

## TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC LIÊN QUAN TỚI ĐƯỜNG TRÒN



*Bạn có thể giải bài toán này trong 30s mà vẫn tự tin với kết quả của mình hay không?*

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 2 - 3i| = 1$ . Giá trị lớn nhất của  $|\bar{z} + 1 + i|$  là:

A.  $\sqrt{13} + 2$

B. 4

C. 6

D.  $\sqrt{13} + 1$

*(Trích: Đề thi thử trường THPT Chuyên Phan Bội Châu- Nghệ An-Lần2)*

*Và cả bài toán này nữa, chỉ 5s có thể cho kết quả chính xác hay không?*

Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 4$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $w = (3 + 4i)z + i$  là một đường tròn. Tính bán kính  $r$  của đường tròn đó.

A.  $r = 4$

B.  $r = 5$

C.  $r = 20$

D.  $r = 22$

*(Trích: Đề minh họa lần 1- Bộ GD-ĐT)*

***Hay có bao giờ bạn đặt câu hỏi rằng:***

Nếu trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là đường tròn và với  $z_1; z_2 \in \mathbb{C}$  thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $w = z_1 z + z_2$  là hình gì hay chưa? Liệu rằng nó có còn là một đường tròn hay không? Và nếu đúng tập hợp các điểm biểu diễn  $w$  là đường tròn thật thì tâm và bán kính của nó tính bằng cách nào cho nhanh ?

***Chúng ta cùng nhau tìm hiểu kết quả nhé!***

## TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC LIÊN QUAN TỚI ĐƯỜNG TRÒN

### Kết quả quen thuộc:

**KQ 1:** Cho  $z_1 \in \mathbb{C}$ , số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - z_1| = R$ . Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là đường tròn  $(I_1; R)$ , trong đó  $I_1$  là điểm biểu diễn của số phức  $z_1$  trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

### Kết quả ta có trong bài đọc này: (Các kết quả xét trong hệ tọa độ Oxy)

**KQ 2:** Cho  $z_1; z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0$ , số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - z_1| = R$ .

Khi đó ta có:

- Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w_1 = z \cdot z_2$  là đường tròn, tâm là điểm biểu diễn của  $z_1 \cdot z_2$ , bán kính  $R \cdot |z_2|$
- Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w_2 = \frac{z}{z_2}$  là đường tròn, tâm là điểm biểu diễn của  $\frac{z_1}{z_2}$ , bán kính  $\frac{R}{|z_2|}$
- Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w_3 = z + z_2$  là đường tròn, tâm là điểm biểu diễn của  $z_1 + z_2$ , bán kính  $R$
- Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w_4 = z - z_2$  là đường tròn, tâm là điểm biểu diễn của  $z_1 - z_2$ , bán kính  $R$

### Chứng minh:

$$|w_1 - z_1 \cdot z_2| = |z \cdot z_2 - z_1 \cdot z_2| = |z - z_1| \cdot |z_2| = R \cdot |z_2| \quad \text{hay} \quad |w_1 - z_1 \cdot z_2| = R \cdot |z_2|$$

$$\left| w_2 - \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z}{z_2} - \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z - z_1}{z_2} \right| = \frac{|z - z_1|}{|z_2|} = \frac{R}{|z_2|} \quad \text{hay} \quad \left| w_2 - \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{R}{|z_2|}$$

$$|w_3 - (z_1 + z_2)| = |z + z_2 - (z_1 + z_2)| = |z - z_1| = R \quad \text{hay} \quad |w_3 - (z_1 + z_2)| = R$$

$$|w_4 - (z_1 - z_2)| = |z - z_2 - (z_1 - z_2)| = |z - z_1| = R \quad \text{hay} \quad |w_4 - (z_1 - z_2)| = R$$

Và từ KQ1 ta có KQ 2! 😊

**KQ3:** Cho  $z_1; z_2; z_3 \in \mathbb{C}$ , số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - z_1| = R$ . Khi đó:

Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w = z_2 z + z_3$  là một đường tròn, tâm là điểm biểu diễn của số phức  $z_2 z_1 + z_3$ , bán kính  $|z_2| \cdot R$

**Chứng minh KQ3 tương tự KQ2**

Các bạn đã sẵn sàng chưa? Chúng ta cùng luyện tập nhé !

## VÍ DỤ VẬN DỤNG

**Ví dụ 1:** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 1 + i| = 7$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $w = (3 + 4i)z$  là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính  $r$  của đường tròn đó.

**HD:**  $|z - 1 + i| = 7 \Leftrightarrow |z - (1 - i)| = 7$

Tâm  $I$  là điểm biểu diễn số phức  $(3 + 4i)(1 - i) = 7 + i$ , tức  $I(7; 1)$

Bán kính  $r = |3 + 4i| \cdot 7 = 35$ .

**Ví dụ 2:** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + i| = 5$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $w = \frac{z}{2 - 3i}$  là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính  $r$  của đường tròn đó.

**HD:** Tâm  $I$  là điểm biểu diễn số phức  $\frac{-i}{2 - 3i} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ , tức  $I\left(\frac{3}{13}; -\frac{2}{13}\right)$

Bán kính  $r = \frac{5}{|2 - 3i|} = \frac{5}{\sqrt{13}}$ .

**Ví dụ 3:** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 3 + i| = 4$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $w = z + 5 - 7i$  là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính  $r$  của đường tròn đó.

**HD:**  $|z - 3 + i| = 4 \Leftrightarrow |z - (3 - i)| = 4$

Tâm  $I$  là điểm biểu diễn số phức  $(3 - i) + (5 - 7i) = 8 - 8i$ , tức  $I(8; -8)$

Bán kính  $r = 4$ .

**Ví dụ 4:** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 6 + i| = 4$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $w = (1 + 3i)z - 5 - 2i$  là một đường tròn. Tìm tâm và bán kính  $r$  của đường tròn đó.

**HD:**  $|z - 6 + i| = 4 \Leftrightarrow |z - (6 - i)| = 4$ .

Tâm  $I$  là điểm biểu diễn số phức  $(1 + 3i)(6 - i) - 5 - 2i = 4 + 15i$ , tức  $I(4; 15)$

Bán kính  $r = |1 + 3i| \cdot 4 = 4\sqrt{10}$ .

**Ví dụ 5: (Đề minh họa lần 1 – Bộ GD-ĐT)**

Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 4$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $w = (3 + 4i)z + i$  là một đường tròn. Tính bán kính  $r$  của đường tròn đó.

**A.**  $r = 4$

**B.**  $r = 5$

**C.**  $r = 20$

**D.**  $r = 22$

**HD:** Bán kính  $r = |3 + 4i| \cdot 4 = 20$ .

**Ví dụ 6: (Đề thi thử trường THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình).**

Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 3 + 4i| \leq 2$ . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $w = 2z + 1 - i$  là hình tròn có diện tích bằng:

A.  $S = 9\pi$

B.  $S = 12\pi$

C.  $S = 16\pi$

D.  $S = 25\pi$ .

**HD:** Tập hợp điểm  $z$  là hình tròn bán kính 2, tập hợp  $w$  là hình tròn bán kính  $2.2 = 4$ . Vậy  $S = 16\pi$

**Ví dụ 7: (Chuyên Lê Hồng Phong- Nam Định).**

Biết rằng  $|z - 1| = 2$  và tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$  là một đường tròn. Xác định bán kính của đường tròn đó.

A.  $r = 4$

B.  $r = 9$

C.  $r = 16$

D.  $r = 25$ .

**HD:** Tập hợp  $z$  là đường tròn bán kính 2  $\Rightarrow w$  là đường tròn bán kính  $r = |1 + i\sqrt{3}|.2 = 4 \Rightarrow$  **Chọn A.**

**Ví dụ 8: (Chuyên Đại học Vinh- Lần 3. Mã đề 123 )**

Cho số phức  $z$  thay đổi luôn có  $|z| = 2$ . Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w = (1 - 2i)\bar{z} + 3i$  là:

A. Đường tròn  $x^2 + (y - 3)^2 = 20$ .

B. Đường tròn  $x^2 + (y - 3)^2 = 2\sqrt{5}$ .

C. Đường tròn  $x^2 + (y + 3)^2 = 20$ .

D. Đường tròn  $(x - 3)^2 + y^2 = 2\sqrt{5}$ .

**HD:** Ta có  $|z| = 2 \Leftrightarrow |\bar{z}| = 2 \Leftrightarrow |\bar{z} - 0| = 2$

Tập hợp  $w$  là đường tròn, tâm  $I$  là điểm biểu diễn số phức  $(1 - 2i).0 + 3i = 3i$ , tức  $I(0;3)$  và bán kính  $R = |1 - 2i|.2 = 2\sqrt{5}$ . Đáp án: **A**

**Ví dụ 9: (THPT Thanh Chương I – Lần 2)**

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 1| = 2$ . Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $w = (1 + 2i)z - i$  là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn đó?

A.  $I(-1; -2)$

B.  $I(1; 2)$

C.  $I(-1; -3)$ .

D.  $I(1; 3)$

**HD:** Ta có :  $|z + 1| = 2 \Leftrightarrow |z - (-1)| = 2$ .

Tâm  $I$  là điểm biểu diễn số phức  $(1 + 2i)(-1) - i = -1 - 3i \Rightarrow I(-1; -3)$

**Ví dụ 10: (THPT Chuyên Phan Bội Châu- Nghệ An- Lần 3)**

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 2 - 3i| = 1$ . Giá trị lớn nhất của  $|\bar{z} + 1 + i|$  là:

A.  $\sqrt{13} + 2$

B. 4

C. 6

D.  $\sqrt{13} + 1$

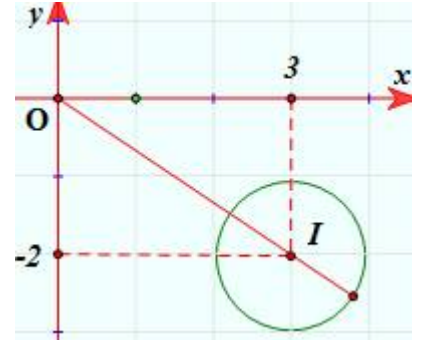
**HD:**

$$\text{Ta có } |z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z - 2 - 3i}| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z} - \overline{2 + 3i}| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z} - (2 - 3i)| = 1$$

$$\text{Đặt } w = \overline{z} + 1 + i.$$

Tập hợp điểm biểu diễn  $w$  là đường tròn tâm  $I$  là điểm biểu diễn của số phức  $2 - 3i + 1 + i = 3 - 2i$ , tức  $I(3; -2)$ , bán kính  $R = 1$ .

$$\text{Vậy } |w|_{\max} = OI + R = \sqrt{3^2 + (-2)^2} + 1 = \sqrt{13} + 1$$



**Ví dụ 11: (Đề thi thử chuyên KHTN lần 1)**

Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $|z|$ .

A.  $\max |z| = 4$ .

B.  $\max |z| = 3$ .

C.  $\max |z| = 7$ .

D.  $\max |z| = 6$ .

**HD:** Đặt  $w = (1+i)z + 1 - 7i \Rightarrow z = \frac{w - (1-7i)}{1+i}$ .

Ta có  $|w| = \sqrt{2}$ . Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là đường tròn tâm  $I$  là điểm biểu diễn số phức

$$\frac{0 - (1 - 7i)}{1 + i} = 3 + 4i, \text{ tức } I(3; 4), \text{ bán kính } R = \frac{\sqrt{2}}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

$$\text{Vậy } \max |z| = OI + R = 6.$$

*Đây là quà tặng của cô dành cho các bạn 99er nhé! Xin chúc tất cả các em luôn vui vẻ và luôn nhớ về mái trường, thầy cô, bạn bè cùng những kỉ niệm tuổi học trò.*

*"Nỗ lực nửa vời là thất bại đích đáng". Vì thế các em hãy kiên trì, quyết tâm cho tới khi thực hiện được ước mơ của mình nhé! Chúc tất cả thành công!*

*Cảm ơn các bạn đã đọc tài liệu. Rất mong sự góp ý chân thành từ các bạn.*

*Mọi ý kiến đóng góp xin các bạn gửi vào Gmail: [thanhdangvq@gmail.com](mailto:thanhdangvq@gmail.com)*

Biên soạn tài liệu:

Cô: Đặng Thanh. SĐT: 0986.668.718

Facebook: [thanhdangvq](https://www.facebook.com/thanhdangvq)