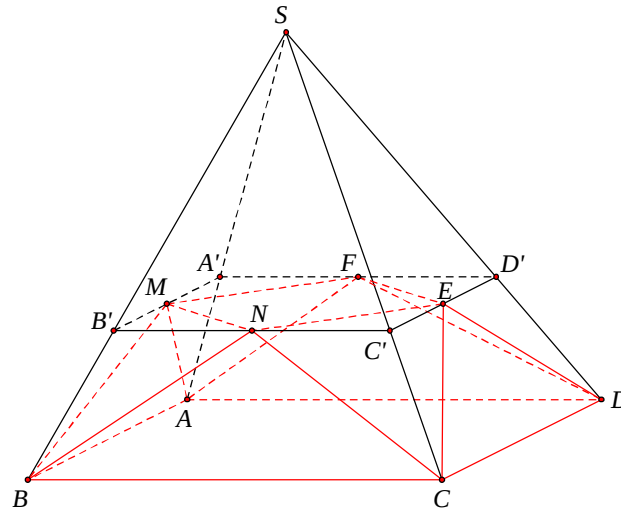
B. 88.

C. 60 .

D. 68.

Lời giải

Chon D



Chiều cao khối chóp $S.ABCD$ là $h=12$ và diện tích đáy là $S=27$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SA, SB, SC, SD sao cho $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{2}{3}$.

Diện tích hình bình hành $A'B'C'D'$ là $S' = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{4}{9} \cdot S$.

Diện tích tam giác $B'MN$ bằng $\frac{1}{8} S' = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{9} S = \frac{1}{18} S$.

Thể tích khối chóp $B.B'MN$ là $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} S \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{162} \cdot Sh$.

Thể tích khối chóp cắt $A'B'C'D'.ABCD$ là $V' = \frac{1}{3} S \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} S \cdot \frac{2}{3} h = \frac{19}{81} Sh$.

Thể tích khối đa diện lồi cần tìm là $V = V' - 4V_1 = \frac{19}{81} Sh - 4 \cdot \frac{1}{162} Sh = \frac{17}{81} Sh = \frac{17}{81} \cdot 27 \cdot 12 = 68$.

Câu 25. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V , I thuộc cạnh CC' sao cho $CI = 4IC'$. Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của A', B' qua I . Tính theo V thể tích của khối đa diện $CABMNC'$.

A. $\frac{10}{3}V$.

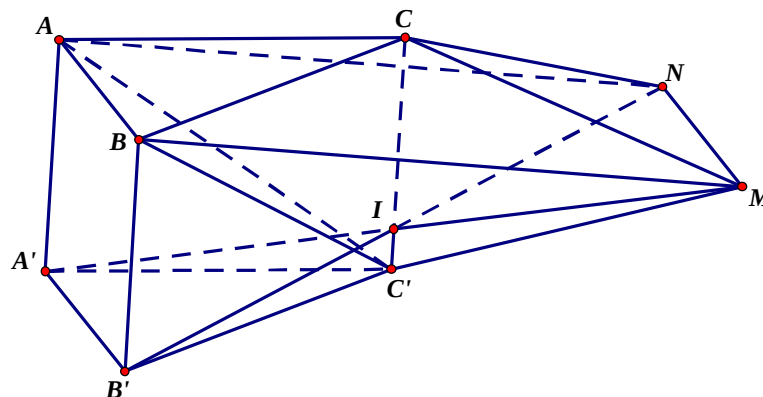
B. $\frac{9}{5}V$.

C. $\frac{4}{3}V$.

D. $\frac{8}{5}V$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{CABMNC'} = V_{C'CMN} + V_{C'CMB} + V_{C'CAB} + V_{C'CAN}$

Dễ thấy: $V_{C' CAB} = \frac{1}{3}V$.

Do I là trung điểm $A'M$ nên $d(M; (BCC')) = d(A; (BCC'))$, nên

$$V_{C' CMB} = \frac{1}{3}d(M; (BCC')) \cdot S_{BCC'} = \frac{1}{3}d(A; (BCC')) \cdot S_{BCC'} = \frac{1}{3}d(A; (BCC')) \cdot S_{BCC'} = V_{ABCC'} = \frac{1}{3}V$$

Tương tự: $V_{C' CAN} = \frac{1}{3}V$

Do tính đối xứng, ta có $\triangle IA'B' = \triangle IMN$

$$V_{C' CMN} = V_{C' IMN} + V_{CIMN} = \frac{1}{3}d(C'; (IMN)) \cdot S_{IMN} + \frac{1}{3}d(C; (IMN)) \cdot S_{IMN}$$

$$= \frac{1}{3}d(C'; (IA'B')) \cdot S_{IA'B'} + \frac{1}{3}d(C; (IA'B')) \cdot S_{IA'B'}$$

$$= V_{C' IA'B'} + V_{CIA'B'} = V_{CA'B'C'} = \frac{1}{3}V$$

Vậy $V_{CABMNC'} = V_{C' CMN} + V_{C' CMB} + V_{C' CAB} + V_{C' CAN} = \frac{4}{3}V$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $\triangle SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, SB và SC . Thể tích (tính theo a) của khối đa diện $MNPQRT$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{96}$.

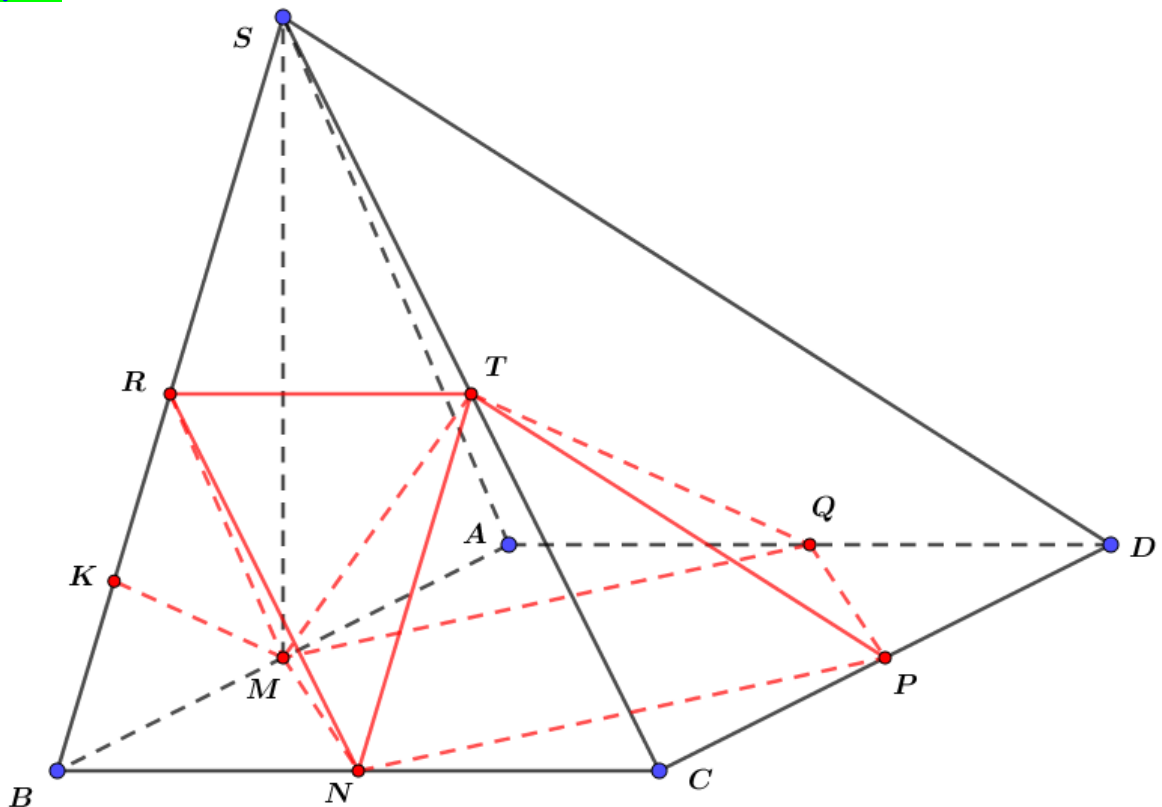
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

C. $\frac{5a^3}{96}$.

D. $\frac{a^3}{96}$.

Lời giải

Chọn A



Dễ dàng chứng minh được $SM \perp (ABCD)$ và có $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta phân chia khối đa diện $MNPQRT$ thành hai khối chóp $T.MNPQ$ và $M.NRT$.

□ Xét $T.MNPQ$:

Đễ thấy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{a^2}{2}$ và $\frac{d(T; (ABCD))}{d(S; (ABCD))} = \frac{h_T}{SM} = \frac{CT}{CS} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_T = \frac{SM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ (với h_T là độ dài đường cao kẻ từ T của $T.MNPQ$).

$$\text{Suy ra: } V_{T.MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot h_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

□ Xét $M.NRT$:

Đễ thấy:

□ $(SAB) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SB , vẽ $MK \perp SB$ tại $K \Rightarrow MK \perp (SBC) \equiv (NRT)$ và

$$\frac{1}{MK^2} = \frac{1}{MB^2} + \frac{1}{MS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow MK = \frac{a\sqrt{3}}{4} \quad (\triangle SMB \text{ vuông tại } B, \text{ đường cao } MK).$$

□ $\triangle SBC$ vuông tại B và $\frac{S_{\triangle NRT}}{S_{\triangle SBC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{\triangle NRT} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot SB \cdot BC = \frac{a^2}{8}$ ($\triangle NRT \sim \triangle SBC$ theo tỉ số đồng dạng là $\frac{1}{2}$).

$$\text{Suy ra: } V_{M.NRT} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle NRT} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$

$$\text{Kết luận: } V_{MNPQRT} = V_{T.MNPQ} + V_{M.NRT} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24} + \frac{a^3\sqrt{3}}{96} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{96}.$$

Câu 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V , gọi M, N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{D'M} = 2\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{C'N} = 2\overrightarrow{NC}$, đường thẳng AM cắt đường $A'D'$ tại P , đường thẳng BN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q . Gọi V' là thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A', B', P, Q, M, N . Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. 1.

B. $\frac{4}{3}$.

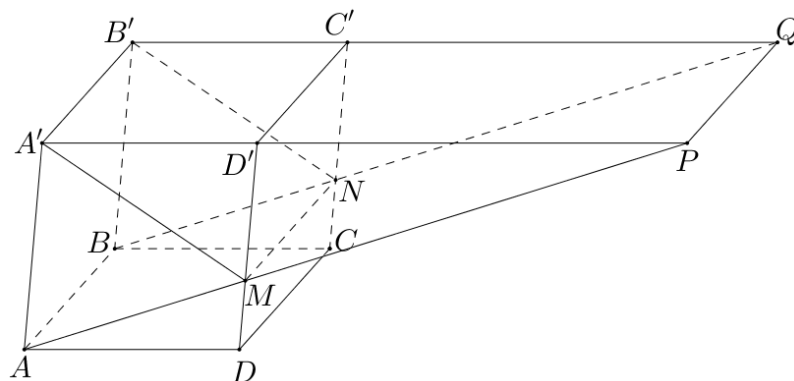
C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V' = V_{PMD'.QNC'} + V_{A'D'M.B'C'N}$

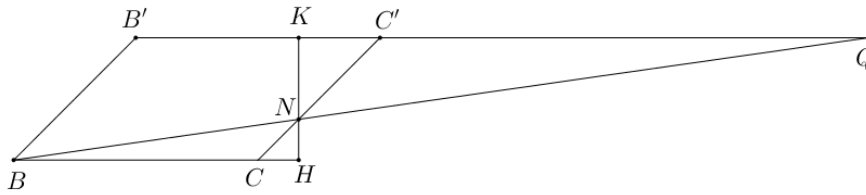


Theo giả thiết:

$$\overrightarrow{D'M} = 2\overrightarrow{MD} \Rightarrow M \text{ nằm trên đoạn } D'D \text{ và } D'M = \frac{2}{3} D'D.$$

$$\overline{C'N} = 2\overline{NC} \Rightarrow N \text{ nằm trên đoạn } C'C \text{ và } C'N = \frac{2}{3}C'C.$$

$$*) \text{ Ta có: } \frac{V_{PMD'.QNC'}}{V} = \frac{d(D', (NQC')) \cdot S_{NQC'}}{d(D', (BCC'B')) \cdot S_{BCC'B'}} = \frac{S_{NQC'}}{S_{BCC'B'}}$$



Trong $(BB'C'C)$ qua N kẻ HK vuông với BC , $B'C'$ ($H \in BC$, $K \in B'C'$).

$$BC \parallel B'C' \Rightarrow \frac{NK}{NH} = \frac{NC'}{NC} = 2 \Rightarrow NK = 2NH, NH = \frac{1}{3}HK.$$

$$BC \parallel B'C' \Rightarrow \frac{QC'}{BC} = \frac{C'N}{CN} = 2 \Rightarrow QC' = 2BC.$$

$$S_{QNC'} = \frac{1}{2}NK \cdot QC' = \frac{1}{2} \cdot 2NH \cdot 2BC = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}HK \cdot BC = \frac{2}{3}S_{BB'C'C}.$$

$$\text{Từ đó ta được: } \frac{V_{PMD'.QNC'}}{V} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{PMD'.QNC'} = \frac{2}{3}V.$$

$$*) \text{ Tương tự: } \frac{V_{A'D'M.B'CN}}{V} = \frac{S_{A'D'M}}{S_{A'D'DA}} = \frac{S_{A'D'M}}{2S_{A'D'D}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{D'M}{D'D} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{A'D'M.B'CN} = \frac{1}{3}V.$$

$$\text{Khi đó: } V' = \frac{2}{3}V + \frac{1}{3}V = V. \text{ Vậy } \frac{V'}{V} = 1.$$

Ghi chú: Có thể tính tỉ số $\frac{S_{NQC'}}{S_{BCC'B'}}$ theo cách khác như sau:

$$\frac{S_{QNC'}}{S_{QB'B}} = \frac{QC'}{QB'} \cdot \frac{QN}{QB} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{QNC'} = \frac{4}{5}S_{BB'C'N} \quad (1)$$

$$\frac{S_{CBN}}{S_{CBC'}} = \frac{CN}{CC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{CBN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{BCC'B'} \Rightarrow S_{BB'C'N} = \frac{5}{6}S_{BB'C'} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{S_{QNC'}}{S_{BB'C'C}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$

Câu 28. (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 47) Cho lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $27\sqrt{3}.$

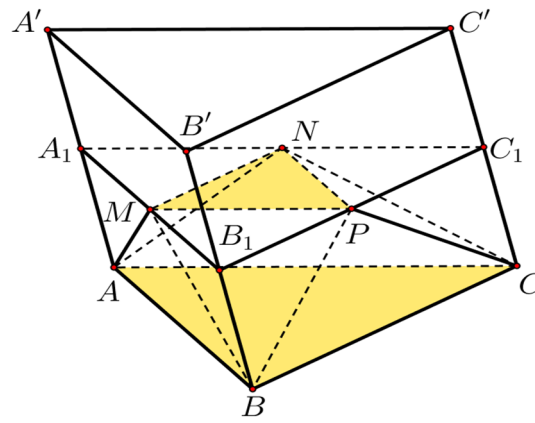
B. $21\sqrt{3}.$

C. $30\sqrt{3}.$

D. $36\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn A



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC' .

Khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có chiều cao là 4 là tam giác đều cạnh 6.

Ba khối chóp $A.A_1MN, B.B_1MP, C.C_1NP$ đều có chiều cao là 4 và cạnh là tam giác đều cạnh

$$3 \text{ Ta có: } V_{ABC.MNP} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - (V_{A.A_1MN} + V_{B.B_1MP} + V_{C.C_1NP}) = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 4 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 27\sqrt{3}$$

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm các hình vuông $ABB'A', A'B'C'D', ADD'A'$ và $CDD'C'$. Tính thể tích tứ diện $MNPR$, với R là trung điểm BQ .

A. $\frac{1}{12}$.

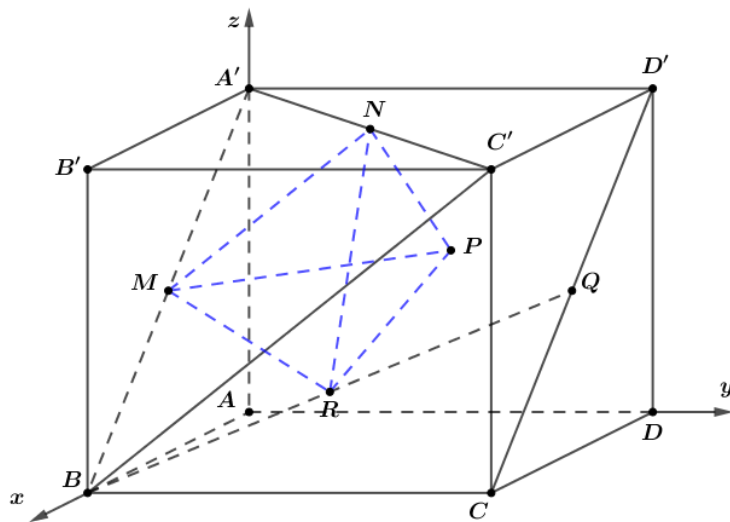
B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{24}$.

D. $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn D



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, trong đó $A \equiv O(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$, $C(1;1;0)$, $B'(1;0;1)$, $D'(0;1;1)$, $C'(1;1;1)$.

Theo giả thiết, ta có: $M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$, $P\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$, $R\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{MR} = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

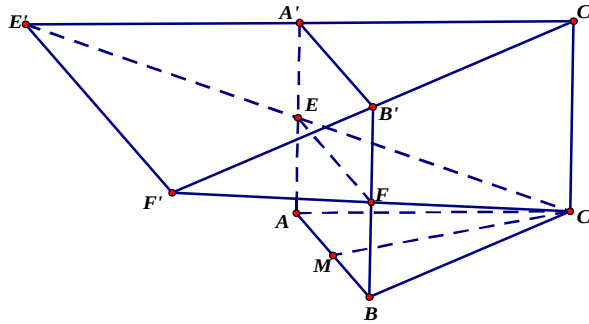
$$\text{Suy ra } V_{M.NPR} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP} \right] \cdot \overrightarrow{MR} \right| = \frac{1}{24}.$$

Câu 30. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AA' và BB' ; đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E' , đường thẳng CF cắt đường thẳng $C'B'$ tại F' . Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng

- A.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi M là trung điểm AB . Suy ra $CM \perp (ABB'A')$ và $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $C.ABFE$ là

$$V_{C.ABFE} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABFE} \cdot CM = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Thể tích khối đa diện $A'B'C'E'F'$ là

$$V_{A'B'C'E'F'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABFE} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được A' và B' lần lượt là trung điểm của $C'E'$ và $C'F'$.

Thể tích khối chóp $C.C'E'F'$ là

$$V_{C.C'E'F'} = \frac{1}{3} \cdot S_{C'E'F'} \cdot CC' = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot S_{C'A'B'} \cdot CC' = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Khi đó, thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ là

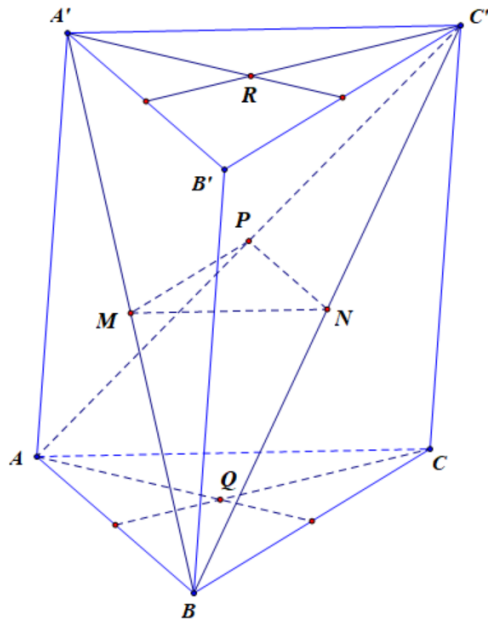
$$V_{EFA'B'E'F'} = V_{C.C'E'F'} - V_{A'B'C'E'F'} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 31. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P, Q và R lần lượt là tâm của các mặt $ABB'A', BCC'B', CAA'C', ABC$ và $A'B'C'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm M, N, P, Q và R bằng

- A.** 6. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 36.

Lời giải

Chọn A



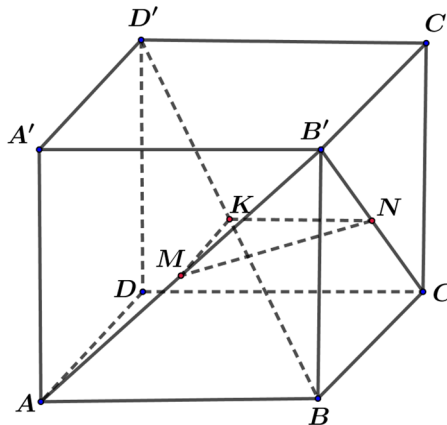
Do tam giác MNP đồng dạng với tam giác $A'C'B'$ theo tỉ số $\frac{1}{2}$ nên $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{A'C'B'} = \frac{9}{4}$.

Gọi h_1, h_2 lần lượt là chiều cao của hai hình chóp $R.MNP, Q.MNP \Rightarrow h_1 + h_2 = 8$.

Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm M, N, P, Q và R bằng

$$V = \frac{1}{3}(h_1 + h_2)S_{MNP} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{9}{4} = 6.$$

Câu 32. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có cạnh bằng $4a$, $AA' = 8a, \widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của $AB', B'C, BD'$. Tính thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, K là



A. $12\sqrt{3}a^3$.

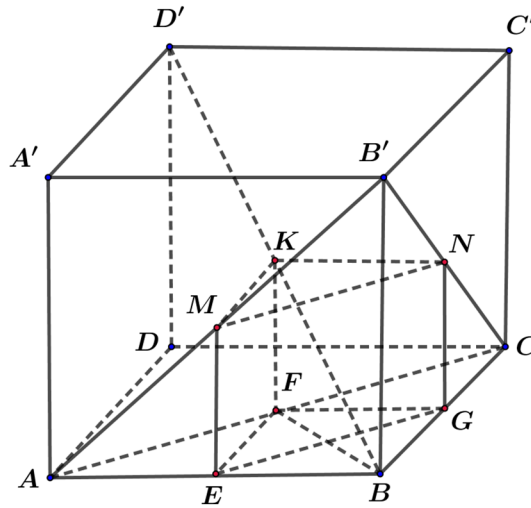
B. $\frac{40\sqrt{3}}{3}a^3$.

C. $\frac{40\sqrt{3}}{3}a^3$.

D. $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Vì $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $4a$ và $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên $\triangle ABC$ là tam giác đều có cạnh bằng $4a$.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC .

Ta có $\begin{cases} BF \perp EG \\ BF \perp EM \end{cases} \Rightarrow BF \perp (MNGE)$

$$\Rightarrow V_{B.MNGE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BF \cdot S_{MNGE} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4a\sqrt{3}}{2} \cdot 4a \cdot 2a = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Tương tự ta có

$$V_{C.KNGF} = V_{B.EGFM} = V_{A.EFKM} = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có $MNK.EFG$ là hình lăng trụ đều có chiều cao $ME = \frac{1}{2}BB' = 4a$ và đáy là tam giác đều có

$$\text{cạnh bằng } EG = \frac{1}{2}AC = 2a \Rightarrow V_{MNK.EFG} = 4a \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = 4a^3\sqrt{3}.$$

Gọi V là thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, K . Khi đó $V = V_{MNK.EFG} + V_{C.KNGF} + V_{B.EGFM} + V_{A.EFKM} = 4a^3\sqrt{3} + 8a^3\sqrt{3} = 12a^3\sqrt{3}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là V . Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

A. $\frac{17V}{4}$.

B. $\frac{71V}{4}$.

C. $\frac{V}{4}$.

D. $\frac{13V}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Kí hiệu

B_{ABCD} là diện tích tứ giác $ABCD$.

$d((ABCD), (A'B'C'D'))$ là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD), (A'B'C'D')$.

Khi đó, ta có

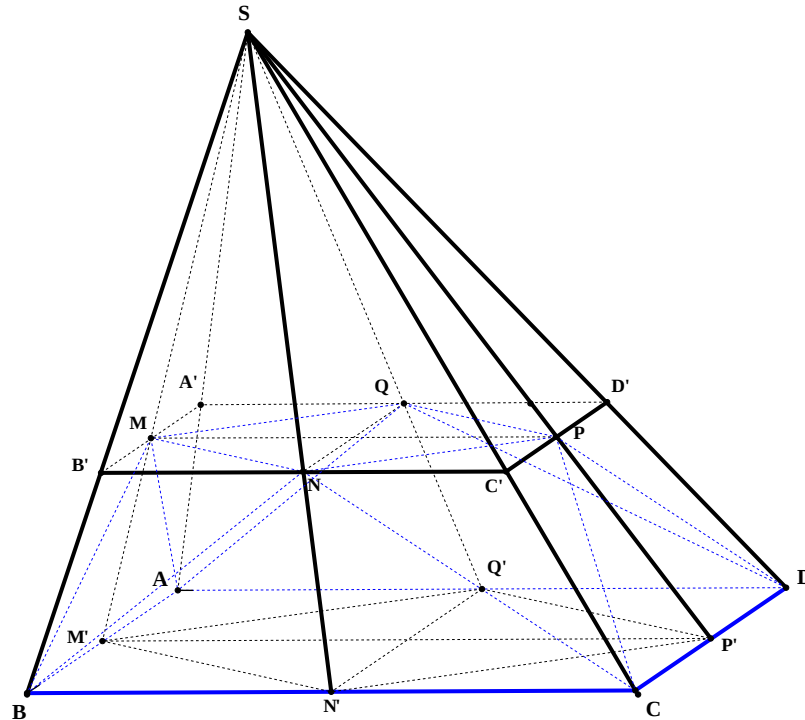
$$V_{MNPQ.ABCD} = V_{S.ABCD} - V_{S.A'B'C'D'} - [V_{A.A'MQ} + V_{B.B'MN} + V_{C.C'NP} + V_{D.D'PQ}].$$

$$\text{Trong đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot d(S, (ABCD)) \cdot B_{ABCD}$$

$$\Leftrightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} d(S, (A'B'C'D')). 2B_{MNP'Q'}$$

$$\Leftrightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} d(S, (A'B'C'D')). 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 B_{MNPQ}$$

$$\Leftrightarrow V_{S.ABCD} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} d(S, (A'B'C'D')). B_{MNPQ}$$



Ta được:

$$V_{S.ABCD} = \frac{27}{4} V \quad (1).$$

$$V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot d(S, (A'B'C'D')). B_{A'B'C'D'}$$

$$\Leftrightarrow V_{S.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot d(S, (MNPQ)). 2B_{MNPQ}$$

$$\Leftrightarrow V_{S.A'B'C'D'} = 2V \quad (2).$$

$$V_{A.A'MQ} + V_{B.B'MN} + V_{C.C'NP} + V_{D.D'PQ}$$

$$= \frac{1}{3} d((ABCD), (A'B'C'D')) [B_{A'MQ} + B_{B'MN} + B_{C'NP} + B_{D'PQ}]$$

$$\Leftrightarrow V_{A.A'MQ} + V_{B.B'MN} + V_{C.C'NP} + V_{D.D'PQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(S, (A'B'C'D')) B_{MNPQ}$$

$$\Leftrightarrow V_{A.A'MQ} + V_{B.B'MN} + V_{C.C'NP} + V_{D.D'PQ} = \frac{1}{2} V \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta có } V_{MNPQ.ABCD} = \frac{27}{4} V - 2V - \frac{1}{2} V \Leftrightarrow V_{MNPQ.ABCD} = \frac{17}{4} V.$$

Các khác.

$$\text{Ta có } V_{S.MNPQ} = \frac{1}{2} V_{S.A'B'C'D'} \quad (\text{vì } B_{MNPQ} = \frac{1}{2} B_{A'B'C'D'})$$

Và $V_{S.A'B'C'D'} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 V_{S.ABCD}$ (vì tỉ số đồng dạng của hai khối chóp là $\frac{2}{3}$)

$$\text{Nên } V_{S.MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{27} V_{S.ABCD} \Leftrightarrow V_{S.MNPQ} = \frac{4}{27} V_{S.ABCD} \Leftrightarrow V_{S.ABCD} = \frac{27}{4} V$$

$$\text{Ta có } V_{B.B'MN} = \frac{1}{2} V_{S.B'MN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{27} V_{S.BM'N'} = \frac{4}{27} V_{S.BM'N'} = \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{8} V_{S.ABCD} = \frac{1}{8} V$$

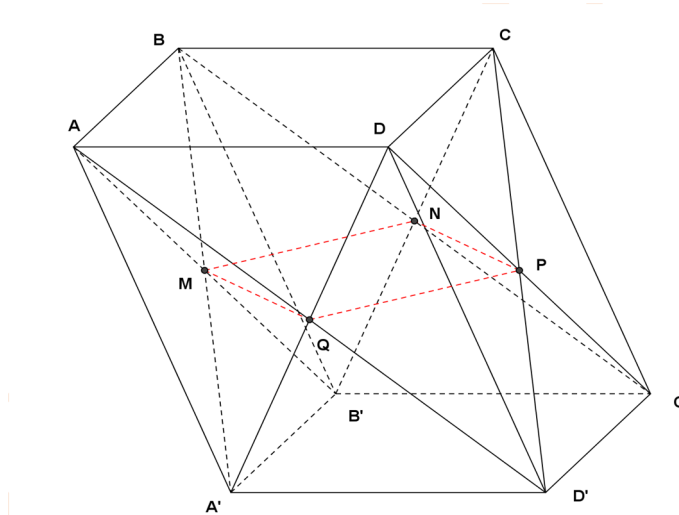
$$\begin{aligned} \text{Vậy } V_{MNPQ.ABCD} &= V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{B.B'MN} = \left(1 - \frac{8}{27}\right) V_{S.ABCD} - 4V_{B.B'MN} \\ &= \frac{19}{27} V_{S.ABCD} - 4V_{B.B'MN} = \left(\frac{19}{27} \cdot \frac{27}{4} - 4 \cdot \frac{1}{8}\right) V = \frac{17}{4} V. \end{aligned}$$

Câu 34. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 10 và đáy là hình vuông có cạnh bằng 5. Gọi M, N, P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ và $ADD'A'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P, Q bằng

- A. $\frac{625}{3}$. B. $\frac{625}{6}$. C. $\frac{125}{6}$. D. $\frac{125}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 10 \cdot 25 = 250$ (d.v.t.t).

$$V_{ABCD.MNPQ} = V_{A'B'C'D'.MNPQ}, V_{MQAA'} = \frac{AM}{AB'} \cdot \frac{AQ}{AD'} \cdot V_{AA'B'D'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \frac{25}{2} = \frac{125}{12}.$$

Và ta có: $V_{MQAA'} = V_{MNBB'} = V_{NPCC'} = V_{PQDD'}.$

$$\text{Suy ra: } V_{ABCD.MNPQ} + V_{A'B'C'D'.MNPQ} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{MQAA'} - V_{MNBB'} - V_{NPCC'} - V_{PQDD'}.$$

$$\text{Hay: } 2 \cdot V_{ABCD.MNPQ} = 250 - 4 \cdot \frac{125}{12} = \frac{625}{3} \Rightarrow V_{ABCD.MNPQ} = \frac{625}{6}.$$

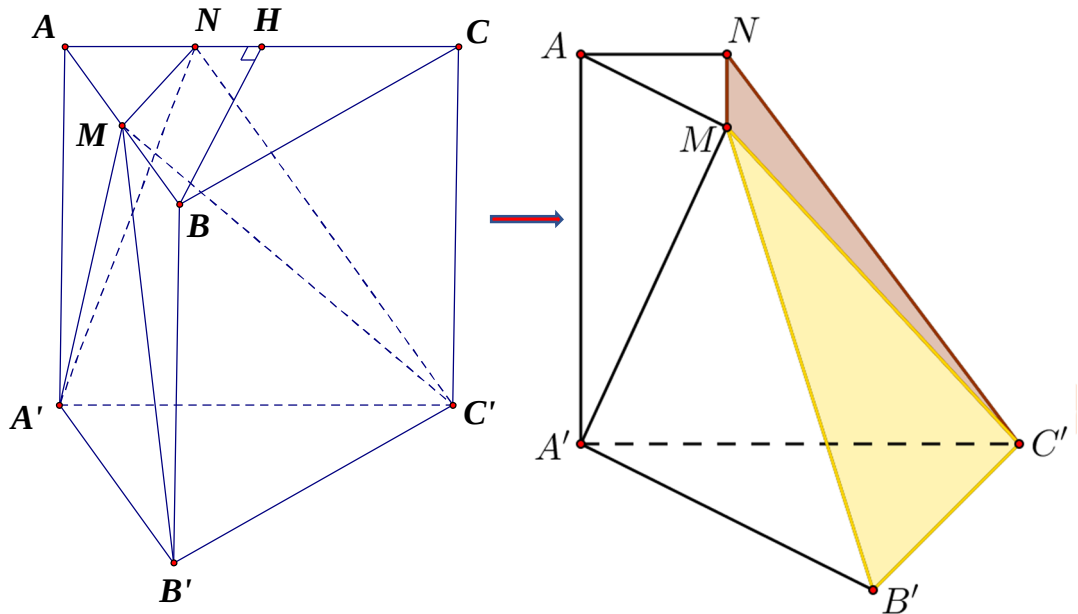
Câu 35. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm AB và N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $CN = 2AN$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, M, N, A', B' và C' bằng

- A. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{12}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{36}$. C. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{36}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1



Gọi V là thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, M, N, A', B' và C' .
 Khi đó ta có: $V = V_{M.A'AN} + V_{M.A'C'N} + V_{M.A'B'C'}$.

Từ giả thiết ta có: $S_{\Delta A'AN} = \frac{1}{2} AA'.AN = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{6}$; $S_{\Delta A'C'N} = \frac{1}{2} d(N, A'C') \cdot A'C' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$;

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2} A'B' \cdot A'C' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Gọi H là trung điểm của AC thì $BH \perp (ACC'A')$ và $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (do ABC là tam giác đều cạnh bằng a), suy ra $d(M, (ACC'A')) = \frac{1}{2} d(B, (ACC'A')) = \frac{1}{2} BH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Khi đó ta thu được các kết quả sau

$$V_{M.A'AN} = \frac{1}{3} d(M, (ACC'A')) \cdot S_{\Delta A'AN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{72}.$$

$$V_{M.A'C'N} = \frac{1}{3} d(M, (ACC'A')) \cdot S_{\Delta A'C'N} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}.$$

$$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3} d(M, (A'B'C')) \cdot S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Vậy } V = V_{M.A'AN} + V_{M.A'C'N} + V_{M.A'B'C'} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{72} + \frac{a^3 \sqrt{3}}{24} + \frac{a^3 \sqrt{3}}{12} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{36}.$$

Cách 2

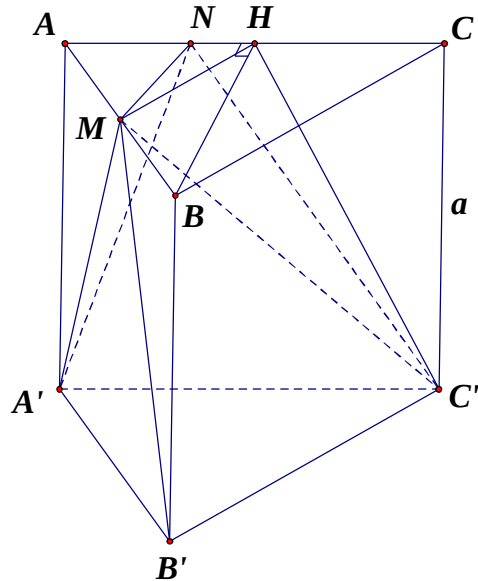
Gọi V là thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, M, N, A', B' và C' .
 Khi đó ta có: $V = V_{M.AA'C'N} + V_{M.A'B'C'}$.

$$\text{Ta có } S_{\Delta AA'C'N} = \frac{1}{2} AA' (AN + A'C') = \frac{1}{2} a \left(\frac{a}{3} + a \right) = \frac{2a^2}{3}.$$

$$\text{Suy ra } V_{M.AA'C'N} = \frac{1}{3} d(M, (ACC'A')) \cdot S_{\Delta AA'C'N} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2a^2}{3} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{36}.$$

$$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3} d(M, (A'B'C')) \cdot S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Vậy } V = V_{M.AA'C'N} + V_{M.A'B'C'} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{36} + \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{36}.$$

Cách 3

- Gọi H là trung điểm của AC và V là thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, M, N, A', B' và C' . Khi đó $V = V_{AMH.A'B'C'} - V_{M.NHC'}$.

- Dễ thấy $MH \parallel B'C'$ nên $AMH.A'B'C'$ là khối chóp cụt.

- Áp dụng công thức thể tích V_1 của khối chóp cụt có chiều cao h , diện tích đáy nhỏ và đáy lớn theo thứ tự là S_0, S_1 thì ta có $V_1 = \frac{h}{3}(S_0 + \sqrt{S_0 S_1} + S_1)$.

$$\begin{aligned} \text{- Khi đó } V_{AMH.A'B'C'} &= \frac{AA'}{3}(S_{AMH} + \sqrt{S_{AMH} \cdot S_{A'B'C'}} + S_{A'B'C'}) \\ &= \frac{a}{3} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48}. \end{aligned}$$

$$\text{- Mặt khác } V_{M.NHC'} = \frac{1}{3}d(M, (ACC'A')) \cdot S_{NHC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{144}.$$

$$\text{Vậy } V = V_{AMH.A'B'C'} - V_{M.NHC'} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48} - \frac{a^3\sqrt{3}}{144} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{36}.$$

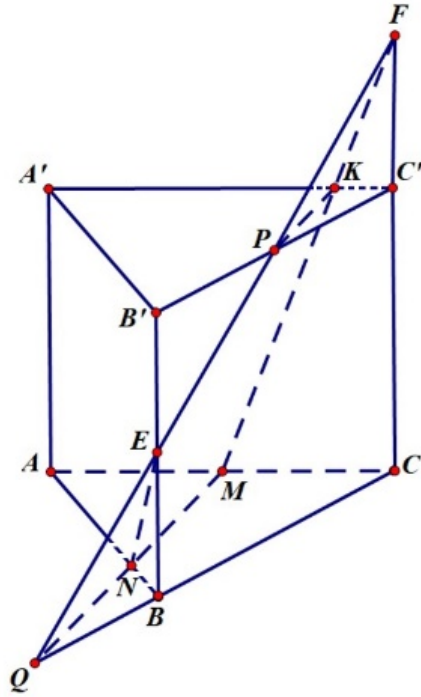
Câu 36. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của hai cạnh AC và $B'C'$. Lấy điểm N trên cạnh AB thỏa mãn $AN = \frac{5}{7}AB$. Mặt phẳng (MNP) chia lăng trụ đã cho thành 2 khối đa diện, thể tích V_1 của khối đa diện chứa đỉnh C là:

A. $V_1 = \frac{3057}{23520}a^3\sqrt{3}$. **B.** $V_1 = \frac{2057}{23520}a^3\sqrt{3}$. **C.** $V_1 = \frac{4057}{23520}a^3\sqrt{3}$. **D.**

$$V_1 = \frac{5057}{23520}a^3\sqrt{3}.$$

Lời giải

Chọn B



Trong $mp(ABC)$ vẽ $MN \cap CB = Q$, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ACB ta có:

$$\frac{MA}{MC} \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{NB}{NA} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{QC}{QB} = \frac{5}{2}.$$

Trong $mp(BB'C'C)$:

$$\square \text{ Vẽ } QP \cap BB' = E \text{ (dễ thấy } \frac{EB'}{EB} = \frac{PB'}{QB} \Leftrightarrow \frac{EB'}{EB} = \frac{\frac{1}{2}B'C'}{\frac{2}{3}BC} = \frac{3}{4} \text{)}$$

$$\square \text{ Vẽ } QP \cap CC' = F \text{ (dễ thấy } FC' = EB' = \frac{3}{7}CC' \text{)}.$$

Trong $mp(AA'C'C)$ vẽ $MF \cap A'C' = K$ (dễ thấy $KC' = \frac{3}{10}MC = \frac{3}{20}AC$).

Vậy thiết diện là ngũ giác $MNEPK$.

$$\Rightarrow V_1 = V_{F.MQC} - V_{F.KPC'} - V_{E.NQB} (*)$$

Trong đó:

$$\square V_{F.MQC} = \frac{1}{3} S_{MQC} \cdot FC = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{6} S_{ABC} \right) \cdot \frac{10}{7} CC' = \frac{25a^3 \sqrt{3}}{252}.$$

$$\square V_{F.KPC'} = \frac{1}{3} S_{KPC'} \cdot FC' = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{40} S_{ABC} \right) \cdot \frac{3}{7} CC' = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{1120}.$$

$$\square V_{E.NQB} = \frac{1}{3} S_{NQB} \cdot EB = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{21} S_{ABC} \right) \cdot \frac{4}{7} CC' = \frac{4a^3 \sqrt{3}}{441}.$$

$$\text{Thay vào } (*) \text{ ta được: } V_1 = \frac{2057}{23520} a^3 \sqrt{3}.$$

Câu 37. (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 46) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

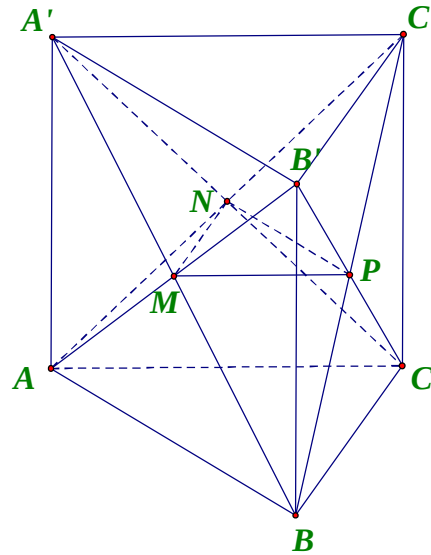
B. $8\sqrt{3}$.

C. $6\sqrt{3}$.

D. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = 4 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

Gọi thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P là V_1 .

Ta có: $V_1 = V_{AMNCB} + V_{BMNP} + V_{BNPC}$.

Dễ thấy $V_{A'ABC} = \frac{1}{3}V$ và $V_{AMNCB} = \frac{3}{4}V_{A'ABC}$ nên $V_{AMNCB} = \frac{1}{4}V$.

$V_{BA'B'C'} = \frac{1}{3}V$ và $V_{BMNP} = \frac{1}{8}V_{BA'B'C'}$ nên $V_{BMNP} = \frac{1}{24}V$.

$V_{A'BCB'} = V_{A'B'CC'} = \frac{1}{3}V$ và $V_{BNPC} = \frac{1}{4}V_{A'B'CC'}$ nên $V_{BNPC} = \frac{1}{12}V$.

Vậy $V_1 = V_{AMNCB} + V_{BMNP} + V_{BNPC} = \frac{3}{8}V = 6\sqrt{3}$.

Câu 38. (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 49) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $12\sqrt{3}$.

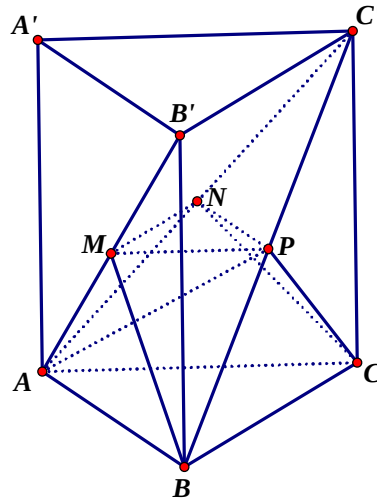
B. $16\sqrt{3}$.

C. $\frac{28\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Chọn A



Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 32\sqrt{3}$; $V_{C'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$; $V_{A.BC'B'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$.

Khối đa diện cần tìm $V = V_{C.ABPN} + V_{P.AMN} + V_{P.ABM}$.

Ta có $V_{C.ABPN} = \frac{3}{4} V_{C'.ABC} = \frac{1}{4} V_{ABC.A'B'C'}$.

Ta có $V_{P.AMN} = \frac{1}{8} V_{ABC'B'} = \frac{1}{24} V_{ABC.A'B'C'}$.

Ta có $V_{P.ABM} = \frac{1}{4} V_{ABC'B'} = \frac{1}{12} V_{ABC.A'B'C'}$.

Vậy thể tích khối cần tìm $V = \frac{1}{4} V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{24} V_{ABC.A'B'C'} + \frac{1}{12} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8} V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{3}$.

Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M là trung điểm cạnh BB' . Mặt phẳng $(MA'D)$ cắt cạnh BC tại K . Tính tỷ số thể tích của khối đa diện $A'B'C'D'MKCD$ và khối lập phương.

A. $\frac{7}{24}$.

B. $\frac{7}{17}$.

C. $\frac{1}{24}$.

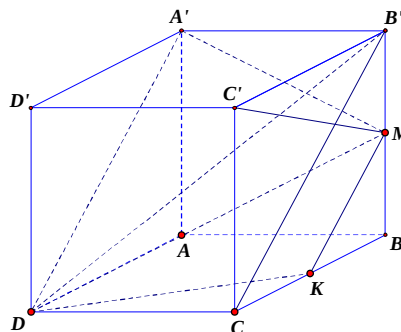
D. $\frac{17}{24}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi K là trung điểm BC thì $MK \parallel B'C$. Mà $B'C \parallel A'D \Rightarrow MK \parallel A'D \Rightarrow K \in (MA'D)$.

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = 1^3 = 1.$$



$$\text{Ta có } S_{A'MBA} = \frac{(A'A + MB) \cdot AB}{2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Nên } V_{D.A'ABM} = \frac{1}{3} \cdot S_{A'MBA} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Dễ thấy } \frac{V_{B.MKD}}{V_{B.CB'D}} = \frac{BM}{BB'} \cdot \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Suy ra:

$$V_{B.MKD} = \frac{1}{4} V_{B.CB'D} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{DBC} \cdot BB' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot DC \cdot BC \cdot BB' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{24}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{A'B'C'D'.MKCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{D.A'ABM} - V_{B.MKD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{24}}{1} = \frac{17}{24}.$$

Câu 40. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N . Tính thể tích khối đa diện $AMNPBCD$.

A. $2a^3$.

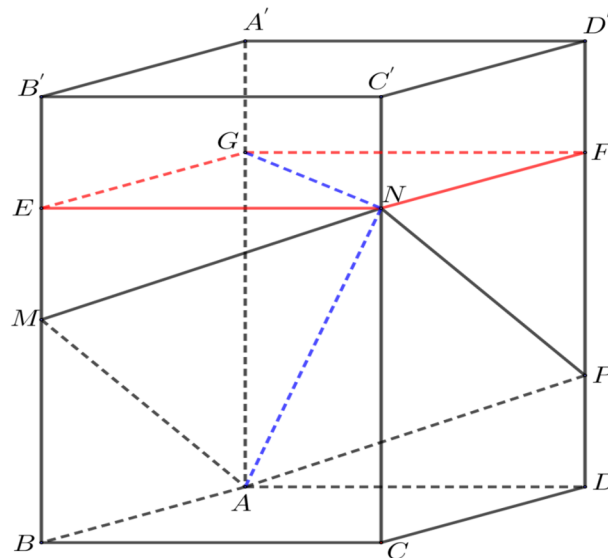
B. $3a^3$.

C. $\frac{9a^3}{4}$.

D. $\frac{11a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \begin{cases} (ABB'A') \cap (CDD'C') \\ (ABB'A') \cap (AMP) = AM \text{ với } N \in CC'; PN \parallel AM \Rightarrow C'N = \frac{1}{4}CC'. \\ (CDD'C') \cap (AMP) = PN \end{cases}$$

Gọi E, G, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BB', AA', DD' sao cho

$$\frac{B'E}{B'B} = \frac{1}{4}; \frac{A'G}{A'A} = \frac{1}{4}; \frac{D'F}{D'D} = \frac{1}{4}.$$

Gọi h, S, V lần lượt là chiều cao, diện tích mặt đáy và thể tích của hình lập phương đã cho.

$$\text{Khi đó, diện tích tứ giác } AMEG \text{ là } S - \frac{S}{4} - \frac{S}{4} = \frac{S}{2}.$$

Suy ra thể tích của khối chóp $N.AMEG$ là $V_{N.AMEG} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{S}{2} = \frac{V}{6}$

Diện tích tứ giác $APFG$ là $S - \frac{S}{4} - \frac{S}{8} = \frac{5S}{8}$.

Suy ra thể tích của khối chóp $N.APFG$ là $V_{N.APFG} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{5S}{8} = \frac{5V}{24}$.

Thể tích của khối hộp $ABCD.GENF$ là $V_{ABCD.GENF} = \frac{3V}{4}$.

Thể tích khối đa diện $AMNPBCD$ là

$$V_{AMNPBCD} = V_{ABCD.GENF} - V_{N.AMEG} - V_{N.APFG} = \frac{3V}{4} - \frac{V}{6} - \frac{5V}{24} = \frac{9V}{24} = \frac{9.8a^3}{24} = 3a^3.$$

Câu 41. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , $AB = 2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC . Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

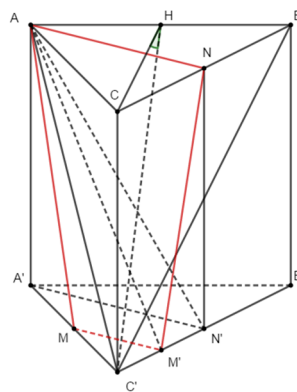
C. $\frac{7\sqrt{6}a^3}{24}$.

D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn A

***Cách 1:**



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow CH \perp AB$.

Tam giác $AC'B$ cân tại $C' \Rightarrow C'H \perp AB$.

Mà $(ABC) \cap (ABC') = AB \Rightarrow ((ABC), (ABC')) = \widehat{CHC'} = 60^\circ$.

$\triangle ABC$ vuông cân tại C có $AB = 2a \Rightarrow AC = CB = a\sqrt{2}; CH = a$.

$\triangle C'CH$ vuông tại $C \Rightarrow CC' = CH \cdot \tan \widehat{CHC'} = a\sqrt{3} = AA' = BB'$.

Gọi N' là trung điểm của $B'C'$, M' là trung điểm của $C'N' \Rightarrow \begin{cases} A'N' // AN \\ MM' // A'N' \end{cases} \Rightarrow MM' // AN$

$\Rightarrow$ thiết diện của hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ cắt bởi mặt phẳng (AMN) là hình thang $AMM'N$ hay mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần, trong đó phần nhỏ là $ACNMC'M'$.

Ta có: $V_{ACNMC'M'} = AA' \cdot S_{\triangle ACN} = a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

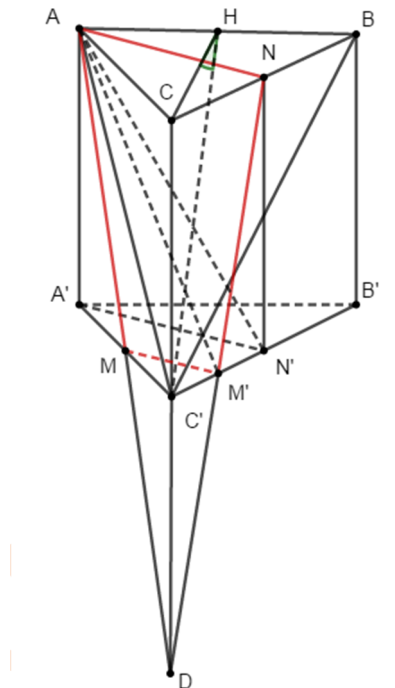
$$S_{A'MM'N'} = S_{A'C'N'} - S_{MC'M'} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{3a^2}{8}.$$

$$V_{A.A'MM'N'} = \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot S_{A'MM'N'} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{3a^2}{8} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$

$$V_{A.M'N'N} = \frac{1}{3} \cdot AC \cdot S_{\Delta M'N'N} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Vậy } V_{ACNMC'M'} = V_{ACNA'C'N'} - V_{A.A'MM'N'} - V_{A.M'N'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2} - \frac{a^3\sqrt{3}}{8} - \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Cách 2:



Kéo dài AM, CC', NM' cắt nhau tại D . Khi đó $V_{ACNMC'M'} = V_{D.ACN} - V_{D.MCM'}.$

$$\text{Ta có: } \frac{DM}{DA} = \frac{DC'}{DC} = \frac{DM'}{DN} = \frac{MC'}{AC} = \frac{CM'}{CN} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2DC' = 2CC' = 2a\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow V_{D.ACN} = \frac{1}{3} \cdot DC \cdot S_{\Delta ACN} = \frac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{D.MCM'} = \frac{1}{3} \cdot DC' \cdot S_{\Delta MCM'} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

$$\Rightarrow V_{ACNMC'M'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} - \frac{a^3\sqrt{3}}{24} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$. Đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm SB , N thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$, P thuộc cạnh SD sao cho $\frac{SP}{SD} = \frac{3}{4}$. Mặt phẳng (MNP) cắt SA, AD, BC lần lượt tại Q, E, F . Biết thể tích khối $SMNPQ$ bằng 1. Tính thể tích khối $ABFEQM$

A. $\frac{73}{15}$

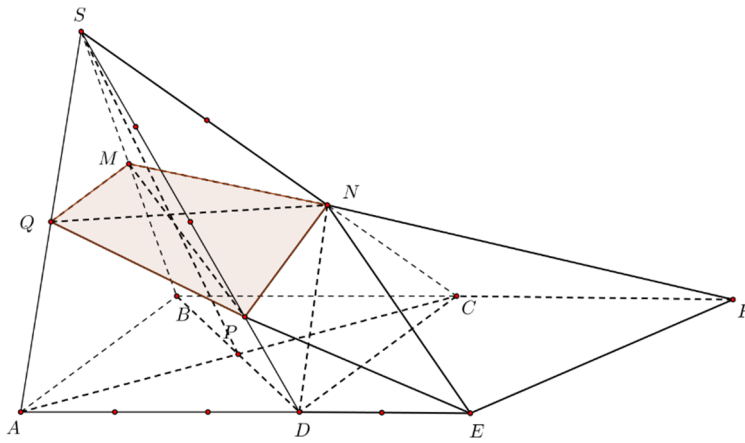
B. $\frac{154}{66}$

C. $\frac{207}{41}$

D. $\frac{29}{5}$

Lời giải

Chọn A



Để chứng minh được $\frac{DE}{DA} = \frac{2}{3}$ và C là trung điểm đoạn BF .

Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Đặt $a = \frac{SA}{SQ}$, $b = \frac{SB}{SM}$, $c = \frac{SC}{SN}$, $d = \frac{SD}{SP}$

Ta có $b = 2$, $c = \frac{3}{2}$, $d = \frac{4}{3}$ Vì $a + c = b + d \Rightarrow a = \frac{11}{6}$

$$+) \frac{V_{S.MNPQ}}{V} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{\frac{11}{6} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{4 \cdot \frac{11}{6} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{5}{22}.$$

Vì $V_{SMPQ} = 1$ nên $V = \frac{22}{5}$.

$$+) \frac{V_{ABFEQM}}{V} = \frac{V_{ABCDMPQ}}{V} + \frac{V_{N.DCFE}}{V} + \frac{V_{N.EDP}}{V}.$$

$$+) \frac{V_{ABCDMPQ}}{V} = 1 - \frac{V_{SMNQ}}{V} = 1 - \frac{5}{22} = \frac{17}{22}$$

$$+) \frac{V_{N.DCFE}}{V} = \frac{\frac{1}{3}d(N,(DCF E))}{\frac{1}{3}d(S,(ABCD))} \cdot \frac{S_{DCF E}}{S_{ABCD}} = \frac{CN}{CS} \cdot \frac{\frac{1}{2}d(C,DE) \cdot DE + \frac{1}{2}d(E,CF) \cdot CF}{d(B,AD) \cdot AD}$$

$$= \frac{CN}{CS} \cdot \frac{\frac{1}{2}(DE+CF)}{AD} = \frac{CN}{CS} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{DE}{AD} + \frac{CF}{CB} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{5}{18}, (3).$$

$$+ \frac{V_{N.EDP}}{V} = \frac{V_{N.EDP}}{2V_{C.SAD}} = \frac{\frac{1}{3}d(N,(EDP))}{2 \cdot \frac{1}{3}d(C,(SAD))} \cdot \frac{S_{EDP}}{S_{SAD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot \frac{DPDE}{DSDA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$$

$$\text{Thế (2), (3), (4) vào (1) ta được } \frac{V_{ABFEQM}}{V} = \frac{17}{22} + \frac{5}{18} + \frac{1}{18} = \frac{73}{66}$$

$$\text{Suy ra } V_{ABFEQM} = \frac{73}{66} \cdot V = \frac{73}{66} \cdot \frac{22}{5} = \frac{73}{15}$$

Nhận xét: Có thể đặc biệt hóa hình chóp với đáy là hình vuông. Khi đó tính $V_{NDCF E}$ dễ hơn vì đáy $DCF E$ là hình thang vuông.

Câu 43. Cho hình chóp $SABC$ có diện tích đáy bằng 10, chiều cao bằng 9. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, SBC, SCA . Thể tích của khối đa diện $ABCMNP$.

A. 60

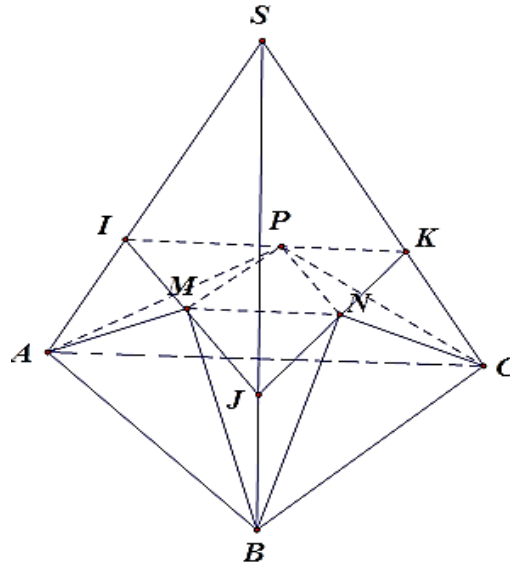
B. $\frac{175}{3}$.

C. $\frac{560}{9}$.

D. $\frac{160}{9}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } V_{SIJK} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot V_{SABC} = \frac{8}{27} V_{SABC}$$

$$\Rightarrow V_{IJKABC} = \frac{19}{27} V_{SABC} = \frac{19}{27} \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 10 = \frac{190}{9}$$

$$V_{ABC.MNP} = V_{ABCIJK} - (V_{B.MNJ} + V_{A.MIP} + V_{C.NPK}) \text{ mà } V_{B.MNJ} = V_{A.MIP} = V_{C.NPK}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.MNP} = V_{ABCIJK} - 3V_{B.MNJ}$$

$$\text{Có } V_{BMNJ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNJ} \cdot h_b; h_b = d(B, (IJK))$$

$$S_{\Delta IJK} = \frac{4}{9} S_{\Delta ABC} = \frac{4}{9} \cdot 10 = \frac{40}{9}$$

$$\text{Mà } S_{\Delta MNJ} = \frac{1}{4} \cdot S_{\Delta IJK} = \frac{10}{9}; h_b = \frac{1}{3} h = 3$$

$$\Rightarrow V_{BMNJ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{9} \cdot 3 = \frac{10}{9}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCMNP} = \frac{190}{9} - 3 \cdot \frac{10}{9} = \frac{160}{9}$$

$$+ \text{ Phương án nhiều A: HS nhầm với } V_{SABC} = Bh = 9 \cdot 10 = 90$$

$$+ \text{ Phương án nhiều B: HS nhầm với } S_{\Delta IJK} = \frac{2}{3} S_{\Delta ABC}; V_{SABC} = Bh$$

$$+ \text{ Phương án nhiều C: HS nhầm với } V_{ABC.MNP} = V_{ABCIJK} - V_{B.MNJ}$$

Câu 44. Cho tứ diện đều $ABCD$ có thể tích là V . Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, AC, DC, BD và G là điểm đối xứng của B qua PN . Tính thể tích khối đa diện lồi $GMNPQR$ theo V

A. $\frac{V}{2}$.

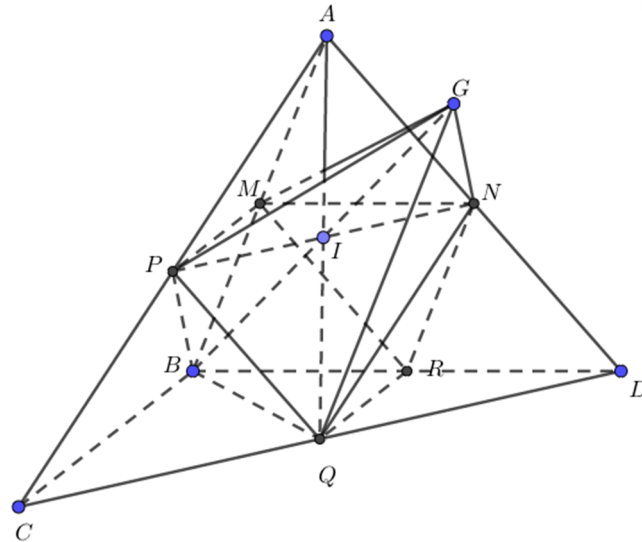
B. $\frac{V}{6}$.

C. $\frac{2V}{5}$.

D. $\frac{5V}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của PN thì I cũng là trung điểm của AQ .

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $BI \perp NP$.

G đối xứng với B qua $NP \Leftrightarrow I$ là trung điểm của BG .

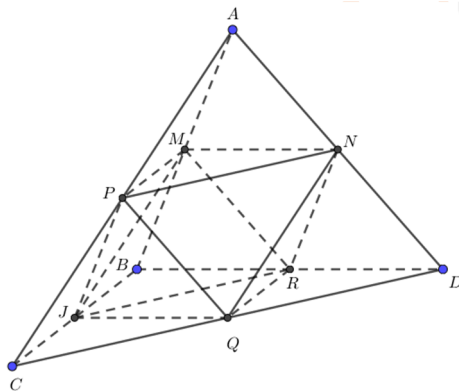
$$V_{GMNPQR} = V_{G.MNP} + V_{G.NPQ} + V_{N.MPQR}$$

Do I là trung điểm của AQ và BG nên $ABQG$ là hình bình hành nên $AG \parallel BQ \parallel MI \Rightarrow AG \parallel (PMN)$

$$\Rightarrow d(G, (MNP)) = d(A, (MNP)) \text{ nên } V_{G.MNP} = V_{A.MNP} = \frac{V}{8}.$$

I là trung điểm của BG nên $d(G, (PNQ)) = d(B, (PNQ))$

$$\Rightarrow V_{G.PNQ} = V_{B.PNQ} = \frac{1}{3}d(B, (ACD)).S_{PQN} = \frac{1}{4}V.$$



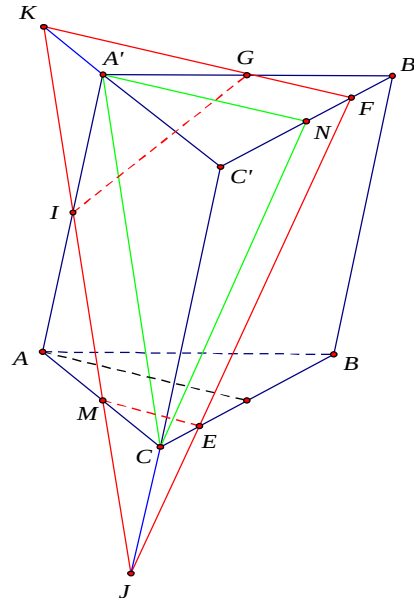
Gọi J là trung điểm $BC \Rightarrow V_{N.MPQR} = \frac{1}{2}V_{JPMRQN} = \frac{1}{2} \frac{V}{2} = \frac{V}{4}$.

$$\text{Vậy } V_{MNPQR} = V_{G.MNP} + V_{G.NPQ} + V_{N.MPQR} = \frac{V}{8} + \frac{V}{4} + \frac{V}{4} = \frac{5V}{8}.$$

Câu 45. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC và $B'C'$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng $(A'NC)$. Mặt phẳng (P) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh T Thể tích của khối đa diện (H) bằng

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V

- Mặt phẳng (P) qua M và song song với mặt phẳng $(A'NC)$ nên mặt phẳng (P) cắt các mặt phẳng $(ABC), (A'B'C')$ lần lượt theo các giao tuyến ME, GF ($E \in BC, G \in A'B', F \in B'C'$) cùng song song $A'N$

- Mặt phẳng (P) cắt các mặt phẳng $(AA'C'C), (BB'C'C)$ lần lượt theo các giao tuyến MI ($I \in AA'$) song song $A'C$, EF song song CN . Ba đường thẳng $MI, FG, A'C'$ đồng quy tại K , ba đường thẳng MI, EF, CC' đồng quy tại J .

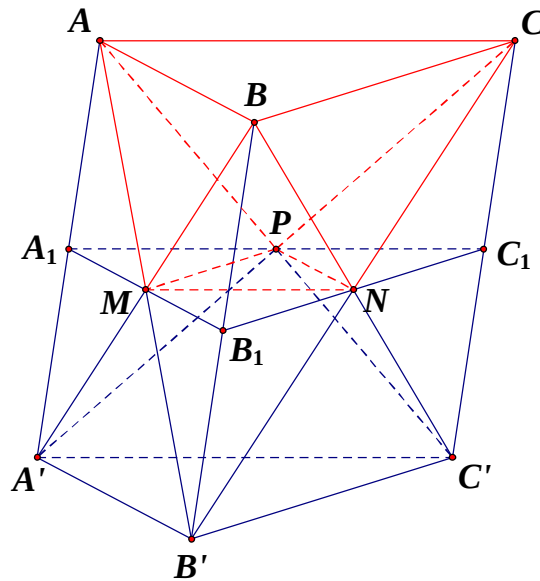
- Mặt phẳng (P) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, gọi (T) là khối đa diện không chứa đỉnh Thể tích của khối đa diện (T) bằng

$$V_1 = V_{J.C'FK} - V_{J.CEM} - V_{I.A'GK}$$

$$= \frac{1}{3} S_{\Delta C'FK} \cdot JC' - \frac{1}{3} S_{\Delta CEM} \cdot JC - \frac{1}{3} S_{\Delta A'GK} \cdot IA' = \frac{9}{16} V - \frac{1}{48} V - \frac{1}{24} V = \frac{1}{2} V.$$

Câu 46. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', BCC'B'$ và $ACC'A'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng:

A. $6\sqrt{3}$.B. $18\sqrt{3}$.C. $9\sqrt{3}$.D. $3\sqrt{3}$.**Lời giải.**

**Chọn C**

Mặt phẳng (MNP) cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1 .

Dễ thấy, $(MNP) \parallel (ABC)$ và (MNP) chia khối lăng trụ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Gọi V là thể tích khối đa diện cần tìm. Khi đó:

$$V = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} - V_{AA_1MP} - V_{CC_1PN} - V_{BB_1MN}$$

$$\text{Mặt khác: } V_{AA_1MP} = \frac{1}{3}d(A, (MNP)) \cdot S_{\Delta A_1MP}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d(A, (A'B'C')) \cdot \frac{1}{4}S_{A'B'C'} = \frac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Tương tự: } V_{CC_1PN} = V_{BB_1MN} = \frac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Do đó: } V = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} - \frac{3}{24}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8} \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 8 = 9\sqrt{3}$$

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, I là trung điểm của BB' . Mặt phẳng (DIC') chia khối lập phương thành 2 phần. Tỉ số thể tích của phần bé và phần lớn là

A. $\frac{5}{19}$.

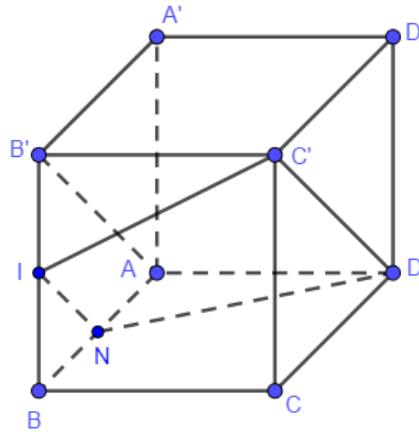
B. $\frac{9}{15}$.

C. $\frac{7}{17}$.

D. $\frac{10}{17}$.

Lời giải

Chọn C



Trong $(BAA'B')$ kẻ $IN \parallel AB'$, $N \in AB \Rightarrow NA = NB$

Vì $AB' \parallel DC'$ $\Rightarrow$ mặt phẳng (IDC') cắt AB tại N . Do đó mặt phẳng (DIC') chia hình lập phương thành 2 khối đa diện: khối $C'INDCB$ có thể tích là V_1 và phần còn lại có thể tích là V_2 . Giả sử cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng a .

$$\text{Ta có: } V_{C'DAB'IN} = V_{C'.ADN} + V_{C'.ANIB'} = \frac{1}{3}CC'.S_{ADN} + \frac{1}{3}C'B'.S_{ANIB'}.$$

$$\text{Mà } S_{ADN} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} \text{ và } S_{IBN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$$

$$\Rightarrow S_{ANIB'} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow V_{C'DAB'IN} = \frac{5a^3}{24}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{2}a^3 - \frac{5a^3}{24} = \frac{7a^3}{24}$$

$$\text{Phần còn lại có thể tích là } V_2 = a^3 - \frac{7a^3}{24} = \frac{17a^3}{24} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{17}.$$

Các cách giải khác:

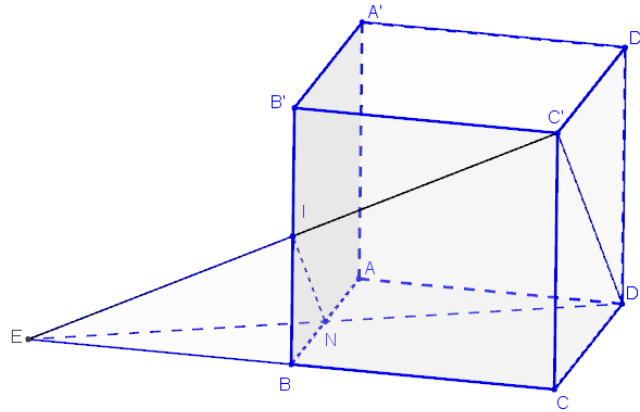
Cách 1: Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3$.

$$S_{DCC'} = \frac{1}{2}a^2, S_{BIN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{8}a^2$$

$$V_{BIN.CC'D} = \frac{1}{3}BC(S_{BIN} + \sqrt{S_{BIN} \cdot S_{CC'D}} + S_{CC'D}) = \frac{1}{3}a\left(\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{7a^3}{24}$$

$$\text{Thể tích phần còn lại là } a^3 - \frac{7a^3}{24} = \frac{17a^3}{24}. \text{ Tỉ số cần tính là } \frac{7}{17}.$$

Cách 2:



Gọi E là giao điểm của CB và DN , ta có

$$V_{E.DCC'} = 2 \cdot \frac{1}{3} V_{ABB'.DCC'} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3} V.$$

$$V_{E.BNI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} V. \text{ Suy ra } V_{BNI.CDC'} = \frac{1}{3} V - \frac{1}{24} V = \frac{7}{24} V.$$

Thể tích phần còn lại là $V - \frac{7}{24} V = \frac{17}{24} V$. Tỉ số cần tính là $\frac{7}{17}$.

Câu 48. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

A. 27.

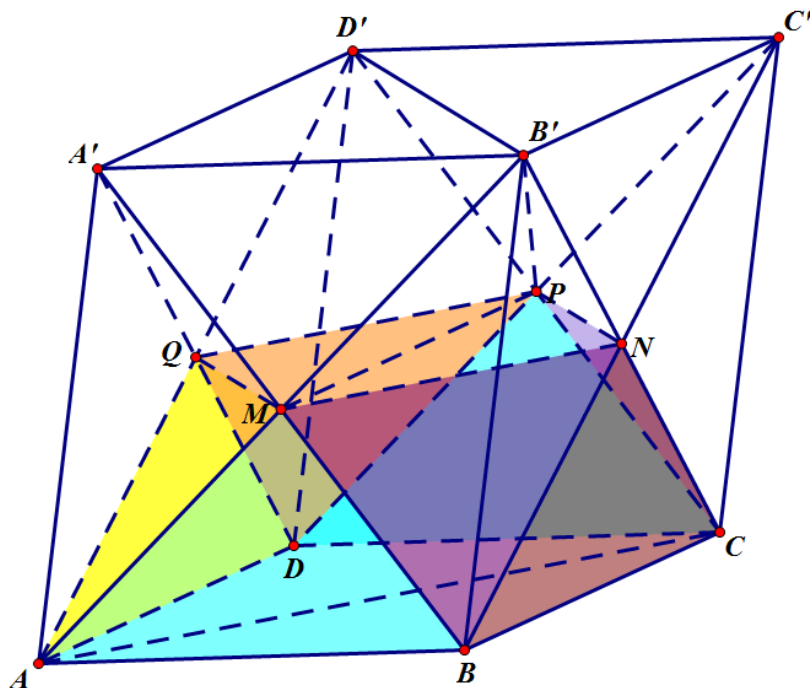
B. 30.

C. 18.

D. 36.

Lời giải

Chọn B



Ký hiệu V và V' lần lượt là thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q ta có:

$$V' = V - V_{A'.AB'D'} - V_{C'.CB'D'} - V_{B'.BMN} - V_{D'.DPQ} - V_{P.QMB'D'} - V_{P.MNB'}$$

Vì

$$V = 8 \cdot 9 = 72$$

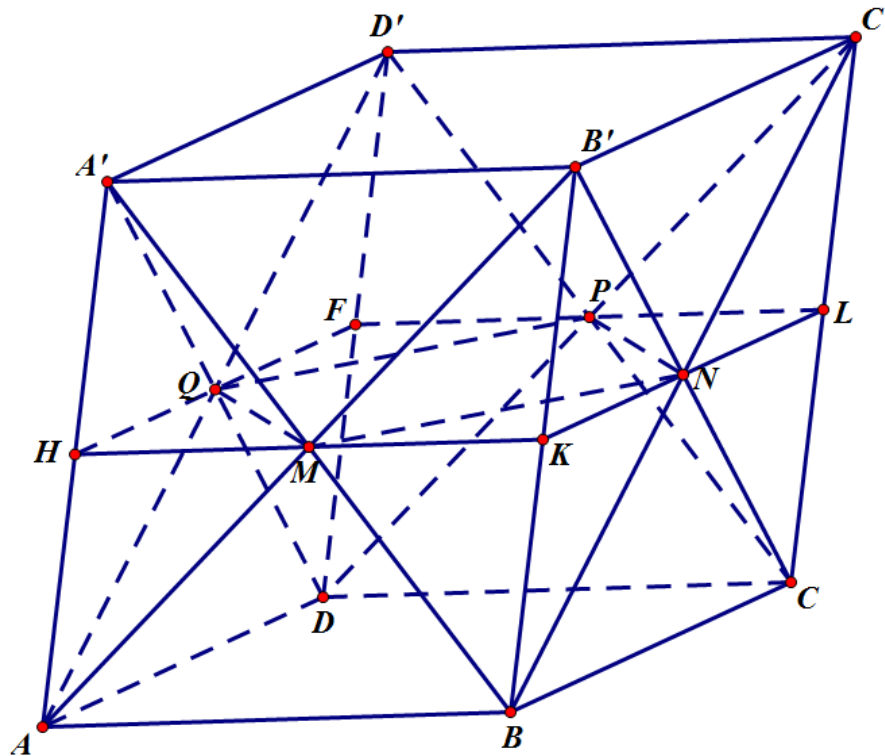
$$V_{A'.AB'D'} = V_{C'.CB'D'} = \frac{V}{6};$$

$$V_{B'.BMN} = V_{D'.DPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{D'.DAC} = \frac{V}{24}$$

$$V_{P.QMB'D'} = V_{A'.QMB'D'} = \frac{3}{4} \cdot \frac{V}{6} = \frac{V}{8} \text{ và } V_{P.MNB'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} V_{D'.ACB'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{V}{3} = \frac{V}{24}$$

$$\text{Nên } V' = \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) \cdot 72 = 30.$$

Cách khác:



Gọi H, K, L, F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên AA', BB', CC' và DD' ta có

$$V_{ABCDQMNP} = \frac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{A.HQM} = \frac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 36 - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot 72 = 30$$