

Tiêu Phức Thừa

Tài liệu
Luyện thi

THPT QUỐC GIA

BỘ CÂU HỎI TỪ CÁC ĐỀ BGD

2020

Câu hỏi trắc nghiệm nguồn đề
chính thức các năm của BGD

MỤC LỤC

1. Bài toán chỉ sử dụng P hoặc C hoặc A	5
2. Bài toán kết hợp P, C và A	6
3. Nhị thức newton.....	7
4. Tính xác suất bằng định nghĩa.....	9
5. Tính xác suất bằng công thức cộng	12
6. Tính xác suất bằng công thức nhân	13
7. Tính xác suất kết hợp công thức nhân và cộng	13
8. Nhận diện cấp số cộng.....	15
9. Tìm hạng tử cấp số cộng.....	15
10. Giới hạn dãy số	16
11. Giới hạn hàm số.....	16
12. Bài toán tiếp tuyến	17
13. Bài toán quãng đường vận tốc gia tốc.....	20
14. Xét tính đơn điệu dựa vào công thức	20
15. Xét tính đơn điệu dựa vào công thức	24
16. Tìm điều kiện để hàm số đơn điệu.....	32
17. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình.....	37
18. Cực trị hàm số cho bởi công thức.....	52
19. Tìm cực trị dựa vào bbt, đồ thị.....	55
20. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại 1 điểm x_0 cho trước.....	65
21. Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số bậc ba có cực trị thỏa mãn điều kiện.....	67
22. Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn đk	68
23. Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số các hàm số khác có cực trị thỏa mãn điều kiện.....	70
24. Giá trị nhỏ nhất, Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn.....	71
25. Giá trị nhỏ nhất, Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng.....	78
26. Ứng dụng Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất, toán thực tế	79
27. Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số (không chứa tham số) hoặc biết bbt, đồ thị	83
28. Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số có chứa tham số	90

29. Bài toán liên quan đến đồ thị hàm số và các đường tiệm cận	92
30. Câu hỏi lý thuyết về tiệm cận.....	92
33. Biện luận nghiệm phương trình.....	102
34. Sự tương giao của hai đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm)	105
35. Điểm đặc biệt của đồ thị hàm số.....	108
36. Lũy thừa	110
37. Tập xác định hàm số lũy thừa	111
38. Tính giá trị biểu thức chứa lô-ga-rít	112
39. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lô-ga-rít	113
40. So sánh các biểu thức lô-ga-rít	119
41. Tập xác định của hàm số mũ hàm số logarit.....	120
42. Tính đạo hàm hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít	122
43. Khảo sát sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ, lô-ga-rít	124
44. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức chứa hàm mũ, hàm lô-ga-rít	126
45. Bài toán thực tế về hs mũ, logarit.....	127
46. Lý thuyết tổng hợp hàm số lũy thừa, mũ, lô-ga-rít.....	131
47. Phương trình cơ bản	131
48. Đưa về cùng cơ số	134
49. Đặt ẩn phụ.....	138
50. Dùng phương pháp hàm số đánh giá	142
51. Toán thực tế	152
52. Bất phương trình cơ bản.....	154
53. Đưa về cùng cơ số	155
54. Đặt ẩn phụ.....	156
55. Toán thực tế	156
56. Sử dụng định nghĩa-tính chất cơ bản	156
57. Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần	163
58. Tích phân cơ bản	164
59. Phương pháp đổi biến	169

60. Phương pháp từng phần	171
61. Hàm đặc biệt hàm ẩn	173
62. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị	180
63. Bài toán thực tế sử dụng diện tích hình phẳng	194
64. Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay).....	197
65. Thể tích tính theo mặt cắt $s(x)$	201
66. Toán thực tế	201
67. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức	205
Câu 21: Biểu diễn hình học cơ bản của số phức.....	209
69. Thực hiện phép tính cộng, trừ, nhân số phức	213
70. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán.....	214
71. Bài toán quy về giải phương trình, hệ phương trình nghiệm thực.....	218
72. Bài toán tập hợp điểm số phức	220
73. Phép chia số phức.....	223
74. Phương trình bậc hai với hệ số thực	225
75. Phương trình quy về bậc hai.....	228
76. Phương pháp hình học.....	228
77. Phương pháp đại số	229
78. Xác định góc giữa hai đường thẳng (dùng định nghĩa)	230
79. Xác định góc giữa mặt phẳng và đường thẳng.....	231
80. Xác định góc giữa hai mặt phẳng	234
81. Góc giữa 2 vectơ, 2 đường thẳng trong hình lăng trụ, hình lập phương	238
82. Khoảng cách điểm đến đường mặt	241
83. Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau.....	248
84. Xác định số đỉnh, cạnh, mặt bên của một khối đa diện.....	252
85. Phân chia, lắp ghép các khối đa diện	252
86. Phép biến hình trong không gian	253
87. Diện tích xung quanh diện tích toàn phần	254
88. Tính thể tích các khối đa diện.....	254
89. Tỷ số thể tích	276

90. Các bài toán khác(góc, khoảng cách,) Liên quan đến thể tích khối đa diện	279
91. Toán thực tế.....	281
92. Cực trị	282
93. Thể tích khối nón, khối trụ.....	285
94. Diện tích xung quanh, toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính	289
95. Khối tròn xoay nội tiếp, ngoại tiếp khối đa diện.....	295
96. Bài toán thực tế về khối nón, khối trụ.....	297
97. Bài toán sử dụng định nghĩa, tính chất, vị trí tương đối	300
98. Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện.....	300
99. Toán tổng hợp về mặt cầu.....	305
100. Tìm tọa độ điểm, véc-tơ liên quan đến hệ trục oxyz	308
101. Tích vô hướng và ứng dụng	312
102. Phương trình mặt cầu (xác định tâm, bán kính, viết pt mặt cầu đơn giản, vị trí tương đối hai mặt cầu, điểm đến mặt cầu, đơn giản).....	312
103. Các bài toán cực trị.....	316
104. Tích có hướng và ứng dụng.....	320
105. Xác định vectơ pháp tuyến.....	321
106. Viết phương trình mặt phẳng.....	323
107. Tìm tọa độ điểm liên quan đến mặt phẳng	332
108. Các bài toán khoảng cách.....	333
109. Các bài toán xét vị trí tương đối.....	333
110. Các bài toán cực trị.....	334
111. Xác định vtcp.....	335
112. Viết phương trình đường thẳng	337
113. Tìm tọa độ điểm liên quan đường thẳng.....	345
114. Khoảng cách	347
115. Vị trí tương đối.....	347
116. Tổng hợp mặt phẳng đường thẳng mặt cầu.....	349
117. Các bài toán cực trị.....	355
118. Ứng dụng phương pháp tọa độ.....	358

1. Bài toán chỉ sử dụng P hoặc C hoặc A

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

- A. A_{10}^8 . B. A_{10}^2 . C. C_{10}^2 . D. 10^2 .

Lời giải

Chọn C

Số tập con gồm 2 phần tử của M là số cách chọn 2 phần tử bất kì trong 10 phần tử của M . Do đó số tập con gồm 2 phần tử của M là C_{10}^2 .

Câu 2: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh?

- A. 2^{34} . B. A_{34}^2 . C. 34^2 . D. C_{34}^2 .

Lời giải

Chọn D

Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 34 phần tử nên số cách chọn là C_{34}^2 .

Câu 3: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm 38 học sinh?

- A. A_{38}^2 . B. 2^{38} . C. C_{38}^2 . D. 38^2 .

Lời giải

Chọn C.

Câu 4: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là

- A. 2^7 . B. A_7^2 . C. C_7^2 . D. 7^2 .

Lời giải

Chọn C.

Câu 5: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Số cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là

- A. m . B. 2^5 . C. C_5^2 . D. A_5^2 .

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là C_5^2 .

Câu 6: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Số các chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là

- A. A_6^2 . B. C_6^2 . C. 2^6 . D. 6^2 .

Lời giải

Chọn B

Câu 7: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Số cách chọn 2 học sinh từ 8 học sinh là

A. C_8^2 .

B. 8^2 .

C. A_8^2 .

D. 2^8 .

Lời giải

Chọn A

Ta chọn 2 học sinh từ 8 học sinh C_8^2 .

Câu 8: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

B. $C_n^k = \frac{n!}{k!}$.

C. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

D. $C_n^k = \frac{k!(n-k)!}{n!}$.

Lời giải

Chọn A

Số các số tổ hợp chập k của n được tính theo công thức: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (SGK 11)

Câu 9: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?

A. C_7^2 .

B. 2^7 .

C. 7^2 .

D. A_7^2 .

Lời giải

Chọn D

Số các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau được lấy ra từ 7 chữ số trên là: A_7^2 .

Câu 10: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?.

A. 2^8 .

B. C_8^2 .

C. A_8^2 .

D. 8^2 .

Lời giải

Chọn C

Số số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 là số cách chọn 2 chữ số khác nhau từ 8 số khác nhau có thứ tự.

Vậy có A_8^2 số.

2. Bài toán kết hợp P, C và A

Câu 11: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

A. $\frac{11}{630}$.

B. $\frac{1}{126}$.

C. $\frac{1}{105}$.

D. $\frac{1}{42}$.

Lời giải

Chọn A

Số cách xếp 10 học sinh vào 10 vị trí: $n(\Omega) = 10!$ cách.

Gọi A là biến cố: “Trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau”.

Sắp xếp 5 học sinh lớp 12C vào 5 vị trí, có 5! cách.

Ứng mỗi cách xếp 5 học sinh lớp 12C sẽ có 6 khoảng trống gồm 4 vị trí ở giữa và hai vị trí hai đầu để xếp các học sinh còn lại.

	C1		C2		C3		C4		C5	
--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

• TH1: Xếp 3 học sinh lớp 12B vào 4 vị trí trống ở giữa (không xếp vào hai đầu), có A_4^3 cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó, chọn lấy 1 trong 2 học sinh lớp 12A xếp vào vị trí trống thứ 4 (để hai học sinh lớp 12C không được ngồi cạnh nhau), có 2 cách.

Học sinh lớp 12A còn lại có 8 vị trí để xếp, có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5!.A_4^3.2.8$ cách.

• TH2: Xếp 2 trong 3 học sinh lớp 12B vào 4 vị trí trống ở giữa và học sinh còn lại xếp vào hai đầu, có $C_3^1.2.A_4^2$ cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó sẽ còn 2 vị trí trống ở giữa, xếp 2 học sinh lớp 12A vào vị trí đó, có 2 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5!.C_3^1.2.A_4^2.2$ cách.

Do đó số cách xếp không có học sinh cùng lớp ngồi cạnh nhau là

$$n(A) = 5!.A_4^3.2.8 + 5!.C_3^1.2.A_4^2.2 = 63360 \text{ cách.}$$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{63360}{10!} = \frac{11}{630}.$$

3. Nhị thức newton

Câu 12: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Với n là số nguyên dương thỏa mãn

$C_n^1 + C_n^2 = 55$, số hạng không chứa x trong khai triển của thức $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

A. 322560.

B. 3360.

C. 80640.

D. 13440.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ta có } C_n^1 + C_n^2 = 55 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \\ n = -11(L) \end{cases}$$

Với $n = 10$ ta có khai triển $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$

Số hạng tổng quát của khai triển $C_{10}^k x^{3(10-k)} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C_{10}^k 2^k x^{30-5k}$, với $0 \leq k \leq 10$.

Số hạng không chứa x ứng với k thỏa $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_{10}^6 2^6 = 13440$.

Câu 13: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101). Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x - 1)^6 + (3x - 1)^8$ bằng

- A.** -13368. **B.** 13368. **C.** -13848. **D.** 13848.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} & x(2x - 1)^6 + (3x - 1)^8 \\ &= x \sum_{k=0}^6 C_6^k (2x)^k (-1)^{6-k} + \sum_{l=0}^8 C_8^l (3x)^l (-1)^{8-l} \\ &= x \sum_{k=0}^6 C_6^k (2x)^k (-1)^{6-k} + \sum_{l=0}^8 C_8^l (3x)^l (-1)^{8-l} \end{aligned}$$

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức là: $C_6^4 (2)^4 (-1)^{6-4} + C_8^5 (3)^5 (-1)^{8-5} = -13368$.

Câu 14: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x - 1)^6 + (2x - 1)^8$ bằng

- A.** -3007. **B.** -577. **C.** 3007. **D.** 577.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(3x - 1)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k 3^k x^k (-1)^{6-k}$ hệ số chứa x^4 là: $C_6^4 3^4 = 1215$.

$(2x - 1)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k 2^k x^k (-1)^{8-k}$ hệ số chứa x^5 là: $-C_8^5 2^5 = -1792$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x(3x - 1)^6 + (2x - 1)^8$ bằng $1215 - 1792 = -577$.

Câu 15: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x - 1)^6 + (x - 3)^8$ bằng

- A.** -1272. **B.** 1272. **C.** -1752. **D.** 1752.

Lời giải

Chọn A

Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x - 1)^6$ là $C_6^4 2^4 (-1)^2 = 240$.

Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(x - 3)^8$ là $C_8^5 (-3)^3 = -1512$.

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x - 1)^6 + (x - 3)^8$ là $240 - 1512 =$

-1272.

Câu 16: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(x-2)^6 + (3x-1)^8$ bằng

- A. 13548. B. 13668. C. -13668. D. -13548.

Lời giải

Chọn D

Hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức $(x-2)^6$ là $C_6^4 2^2 = 60$.

Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $(3x-1)^8$ là $C_8^5 (-3)^5 = -13608$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(x-2)^6 + (3x-1)^8$ bằng $-13608 + 60 = -13548$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.C	4.C	5.C	6.B	7.A	8.A	9.D	10.C
11.A	12.D	13.A	14.B	15.A	16.D				

4. Tính xác suất bằng định nghĩa

Câu 1: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng

- A. $\frac{5}{22}$. B. $\frac{6}{11}$. C. $\frac{5}{11}$. D. $\frac{8}{11}$.

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ 11 quả cầu là $C_{11}^2 = 55$.

Số cách chọn ra 2 quả cầu cùng màu là $C_5^2 + C_6^2 = 25$.

Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng $\frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

Câu 2: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Từ một hộp chứa 11 quả cầu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng:

- A. $\frac{4}{455}$. B. $\frac{24}{455}$. C. $\frac{4}{165}$. D. $\frac{33}{91}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^3 = 455$ (phần tử).

Gọi A là biến cố: “lấy được 3 quả cầu màu xanh”.

Khi đó, $n(A) = C_4^3 = 4$ (phần tử).

Xác suất $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{455}$.

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Từ một hộp chứa 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

A. $\frac{5}{12}$.

B. $\frac{7}{44}$.

C. $\frac{1}{22}$.

D. $\frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Giải. Gọi A là biến cố 3 quả cầu lấy ra màu xanh.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}$$

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Từ một hộp chứa 9 quả cầu đỏ và 6 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng?

A. $\frac{12}{65}$.

B. $\frac{5}{21}$.

C. $\frac{24}{91}$.

D. $\frac{4}{91}$.

Lời giải

Chọn D

Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu từ 15 quả cầu đã cho có C_{15}^3 cách.

Lấy được 3 quả cầu màu xanh từ 6 quả cầu xanh đã cho có C_6^3 cách.

Vậy xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh là $P = \frac{C_6^3}{C_{15}^3} = \frac{4}{91}$.

Câu 5: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Từ một hộp chứa 10 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

A. $\frac{2}{91}$.

B. $\frac{12}{91}$.

C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{24}{91}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^3 = 455$ (phần tử).

Gọi A là biến cố: “ lấy được 3 quả cầu màu xanh”.

Khi đó, $n(A) = C_5^3 = 10$ (phần tử).

Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}$.

Câu 6: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 19]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{1027}{6859}$.

B. $\frac{2539}{6859}$.

C. $\frac{2287}{6859}$.

D. $\frac{109}{323}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $n(\Omega) = 19^3$.

Trong các số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 19]$ có 6 số chia hết cho 3 là $\{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$, có 7 số chia cho 3 dư 1 là $\{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19\}$, có 6 số chia cho 3 dư 2 là $\{2; 5; 8; 11; 14; 17\}$.

Để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 cần phải xảy ra các trường hợp sau:

TH1. Cả ba số viết ra đều chia hết cho 3. Trong trường hợp này có: 6^3 cách viết.

TH2. Cả ba số viết ra đều chia cho 3 dư 1. Trong trường hợp này có: 7^3 cách viết.

TH3. Cả ba số viết ra đều chia cho 3 dư 2. Trong trường hợp này có: 6^3 cách viết.

TH4. Trong ba số được viết ra có 1 số chia hết cho 3, có một số chia cho 3 dư 1, có một số chia cho 3 dư 2. Trong trường hợp này có: $6.7.6.3!$ cách viết.

Vậy xác suất cần tìm là: $p(A) = \frac{6^3 + 7^3 + 6^3 + 6.7.6.3!}{19^3} = \frac{2287}{6859}$.

Câu 7: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Ba bạn A, B, C viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 14]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{457}{1372}$.

B. $\frac{307}{1372}$.

C. $\frac{207}{1372}$.

D. $\frac{31}{91}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử không gian mẫu : $n(\Omega) = 14^3$.

Vì trong 14 số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 14]$ có : 5 số chia cho 3 dư 1; 5 số chia cho 3 dư 2; 4 số chia hết cho 3. Để tổng 3 số chia hết cho 3 ta có các trường hợp sau:

TH1: Cả 3 chữ số đều chia hết cho 3 có : 4^3 (cách)

TH2: Cả 3 số chia cho 3 dư 1 có: 5^3 (cách)

TH3: Cả 3 số chia cho 3 dư 2 có: 5^3 (cách)

TH4: Trong 3 số có một số chia hết cho 3; một số chia cho 3 dư 1; một số chia 3 dư 2 được ba người viết lên bảng nên có: $4.5.5.3!$ (cách)

Gọi biến cố E: " Tổng 3 số chia hết cho 3"

Ta có : $n(E) = 4^3 + 5^3 + 5^3 + 4.5.5.3! = 914$

Vậy xác suất cần tính: $P(E) = \frac{914}{14^3} = \frac{457}{1372}$

Câu 8: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 16]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng .

A. $\frac{683}{2048}$.

B. $\frac{1457}{4096}$.

C. $\frac{19}{56}$.

D. $\frac{77}{512}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi 3 số cần viết ra là a, b, c . Ta có $n(\Omega) = 16^3$.

Phân đoạn $[1; 16]$ ra thành 3 tập:

$X = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ là những số chia hết cho 3 dư 0, có 5 số.

$Y = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ là những số chia hết cho 3 dư 1, có 6 số.

$Z = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ là những số chia hết cho 3 dư 2, có 5 số.

Ta thấy 3 số a, b, c do A, B, C viết ra có tổng chia hết cho 3 ứng với 2 trường hợp sau:

TH1: cả 3 số a, b, c cùng thuộc một tập, số cách chọn là $6^3 + 5^3 + 6^3 = 466$.

TH2: cả 3 số a, b, c thuộc ba tập khác nhau, số cách chọn là $3! \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 = 900$.

Xác suất cần tìm $P(A) = \frac{466+900}{16^3} = \frac{683}{2048}$.

Câu 9: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{1728}{4913}$.

B. $\frac{1079}{4913}$.

C. $\frac{23}{68}$.

D. $\frac{1637}{4913}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu có số phần tử là $17^3 = 4913$.

Lấy một số tự nhiên từ 1 đến 17 ta có các nhóm số sau:

- *) Số chia hết cho 3: có 5 số thuộc tập $\{3; 6; 9; 12; 15\}$.
- *) Số chia cho 3 dư 1: có 6 số thuộc tập $\{1; 4; 7; 10; 13; 16\}$.
- *) Số chia cho 3 dư 2: có 6 số thuộc tập $\{2; 5; 8; 11; 14; 17\}$.

Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$ thỏa mãn ba số đó có tổng chia hết cho 3 thì các khả năng xảy ra như sau:

- TH1: Ba số đều chia hết cho 3 có $5^3 = 125$ cách.
- TH2: Ba số đều chia cho 3 dư 1 có $6^3 = 216$ cách.
- TH3: Ba số đều chia cho 3 dư 2 có $6^3 = 216$ cách.
- TH4: Một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, chia cho 3 dư 2 có $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3! = 1080$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{125+216+216+1080}{4913} = \frac{1637}{4913}$.

5. Tính xác suất bằng công thức cộng

Câu 10: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\frac{11}{21}$.

B. $\frac{221}{441}$.

C. $\frac{10}{21}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $n(\Omega) = C_{21}^2$.Gọi A là biến cố: “chọn được hai số có tổng là một số chẵn”.Ta có: $n(A) = C_{11}^2 + C_{10}^2$.Vậy: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{21}$.**6. Tính xác suất bằng công thức nhân**

Câu 11: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6, gồm 3 nam và 3 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{20}$.

C. $\frac{3}{5}$.

D. $\frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6! = 720$.Gọi A là biến cố mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ.

Ta có:

Xếp 3 học sinh nữ vào cùng 1 dãy ghế có $3!$ cách.Xếp 3 học sinh nam vào cùng 1 dãy ghế có $3!$ cách.Ở các cặp ghế đối diện nhau hai bạn nam và nữ có thể đổi chỗ cho nhau nên có 2^3 cách.Suy ra $|A| = 3! \cdot 3! \cdot 2^3 = 288$.Vậy $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{288}{720} = \frac{2}{5}$.**7. Tính xác suất kết hợp công thức nhân và cộng**

Câu 12: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{13}{25}$.

C. $\frac{12}{25}$.

D. $\frac{313}{625}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{25}^2 = 300$ (kết quả đồng khả năng xảy ra).Gọi biến cố A là biến cố cần tìm.

Nhận xét: tổng của hai số là một số chẵn có 2 trường hợp:

+ TH1: tổng của hai số chẵn

Từ số 1 đến số 25 có 13 số chẵn, chọn 2 trong 13 số chẵn có: $C_{13}^2 = 78$ (cách)

+ TH2: tổng của hai số lẻ

Từ số 1 đến số 25 có 12 số lẻ, chọn 2 trong 12 số lẻ có: $C_{12}^2 = 66$ (cách)

Suy ra: $n(A) = 78 + 66 = 144$

Vậy: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{144}{300} = \frac{12}{25}$.

Câu 13: (Vận dụng) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là

A. $\frac{13}{27}$.

B. $\frac{14}{27}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{365}{729}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{27}^2 = 351$.

Gọi A là biến cố: “Chọn được hai số có tổng là một số chẵn”.

Trong 27 số nguyên dương đầu tiên có 14 số lẻ và 13 số chẵn.

Tổng hai số là một số chẵn thì hai số đó hoặc cùng lẻ, hoặc cùng chẵn.

$$n(A) = C_{14}^2 + C_{13}^2 = 169.$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{169}{351} = \frac{13}{27}.$$

Vậy chọn đáp án **A**

Câu 14: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 23 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\frac{11}{23}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{268}{529}$.

D. $\frac{12}{23}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu là số cách chọn 2 trong 23 số: $n(\Omega) = C_{23}^2$.

Trong 23 số nguyên dương đầu tiên có 12 số lẻ và 11 số chẵn.

Gọi A là biến cố “hai số được chọn có tổng là một số chẵn”.

Để chọn được hai số thỏa bài toán, ta có các trường hợp:

+ Hai số được chọn đều là số lẻ: có C_{12}^2 cách.

+ Hai số được chọn đều là số chẵn: có C_{11}^2 cách.

Do đó $n(A) = C_{12}^2 + C_{11}^2$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{C_{12}^2 + C_{11}^2}{C_{23}^2} = \frac{11}{23}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.C	4.D	5.A	6.C	7.A	8.A	9.D	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

11.A	12.C	13.A	14.A						
------	------	------	------	--	--	--	--	--	--

8. Nhận diện cấp số cộng

Câu 1: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- A. -6 . B. 3 . C. 12 . D. 6 .

Lời giải

Chọn D

Công sai của cấp số cộng đã cho là $d = u_2 - u_1 = 9 - 3 = 6$.

Câu 2: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- A. 4 . B. -6 . C. 10 . D. $R_1 = 1$ m.

Lời giải

Chọn D

Công sai của cấp số cộng này là: $d = u_2 - u_1 = 6$.

Câu 3: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- A. 3 . B. -4 . C. 8 . D. 4 .

Lời giải

Chọn D

Công sai: $d = \frac{u_n - u_1}{n-1} = \frac{6-2}{2-1} = 4$.

Câu 4: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 4$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- A. 5 . B. 4 . C. -3 . D. 3 .

Lời giải

Chọn D

Ta có công sai : $d = u_2 - u_1 = 3$.

9. Tìm hạng tử cấp số cộng

Câu 5: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Giá trị của u_4 bằng

- A. 22 . B. 17 . C. 12 . D. 250 .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_4 = u_1 + 3d = 2 + 3.5 = 17$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.D	4.D	5.B					
-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--

10. Giới hạn dãy số

Câu 1: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n+2}$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{5+\frac{2}{n}} \right) = 0 \cdot \frac{1}{5} = 0.$$

Câu 2: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+7}$ bằng

- A. $\frac{1}{7}$. B. $+\infty$. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n}} = 0.$$

Câu 3: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+5}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2+\frac{5}{n}} = 0.$$

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n+3}$ bằng

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n+3} = 0.$$

11. Giới hạn hàm số

Câu 5: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. 2.

D. -3 .

Lời giải

Chọn B

Chia cả tử và mẫu cho x , ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}} = \frac{1}{1} = 1$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.B	4.A	5.B					
-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--

12. Bài toán tiếp tuyến

Câu 1: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

* Nhận xét đây là hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$.

* Ta có $y' = x^3 - 7x$ nên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{7} \\ x = \sqrt{7} \end{cases}$.

* Phương trình tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ (là đường thẳng qua hai điểm M, N) có hệ số góc: $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 6$. Do đó để tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ có hệ số góc $k = 6 > 0$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thì $-\sqrt{7} < x_0 < 0$ và $x_0 \neq -\frac{\sqrt{21}}{3}$ (hoành độ điểm uốn).

* Ta có phương trình: $y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow x_0^3 - 7x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases} (l)$

Vậy có 2 điểm A thỏa yêu cầu.

Câu 2: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến từ (C) đi qua A . Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 1.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Phương trình đường thẳng d đi qua A và có hệ số góc k : $y = k(x - a) + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) :

$$k(x - a) + 1 = \frac{-x+2}{x-1} \Leftrightarrow (kx - ka + 1)(x - 1) = -x + 2 \quad (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (-k - ka + 2)x - 3 + ka = 0 \quad (x \neq 1) \quad (*)$$

Với $k = 0$, ta có $d: y = 1$ là tiệm cận ngang đồ thị hàm số nên không thể tiếp xúc được.

Với $k \neq 0$, d và (C) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta_x = [k(1 + a) - 2]^2 - 4k(-3 + ka) = 0 \Leftrightarrow \Delta_x = k^2(1 - a)^2 - 4k(a - 2) + 4 = 0$$

Coi đây là phương trình bậc 2 ẩn k tham số a

Để qua $A(a; 1)$ vẽ được đúng 1 tiếp tuyến thì phương trình $\Delta_x = 0$ có đúng một nghiệm $k \neq 0$.

- Xét $1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$, ta có $4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -1$ thỏa.
- Có $f(1) = -1 \neq 0$ nên loại đi trường hợp có hai nghiệm trong đó có một nghiệm là 0.
- Còn lại là trường hợp $\Delta_x = 0$ có nghiệm kép khi $\Delta'_k = 4((a-2)^2 - (a-1)^2)$

$$\Leftrightarrow 4(2a-3) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Vậy tổng là $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Cách 2: Phương trình đường thẳng d đi qua A và có hệ số góc k : $y = k(x-a) + 1$
 d là tiếp tuyến của đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm x khác 1

$$\begin{cases} k(x-a) + 1 = \frac{-x+2}{x-1} & (1) \\ k = \frac{-1}{(x-1)^2} & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1), ta được $\frac{-1}{(x-1)^2}(x-a) = \frac{3-2x}{x-1}$

$$\Leftrightarrow x-a = (2x-3)(x-1) \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 - 6x + 3 + a = 0 (*)$$

d và đồ thị (C) có đúng một tiếp tuyến $\Leftrightarrow (*)$ có đúng một nghiệm khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ g(1) \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ g(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2(3+a) = 0 \\ a - 1 \neq 0 \\ 9 - 2(3+a) > 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases} \text{ Vậy tổng là } 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Câu 3: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hàm số $y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 4(x_1 - x_2)$

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng MN có VTCP là $\overrightarrow{NM} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2) = (x_1 - x_2; 4(x_1 - x_2))$.

Chọn VTCP là $\vec{u} = (1; 4) \Rightarrow VTPT\vec{n} = (4; -1)$.

Phương trình đường thẳng MN : $4(x - x_1) - (y - y_1) = 0 \Leftrightarrow y = 4x - 4x_1 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{7}{3}x_1^2$.

Đường thẳng MN còn tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm A . Như vậy, nếu A có hoành độ là x_0 thì x_0 là

$$\text{nghiệm của phương trình } \frac{2}{3}x^3 - \frac{14}{3}x = 4 \Leftrightarrow x^3 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$+ x = -1: A\left(-1; -\frac{13}{6}\right)$$

Vì đường thẳng MN tiếp xúc với đồ thị (C) tại A nên ta có:

$$-\frac{13}{6} = -4 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{7}{3}x_1^2 - 4x_1 \Leftrightarrow (x_1 + 1)^2(x_1^2 - 2x_1 - 11) = 0(1)$$

(1) có 1 nghiệm kép và 2 nghiệm đơn phân biệt nên đường thẳng MN tiếp xúc với đồ thị (C) tại A và cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt M, N khác A .

$$+ x = -2: A\left(-2; -\frac{20}{3}\right)$$

Vì đường thẳng MN tiếp xúc với đồ thị (C) tại A nên ta có:

$$-\frac{20}{3} = -8 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{7}{3}x_1^2 - 4x_1 \Leftrightarrow (x_1 + 2)^2(x_1^2 - 4x_1 - 4) = 0(2)$$

(2) có 1 nghiệm kép và 2 nghiệm đơn phân biệt nên đường thẳng MN tiếp xúc với đồ thị (C) tại A và cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt M, N khác A .

$$+ x = 3: A\left(3; -\frac{15}{2}\right)$$

Vì đường thẳng MN tiếp xúc với đồ thị (C) tại A nên ta có:

$$-\frac{15}{2} = 12 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{7}{3}x_1^2 - 4x_1 \Leftrightarrow (x_1 - 3)^2(x_1^2 + 6x_1 + 13) = 0(3)$$

(3) chỉ có 1 nghiệm kép nên đường thẳng MN chỉ tiếp xúc với đồ thị (C) tại A nên loại.

Vậy có 2 điểm A thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 4: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$.

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đường thẳng MN có dạng $\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \Rightarrow$ hệ số góc của đường thẳng MN là $k = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 3$.

Vậy tiếp tuyến tại $A(x_0; \frac{1}{8}x_0^4 - \frac{7}{4}x_0^2)$ có hệ số góc $k = 3 \Leftrightarrow f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^3 - \frac{7}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^3 - \frac{7}{2}x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \\ x_0 = -2 \end{cases}$.

+) Với $x_0 = -1 \Rightarrow A(-1; -\frac{13}{8}) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3x + \frac{11}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x + \frac{11}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3x - \frac{11}{8} = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow A(-1; -\frac{13}{8})$ thỏa mãn đề bài.

+) Với $x_0 = 3 \Rightarrow A(3; -\frac{171}{8}) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3x - \frac{195}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x - \frac{195}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3x + \frac{195}{8} = 0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2(x^2+6x+13) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow$ Tiếp tuyến cắt đồ thị tại một điểm $\Rightarrow A(3; -\frac{171}{8})$

Không thỏa mãn.

+) Với $x_0 = -2 \Rightarrow A(-2; -5) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y = 3x + 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+2)^2(x^2-4x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 + \sqrt{6} \\ x = 2 - \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow A(-2; -5)$ Thỏa mãn đề bài.

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại A .

$$y' = \frac{4}{3}x^3 - \frac{28}{3}x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{7} \end{cases}.$$

Do đó tiếp tuyến tại A cắt (C) tại $M, N \Rightarrow x_A \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7})$.

Ta có: $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 8 \Rightarrow k_d = 8$

$$\frac{4}{3}x_A^3 - \frac{28}{3}x_A = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_A = -1 \\ x_A = -2 \end{cases}. \text{ Đối chiếu điều kiện: } \begin{cases} x_A = -1 \\ x_A = -2 \end{cases}. \text{ Vậy có 2 điểm } A \text{ thỏa ycbt.}$$

Cách 2:

Gọi $A(a; \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2)$ là tọa độ tiếp điểm

Phương trình tiếp tuyến tại A là $d: y = (\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a)(x - a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{1}{3}x^4 - \frac{28}{3}x^2 = \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x-a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 14) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x^2 + 2ax + 3a^2 - 14 = 0 \end{cases} (1)$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 6a^2 - 14 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7}) \setminus \left\{\pm \frac{\sqrt{7}}{3}\right\}.$$

$$\text{Theo đề bài: } y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x_1 - x_2) = 8(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện: $\begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases}$. Vậy có 2 điểm A thỏa đề bài.

13. Bài toán quãng đường vận tốc gia tốc

Câu 6: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. 144 (m/s)

B. 36 (m/s)

C. 243 (m/s)

D. 27 (m/s)

Lời giải

Chọn B

Ta có : $v = s' = -t^2 + 12t$; $v' = -2t + 12$, $v' = 0 \Leftrightarrow t = 6$

BBT

t	0	6	9
v'	+	0	-
v	36 		

Nhìn bbt ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 6$. Giá trị lớn nhất là $v(6) = 36m/s$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.D	4.B	5.B	6.B				
-----	-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--	--

14. Xét tính đơn điệu dựa vào công thức

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Câu 2: **(Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123)** Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+) $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: **(Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017)** Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn B

$y = 2x^4 + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 8x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ suy ra $y(0) = 1$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 4: **(Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A.** $y = 3x^3 + 3x - 2$. **B.** $y = 2x^3 - 5x + 1$. **C.** $y = x^4 + 3x^2$. **D.** $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = 3x^3 + 3x - 2$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 9x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 5: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$.

Câu 6: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $D = \mathbb{R}$, $y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 7: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = x^3 + x$

B. $y = -x^3 - 3x$

C. $y = \frac{x+1}{x+3}$

D. $y = \frac{x-1}{x-2}$

Lời giải

Chọn A

Vì $y = x^3 + x \Rightarrow y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 8: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6x; y' < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$.

Câu 9: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Hàm số $y = \frac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 1)$

B. $(-\infty; +\infty)$

C. $(0; +\infty)$

D. $(-\infty; 0)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{-4x}{(x^2+1)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0$

Câu 10: (Vận dụng) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; 3)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(3; 5)$.

D. $(5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = f(5 - 2x) \Rightarrow y' = -2f'(5 - 2x)$.

Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow y' \leq 0 \Rightarrow -2f'(5 - 2x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(5 - 2x) \geq 0$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta được $f'(5 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x \geq 1 \\ -3 \leq 5 - 2x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$.

Vậy hàm số $y = f(5 - 2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(3; 4), (-\infty; 2)$.

Câu 11: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(1; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3f'(x+2) - 3x^2 + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) - x^2 + 1 = 0(1)$

Đặt $t = x + 2$, khi đó $(1) \Leftrightarrow f'(t) + (-t^2 + 4t - 3) = 0$

Để hàm số đồng biến thì $y' > 0$

Ta chọn t sao cho $\begin{cases} f'(t) > 0 \\ -t^2 + 4t - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < t < 2 \vee 2 < t < 3 \vee t > 4 \\ 1 < t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < t < 2 \\ 2 < t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.B	4.A	5.A	6.B	7.A	8.C	9.C	10.B
11.C									

15. Xét tính đơn điệu dựa vào BBT, ĐT

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		-1		3	
	$-\infty$							$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2; 0)$. **B.** $(-\infty; -2)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 2: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

Lời giải

Chọn C

Theo bảng xét dấu thì $y' < 0$ khi $x \in (0; 2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 3: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			3			-2		$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0; 1)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 4: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		3		-2		$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1; +\infty)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 5: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	-1	-2	-1	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 6: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$
y	$+\infty$	1	4	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-2; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 7: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	1	3	1	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 8: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

- A.** $(0; +\infty)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $(-2; 0)$ thì y' mang dấu dương.

Câu 9: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			0	$+\infty$
			0				0	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1; 0)$. **B.** $(-1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn BBT ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. Đáp án A đúng.

Câu 10: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			0	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0; 1)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(0; +\infty)$.

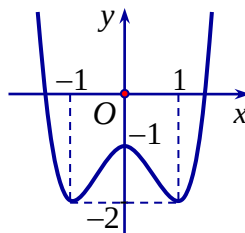
Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$. Chọn đáp án

A.

Câu 11: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

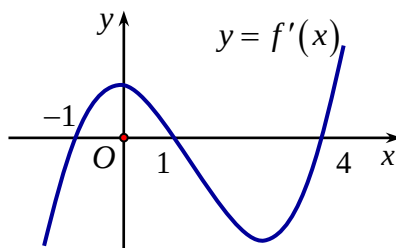
Chọn D

Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị đi lên trong khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Quan sát đáp án chọn D

Câu 12: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng:



- A. $(1; 3)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-\infty; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(f(2 - x))' = (2 - x)' \cdot f'(2 - x) = -f'(2 - x)$

Hàm số đồng biến khi $(f(2 - x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < -1 \\ 1 < 2 - x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$

Câu 13: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

hàm số $y = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(4; +\infty)$. B. $(-2; 1)$. C. $(2; 4)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = -2.f'(3 - 2x)$.

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow -2.f'(3 - 2x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq 3 - 2x \leq -1 \\ 3 - 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}.$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(2; 3)$ và $(-\infty; 1)$.

Câu 14: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(3 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(3; 4)$. **B.** $(2; 3)$. **C.** $(-\infty; -3)$. **D.** $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = f'(3 - 2x) = (3 - 2x)'f'(3 - 2x) = -2f'(3 - 2x)$.

$$*) y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x = -3 \\ 3 - 2x = -1 \\ 3 - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$*) y' \geq 0 \Leftrightarrow -2f'(3 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \leq -3 \\ -1 \leq 3 - 2x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(3 - 2x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(3; 4)$.

Câu 15: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\infty; -3)$. **B.** $(4; 5)$. **C.** $(3; 4)$. **D.** $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = f'(5 - 2x) = (5 - 2x)'f'(5 - 2x) = -2f'(5 - 2x)$.

$$*) y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(5 - 2x) = 0 \Leftrightarrow f'(5 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x = -3 \\ 5 - 2x = -1 \\ 5 - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$*) y' \geq 0 \Leftrightarrow -2f'(5 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(5 - 2x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x \leq -3 \\ -1 \leq 5 - 2x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

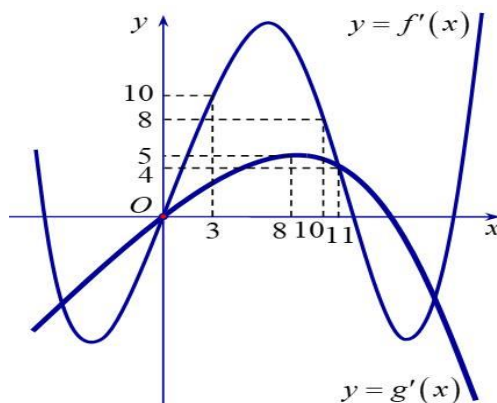
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(4; 5)$.

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(4; 5)$.

Câu 16: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



Hàm số $h(x) = f(x + 4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(5; \frac{31}{5}\right)$. B. $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$. C. $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$. D. $\left(6; \frac{25}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Kẻ đường thẳng $y = 10$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại $A(a; 10)$, $a \in (8; 10)$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} f(x + 4) > 10, \text{ khi } 3 < x + 4 < a \\ g\left(2x - \frac{3}{2}\right) \leq 5, \text{ khi } 0 \leq 2x - \frac{3}{2} < 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x + 4) > 10, \text{ khi } -1 < x < 4 \\ g\left(2x - \frac{3}{2}\right) \leq 5, \text{ khi } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{25}{4} \end{cases}$$

Do đó $h'(x) = f'(x + 4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0$ khi $\frac{3}{4} \leq x < 4$.

Kiểm đánh giá khác:

Ta có $h'(x) = f'(x + 4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$.

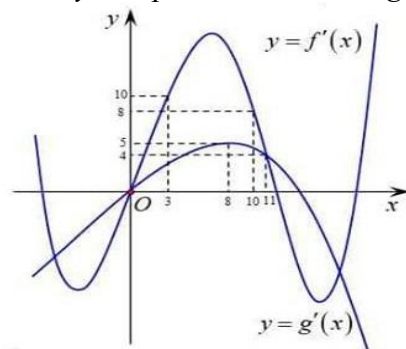
Dựa vào đồ thị, $\forall x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right)$, ta có $\frac{25}{4} < x + 4 < 7$, $f(x + 4) > f(3) = 10$;

$3 < 2x - \frac{3}{2} < \frac{9}{2}$, do đó $g\left(2x - \frac{3}{2}\right) < f(8) = 5$.

Suy ra $h'(x) = f'(x + 4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0, \forall x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$

Câu 17: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x + 7) - g\left(2x + \frac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2; \frac{16}{5})$.

B. $(-\frac{3}{4}; 0)$.

C. $(\frac{16}{5}; +\infty)$.

D. $(3; \frac{13}{4})$.

Lời giải

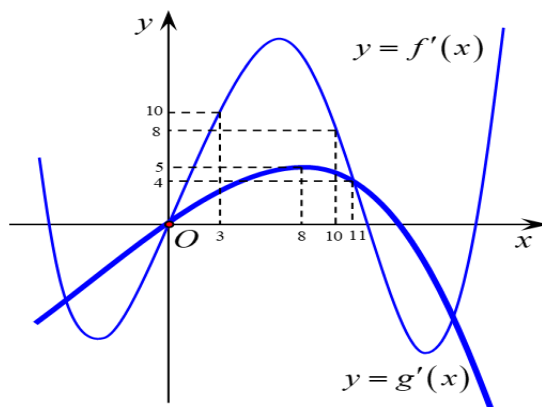
Chọn B

Kẻ đường thẳng $y = 10$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại $A(a; 10)$, $a \in (8; 10)$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} f(x+7) > 10, \text{ khi } 3 < x+7 < a \\ g(2x+\frac{9}{2}) \leq 5, \text{ khi } 0 \leq 2x+\frac{9}{2} \leq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4) > 10, \text{ khi } -4 < x < 1 \\ g(2x+\frac{9}{2}) \leq 5, \text{ khi } -\frac{9}{4} \leq x \leq \frac{13}{4} \end{cases}$$

Do đó $h'(x) = f'(x+4) - 2g'(2x-\frac{3}{2}) > 0$ khi $-\frac{9}{4} \leq x < 1$.

Câu 18: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+3) - g(2x-\frac{7}{2})$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(\frac{13}{4}; 4)$.

B. $(7; \frac{29}{4})$.

C. $(6; \frac{36}{5})$.

D. $(\frac{36}{5}; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

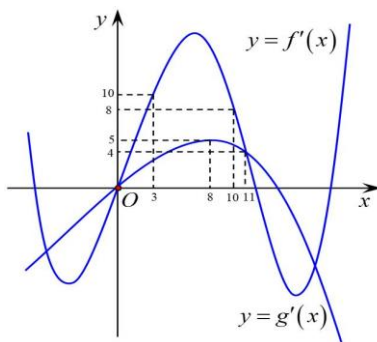
Ta có:

$$x \in (\frac{13}{4}; 4) \Rightarrow \begin{cases} x+7 \in (\frac{25}{4}; 7) \Rightarrow f'(x+7) > 10 \\ 2x-\frac{7}{2} \in (3; \frac{9}{2}) \Rightarrow g'(2x-\frac{7}{2}) < 5 \end{cases} \Rightarrow h'(x) > 0$$

$\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên $(\frac{13}{4}; 4)$

Câu 19: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x + 6) - g\left(2x + \frac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{21}{5}; +\infty\right)$.

B. $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

C. $\left(3; \frac{21}{5}\right)$.

D. $\left(4; \frac{17}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = f'(x + 6) - 2g'\left(2x + \frac{5}{2}\right)$.

Nhìn vào đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ ta thấy trên khoảng $(3; 8)$ thì $g'(x) < 5$ và $f'(x) > 10$. Do đó $f'(x) > 2g'(x)$.

Như vậy: $g'\left(2x + \frac{5}{2}\right) < 5$ nếu $3 < 2x + \frac{5}{2} < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{11}{4}$.

$f'(x + 6) > 10$ nếu $3 < x + 6 < 8 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Suy ra trên khoảng $\left(\frac{1}{4}; 2\right)$ thì $g'\left(2x + \frac{5}{2}\right) < 5$ và $f'(x + 7) > 10$ hay $h'(x) > 0$.

Tức là trên khoảng $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ hàm số $h(x)$ đồng biến.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.A	4.B	5.D	6.B	7.C	8.C	9.A	10.A
11.D	12.C	13.B	14.A	15.B	16.B	17.B	18.A	19.B	

16. Tìm điều kiện để hàm số đơn điệu

Câu 1: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 2

B. 1

C. 0

D. 3

Lời giải

Chọn A

TH1: $m = 1$. Ta có: $y = -x + 4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m = 1$.

TH2: $m = -1$. Ta có: $y = -2x^2 - x + 4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m = -1$.

TH3: $m \neq \pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, dấu “=” chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m - 1)^2 + 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m - 1)(4m + 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = 0.$$

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Câu 2: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

A. $-\infty; -1$

B. $(-\infty; -1)$

C. $[-1; 1]$

D. $B(5; 6; 2)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = \frac{2x}{x^2+1} - m$.

Hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{2x}{x^2+1} \geq m, \forall x \in (-\infty; +\infty). \text{ Ta có } g'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	0	$-$
$g(x)$	0	-1	1	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $g(x) = \frac{2x}{x^2+1} \geq m, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow m \leq -1$

Câu 3: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 12A.

B. 3.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geq 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Dấu đẳng thức chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $(0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 - \frac{1}{x^6} = g(x), \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\text{Ta có } g'(x) = -6x + \frac{6}{x^7} = \frac{-6x^8+6}{x^7}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	-
$g(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$

$$\text{Suy ra } m \geq g(x), \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in (0; +\infty)} g(x) = g(1) = -4$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1\}.$$

Câu 4: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. 5

B. 4

C. Vô số

D. 3

Lời giải

Chọn D

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}; y' = \frac{m^2-4m}{(x+m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 5: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

A. 2.

B. Vô số.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

+) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$$+) y' = \frac{5m-2}{(x+5m)^2}.$$

+) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2.$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Câu 6: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C □

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$$y' = \frac{5m-6}{(x+5m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên $(10; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in D \\ -5m \notin (10; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6 < 0 \\ -5m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{6}{5} \\ m \geq -2 \end{cases}.$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Câu 7: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}; y' = \frac{3m-1}{(x+3m)^2}.$

Hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y' < 0 \\ (6; +\infty) \subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 < 0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \frac{1}{3}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$.

Câu 8: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.

A. 2. **B.** 6. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = (-\infty; -3m) \cup (-3m; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{3m-2}{(x+3m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 > 0 \\ -6 \leq -3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m \leq 2$.

Mà m nguyên nên $m = \{1; 2\}$.

Câu 9: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

A. $-\infty; 0$. **B.** $-\frac{3}{4}; +\infty$. **C.** $-\infty; -\frac{3}{4}$. **D.** $0; +\infty$

Lời giải

Chọn C

Theo đề $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow 4m \leq 3x^2 + 12x + 9, \forall x \in (-\infty; -1)$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 12x + 9 \Rightarrow g'(x) = 6x + 12$

x	$-\infty$	-2	-1
$g'(x)$		0	
		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	-3	6

Vậy $4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4}$.

Câu 10: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

A. 4 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Ta có:

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3(4m + 9) \leq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \in [-9; -3] \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.D	4.D	5.A	6.C	7.A	8.A	9.C	10.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

17. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình

Câu 1: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$. Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Cách 2: Dùng chức năng mode 7 trên máy tính kiểm tra từng đáp án.

Câu 2: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là:

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên số nghiệm của phương trình đã cho là 4 nghiệm thực.

Câu 3: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$						

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn C

PT $\Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = \frac{3}{2}$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-1		2		$-\infty$

$y = \frac{3}{2}$

Có 3 giao điểm. Vậy phương trình có 3 nghiệm.

Câu 4: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 5: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		-1	2	-1	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ là:

A. 2

B. 3

C. 4

D. 0

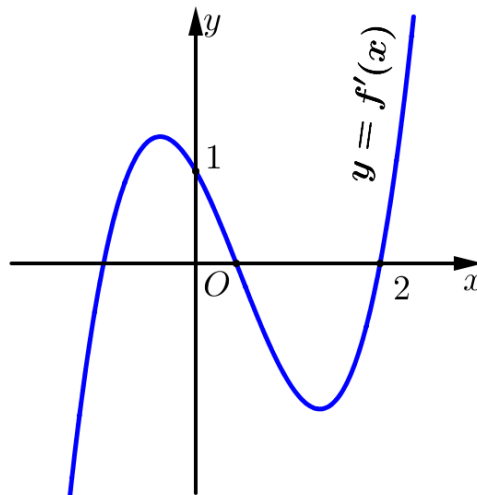
Lời giải

Chọn C

Ta có $3f(x) - 5 = 0 \left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right) (*)$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $(*)$ có bốn nghiệm.

Câu 6: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



A. $m \geq f(2) - 2$.

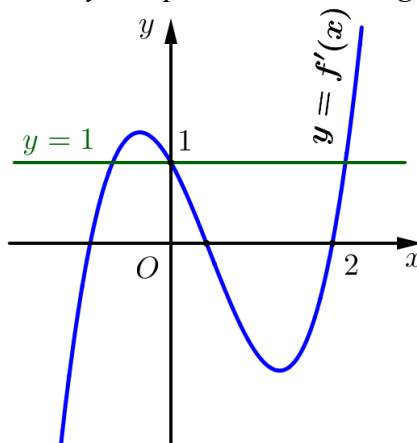
B. $m \geq f(0)$.

C. $m > f(2) - 2$.

D. $m > f(0)$.

Lời giải

Chọn B

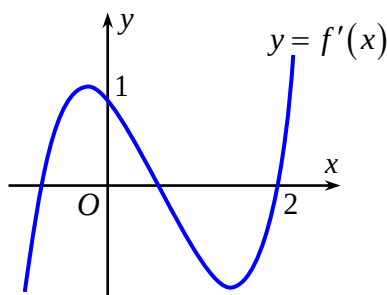


Ta có: $f(x) < x + m \Leftrightarrow g(x) = f(x) - x < m$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy: $g'(x) = f'(x) - 1 < 0 \Rightarrow \max_{(0;2)} g(x) = g(0) = f(0)$.

Do đó: bất phương trình $f(x) < x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $\max_{(0;2)} g(x) \leq m \Rightarrow f(0) \leq m$.

Câu 7: (Vận dụng) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



- A.** $m \leq f(2) - 2$. **B.** $m < f(2) - 2$. **C.** $m \leq f(0)$. **D.** $m < f(0)$.

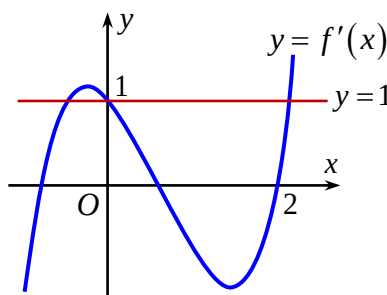
Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) > x + m, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m < f(x) - x, \forall x \in (0; 2)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ trên $(0; 2)$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) < 1, \forall x \in (0; 2)$.



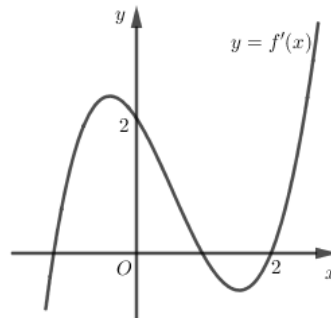
Suy ra $g'(x) < 0, \forall x \in (0; 2)$. Do đó $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

Bảng biến thiên:

x	0	2
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$f(0)$	$f(2) - 2$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m < g(x), \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 2$.

Câu 8: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A.** $m > f(0)$. **B.** $m > f(2) - 4$. **C.** $m \geq f(0)$. **D.** $m \geq f(2) - 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) < 2x + m \Leftrightarrow m > f(x) - 2x$ (*).

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ trên $(0; 2)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2 < 0 \forall x \in (0; 2)$ nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

Do đó (*) đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi $m \geq g(0) = f(0)$.

Câu 9: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

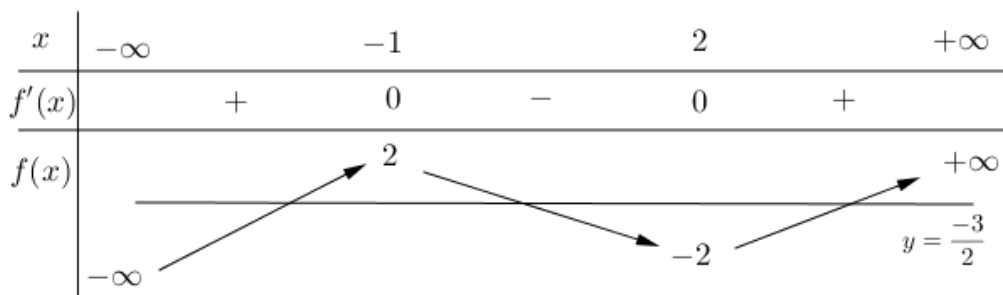
- A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

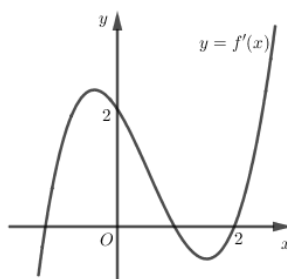
Chọn A

$$2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm nên phương trình có ba nghiệm



Câu 10: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A.** $m \leq f(2) - 4$. **B.** $m \leq f(0)$. **C.** $m < f(0)$. **D.** $m < f(2) - 4$.

Lời giải

Chọn A

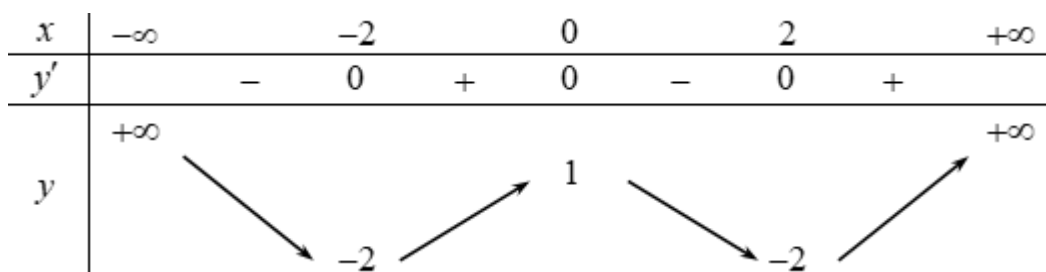
Ta có $f(x) > 2x + m \Leftrightarrow m < f(x) - 2x$ (*).

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ trên $(0; 2)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2 < 0, \forall x \in (0; 2)$ nên hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

Do đó (*) đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi $m \leq g(2) = f(2) - 4$.

Câu 11: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau



Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

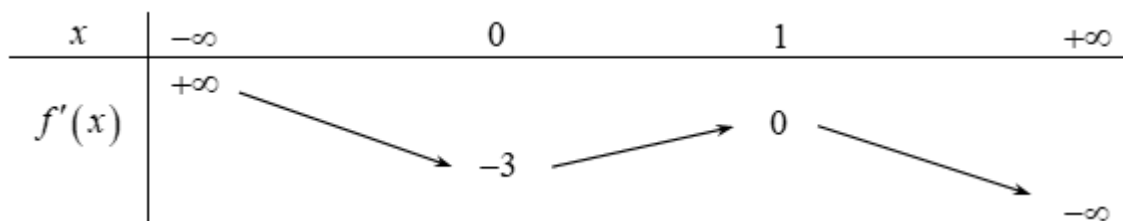
Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y_{CT} = -2 < -\frac{3}{2} < 1 = y_{CB}$.

Vậy phương trình $2f(x) + 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 12: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq f(1) - e$. **B.** $m > f(-1) - \frac{1}{e}$. **C.** $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$. **D.** $m > f(1) - e$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) < e^x + m \Leftrightarrow f(x) - e^x < m.$$

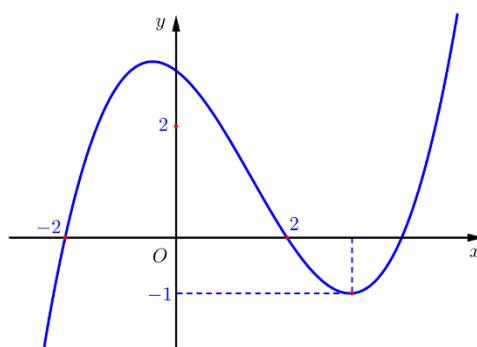
Xét $h(x) = f(x) - e^x, x \in (-1; 1)$.

$$h'(x) = f'(x) - e^x < 0, \forall x \in (-1; 1) \text{ (Vì } f'(x) < 0, \forall x \in (-1; 1) \text{ và } e^x > 0, \forall x \in (-1; 1)).$$

$$\Rightarrow h(x) \text{ nghịch biến trên } (-1; 1) \Rightarrow h(1) < h(x) < h(-1), \forall x \in (-1; 1).$$

Để bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq h(-1) \Leftrightarrow m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$.

Câu 13: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3}$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } |f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} f(x^3 - 3x) = \frac{4}{3} \\ f(x^3 - 3x) = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = t_1(1)(t_1 < -2) \\ x^3 - 3x = t_2(2)(-2 < t_2 < 0) \\ x^3 - 3x = t_3(3)(0 < t_3 < 2) \\ x^3 - 3x = t_4(4)(t_4 > 4) \end{cases}$$

Hàm số $y = x^3 - 3x$ có bảng biến thiên là

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			2		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình (1) có một nghiệm; phương trình (2) có ba nghiệm; phương trình (3) cũng có ba nghiệm và phương trình (4) có một nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm.

Câu 14: Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{34}$

B. 26

C. 34

D. $\sqrt{26}$

Lời giải.

Ta có $w = \frac{4+iz}{1+z} \Leftrightarrow w(1+z) = 4+iz \Leftrightarrow w - 4 = (i-w)z \Leftrightarrow z = \frac{w-4}{i-w}$ (do $w = i$ không thỏa mãn)

Thay $z = \frac{w-4}{i-w}$ vào $|z| = \sqrt{2}$ ta được:

$$\left| \frac{w-4}{i-w} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |w-4| = \sqrt{2}|i-w| (*). \text{ Đặt } w = x + yi, \text{ ta được:}$$

$(*) \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 2[x^2 + (1-y)^2] \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$. Đây là đường tròn có Tâm là $I(-3; 2)$, bán kính $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Chọn đáp án C

Câu 15: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hai hàm số $y = \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $-\infty; 2$.

B. $2; +\infty$.

C. $(-\infty; 2)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $\frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} = |x+2| - x + m$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - |x+2| + x = m \quad (1)$$

Hàm số $p(x) = \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - |x+2| + x =$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - 2 & \text{kh}i x \geq -2 \\ \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + 2x + 2 & \text{kh}i x < -2 \end{cases}$$

Ta có $p'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in (-2; +\infty) \setminus \{-1; 0; 1; 2\} \\ \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + 2 > 0, \forall x < -2 \end{cases}$ nên hàm số $y =$

$p(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$.

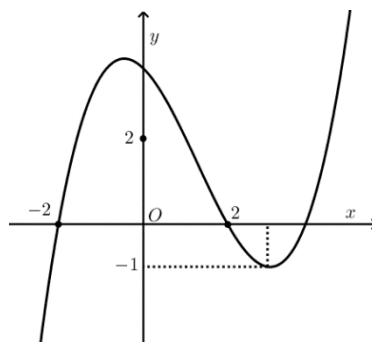
Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		+		+	+	+	+
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = p(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 16: (Vận dụng cao) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2}$ là



A. 6.

B. 10.

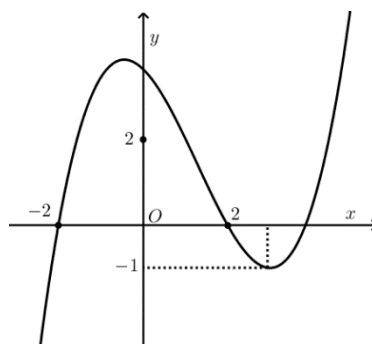
C. 12.

D. 3.

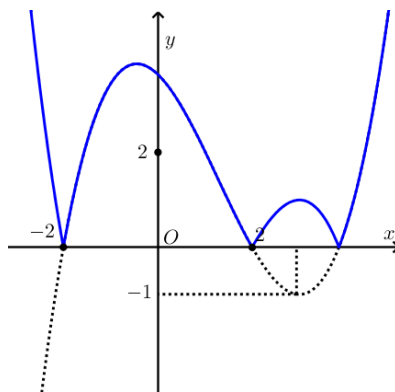
Lời giải:

Chọn B

Xét đồ thị của hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ đã cho



Gọi (C_1) là phần đồ thị phía trên trục hoành, (C_2) phần đồ thị phía dưới trục hoành. Gọi (C') là phần đồ thị đối xứng của (C_2) qua trục hoành.



Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ chính là phần (C_1) và (C') .

$$\text{Xét } |f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 - 3x) = \frac{1}{2} \\ f(x^3 - 3x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Xét $g(x) = x^3 - 3x$, $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	2		-2	$+\infty$

Quan sát đồ thị:

$$+ \text{ Xét } f(x^3 - 3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = 1 > 2 \\ x^3 - 3x = b \in (0; 2) \\ x^3 - 3x = c \in (-2; 0) \end{cases} \quad (\text{có lần lượt } 1, 3, 3 \text{ nên có tất cả } 7 \text{ nghiệm}).$$

$$+ \text{ Xét } f(x^3 - 3x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = c > 2 \\ x^3 - 3x = d > 2 \\ x^3 - 3x = c \in < -2 \end{cases} \quad (\text{có } 3 \text{ nghiệm}).$$

Vậy có tất cả 10 nghiệm.

Câu 17: (Vận dụng cao) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4}$ và $y = |x+1| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

- A. $(3; +\infty)$. B. $-\infty; 3$. C. $(-\infty; 3)$. D. $3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4} = |x+1| - x + m$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4} - |x+1| + x = m \quad (1)$$

Hàm số $p(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4} - |x+1| + x =$

$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4} - 1 & \text{kh}i x > -1 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4} + 2x + 1 & \text{kh}i x < -1 \end{cases}$$

Ta có $p'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} > 0, \forall x > -1 \\ \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + 2 > 0, \forall x < -1 \end{cases}$ nên hàm số $y = p(x)$ đồng

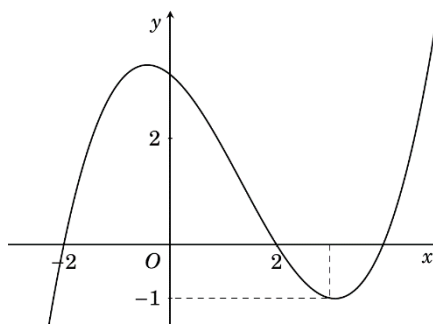
biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	+	+	+	+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	3

Câu 18: Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = p(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \geq 3$. **(Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 103)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{3}{2}$ là



A. 8.

B. 4.

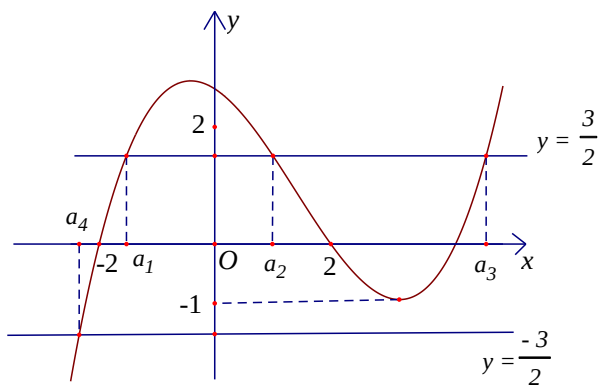
C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

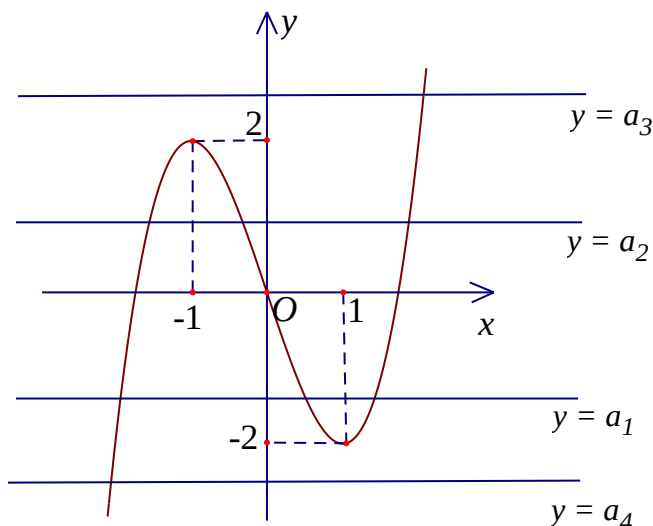
$$\text{Phương trình } |f(x^3 - 3x)| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 - 3x) = \frac{3}{2} \\ f(x^3 - 3x) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$



* Phương trình $f(x^3 - 3x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = a_1, (-2 < a_1 < 0) \\ x^3 - 3x = a_2, (0 < a_2 < 2) \\ x^3 - 3x = a_3, (a_3 > 2) \end{cases}$.

* Phương trình $f(x^3 - 3x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^3 - 3x = a_4, (a_4 < -2)$.

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ có dạng như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị trên ta có:

- Phương trình $x^3 - 3x = a_1$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $x^3 - 3x = a_2$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $x^3 - 3x = a_3$ có 1 nghiệm.
- Phương trình $x^3 - 3x = a_4$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{3}{2}$ có 8 nghiệm phân biệt.

- Câu 19: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 103)** Cho hai hàm số $y = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ và $y = |x + 2| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là
- A.** $-2; +\infty$. **B.** $(-\infty; -2)$. **C.** $(-2; +\infty)$. **D.** $-\infty; -2$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = |x + 2| - x - m$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; -1; 0\}$

Với điều kiện trên, phương trình trở thành

$$4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = |x+2| - x - m(*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - 4 + |x+2| - x = m.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - 4 + |x+2| - x$ với tập xác định D . Ta có

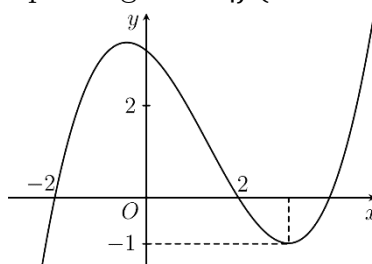
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{x+2}{|x+2|} - 1 < 0, \forall x \in D.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -2$	

Để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt. Từ bảng biến thiên suy ra tất cả các giá trị m cần tìm là $m \leq -2$.

Câu 20: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$ là



A. 6.

B. 10.

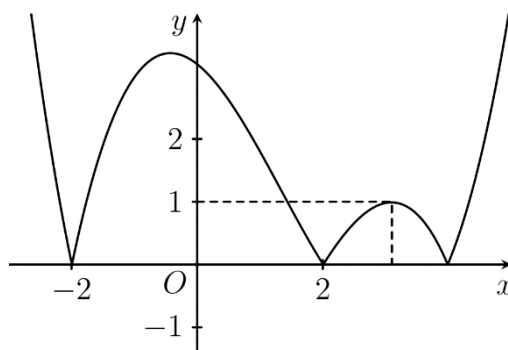
C. 3.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là:



Đặt $t = x^3 - 3x$, ta có: $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow |f(t)| = \frac{2}{3}$.

Từ đồ thị trên suy ra phương trình $|f(t)| = \frac{2}{3}$ có sáu nghiệm phân biệt $t = t_i$.

Xét hàm số $t(x) = x^3 - 3x$, ta có: $t'(x) = 3x^2 - 3$; $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên của hàm $t(x)$ là:

Tuyển tập các câu hỏi trong đề thi THPT

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$t'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$t(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- Phương trình $x^3 - 3x = t_1$ có một nghiệm.
- Mỗi phương trình $x^3 - 3x = t_2, x^3 - 3x = t_3$ có ba nghiệm phân biệt.
- Mỗi phương trình $x^3 - 3x = t_4, x^3 - 3x = t_5, x^3 - 3x = t_6$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$ có 10 nghiệm.

Câu 21: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hai hàm số $y = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ và $y = |x+1| - x - m$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất các các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

- A.** $(-3; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -3)$. **C.** $-3; +\infty)$. **D.** $-\infty; -3$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = |x+1| - x - m$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 0; -1; -2\}$.

Với điều kiện trên, phương trình trở thành:

$$4 - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = |x+1| - x - m (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - 4 + |x+1| - x = m$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - 4 + |x+1| - x$ với tập xác định D , ta có:

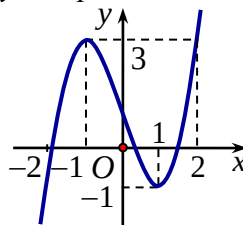
$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{x+1}{|x+1|} - 1 < 0, \forall x \in D.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-3

Để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt. Từ bảng biến thiên suy ra tất cả các giá trị m cần tìm là $m \leq -3$.

Câu 22: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



- A. $-1; 3$. B. $(-1; 1)$. C. $(-1; 3)$. D. $-1; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x$. Với $x \in (0; \pi)$ thì $t \in (0; 1)$.

Do đó phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 1)$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in (-1; 1)$.

Câu 23: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - 6(x - 1) \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

- A. $-\frac{3}{2}$. B. 1. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét bất phương trình $m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - 6(x - 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)[m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x + 1) - 6] \geq 0 (*)$$

Ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình (*), với mọi $m \in \mathbb{R}$.

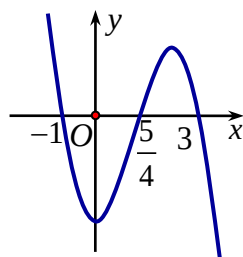
Do đó, để bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì ta phải có $x = 1$ là một nghiệm bội lẻ của $g(x) = m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x + 1) - 6$.

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} g(1) = 0 \\ g'(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 2m - 6 = 0 \\ 6m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -\frac{3}{2}.$$

Thử lại ta thấy $m = 1$ và $m = -\frac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $S = \{1; -\frac{3}{2}\}$.

Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-\frac{1}{2}$.

Câu 24: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$ (1)

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là $-1, \frac{5}{4}, 3$.

Do đó $f'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m \neq 0$. Hay $f'(x) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n = -\frac{13}{3}m$, $p = -m$ và $q = 15m$.

Khi đó phương trình $f(x) = r \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = 0 \Leftrightarrow m\left(x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 45x = 0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{3} \vee x = 3$ (nghiệm kép).

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ là $S = \left\{-\frac{5}{3}; 0; 3\right\}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.C	4.D	5.C	6.B	7.A	8.C	9.A	10.A
11.A	12.C	13.B	14.A	15.B	16.B	17.D	18.A	19.D	20.B
21.D	22.D	23.C	24.B						

18. Cực trị hàm số cho bởi công thức

Câu 1: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3

B. 0

C. 2

D. 1

Lời giải

Chọn B

Có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 2: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{\text{CD}} = 4$

B. $y_{\text{CD}} = 1$

C. $y_{\text{CD}} = 0$

D. $y_{\text{CD}} = -1$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y(1)=0 \\ x=-1 \Rightarrow y(-1)=4 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		4		0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3

B. Cực tiểu của hàm số bằng 1

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6

D. Cực tiểu của hàm số bằng 2

Lời giải

Chọn D

□ Cách 1.

Ta có: $y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

□ Cách 2.

Ta có $y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

$y'' = \frac{8}{(x+1)^3}$. Khi đó: $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$; $y''(-3) = -\frac{1}{2} < 0$.

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Câu 4: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. $m < f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = x(x-2)^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$, trong đó $x = 0$ là nghiệm đơn; $x = 2$ là nghiệm bội chẵn

Vậy hàm số có một cực trị là $x = 0$.

Câu 5: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

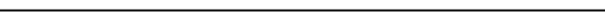
Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	+		
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$



Vậy hàm số đã cho có một điểm cực trị.

Câu 6: (Thông hiểu) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = x(x-1)(x+2)^3; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Vì $f'(x)$

đổi dấu 3 lần khi đi qua các điểm nên hàm số đã cho có 3 cực trị.

Câu 7: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	0	+	

Vậy hàm số đã cho có một điểm cực trị.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.D	4.B	5.C	6.A	7.B			
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--

19. Tìm cực trị dựa vào bbt, đồ thị

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

Arrows indicate the function values at the critical points: from $+\infty$ to 4, from 4 to 5, and from 5 to $-\infty$.

A. $y_{CD} = 5$

B. $y_{CT} = 0$

C. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$

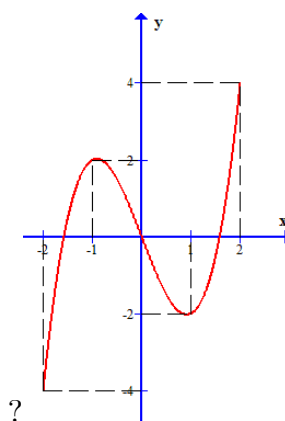
D. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$

Lời giải

Chọn A

Từ BBT suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại $y_{CD} = y(1) = 5$.

Câu 2: (Nhận biết) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây



A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Câu 3: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$ B. Hàm số có bốn điểm cực trị
 C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ D. Hàm số không có cực đại

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên. Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y'(2) = 0$; y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 2$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 4: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y							

Hàm số đạt cực đại tại điểm

- A. $x = 1$. B. $x = 0$. C. $x = 5$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn D

Qua bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Câu 5: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$ **B.** $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$

C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$

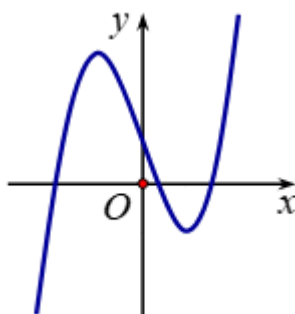
D. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

Câu 6: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

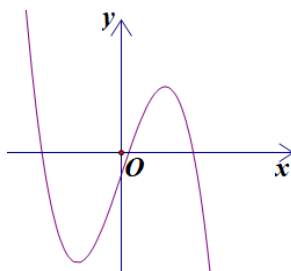
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta khẳng định hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 7: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 0.

B. 1.

C. 3.

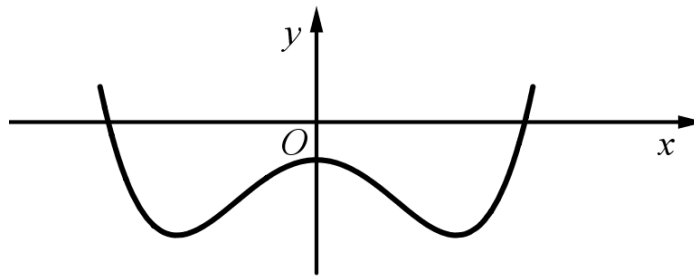
D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đã cho có hai cực trị.

Câu 8: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên



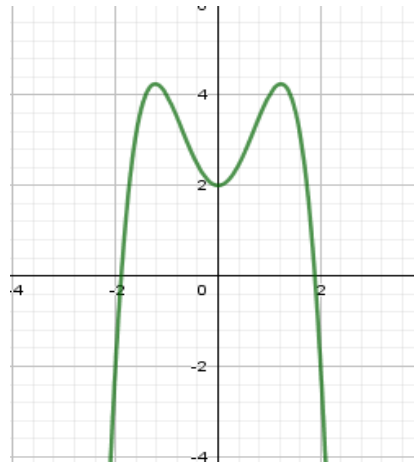
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Câu 9: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 10: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$			1			$-\infty$

Arrows indicate the function values at the critical points: from $+\infty$ at $x=-\infty$ to -3 at $x=-1$, from -3 at $x=-1$ to 1 at $x=2$, and from 1 at $x=2$ to $-\infty$ at $x=+\infty$.

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại.

- A. $x = 2$ B. $x = 1$ C. $x = -1$. D. $x = -3$.

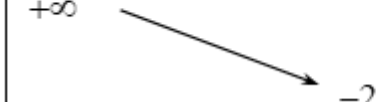
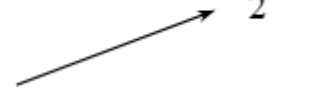
Lời giải

Chọn C

Quan sát bảng biến thiên ta được:

Nghiệm của $y' = f'(x) = 0$ là $x = -1$. Đổi dấu từ âm sang dương qua nghiệm $x = -1$ nên đạt cực tiểu tại $x = -1$

Câu 11: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						
			-2		2		$-\infty$

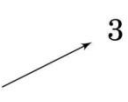
Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Câu 12: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							
			3		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

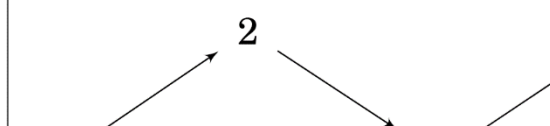
- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x = 1$. Chọn đáp án **D**.

Câu 13: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							
	$-\infty$			2		-2	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x = -2$.

B. $x = 1$.

C. $x = 3$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Câu 14: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$						

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Câu 15: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$							

Mệnh đề nào dưới đây sai

A. Hàm số có hai điểm cực tiểu

B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0

C. Hàm số có ba điểm cực trị

D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3

Lời giải

Chọn B

Câu 16: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là.

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

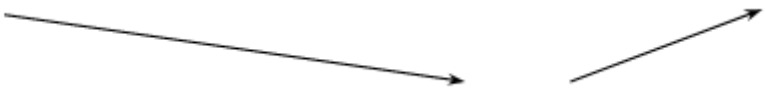
Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -2$ (là nghiệm kép)

Bảng xét dấu

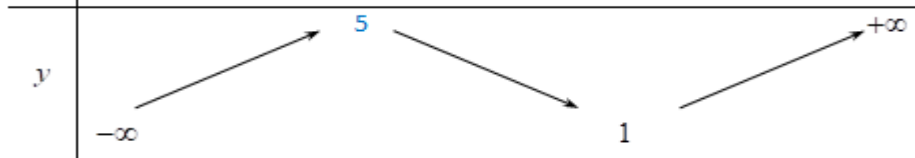
x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y				



Suy ra hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Câu 17: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						



The graph shows a function y plotted against x . The function starts at $-\infty$ as $x \rightarrow -\infty$, increases to a local maximum at $x = -1$ with $y = 5$, decreases to a local minimum at $x = 3$ with $y = 1$, and then increases towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

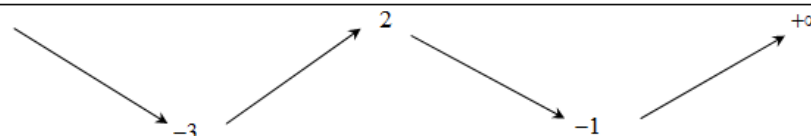
Lời giải

Chọn B

Do đồ thị $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 1 điểm nên đồ thị $y = |f(x)|$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Câu 18: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

- A.** 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm tương ứng

$$\text{là } \begin{cases} x = a, a \in (-\infty; -1) \\ x = b, b \in (-1; 0) \\ x = c, c \in (0; 1) \\ x = d, d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	a	2	c	$+\infty$
		-3	b	-1	

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x) \Rightarrow y' = 2(x - 1)f'(x^2 - 2x)$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \quad (1) \\ x^2 - 2x = b \quad (2) \\ x^2 - 2x = c \quad (3) \\ x^2 - 2x = d \quad (4) \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2x$ ta có $h(x) = x^2 - 2x = -1 + (x - 1)^2 \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó

Phương trình $x^2 - 2x = a, (a < -1)$ vô nghiệm.

Phương trình $x^2 - 2x = b, (-1 < b < 0)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ không trùng với nghiệm của phương trình (1).

Phương trình $x^2 - 2x = c, (0 < c < 1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_3; x_4$ không trùng với nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2).

Phương trình $x^2 - 2x = d, (d > 1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_5; x_6$ không trùng với nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2) và phương trình (3).

Vậy phương trình $y = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 19: (Vận dụng cao) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

- A. 3. B. 9. C. 5. D. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x)$.

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2 + 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 + 2x = c \in (0; 1) \\ x^2 + 2x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

* $x^2 + 2x - a = 0$ có $\Delta' = 1 + a < 0 \forall a \in (-\infty; -1)$ nên phương trình vô nghiệm.

* $x^2 + 2x - b = 0$ có $\Delta' = 1 + b > 0 \forall b \in (-1; 0)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

* $x^2 + 2x - c = 0$ có $\Delta' = 1 + c > 0 \forall c \in (0; 1)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

* $x^2 + 2x - d = 0$ có $\Delta' = 1 + d > 0 \forall d \in (1; +\infty)$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Nhận xét: 7 nghiệm trên khác nhau đôi một nên phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 7 cực trị.

Câu 20: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

- A. 9. B. 5. C. 7. D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } y' = (8x - 4)f'(4x^2 - 4x), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4 = 0 \\ f'(4x^2 - 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x = a \in (-\infty; -1) \\ 4x^2 - 4x = b \in (-1; 0) \\ 4x^2 - 4x = c \in (0; 1) \\ 4x^2 - 4x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

Mặt khác: $4x^2 - 4x = (2x - 1)^2 - 1 \geq -1$ nên:

$4x^2 - 4x = a$ vô nghiệm.

$4x^2 - 4x = b$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$4x^2 - 4x = c$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 .

$4x^2 - 4x = d$ có 2 nghiệm phân biệt x_5, x_6 .

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Cách 2:

Gọi m đại diện cho các tham số ta xét phương trình $4x^2 - 4x - m = 0$ có $\Delta' = 4(m+1), \Delta' > 0 \Rightarrow m > -1$.

Vậy với mỗi giá trị b, c, d thuộc khoảng đã cho phương trình $f'(4x^2 - 4x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 21: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$				2				$+\infty$
			-3				-1		

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

- A. 5. B. 9. C. 7. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (8x + 4)f'(4x^2 + 4x); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(4x^2 + 4x) = 0 \\ 8x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(4x^2 + 4x) = 0 \\ x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$

Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$ nhận thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$

Do đó $f'(4x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x = a \in (-\infty; -1) \\ 4x^2 + 4x = b \in (-1; 0) \\ 4x^2 + 4x = c \in (0; 1) \\ 4x^2 + 4x = d \in (1; +\infty) \end{cases} (*)$. Lại có

$4x^2 + 4x = a$ vô nghiệm vì $4x^2 + 4x = (2x + 1)^2 - 1 \geq -1, \forall x$;

$4x^2 + 4x = b \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases}$;

$4x^2 + 4x = c \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_4 \\ x = x_5 \end{cases}$;

$4x^2 + 4x = d \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_6 \\ x = x_7 \end{cases}.$

Vì $b \neq c \neq d$ do thuộc các khoảng khác nhau nên các nghiệm $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ đều khác nhau và khác $x_1 = -\frac{1}{2}$. Do đó $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt nên y' đổi dấu 7 lần suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.C	4.D	5.A	6.A	7.D	8.B	9.D	10.C
11.C	12.D	13.C	14.D	15.B	16.D	17.B	18.C	19.D	20.C
21.C									

20. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại 1 điểm x_0 cho trước

Câu 1: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Tìm giá trị thực của tham số m để

hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = -1$

B. $m = -7$

C. $m = 5$

D. $m = 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$; y'' .

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(L) \\ m = 5(TM) \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 2: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để

hàm số $y = x^8 + (m - 2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = 8x^7 + 5(m - 2)x^4 - 4(m^2 - 4)x^3 = x^3 \left[\frac{8x^4 + 5(m - 2)x - 4(m^2 - 4)}{g'(x)} \right].$$

Ta xét các trường hợp sau

* Nếu $m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$.

Khi $m = 2 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.

Khi $m = -2 \Rightarrow y' = x^4(8x^4 - 20) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.

* Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 2$. Khi đó ta có

$$y' = x^2[8x^5 + 5(m - 2)x^2 - 4(m^2 - 4)x]$$

Số cực trị của hàm $y = x^8 + (m - 2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$ bằng số cực trị của hàm $g'(x)$

$$\begin{cases} g'(x) = 8x^5 + 5(m - 2)x^2 - 4(m^2 - 4)x \\ g''(x) = 40x^4 + 10(m - 2)x - 4(m^2 - 4) \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ là điểm cực tiểu thì $g''(0) > 0$. Khi đó

$$-4(m^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m = \{-1; 0; 1\}$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m .

Câu 3: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 1)x^5 - (m^2 - 1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 3. B. 2. C. Vô số. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m - 1)x^4 - 4(m^2 - 1)x^3 + 1 = x^3(8x^4 + 5(m - 1)x - 4(m^2 - 1))$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^4 + 5(m - 1)x - 4(m^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

* Nếu $m = 1$ thì $y' = 8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

* Nếu $m = -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^4 - 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \end{cases}$, nhưng $x = 0$ là nghiệm bội chẵn

nên không phải cực trị.

* Nếu $m \neq \pm 1$: khi đó $x = 0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x) = 8x^4 + 5(m - 1)x - 4(m^2 - 1)$. Để $x = 0$ là điểm cực tiểu thì $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -4(m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m = 0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ là $m = 0$ và $m = 1$.

Câu 4: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 4)x^5 - (m^2 - 16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

- A. 8. B. Vô số. C. 7. D. 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m - 4)x^4 - 4(m^2 - 16)x^3 = x^3[8x^4 + 5(m - 4)x - 4(m^2 - 16)] = x^3 \cdot g(x)$

Với $g(x) = 8x^4 + 5(m - 4)x - 4(m^2 - 16)$.

• Trường hợp 1: $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Với $m = 4 \Rightarrow y' = 8x^7$. Suy ra $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = -4 \Rightarrow y' = 8x^4(x^3 - 5)$. Suy ra $x = 0$ không là điểm cực trị của hàm số.

• Trường hợp 2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì qua giá trị $x = 0$ dấu của y' phải chuyển từ âm sang dương do đó $g(0) > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4 < m \leq 4$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

21. Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số bậc ba có cực trị thỏa mãn điều kiện

Câu 5: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = \frac{3}{2}$

B. $m = \frac{3}{4}$

C. $m = -\frac{1}{2}$

D. $m = \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0; 1), B(2; -3)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = (2m - 1)x + 3 + m$ khi và chỉ khi $(2m - 1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

Câu 6: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $Q(-1; 10)$

B. $M(0; -1)$

C. $N(1; -10)$

D. $P(1; 0)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.

Như thế điểm $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB .

Câu 7: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD 2017) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 0

B. 6

C. -6

D. 3

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases} \Rightarrow A\left(m - 1; \frac{m^3 - 3m + 2}{3}\right) \text{ và } B\left(m + 1; \frac{m^3 - 3m - 2}{3}\right)$$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2 - 1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 8: (Vận dụng cao) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ **B.** $m = -1; m = 1$

C. $m = 1$ **D.** $m \neq 0$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 6mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = 0 \end{cases} (m \neq 0)$$

Đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị $A(0; 4m^3)$ và $B(2m; 0)$, ($m \neq 0$)

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |4m^3 \cdot 2m| = 4 \Leftrightarrow 4m^4 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

22. Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn đk

Câu 9: (Vận dụng) (Đề Minh Họa 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **D.** $m = 1$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m(*) \end{cases}$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0; 1)$; $B(-\sqrt{-m}; 1 - m^2)$; $C(\sqrt{-m}; 1 - m^2)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{-m}; -m^2)$; $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{-m}; -m^2)$

Vì ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{m^2} + m^2 \cdot m^2 = 0 \Leftrightarrow -|m| + m^4 = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$ (vì $m < 0$)

Vậy với $m = -1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Câu 10: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m - 1)x^4 - 2(m - 3)x^2 + 1$ không có cực đại?

A. $1 \leq m \leq 3$

B. $m \leq 1$

C. $m \geq 1$

D. $1 < m \leq 3$

Lời giải

Chọn A

TH1: Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 4x^2 + 1$ nên đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(0; 1)$. Suy ra hàm số không có cực đại.

TH2: Nếu $m > 1$

Để hàm số không có cực đại thì $-2(m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$. Suy ra $1 < m \leq 3$

Vậy $1 \leq m \leq 3$

Câu 11: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Có $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$				$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị với mọi m . Do đó để hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại

$$7 - 3 = 4 \text{ điểm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 5 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5.$$

Vì m nguyên nên các giá trị cần tìm của m là $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên cần tìm của m .

23. Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số các hàm số khác có cực trị thỏa mãn điều kiện

Câu 12: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số

m để hàm số $y = x^8 + (m - 3)x^5 - (m^2 - 9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 4. B. 7. C. 6. D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = x^8 + (m - 3)x^5 - (m^2 - 9)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5(m - 3)x^4 - 4(m^2 - 9)x^3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 5(m - 3)x - 4(m^2 - 9)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m - 3)x - 4(m^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5(m - 3)x - 4(m^2 - 9)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5(m - 3)$.

Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm

+) TH1: Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 3$ hoặc $m = -3$

Với $m = 3$ thì $x = 0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x = 0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy $m = 3$ thỏa ycbt.

$$\text{Với } m = -3 \text{ thì } g(x) = 8x^4 - 30x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{15}{4}} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$			$+\infty$

Dựa vào BBT $x = 0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = -3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.B	4.A	5.B	6.C	7.A	8.B	9.B	10.A
11.D	12.C								

24. Giá trị nhỏ nhất, Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A. 50.

B. 5.

C. 1.

D. 122.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ xác định và liên tục trên $[-2; 3]$.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 8x$.

Do đó: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Mà: $f(0) = 5, f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 1, f(-2) = 5, f(3) = 50$.

Suy ra: $\max_{[-2; 3]} f(x) = f(3) = 50$.

Câu 2: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. 20.

B. 4.

C. 0.

D. -16.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

2

$$f(-3) = -16; f(3) = 20; f(-1) = 4; f(1) = 0.$$

$$\text{Vậy } \min_{[-3,3]} f(x) = -16.$$

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min_{[2;4]} y = 6$

B. $\min_{[2;4]} y = -2$

C. $\min_{[2;4]} y = -3$

D. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;4]$

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ hoặc } x=-1 \text{ (loại)}$$

$$\text{Suy ra } y(2)=7; y(3)=6; y(4)=\frac{19}{3}. \text{ Vậy } \min_{[2;4]} y=6 \text{ tại } x=3.$$

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số

$$y = x^2 + \frac{2}{x} \text{ trên đoạn } \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

A. $m = \frac{17}{4}$

B. $m = 10$

C. $m = 5$

D. $m = 3$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$

$$\text{Ta có } y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3-2}{x^2}, y' = 0 \Rightarrow x=1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

$$\text{Khi đó } f(1)=3, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}, f(2)=5$$

$$\text{Vậy } m = \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = 3.$$

Câu 5: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số

$$y = x^4 - 2x^2 + 3 \text{ trên đoạn } [0; \sqrt{3}].$$

A. $M = 9$

B. $M = 8\sqrt{3}$

C. $M = 6$

D. $M = 1$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1(l) \end{cases}$$

Với $x = 0 \Rightarrow y(0) = 3$; với $x = 1 \Rightarrow y(1) = 2$; với $x = \sqrt{3} \Rightarrow y(\sqrt{3}) = 6$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ là $M = 6$.

Câu 6: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng:

A. 201.

B. 2.

C. 9.

D. 54.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 3]$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \pm\sqrt{2} \in [-2; 3] \end{cases}$$

Ta có: $f(-2) = 9$, $f(3) = 54$, $f(0) = 9$, $f(-\sqrt{2}) = 5$, $f(\sqrt{2}) = 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$ bằng $f(3) = 54$.

Câu 7: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng

A. -259.

B. 68.

C. 0.

D. -4.

Lời giải

Chọn D

Giải. TXD $D = [0; 4]$

$$y = x^3 + 2x^2 - 7x; y' = 3x^2 + 4x - 7$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(n) \\ x = -\frac{7}{3}(l) \end{cases}$$

$$y(0) = 0; y(1) = -4; y(4) = 68$$

$$\min_{x \in [0; 4]} y = y(1) = -4$$

Câu 8: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng

A. -4.

B. -16.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$Ta \text{ có } y' = 3x^2 + 6x; y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [-4; -1] \\ x = -2 \in [-4; -1] \end{cases}$$

Khi đó $y(-4) = -16$; $y(-2) = 4$; $y(-1) = 2$.

Nên $\min_{[-4;-1]} y = -16$.

Câu 9: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. 25.

B. $\frac{51}{4}$.

C. 13.

D. 85.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x^4 - x^2 + 13 \\ y' &= 4x^3 - 2x \\ 4x^3 - 2x &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 2] \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 2] \end{cases} \\ f(-1) &= 13; f(2) = 25; f(0) = 13; f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}; f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4} \end{aligned}$$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 25.

Câu 10: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. -16.

B. 20.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3; 3]$

$$f(-3) = -16; f(3) = 20; f(-1) = 4; f(1) = 0$$

Vậy $\max_{[-3;3]} f(x) = 20$.

Câu 11: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. 18.

B. -18.

C. -2.

D. 2.

Lời giải

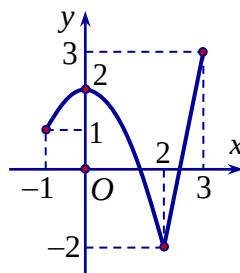
Chọn B

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Mà $f(-3) = -18$; $f(-1) = 2$; $f(1) = -2$; $f(3) = 18$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -18.

Câu 12: (Thông hiểu) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



- A. 0. B. 1. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ ta có:

$$M = \max_{[-1; 3]} y = f(3) = 3 \text{ và } m = \min_{[-1; 3]} y = f(2) = -2$$

Khi đó $M - m = 5$.

Câu 13: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $m = 11$ B. $m = 3$ C. $m = 0$ D. $m = -2$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Ta có $y' = 3x^2 - 14x + 11$ suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tính $f(0) = -2; f(1) = 3; f(2) = 0$. Suy ra $\min_{[0; 2]} f(x) = f(0) = -2 = m$.

Câu 14: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1; 2]} y + \max_{[1; 2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $0 < m \leq 2$ B. $2 < m \leq 4$ C. $m \leq 0$ D. $m > 4$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}.$$

☑ Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2]$, suy ra $\min_{[1; 2]} y + \max_{[1; 2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (loại).

☑ Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$,

$$\text{Suy ra } \min_{[1; 2]} y + \max_{[1; 2]} y = y(2) + y(1) \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$$

Câu 15: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m > 4$

B. $3 < m \leq 4$

C. $m < -1$

D. $1 \leq m < 3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2; 4]$ suy ra $\min_{[2;4]} f(x) = f(2) =$

$$\frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (loại)}$$

* TH 2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2; 4]$ suy ra $\min_{[2;4]} f(x) = f(4) =$

$$\frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5 \text{ suy ra } m > 4.$$

Câu 16: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Đáp án A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

Đáp án B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y = -1$ khi $x = 0$.

Đáp án C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Đáp án D đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 17: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

B. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$

C. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$

D. $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức Cauchy)

$$y = 3x + \frac{4}{x^2} = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq \sqrt[3]{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = \sqrt[3]{9} \text{ (do } x > 0)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}.$$

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

Cách 2: (Dùng đạo hàm)

Xét hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có } y = 3x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{8}{x^3}$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$$

x		0	$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$	$+\infty$	
y'			-	0	+
y					

A diagram consisting of two arrows. The first arrow starts at the intersection of the y row and the second column (under the value 0) and points diagonally down and to the right to the value $3\sqrt[3]{9}$. The second arrow starts at the value $3\sqrt[3]{9}$ and points diagonally up and to the right to the intersection of the y row and the last column (under $+\infty$).

$$\Rightarrow \min_{(0;+\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$$

Câu 18: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$

B. $m = \frac{51}{2}$

C. $m = \frac{49}{4}$

D. $m = 13$

Lời giải

Chọn A

$$y' = 4x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-2; 3] \end{cases}$$

Tính $y(-2) = 25$, $y(3) = 85$, $y(0) = 13$, $y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4} = 12,75$;

Kết luận: giá trị nhỏ nhất m của hàm số là $m = \frac{51}{4}$.

25. Giá trị nhỏ nhất, Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng

Câu 19: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có đúng một cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Đáp án A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

Đáp án B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y = -1$ khi $x = 0$.

Đáp án C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Đáp án D đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 20: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$
- B. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$
- C. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$
- D. $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức Cauchy)

$$y = 3x + \frac{4}{x^2} = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9} \text{ (do } x > 0)$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

Cách 2: (Dùng đạo hàm)

Xét hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có $y = 3x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{8}{x^3}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x		0	$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$	$+\infty$	
y'			-	0	+
y					

A diagram illustrating the behavior of the function y based on the sign of y' . Two arrows originate from the y row. The first arrow starts at the column for $x=0$ and points down and to the right towards the label $3\sqrt[3]{9}$. The second arrow starts at the column for $x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ and points up and to the right.

$$\Rightarrow \min_{(0;+\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$$

Câu 21: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$

B. $m = \frac{51}{2}$

C. $m = \frac{49}{4}$

D. $m = 13$

Lời giải

Chọn A

$$y' = 4x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-2; 3] \end{cases}$$

$$\text{Tính } y(-2) = 25, y(3) = 85, y(0) = 13, y\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4} = 12,75;$$

Kết luận: giá trị nhỏ nhất m của hàm số là $m = \frac{51}{4}$.

26. Ứng dụng Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất, toán thực tế

Câu 22: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m + 3\sqrt{m + 3\sin x}} = \sin x$ có nghiệm thực?

A. 5.

B. 7.

C. 3.

D. 2.

Do đó $m \in \{-1; 1\}$

Vậy tập hợp S có 2 phần tử.

Chú ý: Ta có thể giải nhanh như sau:

Sau khi tìm được Suy ra GTLN và GTNN của $f(x) = x^3 - 3x + m$ thuộc $\{f(0); f(1); f(2)\} = \{m; m - 2; m + 2\}$.

+ Trường hợp 1: $m \geq 0$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$.

+ Trường hợp 2: $m < 0$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = |m - 2| = 2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$

Câu 24: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 216 (m/s)

B. 30 (m/s)

C. 400 (m/s)

D. 54(m/s)

Lời giải

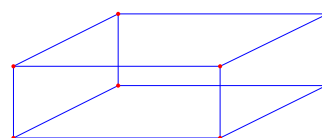
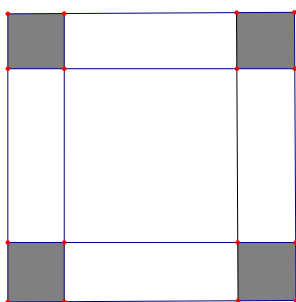
Chọn D

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có : $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Suy ra: $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng **54(m/s)**.

Câu 25: (Vận dụng) (Đề Minh Họa 2017) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = 6$

B. $x = 3$

C. $x = 2$

D. $x = 4$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $h = x(cm)$ là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12 - 2x(cm)$

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (12 - 2x)^2(cm^2)$. Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x.(12 - 2x)^2$

Xét hàm số: $y = x.(12 - 2x)^2 \forall x \in (0; 6)$

Ta có : $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x).(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 6$ (loại).

x	0			2			6			
y'		+			0			-		
y					128					

Suy ra với $x = 2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2) = 128$.

Câu 26: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Ông A dự định sử dụng hết $5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01m^3$.

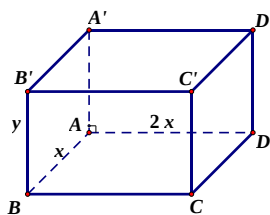
B. $0,96m^3$.

C. $1,33m^3$.

D. $1,51m^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Ta có thể tích bể cá $V = 2x^2y$.

Theo đề bài ta có:

$$2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5-2x^2}{6x} \text{ (Điều kiện } y > 0 \Leftrightarrow 5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}})$$

$$\Rightarrow V = 2x^2 \frac{5-2x^2}{6x} = \frac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{5-6x^2}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 5 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

x	0	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'	+	0	-
V	0	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	0

$$\Rightarrow V \frac{5\sqrt{30}}{27} \max.$$

Câu 27: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Ông A dự định sử dụng hết $5,5 m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?:

- A.** $1,17 m^3$. **B.** $1,01 m^3$. **C.** $1,51 m^3$. **D.** $1,40 m^3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x, 2x, h$ lần lượt là chiều rộng, dài, cao của bể cá.

$$\text{Ta có } 2x^2 + 2(xh + 2xh) = 5,5 \Leftrightarrow h = \frac{5,5 - 2x^2}{6x} \text{ (Điều kiện } 0 < x < \sqrt{\frac{5,5}{2}}).$$

$$\text{Thể tích bể cá } V = 2x^2 \cdot \frac{5,5 - 2x^2}{6x} = \frac{1}{3}(5,5x - 2x^3).$$

$$V' = \frac{1}{3}(5,5 - 6x^2). V' = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5,5}{6}}.$$

$$\text{Lập BBT suy ra } V_{\max} = \frac{11\sqrt{33}}{54} \approx 1,17 m^3.$$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.A	4.D	5.C	6.D	7.D	8.B	9.A	10.B
11.B	12.D	13.D	14.D	15.A	16.D	17.A	18.A	19.D	20.A
21.A	22.A	23.B	24.D	25.C	26.A	27.A			

27. Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số (không chứa tham số) hoặc biết bbt, đồ thị

Câu 1: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chọn đáp án **C**.

Câu 2: **(Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
y'			+		
y			$-\infty$	$+\infty$	0

A. 1

B. 3

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có :

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$, suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 3: **(Nhận biết) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017)** Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

A. $x = 1$

B. $y = -1$

C. $y = 2$

D. $x = -1$

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Câu 4: **(Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

B. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

C. $y = \sqrt{x^2-1}$.

D. $y = \frac{x}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ có một đường tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 5: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \frac{1}{4}$ nên đường thẳng $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$, nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 6: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

- A. 2 B. 3 C. 0 D. 1

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \neq \pm 1$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Mặt khác:

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow x = 1$ không là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-4)}{(x+1)} = +\infty$$

$\Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng.

Câu 7: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = -9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \frac{1}{6}.$$

Câu 8: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \right] = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \right] = -\infty.$$

Do đó đường $x = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x^2+x)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}.$$

Do đó đường $x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng là đường $x = -1$.

Câu 9: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = -25; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+25}+5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+25}+5)} = \frac{1}{10}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+25}+5)} = +\infty$$

vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (\sqrt{x+25}+5) = \sqrt{24}+5 > 0$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0$ và $x \rightarrow (-1)^+$ thì $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$

Tương tự ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 10: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y =$

$$\frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$$
 là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định hàm số $D = (-16; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = \frac{1}{8}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = +\infty.$$

vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (\sqrt{x+16}+4) = \sqrt{15}+4 > 0$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0$ và $x \rightarrow (-1)^+$ thì $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$.

$$\text{Tương tự } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+16}+4)} = -\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Câu 11: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	2	$+\infty$	-2	$+\infty$	
	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$	
	-4				

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -4$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng hai đường tiệm cận.

Câu 12: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0		2		$+\infty$
		$-\infty$		-2	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là:

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang.

Tổng số tiệm cận là 2

Câu 13: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	1	$\searrow$		2	$\nearrow$
		$-\infty$		-3	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3$.

Do đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một tiệm cận đứng $x = 0$ và hai tiệm cận ngang $y = 1$; $y = 3$. Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 14: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Nguyên tập các dấu hiệu trong đồ thị hàm $f(x)$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	0		$+\infty$	3
				
		-4	-3	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3$ nên đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Câu 15: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$$

- A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{x+1}{x+4}$ (với điều kiện xác định), do đó đồ thị hàm có 1 tiệm cận đứng.

Câu 16: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị

$$\text{hàm số } y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}.$$

- A. $x = -3$ và $x = -2$. B. $x = -3$. C. $x = 3$ và $x = 2$. D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x - 1)^2 - (x^2 + x + 3)}{(x^2 - 5x + 6)(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x - 1)^2 - (x^2 + x + 3)}{(x^2 - 5x + 6)(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x + 1)}{(x - 3)(2x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 3})} = -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

Tương tự $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = -\frac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x = 2$ không là tiệm cận đứng của

đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 17: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y		2		3	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

KL: Đồ thị hàm số có tổng số ba đường tiệm cận.

28. Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số có chứa tham số

Câu 18: (Vận dụng) (Đề Minh Họa 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ

thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang

- A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài B. $m < 0$
C. $m = 0$ D. $m > 0$

Lời giải

Chọn D

Xét các trường hợp sau:

Với $m = 0$: hàm số trở thành $y = x+1$ nên không có tiệm cận ngang.

Với $m < 0$:

hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{1-|m|x^2}}$ có tập xác định là $D = \left(-\frac{1}{\sqrt{|m|}}; \frac{1}{\sqrt{|m|}} \right)$ suy ra không tồn

tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ hay hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m > 0$:

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là : $y = \frac{1}{\sqrt{m}}; y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m > 0$.

Câu 19: (Vận dụng) (Đề Minh Họa 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$

B. $m \leq 0$

C. $1 \leq m < 2$

D. $m \geq 2$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \tan x$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t-2}{t-m} \forall t \in (0; 1)$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Ta có $f'(t) = \frac{2-m}{(t-m)^2}$.

Để hàm số y đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t) > 0 \forall t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2-m}{(t-m)^2} > 0 \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0] \cup [1; 2) \\ m \geq 1 \end{cases}$$

CASIO: Đạo hàm của hàm số ta được $y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - m) - (\tan x - 2)\frac{1}{\cos^2 x}}{(\tan x - m)^2}$

Ta nhập vào máy tính thành $y' \setminus \text{CALC} \setminus \text{Calc } x = \frac{\pi}{8}$ (Chọn giá trị này thuộc $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$)

$\setminus = \setminus m = ?$ 1 giá trị bất kỳ trong 4 đáp án.

Đáp án D $m \geq 2$. Ta chọn $m = 3$. Khi đó $y' = -0,17 < 0$ (Loại)

Đáp án C $1 \leq m < 2$ Ta chọn $m = 1,5$. Khi đó $y' = 0,49 > 0$ (nhận)

Đáp án B $m \geq 0$ Ta chọn $m = 0$. Khi đó $y' = 13,6 > 0$ (nhận)

Vậy đáp án B và C đều đúng nên chọn đáp án A

29. Bài toán liên quan đến đồ thị hàm số và các đường tiệm cận

Câu 20: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$(C): y = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}.$$

$I(-2; 1)$ là giao điểm hai đường tiệm cận của (C) .

Ta có: $A\left(a; 1 - \frac{3}{a+2}\right) \in (C), B\left(b; 1 - \frac{3}{b+2}\right) \in (C)$.

$$\overrightarrow{IA} = \left(a + 2; -\frac{3}{a+2}\right), \overrightarrow{IB} = \left(b + 2; -\frac{3}{b+2}\right).$$

Đặt $a_1 = a + 2, b_1 = b + 2$ ($a_1 \neq 0, b_1 \neq 0; a_1 \neq b_1$).

Tam giác ABI đều khi và chỉ khi

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \cos 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + \frac{9}{a_1^2} = b_1^2 + \frac{9}{b_1^2} \\ \frac{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}}{|\overrightarrow{IA}| |\overrightarrow{IB}|} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + \frac{9}{a_1^2} = b_1^2 + \frac{9}{b_1^2} \quad (1) \\ \frac{a_1 b_1 + \frac{9}{a_1 b_1}}{a_1^2 + \frac{9}{a_1^2}} = \frac{1}{2} \quad (2) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow a_1^2 - b_1^2 + 9\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{b_1^2}\right) = 0 \Leftrightarrow a_1^2 - b_1^2 - 9\left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{a_1^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 - b_1^2 - 9\left(\frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1^2 b_1^2}\right) = 0 \Leftrightarrow (a_1^2 - b_1^2)\left(1 - \frac{9}{a_1^2 b_1^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 = b_1^2 \\ a_1^2 b_1^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_1 = -b_1 \\ a_1 b_1 = 3 \\ a_1 b_1 = -3 \end{cases}.$$

Trường hợp $a_1 = b_1$ loại vì $A \neq B; a_1 = -b_1, a_1 b_1 = -3$ (loại vì không thỏa (2)).

Do đó $a_1 b_1 = 3$, thay vào (2) ta được $\frac{3 + \frac{9}{3}}{a_1^2 + \frac{9}{a_1^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_1^2 + \frac{9}{a_1^2} = 12$.

$$\text{Vậy } AB = IA = \sqrt{a_1^2 + \frac{9}{a_1^2}} = 2\sqrt{3}.$$

30. Câu hỏi lý thuyết về tiệm cận

Câu 21: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ B. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$ C. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ D. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

Lời giải

Chọn A

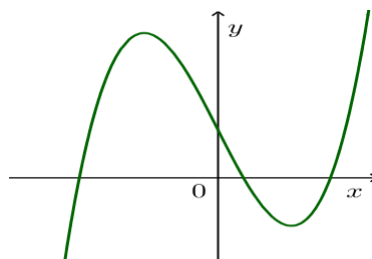
Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.D	4.D	5.D	6.A	7.D	8.D	9.C	10.D
11.D	12.C	13.C	14.C	15.C	16.D	17.C	18.D	19.A	20.B
21.A									

31. Nhận dạng đồ thị

Câu 1: (Nhận biết) (Đề Minh Họa THPTQG 2017) Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^2 + x - 1$ B. $y = -x^3 + 3x + 1$ C. $y = x^4 - x^2 + 1$ D. $y = x^3 - 3x + 1$

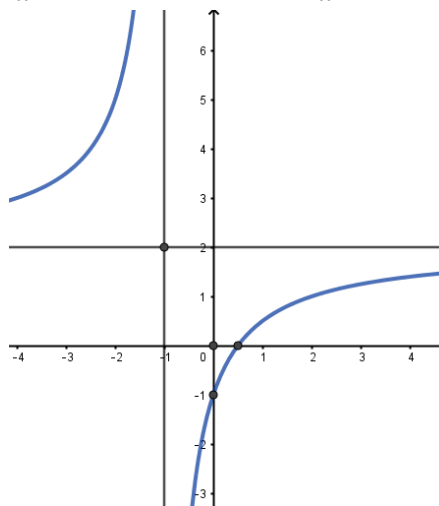
Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị : $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và đây là đồ thị hàm bậc ba nên ta chọn phương án $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 2: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho đường cong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = \frac{2x+3}{x+1}$ B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$ C. $y = \frac{2x-2}{x-1}$ D. $y = \frac{2x+1}{x-1}$

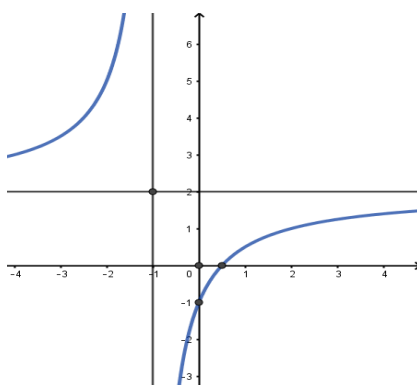


Lời giải

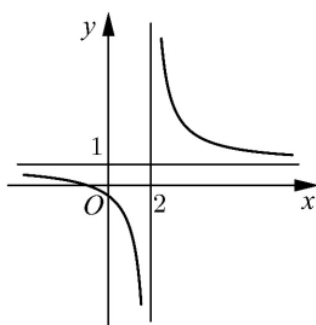
Chọn B

Dựa vào đồ thị suy ra tiệm cận đứng $x = -1$ loại C, D

Đồ thị hàm số giao với trục hoành có hoành độ dương suy ra chọn B



Câu 3: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



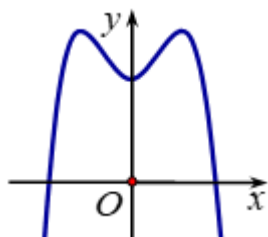
- A.** $y' < 0, \forall x \neq 1$ **B.** $y' < 0, \forall x \neq 2$ **C.** $y' > 0, \forall x \neq 2$ **D.** $y' > 0, \forall x \neq 1$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy tiệm cận đứng bằng 2, Hàm số nghịch biến vậy chọn B

Câu 4: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.** $y = -x^4 + 2x^2 + 2.$
B. $y = x^4 - 2x^2 + 2.$
C. $y = x^3 - 3x^2 + 2.$
D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2.$

Lời giải

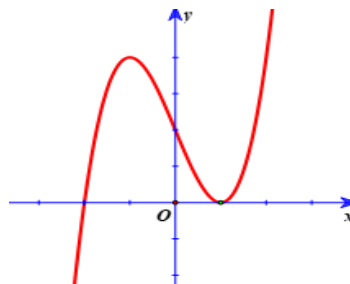
Chọn A

Đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

Nhìn dạng đồ thị suy ra: $a < 0$.

Đồ thị có ba điểm cực trị nên $a.b < 0$ suy ra: $b > 0$.

Câu 5: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



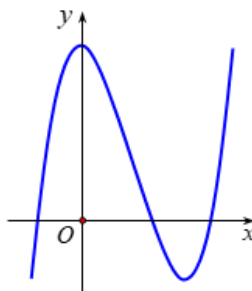
A. $y = x^3 - 3x + 2$ B. $y = x^4 - x^2 + 1$ C. $y = x^4 + x^2 + 1$ D. $y = -x^3 + 3x + 2$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hình vẽ là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ thỏa mãn điều kiện trên

Câu 6: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$ B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$ D. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$

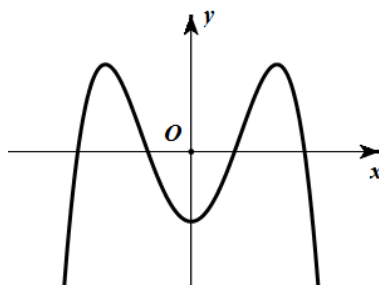
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba nên loại đáp án B và

C. Mặt khác dựa vào đồ thị ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên hệ số của x^3 dương nên ta chọn đáp án $y = x^3 - 3x^2 + 3$

Câu 7: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Đường cong trong hình vẽ bên là của hàm số nào dưới đây



- A.** $y = x^4 - 3x^2 - 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. **D.** $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn D

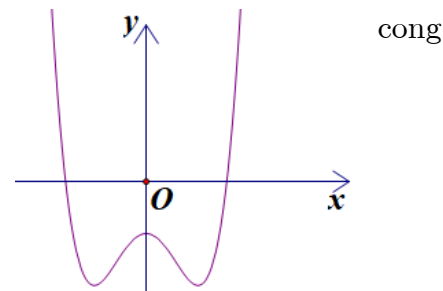
Vì đồ thị có dạng hình chữ M nên đây là hàm trùng phương. Do đó loại B và

C.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$ nên loại **A.**

Câu 8: **(Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
C. $y = x^3 - x^2 - 1$.
D. $y = -x^3 + x^2 - 1$.

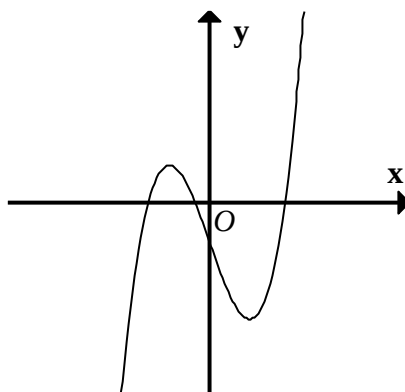


Hướng dẫn giải

Chọn A

Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho là hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0$ nên chọn đáp án A

Câu 9: **(Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.** $y = -x^4 + x^2 - 1$. **B.** $y = x^4 - 3x^2 - 1$. **C.** $y = -x^3 - 3x - 1$. **D.** $y = x^3 - 3x - 1$.

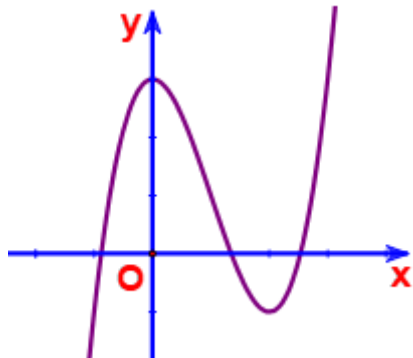
Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba nên loại A và **B**.

Đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên D đúng.

Câu 10: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.

C. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

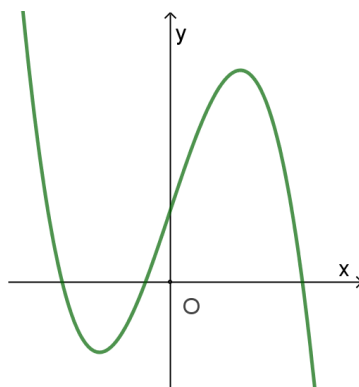
D. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị trên là đồ thị của hàm số bậc 3, với hệ số a dương. Do đó, chọn đáp án **A**

Câu 11: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình



A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

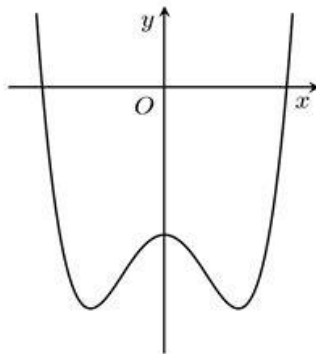
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị trên là của hàm số bậc ba (loại **A** và **D**).

Nhánh cuối cùng đi xuống nên $a < 0$, nên **Chọn B**

Câu 12: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



- A.** $y = x^3 - 3x^2 - 2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 2$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Lời giải

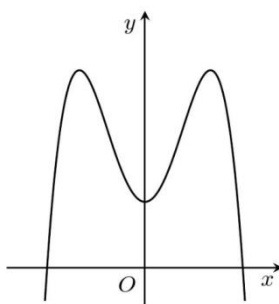
Chọn B

Ta dựa vào đồ thị chọn $a > 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Do đồ thị hàm số có 3 cực trị nên $b < 0$.

Câu 13: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



- A.** $y = 2x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$. **C.** $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.
D. $y = -2x^3 + 3x + 1$.

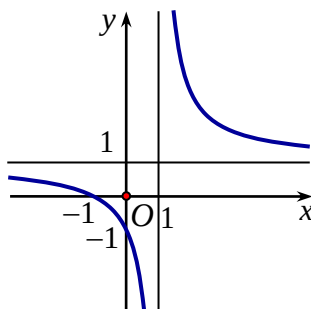
Lời giải

Chọn B

+) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị, nên là đồ thị của hàm số bậc 4. Loại đáp án **A** và **D**;

+) Đồ thị có hệ số $a < 0$, loại **C.** Chọn đáp án **B.**

Câu 14: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = x^4 + x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x - 1$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

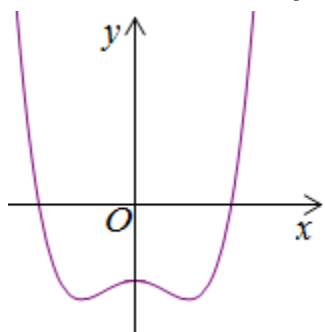
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$.

$\Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị đã cho là của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Câu 15: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - x^2 - 1$

B. $y = -x^3 + x^2 - 1$

C. $y = x^4 - x^2 - 1$

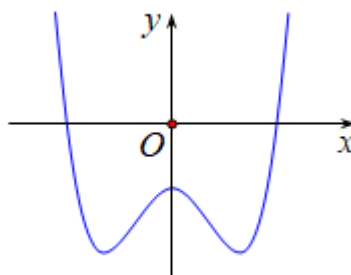
D. $y = -x^4 + x^2 - 1$

Lời giải

Chọn C

Đây là hình dáng của đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a > 0$

Câu 16: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt

B. Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực

C. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt

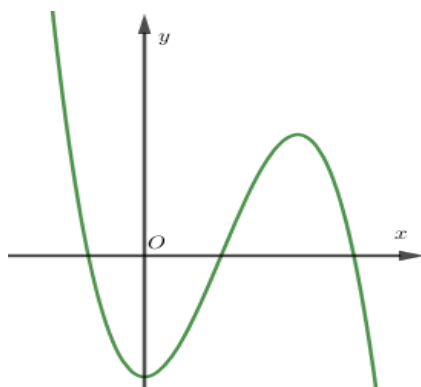
D. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên tập số thực

Lời giải

Chọn A

Dựa vào hình dáng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương có 3 điểm cực trị nên phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 17: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^3 - 3x^2 - 2$. B. $y = x^4 - x^2 - 2$. C. $y = -x^4 + x^2 - 2$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

Lời giải

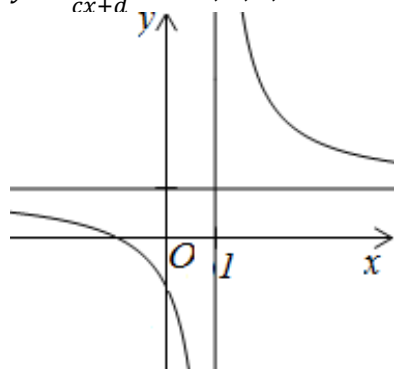
Chọn D

Dựa trên hình dáng đồ thị, ta loại các đáp án B và ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên loại đáp án

D. Mặt khác từ đồ thị,

A.

Câu 18: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

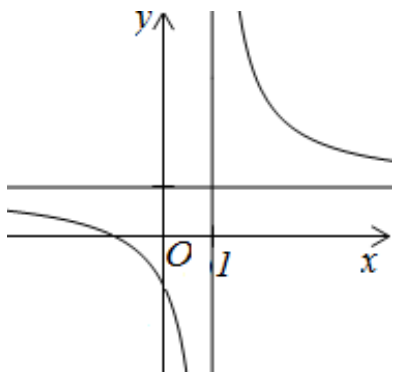


A. $y' < 0, \forall x \neq 1$ B. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ D. $y' > 0, \forall x \neq 1$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$.

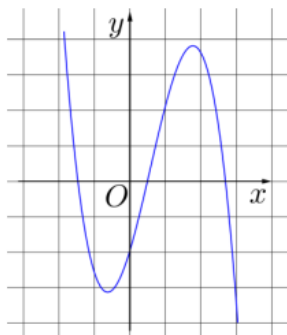


Dựa vào hình dáng của đồ thị ta được:

- + Điều kiện $x \neq 1$
- + Đây là đồ thị của hàm nghịch biến

Từ đó ta được $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Câu 19: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại phương án C

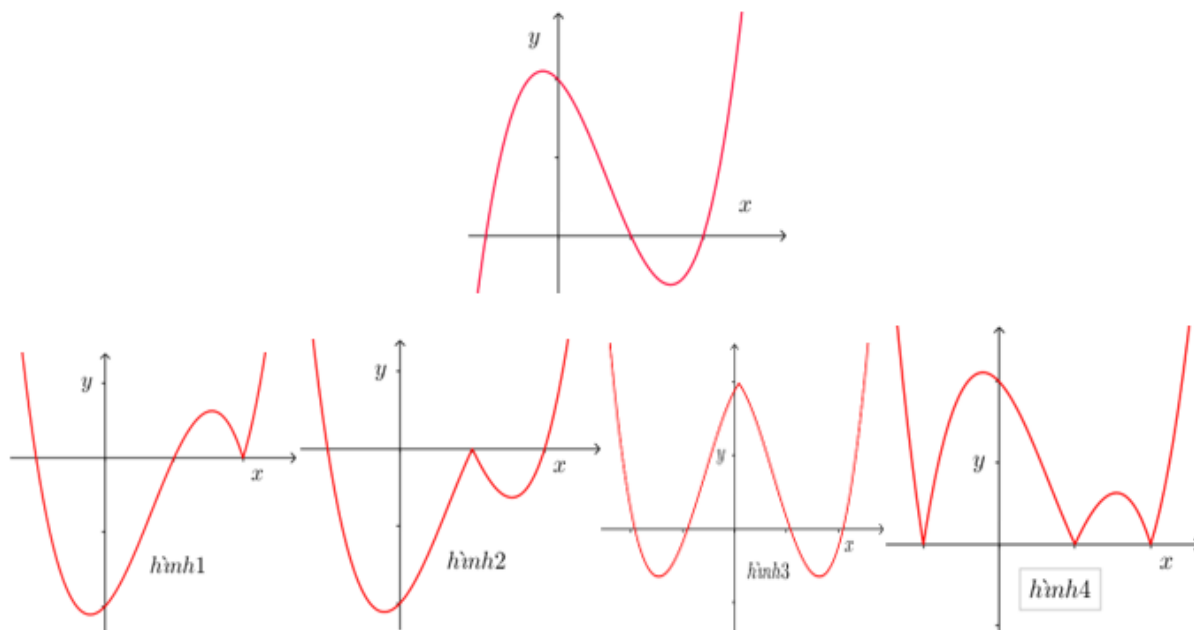
$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với Oy) $\Rightarrow 3a \cdot c < 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow$ loại phương án **D.** Do $(C) \cap Oy = D(0; d) \Rightarrow d < 0$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3.B	4.A	5.A	6.A	7.D	8.A	9.D	10.A
11.B	12.B	13.B	14.B	15.C	16.A	17.D	18.A	19.A	

32. Phép biến đổi đồ thị

Câu 1: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



A. Hình 1

B. Hình 2

C. Hình 3

D. Hình 4

Lời giải

Chọn A

$$y = |x-2|(x^2-1) = \begin{cases} (x-2)(x^2-1), & x \geq 2 \\ -(x-2)(x^2-1), & x < 2 \end{cases}$$

Đồ thị gồm 2 phần:

+) Giữ nguyên phần đồ thị $x \geq 2$.

+) Lấy đối xứng phần đồ thị $x < 2$ qua trục Ox

Hình 1 nhận vì đồ thị là hàm $y = |x-2|(x^2-1)$

Hình 2 loại vì đồ thị là hàm $y = (x-2)|x-1|(x+1)$

Hình 3 loại vì đồ thị hàm số $y = (|x|-2)(x^2-1)$

Hình 4 loại vì đồ thị hàm $y = |(x-2)(x^2-1)|$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A									
-----	--	--	--	--	--	--	--	--	--

33. Biện luận nghiệm phương trình

Câu 1: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

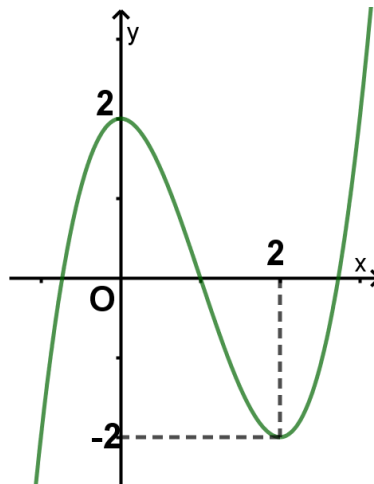
Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$.

Do $2 \in (-2; 4)$ nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

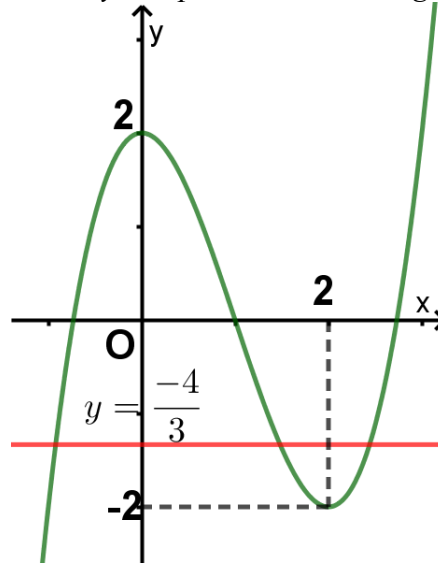
Câu 2: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Lời giải

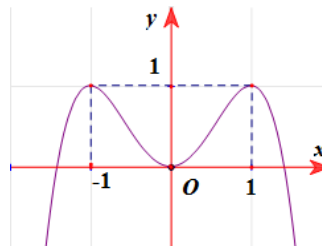
Chọn A



Ta có: $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên.



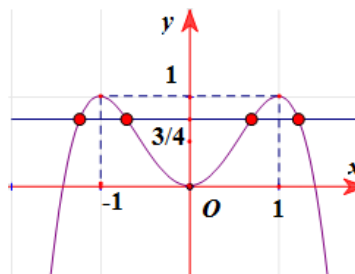
Số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $4f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{4}$.



Đường thẳng $y = \frac{3}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

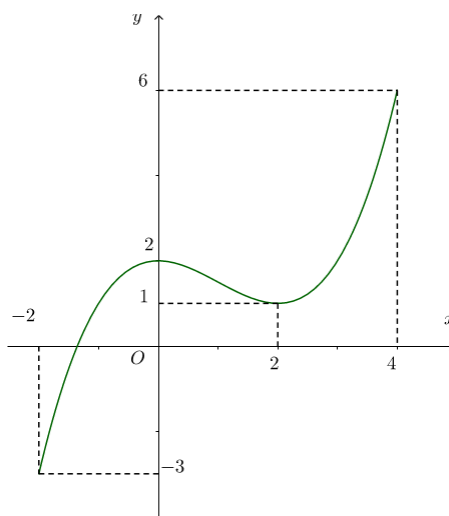
Lời giải

Chọn A

Ta có $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = \frac{4}{3}$ cắt $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 5: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là



A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \frac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt thuộc đoạn $[-2; 4]$.

Do đó phương trình $3f(x) - 5 = 0$ có ba nghiệm thực.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.A	5.B					
-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--

34. Sự tương giao của hai đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm)

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy số giao điểm của (C) và trục hoành là 3.

Câu 2: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

A. $y_0 = 4$

B. $y_0 = 0$

C. $y_0 = 2$

D. $y_0 = -1$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x + 2 = x^3 + x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$.

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0

B. $\vec{n} = (3; -3; 2)$

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2x^2 + 2 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy hai đồ thị có tất cả 2 điểm chung.

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-		+	0	-	
y	$+\infty$		-1		2		$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $[-1; 2]$.

B. $(-1; 2)$.

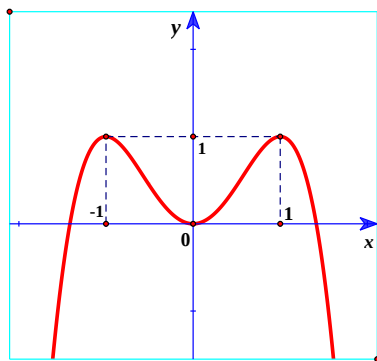
C. $-1; 2$.

D. $-\infty; 2$.

Lời giải

Chọn B

Câu 5: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.



- A.** $m > 0$ **B.** $0 \leq m \leq 1$ **C.** $0 < m < 1$ **D.** $m < 1$

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm thực của phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị suy ra $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt khi $0 < m < 1$.

Câu 6: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

- A.** $m \in (1; +\infty)$ **B.** $m \in (-\infty; 3)$ **C.** $m \in (-\infty; -1)$ **D.** $m \in (-\infty; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x^2 - 2x + m - 2 = 0$$

Đặt nghiệm $x_2 = 1$. Từ giả thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng. Khi đó phương trình

$$x^2 - 2x + m - 2 = 0 \text{ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Viet rõ ràng } x_1 + x_3 = 2 = 2x_2)$$

$$\text{Vậy ta chỉ cần } \Delta' = 1 - (m - 2) > 0 \Leftrightarrow m < 3$$

Câu 7: (Vận dụng cao) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$

- A.** $m \in (-\infty; 0) \cup \frac{4}{3}; +\infty)$ **B.** $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$
C. $m \in (-2; +\infty)$ **D.** $m \in \mathbb{R}$

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là: $x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - mx + m + 1 = 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 \end{cases}$. Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Hay $\begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ 1 - 2 - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$. Với $m > -2$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là $1, x_1, x_2$ (x_1, x_2 là nghiệm của $x^2 - 2x - m - 1 = 0$).

Ta có $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow (1; 1)$ là điểm uốn. Để $AB = BC$ thì đường thẳng $y = mx - m + 1$ phải đi qua điểm $(1; 1)$. Thay vào thấy luôn đúng. Vậy $m > -2$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.D	4.B	5.C	6.B	7.C			
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--

35. Điểm đặc biệt của đồ thị hàm số

Câu 1: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Biết $M(0; 2), N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

A. $y(-2) = 2$. **B.** $y(-2) = 22$. **C.** $y(-2) = 6$. **D.** $y(-2) = -18$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì $M(0; 2), N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(-2) = -18.$$

Câu 2: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. 4. C. 2. D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

$$\text{Ta có: } y = \frac{x-2}{x+2} = 1 - \frac{4}{x+2}.$$

Đồ thị (C) có hai đường tiệm cận là $x = -2$ và $y = 1$. Suy ra $I(-2; 1)$.

Gọi $A(a-2; 1-\frac{4}{a})$, $B(b-2; 1-\frac{4}{b})$ với $a, b \neq 0, a \neq b$.

Tam giác IAB đều $\Leftrightarrow IA = IB = AB$.

$$\text{Ta có: } IA = IB \Leftrightarrow a^2 + \frac{16}{a^2} = b^2 + \frac{16}{b^2} \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 b^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm a & (1) \\ a^2 b^2 = 16 & (2) \end{cases} \text{ (do } a \neq b).$$

(1) sẽ dẫn tới $A \equiv B$ hoặc I là trung điểm AB nên loại.

$$\text{Vậy } a^2 b^2 = 16.$$

Lại có:

$$\begin{aligned} IA = AB &\Rightarrow a^2 + \frac{16}{a^2} = (a-b)^2 + 16 \frac{(a-b)^2}{a^2 b^2} \\ &\Rightarrow a^2 + b^2 = 2(a-b)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4ab \Rightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 16 \end{cases} \\ &\Rightarrow (a-b)^2 = 8 \Rightarrow AB^2 = 2(a-b)^2 = 16 \Rightarrow AB = 4. \end{aligned}$$

Câu 3: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn AB có độ dài bằng:

- A. 3. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.

$$(C): y = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

$I(-1; 1)$ là giao điểm hai đường tiệm cận của (C) .

$$\text{Ta có: } A(a; 1 - \frac{2}{a+1}) \in (C), B(b; 1 - \frac{2}{b+1}) \in (C).$$

$$\vec{IA} = (a+1; -\frac{2}{a+1}), \vec{IB} = (b+1; -\frac{2}{b+1}).$$

$$\text{Đặt } a_1 = a+1, b_1 = b+1 \text{ (} a_1 \neq 0, b_1 \neq 0; a_1 \neq b_1).$$

Tam giác ABI đều khi và chỉ khi

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \cos 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + \frac{4}{a_1^2} = b_1^2 + \frac{4}{b_1^2} \\ \frac{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}}{IA \cdot IB} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + \frac{4}{a_1^2} = b_1^2 + \frac{4}{b_1^2} (1) \\ \frac{a_1 b_1 + \frac{4}{a_1 b_1}}{a_1^2 + \frac{4}{a_1^2}} = \frac{1}{2} (2) \end{cases}.$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow a_1^2 - b_1^2 + 4\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{b_1^2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (a_1^2 - b_1^2)\left(1 - \frac{4}{a_1^2 b_1^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 = b_1^2 \\ a_1^2 b_1^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_1 = -b_1 \\ a_1 b_1 = 2 \\ a_1 b_1 = -2 \end{cases}.$$

Trường hợp $a_1 = b_1$ loại vì $A \neq B$; $a_1 = -b_1$, $a_1 b_1 = -2$ (loại vì không thỏa (2)).

Do đó $a_1 b_1 = 2$, thay vào (2) ta được $\frac{2 + \frac{4}{2}}{a_1^2 + \frac{4}{a_1^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_1^2 + \frac{4}{a_1^2} = 8$.

Vậy $AB = IA = \sqrt{a_1^2 + \frac{4}{a_1^2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Câu 4: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $2\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Tính tiến hệ trục theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (-1; 1) \rightarrow I(0; 0)$ và (C): $Y = \frac{-3}{X}$.

Gọi $A\left(a; \frac{-3}{a}\right)$, $B\left(b; \frac{-3}{b}\right) \in (C)$, điều kiện: $(a \neq b)$.

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} IA = IB \\ \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \frac{9}{a^2} = b^2 + \frac{9}{b^2} (1) \\ \frac{ab + \frac{9}{ab}}{AB^2} = \frac{1}{2} (2) \end{cases}$

Từ (2) $\rightarrow ab > 0$, do đó: $(1) \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 b^2 - 9) = 0 \xrightarrow{ab > 0} ab = 3$.

Suy ra: $AB^2 = 2\left(3 + \frac{9}{3}\right) = 12 \rightarrow AB = 2\sqrt{3}$.

.

36. Lũy thừa

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Tính giá trị của biểu thức

$$P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$$

A. $P = 1$

B. $P = 7 - 4\sqrt{3}$

C. $P = 7 + 4\sqrt{3}$

D. $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2016}$

Lời giải

Chọn C

$$P = (\gamma + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - \gamma)^{2016} = (\gamma + 4\sqrt{3}) \cdot [(\gamma + 4\sqrt{3})(4\sqrt{3} - \gamma)]^{2016} \\ = (\gamma + 4\sqrt{3})(-1)^{2016} = \gamma + 4\sqrt{3}.$$

Câu 2: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

A. $Q = b^{-\frac{4}{3}}$

B. $Q = b^{\frac{4}{3}}$

C. $Q = b^{\frac{5}{9}}$

D. $Q = b^2$

Lời giải

Chọn B

$$Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b} = b^{\frac{5}{3}} : b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{4}{3}}$$

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{1}{2}}$

B. $P = x^{\frac{13}{24}}$

C. $P = x^{\frac{1}{4}}$

D. $P = x^{\frac{2}{3}}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có, với } x > 0: P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[4]{x \cdot x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}.$$

37. Tập xác định hàm số lũy thừa

Câu 1: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.

A. $D = \mathbb{R}$

B. $D = (0; +\infty)$

C. $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

Lời giải

Chọn D

Vì $-3 \in \mathbb{Z}^-$ nên hàm số xác định khi $x^2 - x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; x \neq 2$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Câu 2: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Tập xác định D của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$ là:.

A. $D = (-\infty; 1)$

B. $D = (1; +\infty)$

C. $D = \mathbb{R}$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy $D = (1; +\infty)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.B								
-----	-----	--	--	--	--	--	--	--	--

38. Tính giá trị biểu thức chứa lô-ga-rít

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho a là số thực dương $a \neq 1$ và $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $P = 3$ B. $P = 1$ C. $P = 9$ D. $P = \frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn C

$$\log_{\sqrt[3]{a}} a^3 = \log_{a^{\frac{1}{3}}} a^3 = 9.$$

Câu 2: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

- A. $I = \frac{1}{2}$ B. $I = 2$ C. $I = -\frac{1}{2}$ D. $I = -2$

Lời giải

Chọn B

$$I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right) = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} \right)^2 = 2$$

Câu 3: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng

- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$ B. $\ln(2a)$ C. $\ln \frac{5}{3}$ D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \ln(5a) - \ln(3a) = \ln \frac{5a}{3a} = \ln \frac{5}{3}.$$

Câu 4: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng

- A. $3 \log_3 a$ B. $3 + \log_3 a$ C. $1 + \log_3 a$ D. $1 - \log_3 a$

Lời giải

Chọn C

$$\log_3(3a) = \log_3 3 + \log_3 a = 1 + \log_3 a$$

Câu 5: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = 0$

C. $I = -2$

D. $I = 2$

Lời giải

Chọn D

Với a là số thực dương khác 1 ta được: $I = \log_{\sqrt{a}} a = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a = 2 \log_a a = 2$

Câu 6: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính

$$I = 2 \log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2.$$

A. $I = 0$

B. $I = 4$

C. $I = \frac{3}{2}$

D. $I = \frac{5}{4}$

Lời giải

Chọn C

$$I = 2 \log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2 = 2 \log_3 (\log_3 3 + \log_3 a) + 2 \log_{2^{-2}} b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

39. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lô-ga-rít

Câu 7: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(3a) = 3 \log a$. B. $\log a^3 = \frac{1}{3} \log a$. C. $\log a^3 = 3 \log a$. D. $\log(3a) = \frac{1}{3} \log a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log(3a) = \log 3 + \log a$ suy ra loại A, D.

$\log a^3 = 3 \log a$ (do $a > 0$) nên chọn C.

Câu 8: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số dương x, y .

A. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

B. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a (x - y)$

C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$

D. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất của logarit.

Câu 9: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

A. $\frac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$.

B. $\frac{\ln 7}{\ln 3}$.

C. $\ln \frac{7}{3}$.

D. $\ln(4a)$.

Lời giải

Chọn C

$$\ln(7a) - \ln(3a) = \ln\left(\frac{7a}{3a}\right) = \ln \frac{7}{3}.$$

Câu 10: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\frac{3}{a}\right)$ bằng:

A. $1 - \log_3 a$.

B. $3 - \log_3 a$.

C. $\frac{1}{\log_3 a}$.

D. $1 + \log_3 a$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_3\left(\frac{3}{a}\right) = \log_3 3 - \log_3 a = 1 - \log_3 a.$$

Câu 11: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^2$ bằng

A. $2 \log_5 a$.

B. $2 + \log_5 a$.

C. $\frac{1}{2} + \log_5 a$.

D. $\frac{1}{2} \log_5 a$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_5 a^2 = 2 \log_5 a.$$

Câu 12: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

A. $\frac{1}{3} \log_5 a$.

B. $\frac{1}{3} + \log_5 a$.

C. $3 + \log_5 a$.

D. $3 \log_5 a$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_5 a^3 = 3 \log_5 a$$

Câu 13: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng :

A. $3 \log_2 a$.

B. $\frac{1}{3} \log_2 a$.

C. $\frac{1}{3} + \log_2 a$.

D. $3 + \log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_2 a^3 = 3 \log_2 a$$

Câu 14: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 a^2$ bằng

A. $2 \log_3 a$.

B. $\frac{1}{2} + \log_3 a$.

C. $\frac{1}{2} \log_3 a$.

D. $2 + \log_3 a$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Với } a \text{ là số thực dương, ta có: } \log_3 a^2 = 2 \log_3 a.$$

Câu 15: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

- A.** $2\log a + \log b$. **B.** $\log a + 2\log b$. **C.** $2(\log a + \log b)$. **D.** $\log a + \frac{1}{2}\log b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log|b| = \log a + 2\log b$ (vì b dương)

Câu 16: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $P = 9\log_a b$ **B.** $P = 27\log_a b$ **C.** $P = 15\log_a b$ **D.** $P = 6\log_a b$

Lời giải

Chọn D

$$P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3\log_a b + \frac{6}{2}\log_a b = 6\log_a b.$$

Câu 17: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A.** $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$ **B.** $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$
C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$ **D.** $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \log_{a^2}(ab) = \log_{a^2} a + \log_{a^2} b = \frac{1}{2} \cdot \log_a a + \frac{1}{2} \cdot \log_a b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log_a b$$

Câu 18: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

- A.** $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$
C. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$ **D.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \log_6 45 &= \frac{\log_2(3^2 \cdot 5)}{\log_2(2 \cdot 3)} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = \frac{2a + \log_2 3 \cdot \log_3 5}{1 + a} = \frac{2a + \frac{\log_2 3}{\log_5 3}}{1 + a} = \frac{2a + \frac{a}{b}}{1 + a} \\ &= \frac{a + 2ab}{ab + b} \end{aligned}$$

CASIO: Sto\Gán $A = \log_2 3, B = \log_5 3$ bằng cách: Nhập $\log_2 3 \backslash \text{shift} \backslash \text{Sto} \backslash A$ tương tự B

Thử từng đáp án **A:** $\frac{A+2AB}{AB} - \log_6 45 \approx 1,34$ (Loại)

Thử đáp án C: $\frac{A+2AB}{AB} - \log_6 45 = 0$ (chọn)

Câu 19: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$,

$a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$.

A. $P = -5 + 3\sqrt{3}$

B. $P = -1 + \sqrt{3}$

C. $P = -1 - \sqrt{3}$

D. $P = -5 - 3\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Phương pháp tự luận.

$$P = \frac{\log_a \sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\frac{1}{2}(\log_a b - 1)}{\log_a \sqrt{b} - 1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm.

Chọn $a = 2, b = 2^{\sqrt{3}}$. Bấm máy tính ta được $P = -1 - \sqrt{3}$.

Câu 20: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$.

B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.

C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$.

D. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = \log_2(2a^3) - \log_2(b) = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$.

Câu 21: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x = 3a + 5b$

B. $x = 5a + 3b$

C. $x = a^5 + b^3$

D. $x = a^5 b^3$

Lời giải

Chọn D

Có $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2 a^5 b^3 \Leftrightarrow x = a^5 b^3$.

Câu 22: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a(b^2 c^3)$.

A. $P = 108$

B. $P = 13$

C. $P = 31$

D. $P = 30$

Ta có: $\log_a(b^2c^3) = 2\log_a b + 3\log_a c = 2.2 + 3.3 = 13$.

Câu 23: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b = 16$. Giá trị $4\log_2 a + \log_2 b$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Từ $a^4b = 16$, lấy logarit cơ số 2 hai vế ta được $\log_2(a^4b) = \log_2 16 \Leftrightarrow \log_2 a^4 + \log_2 b = 4 \Leftrightarrow 4\log_2 a + \log_2 b = 4$.

Câu 24: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn $a^3b^2 = 32$. Giá trị của $3\log_2 a + 2\log_2 b$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** 32. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $3\log_2 a + 2\log_2 b = \log_2(a^3b^2) = \log_2 32 = 5$.

Câu 25: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho $a; b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^2b^3 = 16$. Giá trị của $2\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

A. 8. B. 16. C. 4. D. 2

Lời giải

Ta có: $2\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a^2 \cdot b^3 = \log_2 16 = 4$.

Câu 26: (Thông hiểu) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Đặt $a = \log_3 2$, khi đó $\log_{16} 27$ bằng

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{3}{4a}$. **C.** $\frac{4}{3a}$. **D.** $\frac{4a}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\log_{16} 27 = \frac{3}{4} \log_2 3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\log_3 2} = \frac{3}{4a}$.

Câu 27: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P = \log_{\frac{2}{b}}(a^2) + 3 \log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

A. P_{min} B. P_{min} C. P_{min} D. P_{min}

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left[2\log_{\frac{a}{b}}a\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = 4\left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) \\ &= 4\left[1 + \log_{\frac{a}{b}}b\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$
$$\text{Ta có } f'(t) = 8t + 8 - \frac{3}{t^2} = \frac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \frac{(2t-1)(4t^2+6t+3)}{t^2}$$

A. $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3 = g\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)$

B. $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3 = \frac{\alpha}{2} + \beta$

C. $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3 = g\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$

D. $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3 = \frac{\alpha}{2} - \beta$

Chon D

Câu 29: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x+3y)}$.

Chon D

Khi đó $M = \frac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)} = \frac{\log_{12}12xy}{\log_{12}(x+3y)^2} = \frac{\log_{12}36y^2}{\log_{12}36y^2} = 1$.

Lời giải

Chon D

$$\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a + \log_2 b^3 = \log_2(ab^3) = \log_2 8 = 3.$$

Câu 31: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho $\log_a x = 3, \log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

A. $P = \frac{7}{12}$

B. $P = \frac{1}{12}$

C. $P = 12$

D. $P = \frac{12}{7}$

Lời giải

Chọn D

$$P = \log_{ab} x = \frac{1}{\log_x a b} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{7}$$

Câu 32: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 6.

B. 9.

C. $\frac{7}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a > 0, b > 0$ nên $\begin{cases} 3a + 2b + 1 > 1 \\ 9a^2 + b^2 + 1 > 1 \\ 6ab + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) > 0 \\ \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) > 0 \end{cases}$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta được

$$\begin{aligned} & \log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) \\ & \geq 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1)} \\ \Leftrightarrow & 2 \geq 2\sqrt{\log_{6ab+1}(9a^2 + b^2 + 1)} \Leftrightarrow \log_{6ab+1}(9a^2 + b^2 + 1) \leq 1 \Leftrightarrow 9a^2 + b^2 + 1 \leq 6ab + 1 \\ \Leftrightarrow & (3a - b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3a = b. \end{aligned}$$

Vì dấu “=” đã xảy ra nên

$$\begin{aligned} & \log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) = \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) \Leftrightarrow \log_{3b+1}(2b^2 + 1) = \log_{2b^2+1}(3b + 1) \\ \Leftrightarrow & 2b^2 + 1 = 3b + 1 \Leftrightarrow 2b^2 - 3b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} \text{ (vì } b > 0). \text{ Suy ra } a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $a + 2b = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$.

40. So sánh các biểu thức lô-ga-rít

Câu 33: (Nhận biết) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

B. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$.

C. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

D. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$.

Lời giải

Chọn A

Theo tính chất của lôgarit: $\forall a > 0, b > 0: \ln(ab) = \ln a + \ln b$

Câu 34: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho a là số thực dương tùy ý khác 1.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 a = \log_a 2$. B. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$. C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. D. $\log_2 a = -\log_a 2$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức đổi cơ số.

Câu 35: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$ B. $1 < \log_a b < \log_b a$

C. $\log_b a < \log_a b < 1$ D. $\log_b a < 1 < \log_a b$

Lời giải

Chọn D

Cách 1- Tự luận: Vì $b > a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a b > \log_a a \\ \log_b b > \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b > 1 \\ 1 > \log_b a \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$

Cách 2- Casio: Chọn $a = 2; b = 3 \Rightarrow \log_3 2 < 1 < \log_2 3 \Rightarrow$ Đáp án D

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.C	4.C	5.D	6.C	7.C	8.D	9.C	10.A
11.A	12.D	13.A	14.A	15.B	16.D	17.D	18.C	19.C	20.A
21.D	22.B	23.A	24.A	25.C	26.B	27.D	28.D	29.D	30.D
31.D	32.C	33.A	34.C	35.D					

41. Tập xác định của hàm số mũ hàm số logarit

Câu 1: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$

A. $D = -\infty; -1 \cup 3; +\infty$

B. $D = [-1; 3]$

C. $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

D. $D = (-1; 3)$

Lời giải

Chọn C

$y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$. Hàm số xác định khi $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 3$

Vậy tập xác định: $D = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Câu 2: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

B. $D = (-2; 3)$

C. $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$

D. $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của là tập các số x để $\frac{x-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -2 \end{cases}$

Suy ra $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 3: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m > 2$

B. $m \geq 0$

C. $m < 0$

D. $m \leq 2$

Lời giải

Chọn C

Để hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - 2x - m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 1 \cdot (-m + 1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$

A. $D = (2 - \sqrt{2}; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{2})$.

B. $D = (1; 3)$.

C. $D = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

D. $D = (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$

Câu 5: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

B. $(2x - 1)3^{x^2-x}$.

C. $(x^2 - x) \cdot 3^{x^2-x-1}$.

D. $(2x - 1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = (3^{x^2-x})' = (x^2 - x)' \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3 = (2x - 1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Câu 6: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m = 0$

B. $0 < m < 3$

C. $m < -1$ hoặc $m > 0$

D. $m > 0$

Lời giải

Chọn D

Đế hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - 2x + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = 1 > 0(lđ) \\ \Delta' = 1 - (1 + m) < 0 \Leftrightarrow m > 0 \end{cases}$$

42. Tính đạo hàm hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít

Câu 7: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ B. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$
C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ D. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = \frac{(x+1)' \cdot 4^x - (x+1) \cdot (4^x)'}{(4^x)^2} = \frac{4^x - (x+1) \cdot 4^x \cdot \ln 4}{(4^x)^2} = \frac{4^x \cdot (1 - x \cdot \ln 4 - \ln 4)}{(4^x)^2} = \frac{1 - x \cdot 2 \ln 2 - 2 \ln 2}{4^x} = \frac{1 - 2(x+1) \ln 2}{2^{2x}}$$

Câu 8: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + \sqrt{x+1})$.

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$ B. $y' = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$
C. $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$ D. $y' = \frac{2}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$y' = (\ln(1 + \sqrt{x+1}))' = \frac{(1+\sqrt{x+1})'}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}.$$

Câu 9: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$.

A. $y' = \frac{2}{2x+1}$ B. $y' = \frac{1}{2x+1}$ C. $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}$ D. $y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 2}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = (\log_2(2x+1))' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2} = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}.$$

Câu 10: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3)2^{x^2-3x} \cdot \ln 2$ B. $2^{x^2-3x} \cdot \ln 2$ C. $(2x-3)2^{x^2-3x}$ D. $(2x-3)2^{x^2-3x-1}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng công thức } (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a, \text{ ta có: } y = 2^{x^2-3x} \Rightarrow y' = (2x-3)2^{x^2-3x} \cdot \ln 2.$$

Câu 11: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x - 3) \cdot 3^{x^2-3x}$. B. $3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$. C. $(x^2 - 3x) \cdot 3^{x^2-3x-1}$. D. $(2x - 3) \cdot 3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ta được $y' = (2x - 3) \cdot 3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$.

Câu 12: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

- A. $(x^2 - x) \cdot 2^{x^2-x-1}$. B. $(2x - 1) \cdot 2^{x^2-x}$. C. $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. D. $(2x - 1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức: $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

Ta có: $y' = (2^{x^2-x})' = (2x - 1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Câu 13: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

- A. 18. B. 2. C. -18. D. -2.

Lời giải

Chọn A

$f(x) = x^3 - 3x$ xác định trên đoạn $[-3; 3]$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-3; 3] \\ x = -1 \in [-3; 3] \end{cases}$

Ta có $f(-3) = -18$; $f(-1) = 2$; $f(1) = -2$; $f(3) = 18$.

Vậy $\max_{[-3; 3]} y = f(3) = 18$.

Câu 14: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2y' + xy' \frac{1}{x^2}$. B. $y' + xy' \frac{1}{x^2}$.
C. $y' + xy' \frac{1}{x^2}$. D. $2y' + xy' \frac{1}{x^2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. $y' = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$$y \frac{(1-\ln x)' \cdot x^2 - (x^2)' (1-\ln x)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1-\ln x)}{x^4} = -\frac{1+2(1-\ln x)}{x^3}$$

$$= -\frac{3-2\ln x}{x^3}$$

Suy ra: $2y' + xy \frac{(1-\ln x)' \cdot x^2 - (x^2)' (1-\ln x)}{x^4} = \frac{2-2\ln x-3+2\ln x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

Cách 2. Ta có $xy = \ln x$, lấy đạo hàm hai vế, ta được $y + xy' = \frac{1}{x}$

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế của biểu thức trên, ta được $y' + y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$, hay $2y' + xy \frac{1}{x^2}$.

Câu 15: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm

A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$. **B.** $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.

C. $f'(x) = \frac{(2x-2) \ln 2}{x^2 - 2x}$. **D.** $f'(x) = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.

Lời giải

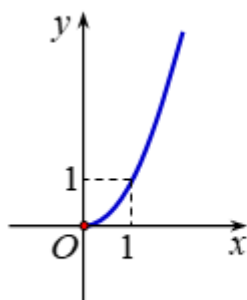
Chọn D

Áp dụng công thức $(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.

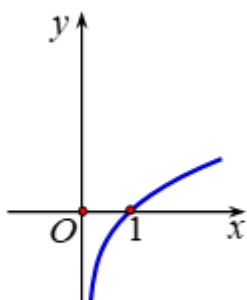
Vậy $f'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{(x^2 - 2x) \ln 2} = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.

43. Khảo sát sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ, lô-ga-rít

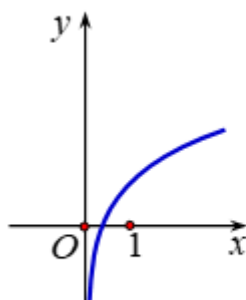
Câu 16: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho hàm số $f(x) = x \ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Tìm đồ thị đó?



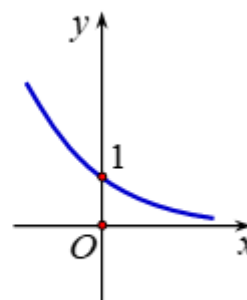
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1

B. Hình 2

C. Hình 3

D. Hình 4

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = (0; +\infty)$

Ta có $f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = g(x) = \ln x + 1$.

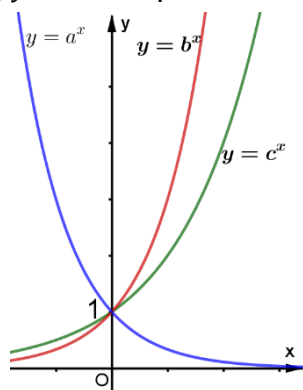
Ta có $g(1) = 1$ nên đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 1)$. Loại hai đáp án B và D

Và $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x) + 1]$. Đặt $t = \frac{1}{x}$. Khi $x \rightarrow 0^+$ thì $t \rightarrow +\infty$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right) + 1 \right] = -\lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln(t)] + 1 = -\infty$ nên loại đáp án A

(Có thể dùng máy tính để tính tiệm cận đứng của $y = \ln x + 1$)

Câu 17: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

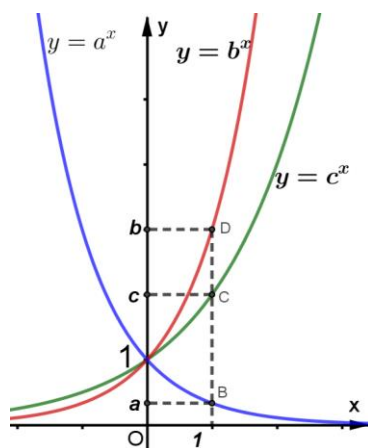
C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $x = 1$ đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = a, y = b, y = c$ như hình vẽ:



Từ đồ thị kết luận $a < c < b$

Câu 18: (Vận dụng) (Đề Minh Họa 2017) Cho hàm số $f(x) = 2^x \cdot 7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$

B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \log_7 2 + x^2 < 0$

D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x \log_2 7 < 0$

Lời giải

Chọn D

Đáp án A đúng vì $f(x) < 1 \Leftrightarrow \log_2 f(x) < \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 (2^x \cdot 7^{x^2}) < 0 \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 7^{x^2} < 0$
 $\Leftrightarrow x + x^2 \cdot \log_2 7 < 0$

Đáp án B đúng vì $f(x) < 1 \Leftrightarrow \ln f(x) < \ln 1 \Leftrightarrow \ln (2^x \cdot 7^{x^2}) < 0 \Leftrightarrow \ln 2^x + \ln 7^{x^2} < 0$
 $\Leftrightarrow x \cdot \ln 2 + x^2 \cdot \ln 7 < 0$

Đáp án C đúng vì $f(x) < 1 \Leftrightarrow \log_7 f(x) < \log_7 1 \Leftrightarrow \log_7 (2^x \cdot 7^{x^2}) < 0 \Leftrightarrow \log_7 2^x + \log_7 7^{x^2} < 0$
 $\Leftrightarrow x \cdot \log_7 2 + x^2 < 0$

Vậy D sai vì $f(x) < 1 \Leftrightarrow \log_2 f(x) < \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 (2^x \cdot 7^{x^2}) < 0 \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 7^{x^2} < 0$
 $\Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$.

44. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức chứa hàm mũ, hàm lô-ga-rít

Câu 19: (Vận dụng cao) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

A. $P \frac{2\sqrt{10}-3}{2} \min$

B. $P \frac{2\sqrt{10}-5}{2} \min$

C. $P \frac{3\sqrt{10}-7}{2} \min$

D. $P \frac{2\sqrt{10}-1}{2} \min$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $ab < 1$.

Ta có $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2 [2(1-ab)] + 2(1-ab) = \log_2 (a+b) + (a+b)(*)$.

Xét hàm số $y = f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó, $(*) \Leftrightarrow f[2(1-ab)] = f(a+b) \Leftrightarrow 2(1-ab) = a+b \Leftrightarrow a(2b+1) = 2-b \Leftrightarrow a = \frac{-b+2}{2b+1}$.

$P = a + 2b = \frac{-b+2}{2b+1} + 2b = g(b)$.

$g'(b) = \frac{-5}{(2b+1)^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow (2b+1)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2b+1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{10}-2}{4}$ (vì $b > 0$).

Lập bảng biến thiên ta được $P \left(\frac{\sqrt{10}-2}{4} \right) \frac{2\sqrt{10}-3}{2} \min$.

Câu 20: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}(4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1}(2a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng:

A. $\frac{15}{4}$.

B. 5.

C. 4.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4a^2 + b^2 \geq 4ab$, với mọi $a, b > 0$. Dấu '=' xảy ra khi $b = 2a$ (1).

Khi đó

$$2 = \log_{2a+2b+1}(4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1}(2a + 2b + 1) \geq \log_{2a+2b+1}(4ab + 1) + \log_{4ab+1}(2a + 2b + 1).$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\log_{2a+2b+1}(4ab + 1) + \log_{4ab+1}(2a + 2b + 1) \geq 2$. Dấu '=' xảy ra khi $\log_{2a+2b+1}(4ab + 1) = 1 \Leftrightarrow 4ab + 1 = 2a + 2b + 1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $8a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$. Suy ra $b = \frac{3}{2}$. Vậy $a + 2b = \frac{15}{4}$.

Câu 21: (Vận dụng cao) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$$\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất } P_{\min} \text{ của } P = x + y$$

A. $P \frac{2\sqrt{11}-3}{3} \min$

B. $P \frac{9\sqrt{11}-19}{9} \min$

C. $P \frac{18\sqrt{11}-29}{21} \min$

D. $P \frac{9\sqrt{11}+19}{9} \min$

Lời giải

Chọn A

Với x, y dương và kết hợp với điều kiện của biểu thức $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$ ta được $1 - xy > 0$

$$\text{Biến đổi } \log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(1-xy) - \log_3(x+2y) = -3(1-xy) + (x+2y) - \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow [\log_3(1-xy) + \log_3 3] + 3(1-xy) = \log_3(x+2y) + (x+2y)$$

$$\Leftrightarrow \log_3[3(1-xy)] + 3(1-xy) = \log_3(x+2y) + (x+2y)(1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $D = (0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \text{ với mọi } x \in D \text{ nên hàm số } f(t) = \log_3 t + t \text{ đồng biến trên } D = (0; +\infty)$$

$$\text{Từ đó suy ra } (1) \Leftrightarrow 3(1-xy) = x+2y \Leftrightarrow 3-2y = x(1+3y) \Leftrightarrow x = \frac{3-2y}{1+3y} \text{ (do } y > 0)$$

Theo giả thiết ta có $x > 0, y > 0$ nên từ $x = \frac{3-2y}{1+3y}$ ta được $0 < y < \frac{3}{2}$.

$$P = x + y = \frac{3-2y}{1+3y} + y = \frac{3y^2 - y + 3}{3y + 1}$$

$$\text{Xét hàm số } g(y) = \frac{3y^2 - y + 3}{3y + 1} \text{ với } 0 < y < \frac{3}{2}$$

$$g'(y) = \frac{9y^2 + 6y - 10}{(3y + 1)^2} = 0 \text{ ta được } y = \frac{-1 + \sqrt{11}}{3}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \min P = g\left(\frac{-1 + \sqrt{11}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{11} - 3}{3}.$$

45. Bài toán thực tế về hs mũ, logarit

Câu 22: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp

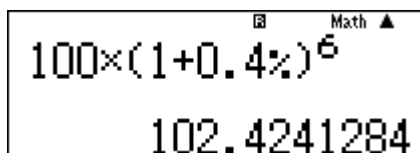
theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

- A.** 102.424.000 đồng. **B.** 102.423.000 đồng. **C.** 102.016.000 đồng. **D.** 102.017.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức lãi kép ta có sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) là $P_6 = P_0(1+r)^6 = 100(1+0,4\%)^6 = 102.424.1284$ đồng.



100 × (1 + 0.4%)⁶
102.4241284

Câu 23: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả 5 năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

- A.** Năm 2022 **B.** Năm 2021 **C.** Năm 2020 **D.** Năm 2023

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $1.(1+r)^n > 2 \Leftrightarrow 1.(1+0,15)^n > 2 \Leftrightarrow n > 4,96$

Vậy từ năm thứ 5 sau khi thành lập công ty thì tổng tiền lương bắt đầu lớn hơn 2 tỷ đồng.

Suy ra năm cần tìm là $2016 + 5 = 2021$.

Câu 24: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- A.** 13 năm. **B.** 10 năm. **C.** 11 năm. **D.** 12 năm.

Lời giải

Chọn D

Gọi x số tiền gửi ban đầu.

Theo giả thiết $2x = x \left(1 + \frac{6,1}{100}\right)^N \Leftrightarrow 2 = \left(1 + \frac{6,1}{100}\right)^N$

$$\Leftrightarrow 2 = \left(1 + \frac{6,1}{100}\right)^N \Leftrightarrow N = \log_{(1,061)} 2 \approx 11,7$$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được số tiền thỏa yêu cầu.

Câu 25: (Vận dụng cao) (Đề Minh Họa 2017) Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \frac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng)

B. $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng)

C. $m = \frac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng)

D. $m = \frac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng)

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Công thức: Vay số tiền A lãi suất $r\%$ / tháng. Hỏi trả số tiền a là bao nhiêu để n tháng hết nợ $a = \frac{A.r.(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{100.0,01.(1+0,01)^3}{(1+0,01)^3 - 1}$.

Cách 2: Theo đề ta có: ông A trả hết tiền sau 3 tháng vậy ông A hoàn nợ 3 lần

Với lãi suất 12%/năm suy ra lãi suất một tháng là 1%

Hoàn nợ lần 1:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là : $100.0,01 + 100 = 100.1,01$ (triệu đồng)

- Số tiền dư : $100.1,01 - m$ (triệu đồng)

Hoàn nợ lần 2:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi)

là : $(100.1,01 - m).0,01 + (100.1,01 - m) = (100.1,01 - m).1,01 = 100.(1,01)^2 - 1,01.m$ (triệu đồng)

- Số tiền dư: $100.(1,01)^2 - 1,01.m - m$ (triệu đồng)

Hoàn nợ lần 3:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là :

$[100.(1,01)^2 - 1,01.m - m].1,01 = 100.(1,01)^3 - (1,01)^2 m - 1,01m$ (triệu đồng)

- Số tiền dư: $100.(1,01)^3 - (1,01)^2 m - 1,01m - m$ (triệu đồng)

$$\Rightarrow 100.(1,01)^3 - (1,01)^2 m - 1,01m - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{100.(1,01)^3}{(1,01)^2 + 1,01 + 1}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{100.(1,01)^3.(1,01 - 1)}{[(1,01)^2 + 1,01 + 1].(1,01 - 1)} = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1} \text{ (triệu đồng)}$$

Câu 26: (Vận dụng cao) (THPT QG 2017 Mã 105) Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

A. Vô số

B. 1

C. 2

D. 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) + f(y) = 1 \Leftrightarrow \frac{9^x}{9^x + m^2} + \frac{9^y}{9^y + m^2} = 1 \Leftrightarrow 9^{x+y} = m^4 \Rightarrow x+y = \log_9 m^4 = \log_3 m^2$

Đặt $x+y = t, t > 0$. Vì $e^{x+y} \leq e(x+y) \Rightarrow e^t \leq et \Leftrightarrow t \leq 1 + \ln t \Leftrightarrow 1 + \ln t - t \geq 0, \forall t > 0$ (1)

Xét hàm $f(t) = \ln t + 1 - t$ với $t > 0$. $f'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} = 0 \Rightarrow t = 1$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y'		0	
y	$-\infty$	0	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t) \leq f(1), \forall t > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln t - t \leq 0, \forall t > 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $t = 1 \Rightarrow \log_3 m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 3 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$

Câu 27: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?
A. 2,22 triệu đồng. B. 3,03 triệu đồng. C. 2,25 triệu đồng. D. 2,20 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền vay ban đầu là M , số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m , lãi suất một tháng là r .

Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là $M + Mr = M(1 + r)$.

Ngay sau đó ông A hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là $M(1 + r) - m$.

Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M(1 + r) - m](1 + r) = M(1 + r)^2 - m(1 + r).$$

Ngay sau đó ông A lại hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$$M(1+r)^2 - m(1+r) - m.$$

Do đó hết tháng thứ ba, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$[M(1+r)^2 - m(1+r) - m](1+r) = M(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ n , $n \geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$M(1+r)^n - m(1+r)^{n-1} - m(1+r)^{n-2} - \dots - m(1+r) - m = M(1+r)^n - \frac{m[(1+r)^{n-1} - 1]}{r}.$$

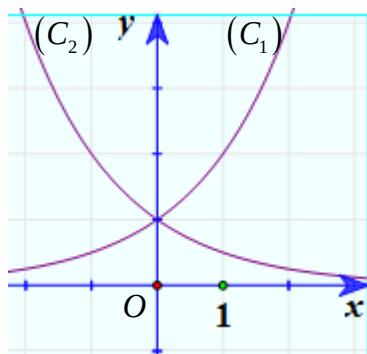
Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n - \frac{m[(1+r)^{n-1} - 1]}{r} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^{n-1} - 1}.$$

Thay số với $M = 100.000.000$, $r = 1\%$, $n = 5 \times 12 = 60$ ta được $m \approx 2,22$ (triệu đồng).

46. Lý thuyết tổng hợp hàm số lũy thừa, mũ, lô-ga-rít

Câu 28: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho hàm số $y = a^x, y = b^x$ với a, b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $0 < b < a < 1$ B. $0 < a < 1 < b$ C. $0 < b < 1 < a$ D. $0 < a < b < 1$

Lời giải

Chọn C

Theo hình ta thấy hàm $y = a^x$ là hàm đồng biến nên $a > 1$, còn hàm $y = b^x$ là hàm nghịch biến nên $0 < b < 1$. Suy ra $0 < b < 1 < a$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.C	4.C	5.D	6.D	7.A	8.A	9.C	10.A
11.D	12.D	13.A	14.A	15.D	16.C	17.B	18.D	19.A	20.A
21.A	22.A	23.B	24.D	25.B	26.C	27.A	28.C		

47. Phương trình cơ bản

Câu 1: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Giải bất phương trình $\log_2(3x - 1) > 3$.

A. $x > 3$

B. $\frac{1}{3} < x < 3$

C. $x < 3$

D. $x > \frac{10}{3}$

Lời giải

Chọn A

Đkxđ: $3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3x - 1 > 2^3 \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3$ (t/m đk).

Vậy bpt có nghiệm $x > 3$.

Câu 2: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Giải phương trình $\log_4(x-1) = 3$.

A. $x = 63$

B. $x = 65$

C. $x = 80$

D. $x = 82$

Lời giải

Chọn B

ĐK: $\Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Phương trình $\log_4(x-1) = 3 \Leftrightarrow x-1 = 4^3 \Leftrightarrow x = 65$

Câu 3: (Nhận biết) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$

A. $x = 9$

B. $x = 3$

C. $x = 4$

D. $x = 10$

Lời giải

Chọn C

$3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 4: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 1) = 3$ là

A. $\{-3; 3\}$.

B. $\{-3\}$.

C. $\{3\}$.

D. $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\log_2(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Câu 5: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 7) = 2$ là

A. $\{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\}$.

B. $\{-4; 4\}$.

C. $\{4\}$.

D. $\{-4\}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x^2 - 7 > 0$

$$\log_3(x^2 - 7) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$$

So với điều kiện ta nhận cả 2 nghiệm.

Câu 6: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 27$ là

- A. $x = 5$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 7: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là.

- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = 5$. D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta xét phương trình } 3^{2x+1} &= 27 \\ \Leftrightarrow 3^{2x+1} &= 3^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Câu 8: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 8$ là

- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{5}{2}$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 2^{2x-1} = 8 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 9: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 32$ là

- A. $x = 3$. B. $x = \frac{17}{2}$. C. $x = \frac{5}{2}$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình tương đương với } 2^{2x-1} = 2^5 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 3.$$

Câu 10: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm nghiệm của phương trình

$$\log_2(x - 5) = 4.$$

- A. $x = 21$ B. $x = 3$ C. $x = 11$ D. $x = 13$

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐK: } x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5 \Rightarrow \log_2(x - 5) = 4 \Leftrightarrow x - 5 = 16 \Leftrightarrow x = 21$$

Câu 11: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

- A. $m \geq 1$ B. $m \geq 0$ C. $m > 0$ D. $m \neq 0$

Lời giải

Chọn C

Để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực thì $m > 0$.

- Câu 12:** (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là
 A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = \frac{5}{2}$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5^{2x+1} = 125 \Leftrightarrow 5^{2x+1} = 5^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

48. Đưa về cùng cơ số

- Câu 13:** (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1)$ là:
 A. $x = 1$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

$\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-1) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = \log_2[2(x-1)] \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x+1 = 2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

- Câu 14:** (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$ là
 A. $\{0\}$. B. $\{0; 1\}$. C. $\{-1; 0\}$. D. $\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(x^2 - x + 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

- Câu 15:** (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.
 A. $S = \{-3; 3\}$ B. $S = \{4\}$
C. $S = \{3\}$ D. $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 1$. Phương trình đã cho trở thành $\log_2(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Đối chiếu điều kiện, ta được nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

Câu 16: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$ bằng

A. $\frac{82}{9}$.

B. $\frac{80}{9}$.

C. 9.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình tương đương: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_3 x \cdot \log_3 x \cdot \log_3 x \cdot \log_3 x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Vậy tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình là $9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$.

Câu 17: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Tìm nghiệm của phương trình $\log_2 (1 - x) = 2$.

A. $x = -3$.

B. $x = -4$.

C. $x = 3$.

D. $x = 5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2 (1 - x) = 2 \Leftrightarrow 1 - x = 4 \Leftrightarrow x = -3$.

Câu 18: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = 1$.

A. $S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

B. $S = \{3\}$

C. $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$

D. $S = \{2 + \sqrt{5}\}$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Phương trình tương đương

$$\log_{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x + 1) = 1 \Leftrightarrow 2 \log_{\sqrt{2}}(x - 1) = \log_{\sqrt{2}}(x + 1) + \log_{\sqrt{2}} 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}(x - 1)^2 = \log_{\sqrt{2}} 2(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} (L) \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Câu 19: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

A. $x = \frac{5}{2}$.

B. $x = 2$.

C. $x = \frac{3}{2}$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 20: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1) + 1 = \log_3(4x+1)$ là

- A. $x = 3$. B. $x = -3$. C. $x = 4$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điều kiện: $x \geq -\frac{1}{4}$

$$\log_3(x+1) + 1 = \log_3(4x+1) \Leftrightarrow \log_3 3(x+1) = \log_3(4x+1) \\ \Leftrightarrow 3(x+1) = 4x+1$$

$$\Leftrightarrow x = 2(\text{nhận}).$$

Câu 21: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1)$ là

- A. $x = 3$. B. $x = 2$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

Khi đó phương trình trở thành

$$\log_2(2x+2) = \log_2(3x-1) \Leftrightarrow 2x+2 = 3x-1 \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3 (\text{nhận}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

Câu 22: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) = 1 + \log_3(x-1)$ là

- A. $x = 4$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 1$.

$$\log_3(2x+1) = 1 + \log_3(x-1) \Leftrightarrow \log_3(2x+1) = \log_3 3 + \log_3(x-1) \Leftrightarrow \log_3(2x+1) = \log_3[3(x-1)] \\ \Leftrightarrow 2x+1 = 3x-3 \Leftrightarrow x = 4.$$

Câu 23: (Thông hiểu) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(3; +\infty)$. C. $(-1; 3)$. D. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Bất phương trình tương đương với } 3^{x^2-2x} < 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

Câu 24: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(5x - 1) = -\log_3 m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

A. Vô số.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(5x - 1) = -\log_3 m$ (1) (m là tham số).

Điều kiện: $x > \frac{1}{5}$ (*).

Với điều kiện (*) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(5x - 1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{5x-1} = \log_3 \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x} = m \quad (2).$$

Ta có (1) có nghiệm khi và chỉ khi $A(a; b; c) \notin (S)$ có nghiệm thỏa mãn (*).

Xét hàm số $y = \frac{5x-1}{x}$ trên $(\frac{1}{5}; +\infty)$. $y' = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x > \frac{1}{5}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
y'	$ $	$+$
y	$ $	$0 \rightarrow 5$

Khi đó $0 < m < 5$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$ là các giá trị cần tìm. Hay có 4 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 25: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(4x - 1) = -\log_3 m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm?

A. 5.

B. 3.

C. Vô số.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(4x - 1) = -\log_3 m$ (1) (m là tham số).

Điều kiện: $x > \frac{1}{4}$ (*).

Với điều kiện (*) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(4x - 1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{4x-1} = \log_3 \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x} = m \quad (2).$$

Ta có (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm thỏa mãn (*).

Xét hàm số $y = \frac{4x-1}{x}$ trên $(\frac{1}{4}; +\infty)$. $y' = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x > \frac{1}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
y'	$ $	$+$
y	$ $	$\nearrow 4$

Khi đó $0 < m < 4$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3\}$ là các giá trị cần tìm. Hay có 3 giá trị của m thỏa mãn.

49. Đặt ẩn phụ

Câu 26: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$ ta được phương trình nào sau đây

- A. $4t - 3 = 0$ B. $t^2 + t - 3 = 0$ C. $t^2 + 2t - 3 = 0$ D. $2t^2 - 3t = 0$

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$

Câu 27: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

- A. $m = 6$ B. $m = -3$ C. $m = 3$ D. $m = 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + m = 0$.

Phương trình có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - m > 0 \\ 3^{x_1} + 3^{x_2} = 6 > 0 \\ 3^{x_1+x_2} = 3 = m \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

Câu 28: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt

- A. $m \in (-\infty; 1)$ B. $m \in (0; 1)$ C. $m \in (0; 1)$ D. $m \in (0; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

Phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + m = 0, (1)$.

Đặt $t = 2^x > 0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2t + m = 0, (2)$.

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm thực

phân biệt và lớn hơn 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ -\frac{-2}{1} > 0 \\ \frac{m}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 29: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 13.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 4^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0 (*).$$

Với mỗi nghiệm $t > 0$ của phương trình (*) sẽ tương ứng với duy nhất một nghiệm x của phương trình ban đầu. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 4m > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m > 0 \\ m < -3 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{4; 5; 6\}$.

Câu 30: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 7

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn C

Đặt $5^x = t (t > 0)$.

Phương trình trở thành $t^2 - 5m \cdot t + 7m^2 - 7 = 0(*)$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để (*) có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} \Delta = -3m^2 + 28 > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}} \\ m > 0 \\ m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt{\frac{28}{3}}. \text{ Có hai giá trị nguyên của } m$$

thỏa mãn.

Câu 31: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 3.

B. 5.

C. 2

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m \cdot 2^x + 2m^2 - 5 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình (1) thành: $t^2 - 2m \cdot t + 2m^2 - 5 = 0 \quad (2)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ m < -\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ hay } m > \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}$$

Do m nguyên nên $m = 2$.

Vậy S chỉ có một phần tử

Câu 32: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 8.

B. 4.

C. 19.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0 \quad (1) \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3m \cdot 3^x + 3m^2 - 75 = 0$$

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$

Phương trình trở thành: $t^2 - 3mt + 3m^2 - 75 = 0 \quad (2)$

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 300 - 3m^2 > 0 \\ 3m > 0 \\ 3m^2 - 75 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 10 \\ m > 0 \\ m < -5 \\ m > 5 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 10$$

Do m nguyên nên $m = \{6; 7; 8; 9\}$

Câu 33: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Tìm giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$.

A. $m = -4$

B. $m = 44$

C. $m = 81$

D. $m = 4$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_3 x$ ta được $t^2 - mt + 2m - 7 = 0$, tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm t_1, t_2

$$t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3 (x_1 x_2) = \log_3 81 = 4$$

Theo vi-et suy ra $t_1 + t_2 = m \Rightarrow m = 4$ (Thay lại $m = 4$ và đề bài ta thấy phương trình có hai

nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$)

Câu 34: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247.

B. 248.

C. 229.

D. 290.

Lời giải

Chọn B

Vì $u_{n+1} = 2u_n$ nên dễ thấy dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 2$.

Ta có: $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 2^9 \cdot u_1$

Xét $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$

$$\Leftrightarrow \log u_1 - 2 \log(2^9 \cdot u_1) + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log(2^9 \cdot u_1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log u_1 - 18 \log 2 - 2 \log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 18 \log 2 - 2 \log u_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\log u_1 - 18 \log 2 + \sqrt{2 - \log u_1 - 18 \log 2} = 0$$

Đặt $\sqrt{2 - \log u_1 - 18 \log 2} = t$ ($t \geq 0$).

Phương trình trên trở thành $t^2 - 2 + t = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2(L) \end{cases}$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 - \log u_1 - 18 \log 2} = 1 \Leftrightarrow 2 - \log u_1 - 18 \log 2 = 1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{5}{2^{17}}$

Trong trường hợp này ta có: $u_n = \frac{5}{2^{17}} \cdot 2^{n-1} > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} > 5^{99} \Leftrightarrow n > 99 \log_2 5 + 18$

Mà $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất trong trường hợp này là $n = 248$.

Câu 35: (Vận dụng cao) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

A. $S_{\min}$

B. $S_{\min}$

C. $S_{\min}$

D. $S_{\min}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 0$, điều kiện mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $b^2 > 20a$.

Đặt $t = \ln x, u = \log x$ khi đó ta được $at^2 + bt + 5 = 0(1), 5t^2 + bt + a = 0(2)$.

Ta thấy với mỗi một nghiệm t thì có một nghiệm x , một u thì có một x .

Ta có $x_1 \cdot x_2 = e^{t_1} \cdot e^{t_2} = e^{t_1+t_2} = e^{-\frac{b}{a}}, x_3 \cdot x_4 = 10^{u_1+u_2} = 10^{-\frac{b}{5}}$, lại có $x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{5} \ln 10 \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \Leftrightarrow a \geq 3 \text{ (do } a, b \text{ nguyên dương)}, \text{ suy ra } b^2 > 60 \Rightarrow b \geq 8.$$

Vậy $S = 2a + 3b \geq 2.3 + 3.8 = 30$, suy ra $S_{\min}$ đạt được $a = 3, b = 8$.

50. Dùng phương pháp hàm số đánh giá

Câu 36: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1 = 0$.

Xét hàm số $y = 3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1$ liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$.

$$y' = 6(x-1) + \frac{3}{x+1} = \frac{6x^2-3}{x+1}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$f(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$+\infty$	

Vì $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 37: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$

B. $[2;4]$

C. $(2;4)$

D. $(3;4)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $6^x + (3-m)2^x - m = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = m$

Xét hàm số $f(x) = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$ xác định trên $\mathbb{R}$, có

$$f'(x) = \frac{12^x \cdot \ln 3 + 6^x \cdot \ln 6 + 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x + 1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên hàm số } f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Suy ra $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$ vì $f(0) = 2, f(1) = 4$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m \in (2;4)$.

.

Câu 38: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2)9^x = 0$ có nghiệm dương?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2)9^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + m-2 = 0 \quad (1)$.

Đặt: $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 0$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow t^2 - 2t = 2 - m \quad (2)$.

Phương trình (1) có nghiệm dương $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t > 1$.

Số nghiệm phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(t) = t^2 - 2t, t \in (1; +\infty)$ và đường thẳng $d: y = 2 - m$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t, t \in (1; +\infty)$.

$f'(t) = 2(t-1) > 0, \forall t \in (1; +\infty)$.

Suy ra, hàm số f luôn đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

t	1	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	-1	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ycbt $\Leftrightarrow 2 - m > -1 \Leftrightarrow m < 3$.

Vậy có 2 giá trị m dương thoả mãn là $m \in \{1; 2\}$.

Câu 39: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn

$$\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2. \text{ Giá trị của } a + 2b \text{ bằng}$$

A. $\frac{5}{2}$.

B. 6.

C. 22.

D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ả thiết ta có $25a^2 + b^2 + 1 > 0$, $10a + 3b + 1 > 0$, $10a + 3b + 1 > 1$, $10ab + 1 > 1$.

ụng Cô-si, ta có $25a^2 + b^2 + 1 \geq 2\sqrt{25a^2b^2} + 1 = 10ab + 1$. Khi đó,

$$\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1)$$

$$\log_{10a+3b+1}(10ab + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1)$$

(Áp dụng Cô-si).

$$“=” \text{ xảy ra khi } \begin{cases} 5a = b \\ \log_{10a+3b+1}(10ab + 1) = \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 1 \end{cases}$$

$$\text{a} \begin{cases} b = \frac{5}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = \frac{11}{2}.$$

Câu 40: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 16.

B. 9.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^x + m = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x + x = \log_3(x - m) + x - m \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$, với $t \in \mathbb{R}$. Có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$

đồng biến trên tập xác định. Mặt khác phương trình (*) có dạng: $f(x) = f(\log_3(x - m))$.

Do đó ta có $f(x) = f(\log_3(x - m)) \Leftrightarrow x = \log_3(x - m) \Leftrightarrow 3^x = x - m \Leftrightarrow 3^x - x = -m$

Xét hàm số $g(x) = 3^x - x$, với $x \in \mathbb{R}$. Có $g'(x) = 3^x \ln 3 - 1, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy các giá trị của tham số để phương trình có nghiệm là: $m \in -\infty; -g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)$. Vậy số giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm là: 14.

Câu 41: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 9. B. 25. C. 24. D. 26.

Hướng dẫn giải

Chọn C

ĐK: $x > m$

Đặt $t = \log_7(x - m)$ ta có $\begin{cases} 7^x + m = t \\ 7^t + m = x \end{cases} \Rightarrow 7^x + x = 7^t + t \quad (1)$

Do hàm số $f(u) = 7^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó:

$$7^x + m = x \Leftrightarrow m = x - 7^x.$$

Xét hàm số $g(x) = x - 7^x \Rightarrow g'(x) = 1 - 7^x \ln 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_7(\ln 7)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_7(\ln 7)$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$g(-\log_7(\ln 7))$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq g(-\log_7(\ln 7)) \approx -0,856$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 7^x > 0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-25; 25)$, nên $m \in \{-24; -16; \dots; -1\}$.

Câu 42: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x - 1) = -\log_3 m$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm?

A. 2. **B. 4.** **C. 3.** **D. vô số.**

Lời giải

Chon A

Điều kiện $x > \frac{1}{3}$ và $m > 0$

Phương trình tương đương $\log_3 x - \log_3(3x - 1) = \log_3 \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{x}{3x-1} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{3x-1}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x}$ với $x > \frac{1}{3}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0.$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	0	3

Vậy $0 < m < 3$ phương trình có nghiệm.

Do đó có 2 giá trị nguyên để phương trình có nghiệm.

Câu 43: (Vận dụng) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x - 1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 6. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 7.

Lời giải

Chon B

$$\text{DK: } \begin{cases} x > \frac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases}.$$

$$\log_9 x^2 - \log_3(6x - 1) = -\log_3 m$$

$$\Leftrightarrow \log_3|x| - \log_3(6x - 1) = -\log_3 m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 m = \log_3 \frac{(6x-1)}{|x|}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{6x-1}{|x|} \quad (1).$$

Với điều kiện trên (1) trở thành: $m = \frac{6x-1}{x}$ (*).

Xét hàm $f(x) = \frac{6x-1}{x}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$6 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 6$	

Đưa vào bảng biến thiên, phương trình (*) có nghiệm khi $\theta < m < 6$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm là $m = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 44: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7 - 3^x) = 2 - x$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của phương trình là $7 - 3^x > 0 \Leftrightarrow 3^x < 7 \Leftrightarrow x < \log_3 7$.

$$\log_3(\gamma - 3^x) = 2 - x \Leftrightarrow \gamma - 3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow \gamma - 3^x = \frac{9}{3^x}$$

Đặt $t = 3^x$, với $0 < t < 7$, suy ra $x = \log_3 t$

Ta có phương trình $t^2 - 7t - 9 = 0$ có hai nghiệm $t_1 = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$ và $t_2 = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy có hai nghiệm x_1, x_2 tương ứng.

Ta có $x_1 + x_2 = \log_3 t_1 + \log_3 t_2 = \log_3 t_1 \cdot t_2$

Theo định lý Vi-ét ta có $t_1.t_2 = 9$, nên $x_1 + x_2 = \log_3 9 = 2$.

Câu 45: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD 2017) Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2017.

B. *4014.*

C. 2018.

D. 4015.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > -1$ và $x \neq 0$.

$$\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{(x+1)^2}{x}$$

Xét hàm $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ ($x > -1, x \neq 0$); $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1(l) \end{cases}$

Lập bảng biến thiên

x	-1	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	0	$+\infty$	4	$+\infty$

Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases}$.

Vì $m \in [-2017; 2017]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên chỉ có 2018 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu là

$m \in \{-2017; -2016; \dots; -1; 4\}$.

Chú ý: Trong lời giải, ta đã bỏ qua điều kiện $mx > 0$ vì với phương trình $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ với $0 < a \neq 1$ ta chỉ cần điều kiện $f(x) > 0$ (hoặc $g(x) > 0$).

Câu 46: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20.

B. 19.

C. 9.

D. 21.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > m$

Ta có $5^x + m = \log_5(x - m) \Leftrightarrow 5^x + x = x - m + \log_5(x - m) \Leftrightarrow 5^x + x = 5^{\log_5(x - m)} + \log_5(x - m)$ (1).

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t$, $f'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, do đó từ (1) suy ra $x = \log_5(x - m) \Leftrightarrow m = x - 5^x$.

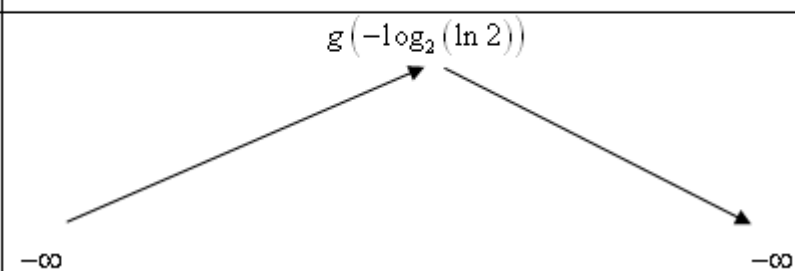
Xét hàm số $g(x) = x - 5^x$, $g'(x) = 1 - 5^x \cdot \ln 5$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_5 \frac{1}{\ln 5} = -\log_5 \ln 5 = x_0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\log_5 \ln 5$	$+\infty$
g'	+	0	-
g		$g(x_0)$	

Do đó để phương trình có nghiệm thì $m \leq g(x_0) \approx -0,92$.

Các giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ là $\{-19; -18; \dots; -1\}$, có 19 giá trị m thỏa mãn.

x	$-\infty$	$-\log_2(\ln 2)$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq g(-\log_2(\ln 2)) \approx -0,914$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 2^x > 0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-18; 18)$, nên $m \in \{-17; -16; \dots; -1\}$.

Câu 49: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho phương trình $(4 \log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 49.

B. 47.

C. Vô số.

D. 48.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 7^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 7^x \geq m \end{cases}$.

* Trường hợp $m \leq 0$ thì $(4 \log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0 \Leftrightarrow 4 \log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(4 \log_2 x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{-\frac{5}{4}} \end{cases}$.

Trường hợp này không thỏa điều kiện m nguyên dương.

* Trường hợp $m > 0$, ta có $\begin{cases} x > 0 \\ 7^x \geq m \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \log_7 m$ nếu $m > 1$ và $x > 0$ nếu $0 < m \leq 1$.

Khi đó $(4 \log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \\ \sqrt{7^x - m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{-\frac{5}{4}} \\ x = \log_7 m \end{cases}$.

+ Xét $0 < m \leq 1$ thì nghiệm $x = \log_7 m \leq 0$ nên trường hợp này phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x = 2; x = 2^{-\frac{5}{4}}$ thỏa mãn điều kiện.

+ Xét $m > 1$, khi đó điều kiện của phương trình là $x \geq \log_7 m$.

Vì $2 > 2^{-\frac{5}{4}}$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2 > \log_7 m \geq 2^{-\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow 7^{2^{-\frac{5}{4}}} \leq m < 7^2$.

Trường hợp này $m \in \{3; 4; 5; \dots; 48\}$, có 46 giá trị nguyên dương của m .

Tóm lại có 47 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

- Câu 50:** Chọn phương án **B. (Vận dụng cao) (THPTQG 2019 Mã đề 102)** Cho phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?
- A.** 79. **B.** 80. **C.** Vô số. **D.** 81.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3^x \geq m \end{cases}$.

* Với $m = 1$ thì phương trình trở thành:

$(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - 1} = 0$. Khi đó $x > 0 \Rightarrow 3^x > 1$.

Do đó ta có $2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$ (thỏa mãn).

+ Xét $m > 1$, khi đó điều kiện của phương trình là $x \geq \log_3 m$.

Ta có $2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$

Vì $4 > 2^{-\frac{1}{2}}$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $4 > \log_3 m \geq 2^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2^{-\frac{1}{2}}} \leq m < 81$.

Trường hợp này $m \in \{3; 4; 5; \dots; 80\}$, có 78 giá trị nguyên dương của m .

Tóm lại có 79 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Chọn phương án **B.**

Cách 2:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x \geq m \end{cases}$

$$(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -\frac{1}{2} \\ \log_2 x = 2 \\ 3^x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = 4 \\ x = \log_3 m \end{cases}$$

Với $m = 1$ thì $x = \log_3 m = 0$ khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Với $m > 1$:

m nguyên dương nên phương trình luôn nhận $x = \log_3 m$ là một nghiệm.

Do $\frac{1}{\sqrt{2}} < 4$ nên để phương trình có đúng hai nghiệm thì phải có $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq m < 3^4$

Mà m nguyên dương nên $3 \leq m < 81$.

Vậy có 79 giá trị m nguyên dương.

- Câu 51:** **(Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 103)** Cho phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 123

B. 125

C. Vô số

D. 124

Lời giải

Chọn A

Do $m > 0$, ta có điều kiện của x $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_5 m \end{cases}$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -\frac{1}{2} \\ x = \log_5 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \log_5 m \end{cases}$$

Do $3 > \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thì:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \log_5 m < 3 \\ \log_5 m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}} > m \geq 5^{\frac{1}{3}} \\ 0 < m \leq 1 \end{cases}$$

Vậy, ta có 123 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 52: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho phương trình $(2 \log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{4^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. Vô số.

B. 62.

C. 63.

D. 64.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 4^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_4 m \end{cases} (m > 0).$

$$\text{Ta có: } (2 \log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{4^x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -\frac{1}{2} \\ x = \log_4 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \log_4 m \end{cases}.$$

Để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thì: $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \log_4 m < 3 \\ \log_4 m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \leq m < 4^3 \\ 0 < m \leq 1 \end{cases}.$

Với m nguyên dương nên $m \in \{1; 3; 4; \dots; 63\}$ có 62 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

51. Toán thực tế

Câu 53: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 48 phút.

B. 19 phút.

C. 7 phút.

D. 12 phút.

Lời giải

Chọn C

Sau 3 phút ta có: $s(3) = s(0) \cdot 2^3 \Rightarrow s(0) = \frac{s(3)}{2^3} = 78125$.

Tại thời điểm t số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con nên ta có:

$$s(t) = s(0) \cdot 2^t \Leftrightarrow 2^t = \frac{s(t)}{s(0)} \Leftrightarrow 2^t = \frac{10.000.000}{78125} \Leftrightarrow 2^t = 128 \Leftrightarrow t = 7.$$

Câu 54: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- A. 11** năm. **B. 9** năm. **C. 10** năm. **D. 12** năm.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n}{A} \right) \Rightarrow n = \log_{(1+7,5\%)} (2) \approx 9,6$.

Câu 55: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,2%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi ít nhất sau bao nhiêu năm người đó thu được (cả tiền gửi ban đầu lãi) gấp đôi số tiền ban đầu, giả định trong suốt thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- A. 11** năm. **B. 12** năm. **C. 9** năm. **D. 10** năm.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi A là số tiền người đó gửi ban đầu ($A > 0$), r là lãi suất, $r = 7,2\%$ /năm.

Gọi T_n là số tiền người đó có được sau n năm, $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó ta có: $T_n = A(1+r)^n$

Giả sử sau ít nhất n thì số tiền người đó thu được gấp đôi số tiền gốc ban đầu.

$$\Rightarrow T_n = 2A \text{ hay } A(1+r)^n = 2.A \Leftrightarrow 1,072^n = 2$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1,072} 2 \approx 9,9697$$

$\Rightarrow$ Ít nhất sau 10 năm thì số tiền của người đó thu được gấp đôi số tiền gốc ban đầu.

Câu 56: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban

đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đổ không rút tiền ra?

- A. 11** năm. **B. 10** năm. **C. 13** năm. **D. 12** năm.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền gửi ban đầu là a , lãi suất là $d\%/$ năm.

Số tiền có được sau 1 năm là: $T_1 = a + ad = a(1 + d)$

Số tiền có được sau 2 năm là: $T_2 = a(1 + d) + a(1 + d)d = a(1 + d)^2$

Số tiền có được sau 3 năm là: $T_3 = a(1 + d)^2 + a(1 + d)^2d = a(1 + d)^3$

Số tiền có được sau n năm là: $T_n = a(1 + d)^n$

Theo giả thiết: $T_n = 2a \Leftrightarrow (1 + d)^n = 2$

Thay số ta được: $(1 + 0,066)^n = 2 \Rightarrow n = \log_{1,066} 2 \Rightarrow n \approx 10,85$

Vậy sau ít nhất 11 năm. Chọn A

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.C	4.A	5.B	6.C	7.B	8.B	9.A	10.A
11.C	12.C	13.C	14.B	15.C	16.A	17.A	18.D	19.B	20.D
21.A	22.A	23.C	24.C	25.B	26.C	27.C	28.C	29.B	30.C
31.D	32.B	33.D	34.B	35.A	36.C	37.C	38.B	39.D	40.C
41.C	42.A	43.B	44.A	45.C	46.B	47.C	48.C	49.B	50.A
51.A	52.B	53.C	54.C	55.D	56.A				

52. Bất phương trình cơ bản

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình

$$5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0.$$

- A.** $S = (1; +\infty)$. **B.** $S = (-1; +\infty)$.
C. $S = (-2; +\infty)$. **D.** $S = (-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình tương đương $5^{x+1} > 5^{-1} \Leftrightarrow x+1 > -1 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; +\infty)$.

Câu 2: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x+1) = \frac{1}{2}$.

- A. $x = 6$ B. $x = 4$ C. $x = \frac{23}{2}$ D. $x = -6$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > -1$

Xét phương trình $\log_{25}(x+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_5(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = 5 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 3: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Tập nghiệm của bất phương trình:

$2^{2x} < 2^{x+6}$ là

- A. $(0; 6)$. B. $(-\infty; 6)$. C. $(0; 64)$. D. $(6; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x+6 \Leftrightarrow x < 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 6)$.

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 2)$. C. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. D. $S = (-1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow x+1 > 2x-1 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{Kết hợp } (*) \Rightarrow S = \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

53. Đưa về cùng cơ số

Câu 5: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Tìm tập nghiệm S của phương trình

$$\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1.$$

- A. $S = \{1\}$ B. $S = \{-2\}$ C. $S = \{3\}$ D. $S = \{4\}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Ta có } \log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x+1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 4 (\text{thỏa})$$

54. Đặt ẩn phụ

Câu 6: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

A. $S = [2; 16]$ **B.** $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$

C. $(-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$ **D.** $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 4 \\ \log_2 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 16 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có $S = 0; 2] \cup 16; +\infty)$.

55. Toán thực tế

Câu 7: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó sẽ nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 14 năm **B.** 12 năm **C.** 11 năm **D.** 13 năm

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 50.(1 + 0,06)^n \geq 100 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,06} 2 \Rightarrow n = 12.$$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.B	4.C	5.D	6.B	7.B			
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--

56. Sử dụng định nghĩa-tính chất cơ bản

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

Câu 2: **(Nhận biết) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$

C. $\int f(x)dx = 2 \sin 2x + C$

D. $\int f(x)dx = -2 \sin 2x + C$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ với $a \neq 0$; thay $a = 2$ và $b = 0$ để có kết quả.

Câu 3: **(Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C.$

B. $\frac{x^3}{3} + x + C.$

C. $6x + C.$

D. $x^3 + x + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int (3x^2 + 1)dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x + C = x^3 + x + C.$

Câu 4: **(Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

B. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

C. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

D. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$ ta được đáp án B

Câu 5: **(Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101)** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $x^4 + x^2 + C.$

B. $3x^2 + 1 + C.$

C. $x^3 + x + C.$

D. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int (x^3 + x)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 6: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

- A. $x^4 + x^3 + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$. C. $3x^2 + 2x + C$. D. $x^3 + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Câu 7: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là:

- A. $x^2 + 5x + C$. B. $2x^2 + 5x + C$. C. $0z$. D. $x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int (2x + 5)dx = x^2 + 5x + C$.

Câu 8: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- A. $x^2 + 6x + C$. B. $2x^2 + C$. C. $2x^2 + 6x + C$. D. $x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

$f(x) = 2x + 6$ có họ tất cả các nguyên hàm là $F(x) = x^2 + 6x + C$.

Câu 9: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

- A. $2x^2 + C$. B. $x^2 + 3x + C$. C. $2x^2 + 3x + C$. D. $x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + C$.

Câu 10: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A. $2x^2 + 4x + C$. B. $x^2 + 4x + C$. C. $x^2 + C$. D. $2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int (2x + 4)dx = x^2 + 4x + C$.

Câu 11: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- A. $e^x + x^2 + C$. B. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. C. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. D. $e^x + 1 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int (e^x + x)dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 12: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

- A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$ B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$
C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ D. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 13: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.
C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \sqrt{2x-1}dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} d(2x-1) \\ &= \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C\end{aligned}$$

Câu 14: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

- A. $F(3) = \ln 2 - 1$ B. $F(3) = \ln 2 + 1$ C. $F(3) = \frac{1}{2}$ D. $F(3) = \frac{7}{4}$

Lời giải

Chọn B

$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1| + C$. $F(2) = 1 \Leftrightarrow \ln 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = \ln|x-1| + 1$. Suy ra $F(3) = \ln 2 + 1$.

Câu 15: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số

$f(x) = \sin x + \cos x$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

- A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$ B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$
C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$ D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$$

Câu 16: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Áp dụng công thức } \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C \ (a \neq 0) \text{ ta được } \int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C.$$

Câu 17: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

A. $x^4 + x + C$

B. $4x^3 + 1 + C.$

C. $x^5 + x^2 + C.$

D. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (x^4 + x) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Câu 18: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $4x^3 + 2x + C.$

B. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$

C. $x^4 + x^2 + C.$

D. $x^5 + x^3 + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Câu 19: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$

B. $2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

C. $2 \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$

D. $2 \ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2}{(x+1)} dx + \int \frac{-3}{(x+1)^2} dx = 2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$$

Câu 20: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$

B. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$

C. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$

D. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \int^x \cos x (3 - 5 \sin x)$

Theo giả thiết $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

Câu 21: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{35}{36}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{19}{36}$.

D. $-\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -2x \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 + C$.

Từ $f(2) = -\frac{2}{9}$ suy ra $C = -\frac{1}{2}$.

Do đó $f(1) = \frac{1}{-1^2 + (-\frac{1}{2})} = -\frac{2}{3}$.

Câu 22: (Vận dụng) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $3 \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$.

B. $3 \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + C$.

C. $3 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C$.

D. $3 \ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + C$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x - 1$

$$\int f(x) dx = \int \frac{3(t+1)-1}{t^2} dt = \int \frac{3t+2}{t^2} dt = \int \frac{3}{t} dt + \int \frac{2}{t^2} dt = 3 \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$$

Câu 23: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là:

A. $2 \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$.

B. $2 \ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C$.

C. $2 \ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C$.

D. $2 \ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int \frac{2x+1}{(x+2)^2} dx = \int \frac{2(x+2)-3}{(x+2)^2} dx = \int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2} dx - \int \frac{3}{(x+2)^2} dx = 2 \int \frac{d(x+2)}{x+2} - \int 3(x+2)^{-2} d(x+2) = 2 \ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C = 2 \ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C.$$

Câu 24: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $3 \ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C$.

B. $3 \ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$.

C. $3 \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$.

D. $3 \ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int \frac{3x-2}{(x-2)^2} dx = \int \frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} dx = \int \left[\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right] dx = 3 \ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$$

Câu 25: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

A. $2x^2 \ln x + 3x^2$.

B. $2x^2 \ln x + x^2$.

C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$.

D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Cách 1. Ta có } \int f(x) dx = \int 4x(1 + \ln x) dx = \int 4x dx + \int 4x \ln x dx$$

$$+ \text{ Tính } \int 4x dx = 2x^2 + C_1$$

$$+ \text{ Tính } \int 4x \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = 4x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = 2x^2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int 4x \ln x dx = 2x^2 \ln x - \int 2x dx = 2x^2 \ln x - x^2 + C_2$$

$$\text{Do đó } I = 2x^2 \ln x + x^2 + C.$$

$$\text{Cách 2. Ta có } (2x^2 \ln x + x^2)' = (2x^2)' \ln x + 2x^2 \cdot (\ln x)' + (x^2)'$$

$$= 4x \cdot \ln x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x$$

$$= 4x(1 + \ln x).$$

$$\text{Do đó } 2x^2 \ln x + x^2 \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) = 4x(1 + \ln x).$$

$$\text{Hay } 2x^2 \ln x + x^2 + C \text{ là họ nguyên hàm của hàm số } f(x) = 4x(1 + \ln x).$$

Câu 26: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \cdot e^{2x}$.

A. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = 2x^2 - 2x + C$

B. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C$

C. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -x^2 + x + C$

D. $\int f'(x) \cdot e^{2x} dx = -x^2 + 2x + C$

Lời giải:

Chọn B

Ta có $f(x).e^{2x} = F'(x) = 2x \Rightarrow (f(x).e^{2x})' = 2$ hay $f'(x)e^{2x} + 2f(x)e^{2x} = 2 \Rightarrow f'(x)e^{2x} + 4x = 2$

Suy ra $f'(x)e^{2x} = 2 - 4x$ nên $\int f'(x).e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C$.

57. Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần

Câu 27: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

A. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

B. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$

C. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$

D. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$

Lời giải

Chọn B

Câu 28: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

Theo bài ra ta có: $F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Câu 29: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$

C. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$

D. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2x^2}$. Chọn $f(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Khi đó: $\int f'(x) \ln x dx = \int \frac{2}{x^3} \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2}{x^3} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x^2} \end{cases}$.

Khi đó: $\int f'(x) \ln x dx = \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{x^2} + \int \frac{1}{x^3} dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$.

Câu 30: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho $F(x) = (x - 1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x - 2)e^x + C$

B. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$

C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2 - x)e^x + C$

D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4 - 2x)e^x + C$

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài ta có $\int f(x).e^{2x} dx = (x - 1)e^x + C$, suy ra $f(x).e^{2x} = [(x - 1)e^x]' = e^x + (x - 1).e^x$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-x} + (x - 1).e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1 - x).e^{-x}$$

Suy ra $\int f'(x)e^{2x} dx = \int (1 - x)e^x dx = \int (1 - x) d(e^x) = e^x(1 - x) + \int e^x dx = e^x(2 - x) + C$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.D	4.B	5.D	6.B	7.A	8.A	9.B	10.B
11.B	12.B	13.B	14.B	15.D	16.B	17.D	18.B	19.B	20.A
21.B	22.A	23.D	24.D	25	26.B	27.B	28.D	29.A	30.C

58. Tích phân cơ bản

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Tích phân $\frac{25}{55} = \frac{5}{11}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$.

B. $\log \frac{5}{3}$.

C. $\ln \frac{5}{3}$.

D. $\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{6\sqrt{13}}{65} = \ln|2 + 3| - \ln|0 + 3| = \ln \frac{5}{3}$.

Câu 2: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $2\ln \frac{7}{5}$.

B. $\frac{1}{2}\ln 35$.

C. $\ln \frac{7}{5}$.

D. $\frac{1}{2}\ln \frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x + 3| \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln \frac{7}{5}$.

Câu 3: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Biết $y = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$, khi đó $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

A. -5 .

B. 5 .

C. -1 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = -2 - 3 = -5.$$

Câu 4: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Biết $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$ khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

- A. -7 . B. $.$ C. -1 . D. 1 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 3 - 4 = -1.$$

Câu 5: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 6$, khi đó $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

- A. 4 . B. -8 . C. 8 . D. -4 .

Lời giải

Chọn D

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = 2 - 6 = -4.$$

Câu 6: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Biết $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$, khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

- A. 6 . B. -6 . C. -2 . D. 2 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f(x) + g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 2 + (-4) = -2$$

Câu 7: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$ khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

- A. -3 . B. 12 . C. -8 . D. 1 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 g(x)dx = 5 \Leftrightarrow 2 \int_0^1 g(x)dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^1 2g(x)dx = 10$$

$$\text{Xét } \int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 2g(x)dx = 2 - 10 = -8.$$

Câu 8: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f'(x)dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = -1$.

C. $I = 3$.

D. $I = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I = \int_1^2 f'(x)dx = f(x)|_1^2 = f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1$.

Câu 9: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 6$.

B. $S = 2$.

C. $S = -2$.

D. $S = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

Khi đó: $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = (\ln x - \ln(x+1)) \Big|_3^4 = (\ln 4 - \ln 5) - (\ln 3 - \ln 4)$
 $= 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5$.

Suy ra: $a = 4, b = -1, c = -1$. Vậy $S = 2$.

Câu 10: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 5$. Tính

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

A. $I = 7$

B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$

C. $I = 3$

D. $I = 5 + \pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 - 2(0 - 1) = 7.$$

Câu 11: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$.

A. $I = \frac{11}{2}$

B. $I = \frac{17}{2}$

C. $I = \frac{5}{2}$

D. $I = \frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2 \int_{-1}^2 f(x)dx - 3 \int_{-1}^2 g(x)dx = \frac{3}{2} + 2.2 - 3(-1) = \frac{17}{2}$.

Câu 12: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) $\int_0^1 e^{3x+1}dx$ bằng

- A.** $\frac{1}{3}(e^4 - e)$. **B.** $e^4 - e$. **C.** $\frac{1}{3}(e^4 + e)$. **D.** $e^3 - e$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_0^1 e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{e^4 - e}{3}$. Chọn A

Câu 13: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

- A.** $2 \ln 2$. **B.** $\frac{1}{3} \ln 2$. **C.** $\frac{2}{3} \ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3} \ln |3x-2| \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (\ln 4 - \ln 1) = \frac{2}{3} \ln 2$.

Câu 14: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

- A.** $I = 36$ **B.** $I = 4$ **C.** $I = 6$ **D.** $I = 5$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^2 f(3x)d3x = \frac{1}{3} \int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$.

Câu 15: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển

động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ (m/s),

trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A.** 22 (m/s). **B.** 15 (m/s). **C.** 10 (m/s). **D.** 7 (m/s).

Lời giải

Chọn B

+) Từ đề bài, ta suy ra: tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 10 giây.

+) Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$, lại có $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

+) Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{15} \left(\frac{1}{180} t^2 + \frac{11}{18} t \right) dt = \int_0^{10} at dt \Leftrightarrow 75 = 50a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10) = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15 \text{ (m/s)}$.

- Câu 16: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104)** Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120} t^2 + \frac{58}{45} t \text{ (m/s)}$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng
- A.** 25 (m/s) . **B.** 36 (m/s) . **C.** 30 (m/s) . **D.** 21 (m/s) .

Lời giải

Chọn C

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120} t^2 + \frac{58}{45} t \right) dt = \int_0^{15} at dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30 \text{ (m/s)}$.

- Câu 17: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng
- A.** -2 . **B.** -1 . **C.** 2 . **D.** 1 .

Lời giải

Chọn B

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = \int_0^1 \frac{(x+2) - 2}{(x+2)^2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+2} - \int_0^1 \frac{2 dx}{(x+2)^2}$$

$$= \ln(x+2) \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{(x+2)^{-1}}{-1} \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 + \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} - \ln 2 + \ln 3.$$

Vậy $a = -\frac{1}{3}; b = -1; c = 1 \Rightarrow 3a + b + c = -1.$

59. Phương pháp đổi biến

Câu 18: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$ **B.** $I = -\pi^4$ **C.** $I = 0$ **D.** $I = -\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Leftrightarrow -dt = \sin x dx$

Đổi cận: Với $x=0 \Rightarrow t=1$; với $x=\pi \Rightarrow t=-1$.

Vậy $I = -\int_1^{-1} t^3 dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0.$

Cách khác : Bấm máy tính

Câu 19: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$ **B.** $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$
C. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$ **D.** $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$$

đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx$. Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=0; x=2 \Rightarrow u=3$

Nên $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$

Câu 20: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x) dx$

A. $I = 32$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 16$. **D.** $I = 4$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2x \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0; x=2 \Rightarrow t=4$

Khi đó ta có $I = \int_0^2 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)dx = 8$

Câu 21: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính: $I = F(e) - F(1)$?

A. $I = \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{1}{e}$

C. $I = 1$

D. $I = e$

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

Vì $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ nên $I = F(e) - F(1) = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}$.

Cách 2: Dùng MTCT $I = F(e) - F(1) = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$.

Câu 22: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) $\int_1^2 e^{3x-1} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$.

B. $\frac{1}{3}e^5 - e^2$.

C. $e^5 - e^2$.

D. $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^2 e^{3x-1} dx = \frac{1}{3} e^{3x-1} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(e^5 - e^2)$.

Câu 23: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = -2c$.

B. $a + b = c$.

C. $a - b = -c$.

D. $a - b = -2c$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x+4} \Rightarrow t^2 = x+4 \Rightarrow 2tdt = dx$.

Đổi cận:

x	5	21
t	3	5

$$\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \int_3^5 \frac{2tdt}{(t^2-4)t} = \int_3^5 \frac{2dt}{(t-2)(t+2)} = 2 \int_3^5 \left(\frac{1}{4(t-2)} - \frac{1}{4(t+2)} \right) dt$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln|t-2| - \frac{1}{2} \ln|t+2| \right) \Big|_3^5 = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 7.$$

Câu 24: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu

tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = 2$.

B. $S = -2$.

C. $S = 0$.

D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = e$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_1^e \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 1)} = \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = (\ln|t| - \ln|t+1|) \Big|_1^e = (1 - \ln(1+e)) - (-\ln 2)$$

$$= 1 + \ln \frac{2}{1+e} = 1 - \ln \frac{1+e}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow S = a^3 + b^3 = 0.$$

Cách 2. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_0^1 \frac{(e^x + 1) - e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = x \Big|_0^1 - \ln|e^x + 1| \Big|_0^1 = 1 - \ln \frac{1+e}{2}.$

Suy ra $a=1$ và $b=-1$. Vậy $S = a^3 + b^3 = 0$.

Câu 25: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a - b = -c$. **B.** $a + b = c$. **C.** $a + b = 3c$. **D.** $a - b = -3c$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x+9} \Rightarrow t^2 = x+9 \Rightarrow 2t dt = dx$.

Đổi cận:

x	16	55
t	5	8

$$\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = \int_5^8 \frac{2t dt}{(t^2 - 9)t} = 2 \int_5^8 \frac{dt}{t^2 - 9} = \frac{1}{3} \left(\int_5^8 \frac{dt}{t-3} - \int_5^8 \frac{dt}{t+3} \right)$$

$$= \frac{1}{3} (\ln|x-3| - \ln|x+3|) \Big|_5^8 = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 5 - \frac{1}{3} \ln 11.$$

Vậy $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{3}$. Mệnh đề $a - b = -c$ đúng.

60. Phương pháp từng phần

Câu 26: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$:

A. $I = \frac{1}{2}$ **B.** $I = \frac{e^2 - 2}{2}$ **C.** $I = \frac{e^2 + 1}{4}$ **D.** $I = \frac{e^2 - 1}{4}$

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_1^e x \ln x \, dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_0^e - \int_0^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_0^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Câu 27: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho $\int_1^e (1 + x \ln x) \, dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a + b = c$. **B.** $a + b = -c$. **C.** $a - b = c$. **D.** $a - b = -c$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^e (1 + x \ln x) \, dx = \int_1^e 1 \cdot dx + \int_1^e x \ln x \, dx = e - 1 + \int_1^e x \ln x \, dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_1^e x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \int_1^e (1 + x \ln x) \, dx = e - 1 + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4} \text{ nên } a = \frac{1}{4}, b = 1, c = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } a - b = c.$$

Câu 28: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho $\int_1^e (2 + x \ln x) \, dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $a + b = -c$. **B.** $a + b = c$. **C.** $a - b = c$. **D.** $a - b = -c$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^e (2 + x \ln x) \, dx = \int_1^e 2 \, dx + \int_1^e x \ln x \, dx = 2x \Big|_1^e + I = 2e - 2 + I \text{ với } I = \int_1^e x \ln x \, dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} (e^2 - 1) = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\Rightarrow \int_1^e (2 + x \ln x) \, dx = 2e - 2 + \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{1}{4} e^2 + 2e - \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 2 \\ c = -\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow a - b = c$$

61. Hàm đặc biệt hàm ẩn

Câu 29: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$

và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = -12$

B. $I = 8$

C. $I = 1$

D. $I = -8$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x + 1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó $I = (x+1)f(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$

Suy ra $10 = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -10 + 2 = -8$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = -8$.

Câu 30: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

A. $I = -6$

B. $I = 0$

C. $I = -2$

D. $I = 6$

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = -t$. Khi đó $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x)dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t)d(-t) = -\int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t)dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

Ta có: $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x)dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

Hay $I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (f(-x) + f(x))dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos 2x)}dx$

$\Leftrightarrow I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2 x}dx = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos xdx$

Vậy $I = 2\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 6$.

Câu 31: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Biết $I = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$

với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 24$.

B. $P = 12$.

C. $P = 18$.

D. $P = 46$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \neq 0, \forall x \in [1; 2]$ nên:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \\ &= \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx}{\sqrt{x(x+1)}} \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = (2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}) \Big|_1^2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2. \end{aligned}$$

Mà $I = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ nên $\begin{cases} a = 32 \\ b = 12 \\ c = 2 \end{cases}$. Suy ra: $P = a + b + c = 32 + 12 + 2 = 46$.

Câu 32: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 15$.

B. $2 + \ln 15$.

C. $3 + \ln 15$.

D. $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{2}{2x-1}dx = \ln|2x-1| + C$, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

+ Xét trên $\left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$. Ta có $f(0) = 1$, suy ra $C = 1$.

Do đó, $f(x) = \ln|2x-1| + 1$, với mọi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$. Suy ra $f(-1) = 1 + \ln 3$.

+ Xét trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty \right)$. Ta có $f(1) = 2$, suy ra $C = 2$.

Do đó, $f(x) = \ln|2x-1| + 2$, với mọi $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty \right)$. Suy ra $f(3) = 2 + \ln 5$.

Vậy $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 3 + \ln 5 = 3 + \ln 15$.

Câu 33: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và

$f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng.

A. $-\frac{11}{6}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{2}{9}$.

D. $-\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = x[f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x$.

Do đó $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int xdx \Leftrightarrow -\int d\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \int xdx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}$

Theo giả thiết $f(2) = -\frac{1}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + 1}$

Từ đó suy ra $f(1) = -\frac{2}{3}$.

- Câu 34: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng
- A.** $-\frac{41}{400}$. **B.** $-\frac{1}{10}$. **C.** $-\frac{391}{400}$. **D.** $-\frac{1}{40}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$

Do $f(2) = -\frac{1}{25}$, nên ta có $C = -9$. Do đó $f(x) = -\frac{1}{x^4+9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$.

- Câu 35: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 101)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

- A.** $\frac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2\cos^2 x + 1)dx = \int (\cos 2x + 2)dx = \frac{1}{2}\sin 2x + 2x + C$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow C = 4$.

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x + 2x + 4\right)dx = \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + x^2 + 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

- Câu 36: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 101)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4) = 1$ và $\int_0^1 xf(4x)dx = 1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)dx$ bằng

- A.** $\frac{31}{2}$. **B.** -16 . **C.** 8 . **D.** 14 .

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $\int_0^4 x^2 f'(x)dx = x^2 f(x)\Big|_0^4 - \int_0^4 2xf(x)dx = 16.1 - 2\int_0^1 4tf(4t)d(4t) = 16 - 2.16.1 = -16$.

Cách 2: Đặt $t = 4x \Rightarrow dt = 4dx$. Đổi cận:

A

Khi đó: $\int_0^1 xf(4x)dx = \frac{1}{16}\int_0^4 tf(t)dt = \frac{1}{16}\int_0^4 xf(x)dx$.

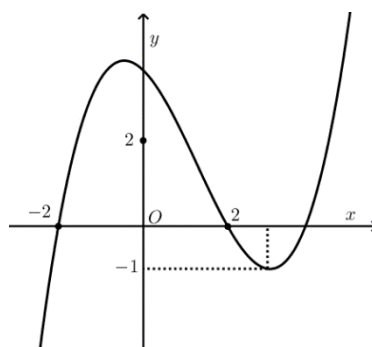
Xét: $I = \int_0^4 x^2 f'(x)dx$: Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \int f'(x)dx = f(x) \end{cases}$.

$\Rightarrow I = x^2 f(x)\Big|_0^4 - 2\int_0^4 xf(x)dx = 4^2 \cdot f(4) - 2.16 = -16$.

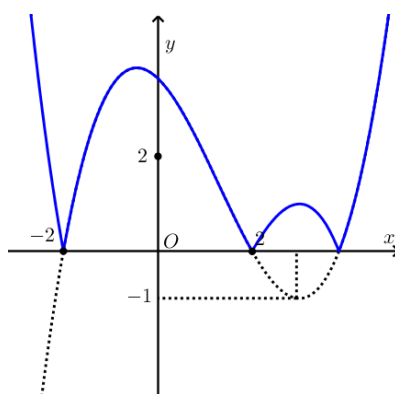
Lời giải:

Chọn A

Xét đồ thị của hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ đã cho



Gọi (C_1) là phần đồ thị phía trên trục hoành, (C_2) phần đồ thị phía dưới trục hoành. Gọi (C') là phần đồ thị đối xứng của (C_2) qua trục hoành.



Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ chính là phần (C_1) và (C') .

Xét $|f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2}$ thì

Câu 37: (Vận dụng) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) =$

$2 \cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2 + 2}{8}$.

B. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$.

C. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$.

D. $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 2 \cos^2 x + 3 = 4 + \cos 2x$

$\Rightarrow f(x) = 4x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$

$f(0) = 4 \Rightarrow C = 4$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4x + \frac{1}{2} \sin 2x + 4 \right) dx = \left(2x^2 - \frac{1}{4} \cos 2x + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$.

Câu 38: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) =$

$2 \sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$.

B. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

C. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$.

D. $\frac{\pi^2 - 4}{16}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \int (2\sin^2 x + 1)dx = \int (2 - \cos 2x)dx = 2x - \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = 4 \Rightarrow C = 4 \text{ hay } f(x) = 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4 \right] dx = \left(x^2 + \frac{1}{4}\cos 2x + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} + \pi = \frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}.$$

Câu 39: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\sin^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2 - 2}{8}.$

B. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8}{8}.$

C. $\frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}.$

D. $\frac{3\pi^2 + 2\pi - 3}{8}.$

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = 2\sin^2 x + 3 = 4 - \cos 2x.$$

$$\text{Có } \int (4 - \cos 2x)dx = 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + C \text{ suy ra } f(x) = 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

$$\text{Do } f(0) = 4 \text{ nên } C = 4 \Rightarrow f(x) = 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4 \right) dx = \left(2x^2 + \frac{1}{4}\cos 2x + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}.$$

Câu 40: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}.$

B. $1.$

C. $\frac{7}{4}.$

D. $4.$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Tính: $\int_0^1 x^2 f(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}.$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{x^3 f(x)}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \cdot f'(x)dx$$

$$= \frac{1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0)}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \cdot f'(x)dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \cdot f'(x)dx.$$

$$\text{Mà } \int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \cdot f'(x)dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^3 \cdot f'(x)dx = -1.$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \quad (1).$$

$$\int_0^1 x^6 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx = \frac{1}{7} \cdot 49 = 7 \quad (2).$$

$$\int_0^1 x^3 \cdot f'(x)dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 14x^3 \cdot f'(x)dx = -14 \quad (3).$$

$$\text{Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 49x^6 dx + \int_0^1 14x^3 \cdot f'(x)dx = 7 + 7 - 14 = 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \{[f'(x)]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6\} dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0.$$

Do $[f'(x) + 7x^3]^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx \geq 0$. Mà $\int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$.

$$f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C. \text{ Mà } f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right) dx = \left(-\frac{7x^5}{20} + \frac{7}{4}x\right) \Big|_0^1 = \frac{7}{5}.$$

Cách 2: Tương tự như trên ta có: $\int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma \left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq \gamma \left(\int_0^1 (x^3)^2 dx \right) \cdot \left(\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \right) = \gamma \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \\ &= \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = ax^3$, với $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 x^3 \cdot ax^3 dx = -1 \Rightarrow \frac{ax^7}{7} \Big|_0^1 = -1 \Rightarrow a = -7.$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C, \text{ mà } f(1) = 0 \text{ nên } C = \frac{7}{4}$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{7}{4}(1 - x^4) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right) dx = \left(-\frac{7x^5}{20} + \frac{7}{4}x\right) \Big|_0^1 = \frac{7}{5}.$$

Chú ý: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

$$\text{Khi đó, ta có } \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x) dx \right).$$

Chứng minh:

Trước hết ta có tính chất:

$$\text{Nếu hàm số } h(x) \text{ liên tục và không âm trên đoạn } [a; b] \text{ thì } \int_a^b h(x) dx \geq 0$$

$$\text{Xét tam thức bậc hai } [\lambda f(x) + g(x)]^2 = \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x) \geq 0, \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{R}$$

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[a; b]$ ta được

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0, \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{R} (*)$$

Coi (*) là tam thức bậc hai theo biến λ nên ta có $\Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right) \leq 0$$

Câu 41: $\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$ (đpcm) **(Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$.

B. $-\frac{71}{20}$.

C. $-\frac{79}{20}$.

D. $-\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(x) = x^3[f(x)]^2 &\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 x^3 dx \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Big|_1^2 &= \frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Câu 42: (Vận dụng cao) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 xf(5x)dx = 1$, khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 15.

B. 23.

C. $\frac{123}{5}$.

D. -25.

Lời giải

Chọn D

$$\int_0^5 x^2 f'(x)dx = x^2 f(x)\Big|_0^5 - \int_0^5 2xf(x)dx = 25.1 - 2 \int_0^1 5tf(5t)d(5t) = 25 - 50.1 = -25.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } 1 = \int_0^1 xf(5x)dx$$

$$\text{Đặt } t = 5x \Rightarrow dt = 5dx \Rightarrow \frac{1}{5}dt = dx$$

$$\Rightarrow 1 = \int_0^5 \frac{1}{5}t \cdot f(t) \cdot \frac{1}{5}dt \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{25} \int_0^5 t \cdot f(t)dt \Leftrightarrow \int_0^5 t \cdot f(t)dt = 25 \Rightarrow \int_0^5 x \cdot f(x)dx = 25$$

$$\text{Đặt } I = \int_0^5 x^2 \cdot f'(x)dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x^2 \cdot f(x)\Big|_0^5 - 2 \int_0^5 xf(x)dx = 25 \cdot f(5) - 2 \cdot 25 = -25$$

Câu 43: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(6) = 1$ và $\int_0^1 xf(6x)dx = 1$. Khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x)dx = ?$

A. $\frac{107}{3}$

B. 34

C. 24

D. -36

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 xf(6x)dx = 1. \text{ Đặt } t = 6x \Rightarrow dt = 6dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{6}. \text{ Đổi cận:}$$

x	0	1
t	0	6

$$\text{Từ } t = 6x \Rightarrow x = \frac{t}{6}$$

$$\text{Từ đó ta có: } I = \int_0^6 \frac{t}{6} f(t) \frac{dt}{6} = 1 \Rightarrow \frac{1}{36} \int_0^6 tf(t)dt = 1 \Rightarrow \int_0^6 tf(t)dt = 36 \Rightarrow \int_0^6 xf(x)dx = 36$$

(Do ẩn sau khi tính có vai trò như nhau)

$$J = \int_0^6 x^2 f'(x)dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } J = \int_0^6 x^2 f'(x)dx = x^2 f(x)\Big|_0^6 - 2 \int_0^6 xf(x)dx = 36 \cdot f(6) - 2 \cdot 36 = -36$$

Câu 44: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(3) = 1$ và $\int_0^1 xf(3x)dx = 1$. Khi đó $\int_0^3 x^2 f'(x)dx = ?$

- A. 3 B. 7 C. -9 D. $\frac{25}{3}$

Chọn B

Ta có: $I = \int_0^1 xf(3x)dx = 1$. Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$. Đổi cận:

x	0	1
t	0	3

Từ $t = 3x \Rightarrow x = \frac{t}{3}$

Từ đó ta có: $I = \int_0^3 \frac{t}{3} f(t) \frac{dt}{3} = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} \int_0^3 tf(t)dt = 1 \Rightarrow \int_0^3 tf(t)dt = 9 \Rightarrow \int_0^3 xf(x)dx = 9$

$J = \int_0^3 x^2 f'(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = f(x) \end{cases}$

Suy ra: $J = \int_0^3 x^2 f'(x)dx = x^2 f(x)|_0^3 - 2 \int_0^3 xf(x)dx = 9.f(3) - 2.9 = -9$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.A	4.C	5.D	6.C	7.C	8.A	9.B	10.A
11.B	12.A	13.C	14.B	15.B	16.C	17.B	18.C	19.C	20.B
21.A	22.A	23.A	24.C	25.A	26.C	27.C	28.C	29.D	30.D
31.D	32.C	33.B	34.B	35.C	36.B	37.C	38.C	39.C	40.A
41.D	42.D	43.D	44.C						

62. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị

Câu 1: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$. B. $S = \int_0^2 e^x dx$. C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$. D. $S = \int_0^2 e^{2x} dx$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ được tính theo công thức $S = \int_0^2 |e^x| dx = \int_0^2 e^x dx$.

Câu 2: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = \int_0^2 2^x dx$. B. $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$. C. $S = \int_0^2 2^{2x} dx$. D. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$.

Lời giải

Chọn A

$S = \int_0^2 |2^x| dx = \int_0^2 2^x dx$ (do $2^x > 0, \forall x \in [0; 2]$).

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $\frac{37}{12}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{81}{12}$

D. 13

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

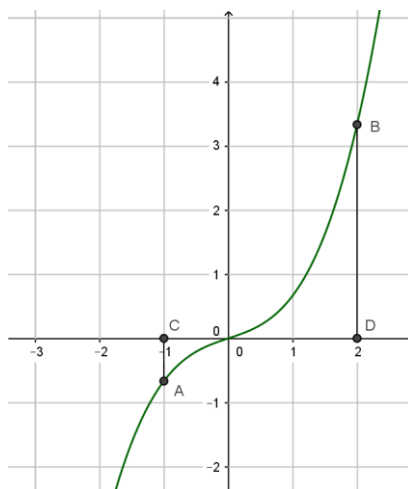
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$ là:

$$S = \int_{-2}^1 |x^3 - x - (x - x^2)| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 \right| = \left| -\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) \right| = \frac{37}{12}.$$

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên dưới). Đặt

$a = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = b - a$

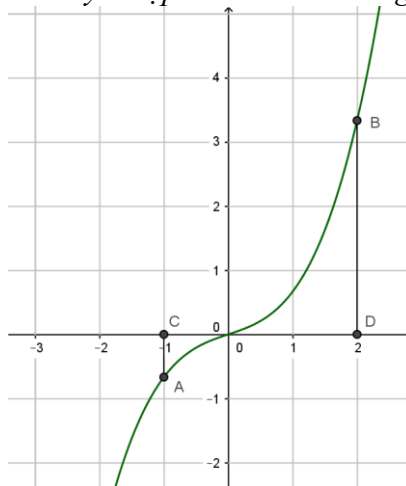
B. $S = b + a$

C. $S = -b + a$

D. $S = -b - a$

Lời giải

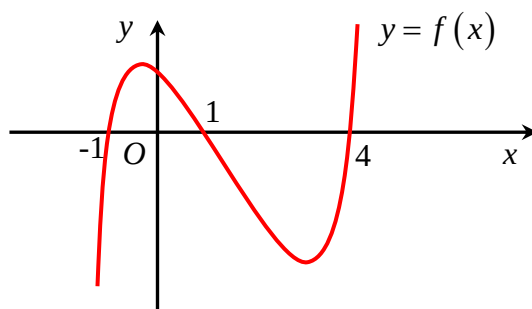
Chọn A



Ta có:

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -a + b.$$

Câu 5: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx.$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx.$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx.$

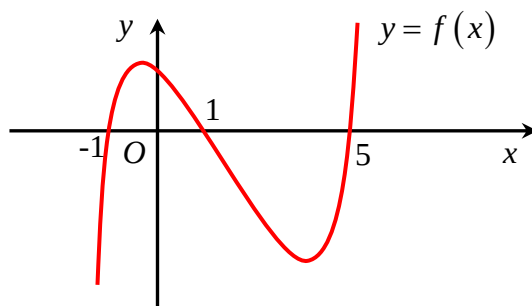
D. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx.$

Lời giải

Chọn B

Ta có diện tích hình phẳng cần tìm $S = \int_{-1}^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx.$

Câu 6: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx.$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

C. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx.$

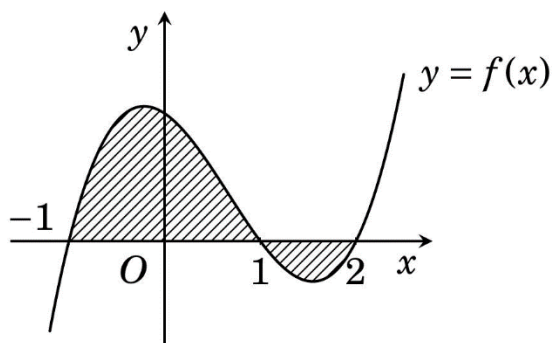
D. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

Lời giải

Chọn B

Ta có diện tích hình phẳng cần tìm $S = \int_{-1}^5 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 |f(x)|dx + \int_1^5 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

Câu 7: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$; $x = -1$ và $x = 2$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

B. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

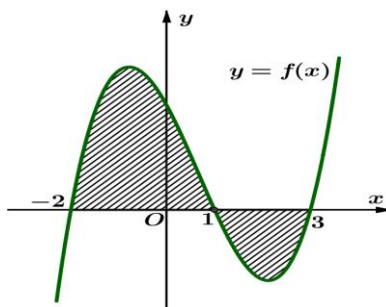
D. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

Câu 8: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_{-2}^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx.$

B. $S = -\int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx.$

C. $S = \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx.$

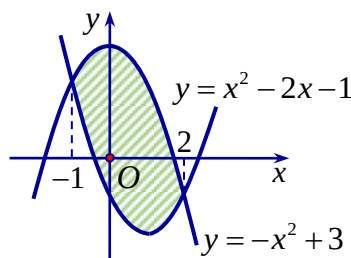
D. $S = -\int_{-2}^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx.$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào hình vẽ thì diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ là $S = \int_{-2}^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx$.

Câu 9: (Thông hiểu) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4)dx$.

B. $\int_{-1}^2 (-2x + 2)dx$.

C. $\int_{-1}^2 (2x - 2)dx$.

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4)dx$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy: $\forall x \in [-1; 2]: -x^2 + 3 \geq x^2 - 2x - 1$ nên

$$S = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 10: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$

A. $\frac{37}{12}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{81}{12}$

D. 13

Lời giải

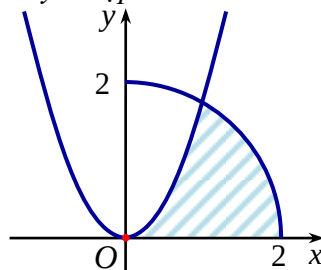
Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$ là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 |x^3 - x - (x - x^2)| dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = -\left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

Câu 11: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$.

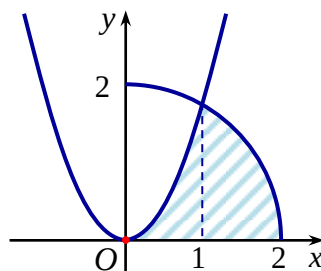
B. $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$.

D. $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = \sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) là

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2 = 3x^4 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } 0 \leq x \leq 2 \text{)}.$$

Cách 1: Diện tích của (H) là

$$S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3}x^3 \Big|_0^1 + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + I \text{ với } I = \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$\text{Đặt: } x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2 \cos t \cdot dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}, x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

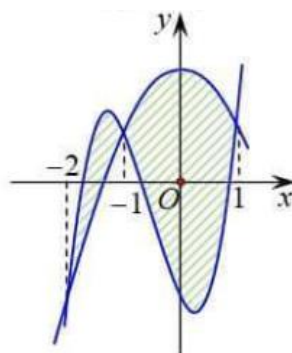
$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t \cdot dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t \cdot dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) \cdot dt = (2x + \sin 2t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{\sqrt{3}}{3} + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}.$$

Cách 2: Diện tích của (H) bằng diện tích một phần tư hình tròn bán kính 2 trừ diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung tròn, parabol và trục Oy .

$$\text{Tức là } S = \pi - \int_0^1 (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2) dx.$$

Câu 12: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị có diện tích bằng?



A. $\frac{37}{6}$

B. $\frac{13}{2}$

C. $\frac{9}{2}$

D. $\frac{37}{12}$

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0$ có 3 nghiệm $x_1; x_2; x_3$ lần lượt là $-2; -1; 1$.

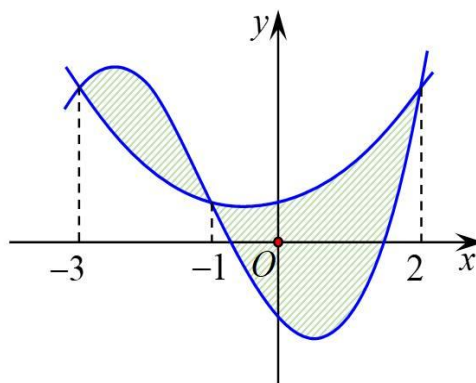
Áp dụng định lý Vi - et cho phương trình bậc 3 ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b-d}{a} = -2 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c-e}{a} = -1 \\ x_1x_2x_3 = \frac{4}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c - e = -2 \\ b - d = 4 \end{cases} \text{ Suy ra } f(x) - g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$$

Diện tích hình phẳng:

$$\int_{-2}^{-1} (2x^3 + 4x^2 - 2x - 4) dx - \int_{-1}^1 (2x^3 + 4x^2 - 2x - 4) dx = \frac{37}{6}$$

Câu 13: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$

B. $\frac{125}{12}$

C. $\frac{253}{48}$

D. $\frac{125}{48}$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết hai đồ thị hàm số cắt nhau tại các điểm $-3; -1; 2$ nên ta có

$$\begin{cases} -27a + 9b - 3c - 1 = 9d - 3e + \frac{1}{2} \\ -a + b - c - 1 = d - e + \frac{1}{2} \\ 8a + 4b + 2c - 1 = 4d + 2e + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ 8a + 4(b-d) + 2(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b-d = \frac{1}{2} \\ c-e = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy diện tích cần tính là:

$$S = \left| \int_{-3}^{-1} \left[ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} \right] dx \right| + \left| \int_{-1}^2 \left[ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} \right] dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} \cdot (-20) + \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{3} - \frac{5}{4}(-4) - \frac{3}{2} \cdot 2 \right| + \left| \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{4} + \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot 3 \right| = \frac{4}{3} + \frac{63}{16} = \frac{253}{48}$$

Cách 2. $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow a(x+3)(x-2)(x+1) = 0$

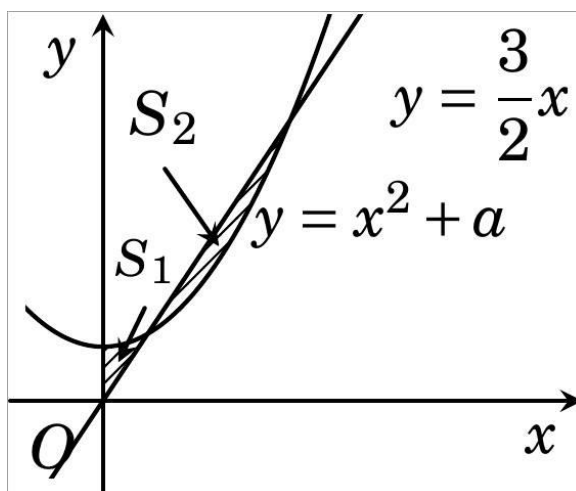
$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

Đồng nhất hệ số với phương trình $ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0$ ta có: $\frac{a}{1} = \frac{-\frac{3}{2}}{-6} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$$

$$\text{Do đó } S = \int_{-3}^2 \left| \frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2) \right| dx = \frac{253}{48}.$$

Câu 14: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{16}\right).$

B. $\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{20}\right).$

C. $\left(\frac{9}{20}; \frac{1}{2}\right).$

D. $\left(0; \frac{2}{5}\right).$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $x^2 + a = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2a = 0 \quad (1)$

Xét $\Delta = 9 - 16a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{9}{16}$ thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - 16a}}{4}; \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} \quad (x_1 < x_2).$$

Từ hình vẽ ta có: $S_1 = \int_0^{x_1} \left(x^2 - \frac{3}{2}x + a\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + ax\right) \Big|_0^{x_1} = F(x) \Big|_0^{x_1} = F(x_1)$

Và $S_2 = -\int_{x_1}^{x_2} \left(x^2 - \frac{3}{2}x + a\right) dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + ax\right) \Big|_{x_1}^{x_2} = -F(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_1) - F(x_2).$

Theo giả thiết $S_1 = S_2 \Leftrightarrow F(x_2) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}x_2^3 - \frac{3}{4}x_2^2 + ax_2\right) = 0$

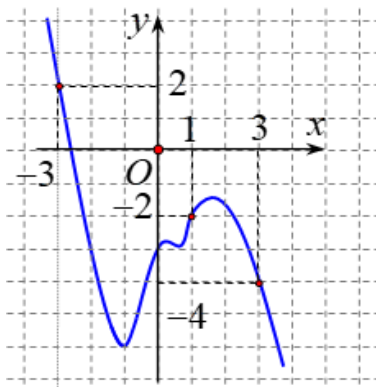
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x_2^3 - \frac{9}{4}x_2^2 + 3a\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x_2 - a - \frac{9}{4}x_2 + 3a = 0 - 3x_2 + 8a = 0 \Leftrightarrow 8a = 3 \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{9 - 16a} = 32a - 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{32} < a < \frac{9}{16} \\ 1024a^2 - 432a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{27}{64} \in \left(\frac{2}{5}; \frac{9}{20}\right).$$

Câu 15: (Vận dụng cao) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của

hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1) < g(3) < g(-3)$ **B.** $g(1) < g(-3) < g(3)$

C. $g(3) = g(-3) < g(1)$ **D.** $g(3) = g(-3) > g(1)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) + 2(x+1) \Rightarrow g'(-3) = 2f'(-3) - 4, g'(1) = 2f'(1) + 4, g'(3) = 2f'(3) + 8$

Lại có nhìn đồ thị ta thấy $f'(-3) = 2, f'(1) = -2, f'(3) = -4 \Rightarrow g'(-3) = g'(1) = g'(3) = 0$

Hay phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x - 1$ có 3 nghiệm

x	-3	1	3
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	$g(-3)$	$g(1)$	$g(3)$

Nhìn đồ thị ta có bảng biến thiên, suy ra $g(3) > g(1), g(-3) > g(1)$.

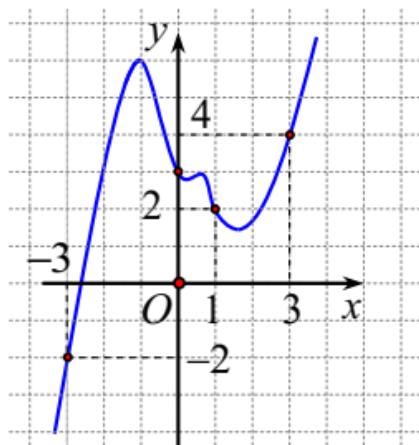
Mặt khác diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = -x - 1$ và đồ thị hàm số

$y = f'(x)$ trên 2 miền $[-3;1]$ và $[1;3]$, ta có $\int_{-3}^1 (-x-1-f'(x))dx > \int_1^3 (f'(x)+x+1)dx$

$$\Leftrightarrow -\int_{-3}^1 g'(x)dx > \int_1^3 g'(x)dx \Leftrightarrow -g(1) + g(-3) > g(3) - g(1) \Leftrightarrow g(-3) > g(3).$$

Vậy $g(1) < g(3) < g(-3)$.

Câu 16: (Vận dụng cao) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3) > g(-3) > g(1)$

B. $g(-3) > g(3) > g(1)$

C. $g(1) > g(-3) > g(3)$

D. $g(1) > g(3) > g(-3)$

Lời giải

Chọn D

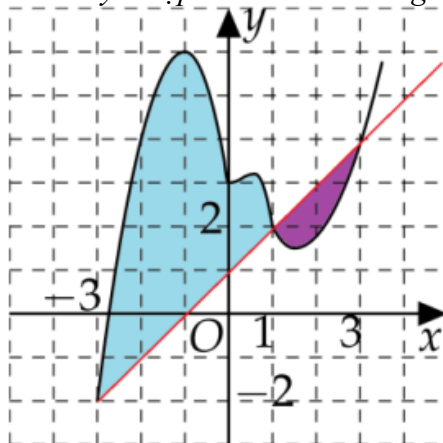
Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$				
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$			
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $g(-3) < g(1)$ và $g(3) < g(1)$.

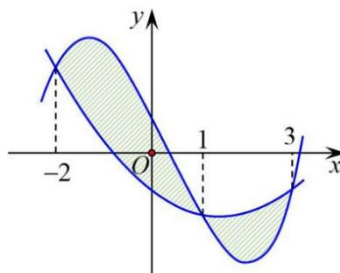


Dựa vào hình vẽ, ta thấy diện tích của phần màu xanh lớn hơn phần màu tím, nghĩa là

$$\int_{-3}^1 [f'(x) - (x+1)] dx > \int_1^3 [(x+1) - f'(x)] dx > 0, \text{ hay } \int_{-3}^1 [f'(x) - (x+1)] dx + \int_1^3 [f'(x) - (x+1)] dx > 0, \text{ suy ra } \int_{-3}^3 [f'(x) - (x+1)] dx > 0. \text{ Từ đó}$$

$$g(3) - g(-3) = \int_{-3}^3 g'(x) dx = 2 \int_{-3}^3 [f'(x) - (x+1)] dx > 0. \text{ Vậy } g(1) > g(3) > g(-3).$$

Câu 17: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4}$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 3$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}.$

B. $\frac{125}{24}.$

C. $\frac{125}{48}.$

D. $\frac{253}{24}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4} = dx^2 + ex - \frac{3}{4} \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2} = 0.$$

$$\text{Đặt } h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2}$$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x = -2; x = 1; x = 3$.

$$\text{Với } x = -2 \text{ ta có } -8a + 4(b-d) - 2(c-e) = -\frac{3}{2}, \quad (1).$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ ta có } a + (b-d) + (c-e) = -\frac{3}{2}, \quad (2).$$

$$\text{Với } x = 3 \text{ ta có } 27a + 9(b-d) + 3(c-e) = -\frac{3}{2}, \quad (3).$$

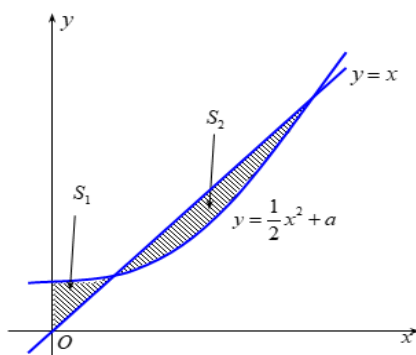
Từ (1), (2) và (3) ta có
$$\begin{cases} -8a + 4(b-d) - 2(c-e) = -\frac{3}{2} \\ a + (b-d) + (c-e) = -\frac{3}{2} \\ 27a + 9(b-d) + 3(c-e) = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b-d = -\frac{1}{2} \\ c-e = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Hay ta có

$$S = \int_{-2}^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^1 \left| \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \right| dx + \int_1^3 \left| \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \right| dx = \frac{63}{16} + \frac{4}{3} = \frac{253}{48}.$$

Câu 18: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho đường thẳng $y = x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $A_3(2; 0; 0)$. B. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$. C. $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$. D. $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{7}\right)$.



Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x$ và $y = \frac{1}{2}x^2 + a$:

$$x = \frac{1}{2}x^2 + a \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + a = 0 \text{ (có } \Delta = 1 - 2a)$$

Theo hình, ta có: $0 < a < \frac{1}{2}$.

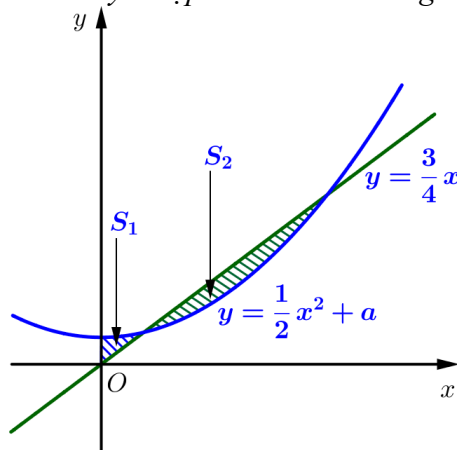
Gọi x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2$) là hai hoành độ giao điểm: $x_1 = 1 - \sqrt{1 - 2a}, x_2 = 1 + \sqrt{1 - 2a}$ (1).

Khi

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 &\Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - x \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(x - \frac{1}{2}x^2 - a \right) dx \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}x^3 + ax - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^{x_1} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - ax \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &\Leftrightarrow \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6} - ax_2 = 0 \Leftrightarrow 3x_2 - x_2^2 - 6a = 0. (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Leftrightarrow \sqrt{1 - 2a} = 4a - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{4} \\ 16a^2 - 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{8}.$$

Câu 19: (Vận dụng cao) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right)$.

B. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$.

C. $\left(0; \frac{3}{16}\right)$.

D. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x^2 + a \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0 (*)$$

Từ hình vẽ, ta thấy đồ thị hai hàm số trên cắt nhau tại hai điểm dương phân biệt. Do đó phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt.

$$(*) \text{ có hai nghiệm dương phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 32a > 0 \\ S = \frac{3}{2} > 0 \\ P = 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{9}{32}.$$

Khi đó (*) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - 32a}}{4}$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 32a}}{4}$, ($x_1 < x_2$)

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 - a\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{6} + ax - \frac{3x^2}{8}\right) \Big|_0^{x_1} = \left(\frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{6} - ax\right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^3}{6} + ax_1 - \frac{3x_1^2}{8} = \frac{3x_2^2}{8} - \frac{x_2^3}{6} - ax_2 - \left(\frac{3x_1^2}{8} - \frac{x_1^3}{6} - ax_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x_2^2}{8} - \frac{x_2^3}{6} - ax_2 = 0$$

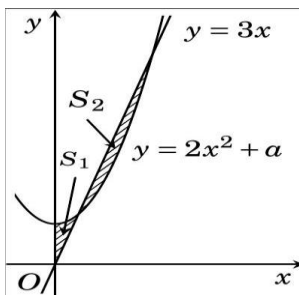
$$\Leftrightarrow -4x_2^2 + 9x_2 - 24a = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\left(\frac{3 + \sqrt{9 - 32a}}{4}\right)^2 + 9 \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 32a}}{4} - 24a = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{9 - 32a} = 64a - 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 64a - 9 > 0 \\ 9(9 - 32a) = (64a - 9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{9}{64} \\ 4096a^2 - 864a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{9}{64} \\ a = 0 \\ a = \frac{27}{128} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{27}{128}.$$

Câu 20: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $y = 2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right)$.

B. $\left(0; \frac{4}{5}\right)$.

C. $\left(1; \frac{9}{8}\right)$.

D. $\left(\frac{9}{10}; 1\right)$

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $2x^2 + a = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + a = 0$ (1)

Xét $\Delta = 9 - 8a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{9}{8}$ thì nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4} \quad (x_1 < x_2).$$

Từ hình vẽ ta có: $S_1 = \int_0^{x_1} (2x^2 - 3x + a) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax\right)\Big|_0^{x_1} = F(x)\Big|_0^{x_1} = F(x_1)$

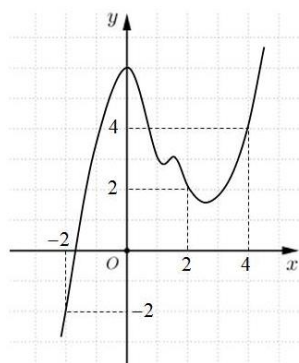
Và $S_2 = -\int_{x_1}^{x_2} (2x^2 - 3x + a) dx = -\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = -F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_1) - F(x_2)$.

Theo giả thiết $S_1 = S_2 \Leftrightarrow F(x_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + ax_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(2x_2^2 - \frac{9}{2}x_2 + 3a\right) = 0 \Leftrightarrow 3x_2 - a - \frac{9}{2}x_2 + 3a = 0 \Leftrightarrow -3x_2 + 4a = 0 \Leftrightarrow 4a = 3 \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{9 - 8a} = 16a - 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{16} < a < \frac{9}{8} \\ 256a^2 - 216a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{27}{32} \in \left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right).$$

Câu 21: (Vận dụng cao) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h(2) > h(4) > h(-2)$

B. $h(2) > h(-2) > h(4)$

C. $h(4) = h(-2) > h(2)$

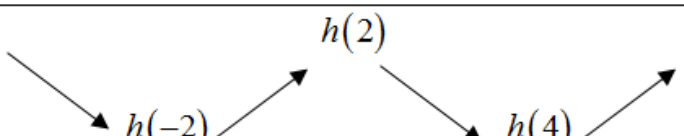
D. $h(4) = h(-2) < h(2)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $h'(x) = 2[f'(x) - x]$; $h'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-2; 2; 4\}$.

Bảng biến thiên

x	-2			2			4		
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+		
$h(x)$									

Suy ra $h(2) > h(4)$.

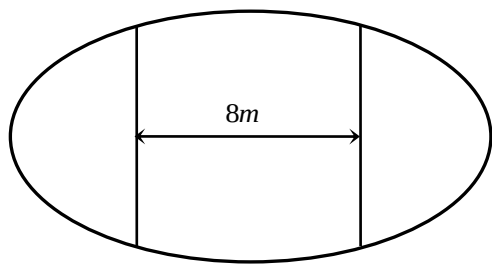
Kết hợp với BBT ta có

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 h'(x) dx &> \int_2^4 -h'(x) dx \Leftrightarrow \int_{-2}^2 h'(x) dx > \int_4^2 h'(x) dx \\ &\Leftrightarrow h(2) - h(-2) > h(2) - h(4) \Leftrightarrow h(4) > h(-2). \end{aligned}$$

Vậy ta có $h(2) > h(4) > h(-2)$.

63. Bài toán thực tế sử dụng diện tích hình phẳng

Câu 22: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)

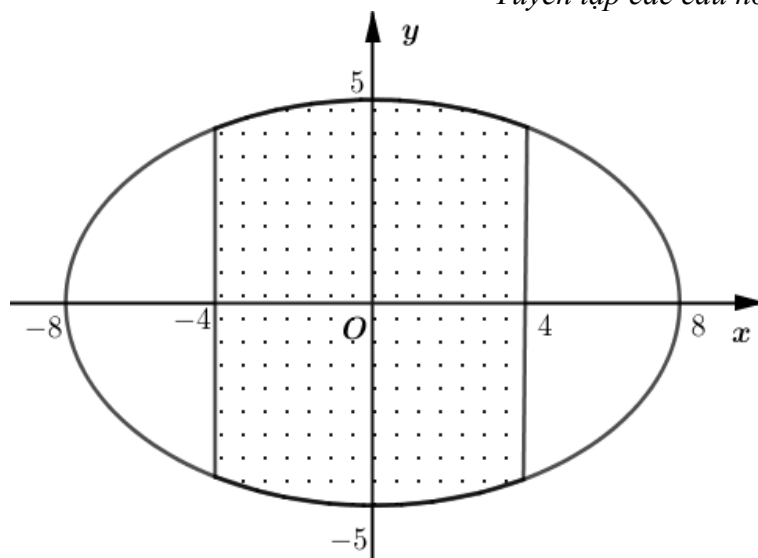


- A.** 7.862.000 đồng **B.** 7.653.000 đồng **C.** 7.128.000 đồng **D.** 7.826.000 đồng

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Từ giả thiết ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{8}\sqrt{64 - x^2} (E_1) \\ y = -\frac{5}{8}\sqrt{64 - x^2} (E_2) \end{cases}$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường $(E_1); (E_2); x = -4; x = 4$ và diện

tích của dải vườn là $S = 2 \int_{-4}^4 \frac{5}{8} \sqrt{64 - x^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^4 \sqrt{64 - x^2} dx$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x = 8 \sin t$, ta được $S = \frac{40\pi}{3} + 20\sqrt{3}$

Khi đó số tiền là $T = \left(\frac{40\pi}{3} + 20\sqrt{3} \right) \cdot 100000 = 7652891,82 \approx 7.653.000$.

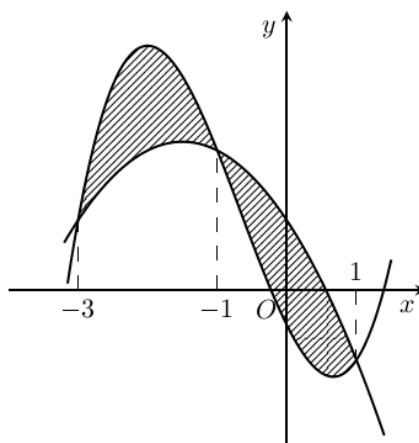
Câu 23: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. 8.

C. 4.

D. 5.



Lời giải

Chọn C

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-3}^{-1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-3}^{-1} \left[ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} \right] dx - \int_{-1}^1 \left[ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} \right] dx.$$

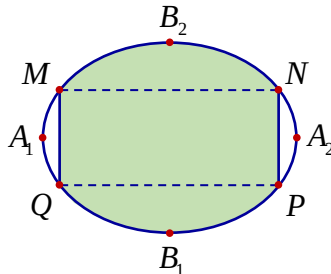
Trong đó phương trình $ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0$ (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Phương trình (*) có nghiệm $-3; -1; 1$ nên

$$\begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ a + (b-d) + (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) = \frac{3}{2} \\ -a + (b-d) - (c-e) = \frac{3}{2} \\ a + (b-d) + (c-e) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ (b-d) = \frac{3}{2} \\ (c-e) = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-3}^{-1} \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right] dx - \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right] dx = 2 - (-2) = 4.$$

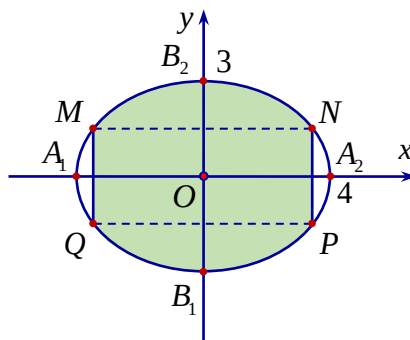
Câu 24: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/ m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{ m}$, $B_1B_2 = 6\text{ m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3\text{ m}$?



- A.** 7.322.000 đồng. **B.** 7.213.000 đồng. **C.** 5.526.000 đồng. **D.** 5.782.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Giả sử phương trình elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}.$

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}$.

Ta có: $MQ = 3 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases}$ với $d: y = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$ và $N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S = 4 \int_{2\sqrt{3}}^4 \left(\frac{3}{4} \sqrt{16-x^2}\right) dx = 4\pi - 6\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi + 6\sqrt{3}$.

Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là

$$T = 100.000 \times (4\pi - 6\sqrt{3}) + 200.000 \times (8\pi + 6\sqrt{3}) \approx 7.322.000 \text{ đồng.}$$

64. Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay)

Câu 25: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$, xung quanh trục Ox .

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ **B.** $V = \int_a^b f^2(x) dx$ **C.** $V = \pi \int_a^b f(x) dx$ **D.** $V = \int_a^b |f(x)| dx$

Lời giải

Chọn A

Câu 26: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức.

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **B.** $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. **D.** $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tính thể tích vật tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục hoành ta có

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Câu 27: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V = 4 - 2e$ **B.** $V = (4 - 2e)\pi$ **C.** $V = e^2 - 5$ **D.** $V = (e^2 - 5)\pi$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^1 [2(x-1)e^x]^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x-1)^2 e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = (x-1)^2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x-1) dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 2(x-1) \frac{e^{2x}}{2} dx = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx$$

$$\text{Gọi } I_1 = \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x-1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = 4\pi (x-1) \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - 4\pi \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = 2\pi - \pi e^{2x} \Big|_0^1 = 2\pi - \pi e^2 + \pi = 3\pi - \pi e^2$$

$$\text{Vậy } V = 4\pi (x-1)^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - I_1 = -2\pi - (3\pi - \pi e^2) = \pi(e^2 - 5)$$

Câu 28: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{4\pi}{3}$

B. $V = 2\pi$

C. $V = \frac{4}{3}$

D. $V = 2$

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1})^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}$$

Câu 29: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2\pi^2$

B. $V = 2\pi(\pi + 1)$

C. $V = 2\pi$

D. $V = 2(\pi + 1)$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình $\sqrt{2 + \sin x} = 0$ vô nghiệm nên:

$$V = \pi \int_0^\pi (\sqrt{2 + \sin x})^2 dx = \pi \int_0^\pi (2 + \sin x) dx = \pi(2x - \cos x) \Big|_0^\pi = 2\pi(\pi + 1).$$

Câu 30: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$

B. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx.$

C.

$V =$

$\int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$

D. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx.$

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là: $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$

Câu 31: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx.$

B. $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx.$

C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx.$

D. $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx.$

Câu 32: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = (\pi + 1)\pi$

B. $V = \pi - 1$

C. $V = \pi + 1$

D. $V = (\pi - 1)\pi$

Lời giải

Chọn A

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2 + \cos x})^2 dx = \pi (2x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi (\pi + 1).$$

Câu 33: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY .

A. $V = \frac{125(1+\sqrt{2})\pi}{6}.$

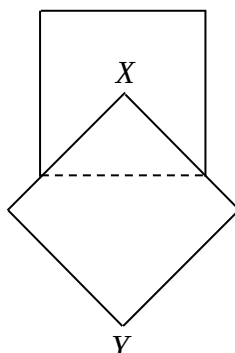
B. $V =$

$\frac{125(5+2\sqrt{2})\pi}{12}.$

C. $V = \frac{125(5+4\sqrt{2})\pi}{24}.$

D. $V =$

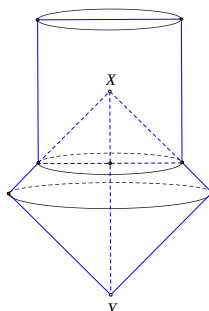
$\frac{125(2+\sqrt{2})\pi}{4}.$



Lời giải

Chọn C

□ **Cách 1 :**



Khối tròn xoay gồm 3 phần:

Phần 1: khối trụ có chiều cao bằng 5, bán kính đáy bằng $\frac{5}{2}$ có thể tích $V_1 = \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 5 = \frac{125\pi}{4}$

Phần 2: khối nón có chiều cao và bán kính đáy bằng $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ có thể tích

$$V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$$

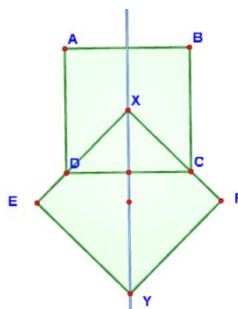
Phần 3: khối nón cụt có thể tích là

$$V_3 = \frac{1}{3} \pi \times \frac{5(\sqrt{2}-1)}{2} \times \left(\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5}{2} \right) = \frac{125(2\sqrt{2}-1)\pi}{24}$$

Vậy thể tích khối tròn xoay là

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{125\pi}{4} + \frac{125\pi\sqrt{2}}{12} + \frac{125(2\sqrt{2}-1)\pi}{24} = \frac{125(5+4\sqrt{2})\pi}{24}$$

Cách 2 :



Thể tích hình trụ được tạo thành từ hình vuông $ABCD$ là: $V_T = \pi R^2 h = \frac{125\pi}{4}$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ hình vuông $XEYF$ là: $V_{2N} = \frac{2}{3} \pi R^2 h = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ tam giác XDC là: $V_{N'} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi}{24}$

Thể tích cần tìm $V = V_T + V_{2N} - V_{N'} = 125\pi \frac{5+4\sqrt{2}}{24}$.

65. Thể tích tính theo mặt cắt $s(x)$

Câu 34: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

- A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$ B. $V = \frac{124\pi}{3}$
 C. $V = \frac{124}{3}$ D. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$

Lời giải

Chọn C

Diện tích thiết diện là: $S(x) = 3x \cdot \sqrt{3x^2 - 2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V = \int_1^3 3x \cdot \sqrt{3x^2 - 2} dx = \frac{124}{3}$

66. Toán thực tế

Câu 35: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 0,2m B. 2m C. 10m D. 20m

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10m.$$

Câu 36: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

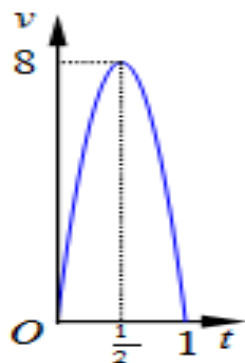
- A. $a + b = -2$ B. $a + 2b = 0$ C. $a + b = 2$ D. $a - 2b = 0$

Lời giải

Chọn B

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = [\ln|x+1| - \ln|x+2|]_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3; \text{ do đó } a = 2; b = -1$$

Câu 37: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



A. $s = 4$ (km)

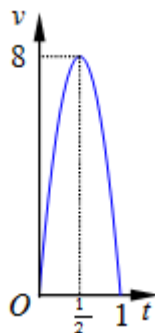
B. $s = 2,3$ (km)

C. $s = 4,5$ (km)

D. $s = 5,3$ (km)

Lời giải

Chọn C

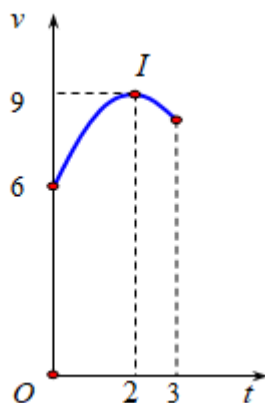


Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = -32x^2 + 32x$. Quãng đường người đó đi được là $s = \int_0^{\frac{3}{4}} (-32x^2 + 32x) dx = 4,5(\text{km})$

Câu 38: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. $s = 26,75(\text{km})$ B. $s = 25,25(\text{km})$ C. $s = 24,25(\text{km})$ D. $s = 24,75(\text{km})$

Lời giải

Chọn D

Tìm được phương trình của vận tốc là $v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$

$$\text{Vậy } S = \int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6\right) dt = 24,75$$

Câu 39: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. 15 (m/s). B. 9 (m/s). C. 42 (m/s). D. 25 (m/s).

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } v_B(t) = \int a \cdot dt = at + C, v_B(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v_B(t) = at.$$

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A = \int_0^{25} \left(\frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t\right) dt = \left(\frac{1}{300}t^3 + \frac{13}{60}t^2\right) \Bigg|_0^{25} = \frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

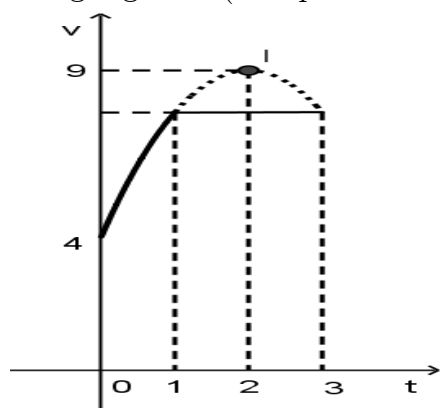
$$S_B = \int_0^{15} at \cdot dt = \frac{at^2}{2} \Bigg|_0^{15} = \frac{225a}{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{375}{2} = \frac{225a}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là } v_B(15) = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25 \text{ (m/s)}.$$

Câu 40: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một

đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- A. $s = 15,50(km)$ B. $s = 23,25(km)$
 C. $s = 13,83(km)$ D. $s = 21,58(km)$

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $v = \frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,583$

- Câu 41:** (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng.
- A. $20(m/s)$. B. $16(m/s)$. C. $13(m/s)$. D. $15(m/s)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

+) Từ đề bài, ta suy ra: tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 12 giây.

+) Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$, lại có $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

+) Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{15} \left(\frac{1}{150} t^2 + \frac{59}{75} t \right) dt = \int_0^{12} at dt \Leftrightarrow 96 = 72a \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(12) = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16(m/s)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.A	5.B	6.B	7.C	8.A	9.D	10.A
11.B	12.A	13.C	14.B	15.A	16.D	17.A	18	19.B	20.A
21.A	22.B	23.C	24.A	25.A	26.A	27.D	28.A	29.B	30.A
31.A	32.A	33.C	34.C	35.C	36.B	37.C	38.D	39.D	40.D
41.B									

67. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức

Câu 1: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$:

A. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$

B. Phần thực bằng -3

và Phần ảo bằng -2

C. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$ **D.** Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2

Lời giải

Chọn D

$z = 3 - 2i \Rightarrow \bar{z} = 3 + 2i$. Vậy phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2

Câu 2: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3 - 2\sqrt{2}i$. Tìm a, b .

A. $a = 3; b = 2$

B. $a = 3; b = 2\sqrt{2}$

C. $a = 3; b = \sqrt{2}$

D. $a = 3; b = -2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn D

Số phức $3 - 2\sqrt{2}i$ có phần thực là $a = 3$ và phần ảo là $b = -2\sqrt{2}$.

Câu 3: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho số phức $z = 2 + i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 3$

B. $|z| = 5$

C. $|z| = 2$

D. $|z| = \sqrt{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $|z| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$.

Câu 4: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

- A. 3. B. -7 . C. -3 . D. 7.

Lời giải

Chọn D

Câu 5: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

- A. $3 + 4i$. B. $4 - 3i$. C. $3 - 4i$. D. $4 + 3i$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 6: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng

- A. -5 . B. 5. C. -6 . D. 6.

Lời giải

Chọn B

Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng 5, phần ảo bằng 6.

Câu 7: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

- A. $-1 - 3i$. B. $1 - 3i$. C. $-1 + 3i$. D. $1 + 3i$.

Lời giải

Chọn D

Câu 8: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Số phức liên hợp của số phức $3 - 4i$ là.

- A. $-3 - 4i$. B. $-3 + 4i$. C. $3 + 4i$. D. $-4 + 3i$.

Lời giải

Chọn C

Theo tính chất $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

Theo đề bài $3 - 4i$, suy ra số phức liên hợp là $3 + 4i$.

Câu 9: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là

- A. $-5 + 3i$. B. $-3 + 5i$. C. $-5 - 3i$. D. $5 + 3i$.

Lời giải

Chọn D

Câu 10: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là

A. $-1 - 2i$.

B. $1 + 2i$.

C. $-2 + i$.

D. $-1 + 2i$.

Lời giải

Chọn B

Số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là $1 + 2i$

Câu 11: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Số phức liên hợp của số phức $3 - 2i$ là:

A. $-3 + 2i$.

B. $3 + 2i$.

C. $-3 - 2i$.

D. $-2 + 3i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z = 3 - 2i \Leftrightarrow \bar{z} = 3 + 2i$.

Câu 12: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Số phức nào dưới đây là số thuần ảo.

A. $z = -2 + 3i$

B. $z = 3i$

C. $z = \sqrt{3} + i$

D. $z = -2$

Lời giải

Chọn B

Số phức z được gọi là số thuần ảo nếu phần thực của nó bằng 0.

Câu 13: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (2 + i) = 2x - 3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x = -2; y = -2$.

B. $x = -2; y = -1$.

C. $x = 2; y = -2$.

D. $x = 2; y = -1$.

Lời giải:

Đáp án A

Ta có: $(3x + 2yi) + (2 + i) = 2x - 3i \Leftrightarrow x + 2 + (2y + 4)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Câu 14: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + yi) + (4 - 2i) = 5x + 2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x = -2; y = 4$.

B. $x = 2; y = 4$.

C. $x = -2; y = 0$.

D. $x = 2; y = 0$.

Lời giải

Chọn B

$$(3x + yi) + (4 - 2i) = 5x + 2i \Leftrightarrow 2x - 4 + (4 - y)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 4 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Câu 15: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng Oxy , điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có tọa độ là

A. $(4; -1)$.

B. $(-1; 4)$.

C. $(4; 1)$.

D. $(1; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3z_1 + z_2 = 3(1 - i) + 1 + 2i = 4 - i$.

Câu 16: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z} + i) - (2 - i)z = 3 + 10i$. Môđun của z bằng

- A. 3. B. 5. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Dùng máy tính cầm tay

$$az + b\bar{z} = c$$

$$\Rightarrow z = \frac{c \cdot \bar{a} - b\bar{c}}{|a|^2 - |b|^2}$$

$$3(\bar{z} + i) - (2 - i)z = 3 + 10i \Leftrightarrow -(2 - i)z + 3\bar{z} = 3 + 7i$$

$$z = 2 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$$

Cách 2: Gọi $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Từ đề bài, ta có phương trình: $\frac{49}{12}$

$$z = 2 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}.$$

Câu 17: (Vận dụng) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z} - i) - (2 + 3i)z = 7 - 16i$. Môđun của z bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. 5. C. $\sqrt{3}$. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

$$\text{Ta có } 3(\bar{z} - i) - (2 + 3i)z = 7 - 16i \Leftrightarrow 3(x - yi - i) - (2 + 3i)(x + yi) = 7 - 16i$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3yi - 3i - 2x - 2yi - 3xi + 3y = 7 - 16i \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 7 \\ -5y - 3 - 3x = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } z = 1 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}.$$

Câu 18: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z - 4(\bar{z} - i) = -8 + 19i$. Môđun của z bằng

- A. 13. B. 5. C. $\sqrt{13}$. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

$$(2 + i)z - 4(\bar{z} - i) = -8 + 19i \Leftrightarrow (2 + i)(a + bi) - 4(a - bi - i) = -8 + 19i$$

$$\Leftrightarrow (-2a - b) + (a + 6b + 4)i = -8 + 19i \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b = -8 \\ a + 6b + 4 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 3 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{13}.$$

Câu 19: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho số phức z thỏa mãn $(2 - i)z + 3 + 16i = 2(\bar{z} + i)$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{5}$.

B. 13 .

C. $\sqrt{13}$.

D. 5 .

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} (2-i)z + 3 + 16i &= 2(\bar{z} + i) \Leftrightarrow (2-i)(a+bi) + 3 + 16i = 2(a-bi+i) \\ \Leftrightarrow (2a+b+3) + (2b-a+16)i &= 2a + (2-2b)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+3=2a \\ 2b-a+16=2-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \\ \Rightarrow z &= 2-3i \Rightarrow |z| = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Câu 20: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z + \bar{z}| + 4$ và $|z - 1 - i| = |z - 3 + 3i|$?

A. 4 .

B. 3 .

C. 1 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z|^2 = 2|z + \bar{z}| + 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4|x| + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0, x \geq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0, x < 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$|z - 1 - i| = |z - 3 + 3i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow 4x = 8y + 16 \Leftrightarrow x = 2y + 4 \quad (3).$$

+ Thay (3) vào (1) ta được:

$$(2y+4)^2 + y^2 - 4(2y+4) - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{24}{5} \quad (n) \\ y = -2 \Rightarrow x = 0 \quad (n) \end{cases}$$

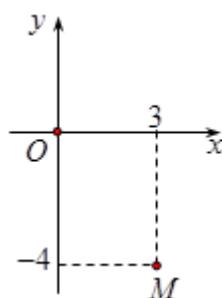
+ Thay (3) vào (2) ta được:

$$(2y+4)^2 + y^2 + 4(2y+4) - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 24y + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \Rightarrow x = 0 \quad (l) \\ y = -\frac{14}{5} \Rightarrow x = -\frac{8}{5} \quad (n) \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện.

Câu 21: Biểu diễn hình học cơ bản của số phức

Câu 22: (Nhận biết) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .



A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3

B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$

C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4

D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$

Lời giải

Chọn C

Nhắc lại: Trên mặt phẳng phức, số phức $z = x + yi$ được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$.

Điểm M trong hệ trục Oxy có hoành độ $x = 3$ và tung độ $y = -4$.

Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

Câu 23: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực a của z ?

A. $a = 2$

B. $a = 3$

C. $a = -2$

D. $a = -3$

Lời giải

Chọn A

Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực $a = 2$.

Câu 24: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = -2 - 5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 - z_2$.

A. $b = -2$

B. $b = 3$

C. $b = -3$

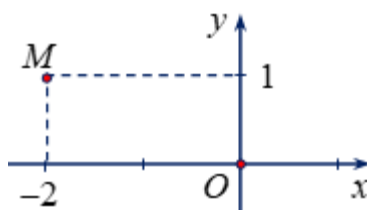
D. $b = 2$

Lời giải

Chọn D

Ta có $z = z_1 - z_2 = 3 + 2i \Rightarrow b = 2$

Câu 25: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Điểm 1 trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A. $z = -2 + i$.

B. $z = 1 - 2i$.

C. $\Delta OAB = \Delta OCB = \Delta OAC$.

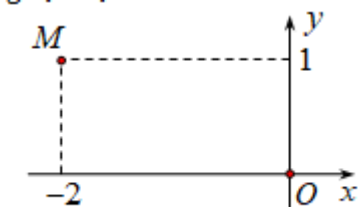
D. $z = 1 + 2i$.

Lời giải

Chọn A

Điểm $M(-2; 1)$ biểu diễn số phức $z = -2 + i$.

Câu 26: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên.



- A. $z_1 = 1 - 2i$ B. $z_1 = 1 + 2i$ C. $z_1 = -2 + i$ D. $z_1 = 2 + i$

Lời giải

Chọn C

Điểm $M(-2; 1)$ là điểm biểu diễn số phức $z_1 = -2 + i$

Câu 27: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy điểm biểu diễn của số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là

- A. $(2; 5)$. B. $(3; 5)$. C. $(5; 2)$. D. $(5; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z_1 + 2z_2 = 1 + i + 2(2 + i) = 5 + 3i$

Điểm biểu diễn của số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là $(5; 3)$.

Câu 28: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn của số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

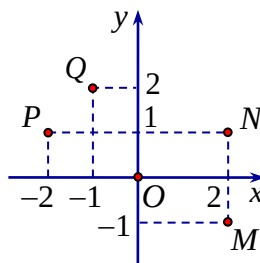
- A. $(5; -1)$. B. $(-1; 5)$. C. $(5; 0)$. D. $(0; 5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left. \begin{matrix} 2z_1 = 4 - 2i \\ z_2 = 1 + i \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2z_1 + z_2 = 5 - i$, số phức này điểm biểu diễn có tọa độ là $(5; -1)$.

Câu 29: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Điểm nào trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?



- A. N. B. P. C. M. D. Q.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn là điểm $Q(-1; 2)$.

Câu 30: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ

- A. $N(2; 1)$ B. $P(-2; 1)$ C. $M(1; -2)$ D. $Q(1; 2)$

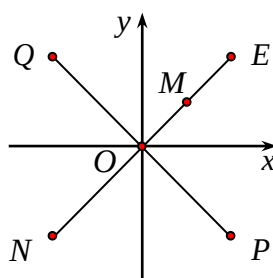
Lời giải

Chọn A

$$w = iz = i(1 - 2i) = 2 + i$$

Câu 31: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z (như hình vẽ bên). Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?

- A. Điểm N B. Điểm Q C. Điểm E D. Điểm P



Lời giải

Chọn C

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Điểm biểu diễn của z là điểm $M(a; b)$

$\Rightarrow 2z = 2a + 2bi$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng Oxy là $M_1(2a; 2b)$.

Ta có $\overrightarrow{OM_1} = 2\overrightarrow{OM}$ suy ra $M_1 \equiv E$.

Câu 32: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2 - 1 + yi = -1 + 2i$.

- A. $x = \sqrt{2}, y = 2$ B. $x = -\sqrt{2}, y = 2$ C. $x = 0, y = 2$ D. $x = \sqrt{2}, y = -2$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Từ } x^2 - 1 + yi = -1 + 2i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Câu 33: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hai số phức $z_1 = -2 + i$ và $z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

- A. $(3; -3)$. B. $(2; -3)$. C. $(-3; 3)$. D. $(-3; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$2z_1 + z_2 = 2(-2 + i) + 1 + i = -3 + 3i.$$

Vậy điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là $(-3; 3)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.D	4.D	5.A	6.B	7.D	8.C	9.D	10.B
11.B	12.B	13.A	14.B	15.A	16.C	17.A	18.C	19.C	20.B
21.C	22.A	23.D	24.A	25.C	26.D	27.A	28.D	29.A	30.C
31.C	32.C								

69. Thực hiện phép tính cộng, trừ, nhân số phức

Câu 1: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$

- A. $w = 7 - 3i$. B. $w = -3 - 3i$. C. $w = 3 + 7i$. D. $w = -7 - 7i$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } w = iz + \bar{z} = i(2 + 5i) + (2 - 5i) = 2i - 5 + 2 - 5i = -3 - 3i$$

Câu 2: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

- A. $z = 3 + 6i$ B. $z = 11$ C. $z = -1 - 10i$ D. $z = -3 - 6i$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } z = z_1 - z_2 = (4 - 3i) - (7 + 3i) = -3 - 6i.$$

Câu 3: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho 2 số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

- A. $z = 7 - 4i$ B. $z = 2 + 5i$ C. $z = 3 - 10i$ D. 14

Lời giải

Chọn A

$$z = 5 - 7i + 2 + 3i = 7 - 4i.$$

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

- A. $M_1\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $M_2\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. C. $M_3\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. D. $M_4\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$ có $\Delta' = 64 - 4 \cdot 17 = -4 = (2i)^2$.

Phương trình có hai nghiệm $z_1 = \frac{8-2i}{4} = 2 - \frac{1}{2}i, z_2 = \frac{8+2i}{4} = 2 + \frac{1}{2}i$.

Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0 = 2 + \frac{1}{2}i$.

Ta có $w = iz_0 = -\frac{1}{2} + 2i$.

Vậy điểm biểu diễn $w = iz_0$ là $M_2\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 5: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

- A. $\bar{z} = 3 - i$. B. $\bar{z} = -3 + i$. C. $\bar{z} = 3 + i$. D. $\bar{z} = -3 - i$.

Lời giải

Chọn D

$z = i(3i + 1) = -3 + i$ nên suy ra $\bar{z} = -3 - i$.

Câu 6: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 3 - 2i$.

- A. $z = 1 - 5i$. B. $z = 1 + i$. C. $z = 5 - 5i$. D. $z = 1 - i$.

Lời giải

Chọn B

$z + 2 - 3i = 3 - 2i \Leftrightarrow z = 3 - 2i - 2 + 3i = 1 + i$.

70. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán

Câu 7: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. 6

Lời giải

Chọn B

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 z_2 = 6 \end{cases}$ nên $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{1}{6}$

Câu 8: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

- A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. B. $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. C. $|z_1 + z_2| = 1$. D. $|z_1 + z_2| = 5$.

Lời giải

Chọn A

$$z_1 + z_2 = 1 + i + (2 - 3i) = 3 - 2i \text{ nên ta có: } |z_1 + z_2| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Câu 9: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Tính môđun của số phức z biết $\bar{z} = (4 - 3i)(1 + i)$.

- A. $|z| = 25\sqrt{2}$ B. $|z| = 7\sqrt{2}$ C. $|z| = 5\sqrt{2}$ D. $|z| = \sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C

$$\bar{z} = (4 - 3i)(1 + i) = 7 + i \Rightarrow z = 7 - i \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$$

Câu 10: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$.

- A. $|z| = \sqrt{34}$ B. $|z| = 34$ C. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$ D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$

Lời giải

Chọn A

$$z(2 - i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1 - 13i}{2 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(1 - 13i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \Leftrightarrow z = 3 - 5i. |z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}.$$

Câu 11: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = \frac{1}{2}$ B. $P = 1$ C. $P = -1$ D. $P = -\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn C

$$(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i. (1). \text{ Ta có: } z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi.$$

$$\text{Thay vào (1) ta được } (1 + i)(a + bi) + 2(a - bi) = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow (a - b)i + (3a - b) = 3 + 2i \Leftrightarrow (a - b)i + (3a - b) = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ 3a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P = -1.$$

Câu 12: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $N(4; -3)$ B. $M(2; -5)$ C. $P(-2; -1)$ D. $Q(-1; 7)$

Lời giải

Chọn C

$$z = z_1 + z_2 = -2 - i.$$

Câu 13: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho số phức $z = 1 - i + i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .

- A.** $a = 1, b = -2$ **B.** $a = -2, b = 1$ **C.** $a = 1, b = 0$ **D.** $a = 0, b = 1$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z = 1 - i + i^3 = 1 - i + i^2 \cdot i = 1 - i - i = 1 - 2i$ (vì $i^2 = -1$)

Suy ra phần thực của z là $a = 1$, phần ảo của z là $b = -2$.

Câu 14: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i$ với i là đơn vị ảo.

- A.** $x = -1; y = -3$. **B.** $x = -1; y = -1$. **C.** $x = 1; y = -1$. **D.** $x = 1; y = -3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i$

$$\Leftrightarrow x + 1 - (3y + 9)i = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 3y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Câu 15: (Thông hiểu) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a + (b + i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

- A.** $a = 0, b = 2$. **B.** $a = \frac{1}{2}, b = 1$. **C.** $a = 0, b = 1$. **D.** $a = 1, b = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 2a + (b + i)i = 1 + 2i \Leftrightarrow (2a - 1) + bi = 1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Câu 16: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z - i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

- A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

$$\text{Giả sử } z = a + bi \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

Vì $|z - i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + (b - 1)^2 = 25 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b^2 + (b - 1)^2 = 25 \\ a = -b \\ b^2 + (b - 1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 4 \\ a = b = -3 \\ b = -a = 4 \\ b = -a = -3 \end{cases}$$

Câu 17: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

A. $S = 5$

B. $S = \frac{7}{3}$

C. $S = -5$

D. $S = -\frac{7}{3}$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } z + 1 + 3i - |z|i = 0 &\Leftrightarrow a + bi + 1 + 3i - \sqrt{a^2 + b^2}i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \\ \Rightarrow S = a + 3b = -5. \end{aligned}$$

Câu 18: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 3 - i) + 2i = (4 - i)z$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } |z|(z - 3 - i) + 2i = (4 - i)z \Leftrightarrow z(5 - |z| - i) = -4|z| + (2 - |z|)i.$$

Đặt $|z| = t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Lấy môđun hai vế ta được:

$$\begin{aligned} t|5 - t - i| &= |-4t + (2 - t)i| \Leftrightarrow t\sqrt{(5 - t)^2 + 1} = \sqrt{16t^2 + (2 - t)^2} \\ \Leftrightarrow t^4 - 10t^3 + 9t^2 + 4t - 4 &= 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^3 - 9t^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t \approx 8,95 \\ t \approx 0,69 \\ t \approx -0,64 \end{cases} \end{aligned}$$

Do $t \geq 0$ nên t có 3 giá trị thỏa mãn.

Ứng với mỗi $t \geq 0$ ta được $z = \frac{-4t + (2 - t)i}{5 - t - i}$ nên có duy nhất 1 số phức thỏa mãn.

Vậy có ba số phức thỏa mãn.

Câu 19: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $|z| = a \geq 0, a \in \mathbb{R}$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} |z|(z - 6 - i) + 2i &= (7 - i)z \Leftrightarrow a(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z \Leftrightarrow (a - 7 + i)z = 6a + ai - 2i \\ &\Leftrightarrow (a - 7 + i)z = 6a + (a - 2)i \Leftrightarrow |(a - 7 + i)||z| = |6a + (a - 2)i| \\ &\Leftrightarrow [(a - 7)^2 + 1]a^2 = 36a^2 + (a - 2)^2 \Leftrightarrow a^4 - 14a^3 + 13a^2 + 4a - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 1)(a^3 - 13a^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a^3 - 13a^2 + 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(a) = a^3 - 13a^2 + 4$ ($a \geq 0$), có bảng biến thiên là

a	0	$\frac{26}{3}$	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
f	0	$-\frac{8788}{27}$	$+\infty$

Đường thẳng $y = -4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3 - 12a^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1) \neq 0$). Thay giá trị môđun của z vào kiểm tra đều được kết quả đúng.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

71. Bài toán quy về giải phương trình, hệ phương trình nghiệm thực

Câu 20: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x = -1; y = -1$. **B.** $x = -1; y = 1$. **C.** $x = 1; y = -1$. **D.** $x = 1; y = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i \Leftrightarrow (2x + 3) - (3y + 1)i = 5x - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 5x \\ 3y + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Câu 21: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Xét số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. **B.** $|z| > 2$. **C.** $|z| < \frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}.$$

$$\text{Vậy } (1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow (|z| + 2) + (2|z| - 1)i = \left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right) \cdot \bar{z} \Rightarrow |(|z| + 2) + (2|z| - 1)i| = \left|\left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right) \cdot \bar{z}\right|$$

$$\Rightarrow (|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2 = \left(\frac{10}{|z|^4}\right) \cdot |z|^2 = \frac{10}{|z|^2}. \text{ Đặt } |z| = a > 0.$$

$$\Rightarrow (a + 2)^2 + (2a - 1)^2 = \left(\frac{10}{a^2}\right) \Leftrightarrow a^4 + a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Câu 22: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

A. $w = -3 + 8i$. **B.** $w = 1 + 3i$. **C.** $w = -1 + 7i$. **D.** $w = -4 + 8i$.

Lời giải

Chọn D

$z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ và } (x + 3)^2 + y^2 = (x + 3)^2 + (y - 10)^2.$$

Giải hệ phương trình trên ta được $x = 0; y = 5$. Vậy $z = 5i$. Từ đó ta có $w = -4 + 8i$.

Câu 23: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i = |z|$. Tính $S = 4a + b$.

A. $S = 4$

B. $S = 2$

C. $S = -2$

D. $S = -4$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } z + 2 + i = |z| &\Leftrightarrow (a + 2) + (b + 1)i = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = \sqrt{a^2 + b^2}, a \geq -2 \\ b + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ (a + 2)^2 = a^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow S = 4a + b = -4. \end{aligned}$$

Câu 24: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo.

A. 0

B. 2

C. 4

D. 3

Lời giải

Chọn D

Gọi số phức $z = x + yi$ với $(x, y \in \mathbb{R})$, vì $(z - 1)^2 = (x - 1)^2 - y^2 + 2(x - 1)yi$ là số thuần ảo nên theo đề bài ta có HPT $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 8 \\ (x - 1)^2 = y^2 \end{cases}$

Với $y = x - 1$, thay vào phương trình đầu, ta được

$$(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Với $x = 3\sqrt{2}$, thay vào phương trình đầu, ra được

$$(x + 2)^2 + (-x)^2 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Câu 25: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z \Leftrightarrow z(|z| - 5 + i) = 4|z| + (|z| - 2)i.$$

Lấy môđun 2 vế phương trình trên ta được

$$|z|\sqrt{(|z| - 5)^2 + 1} = \sqrt{(4|z|)^2 + (|z| - 2)^2}.$$

Đặt $t = |z|$, $t \geq 0$ ta được

$$t\sqrt{(t-5)^2+1} = \sqrt{(4t)^2+(t-2)^2} \Leftrightarrow (t-1)(t^3-9t^2+4) = 0.$$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $t \geq 0$ vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Câu 26: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn

$$|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z?$$

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } |z|(z-5-i)+2i=(6-i)z \Leftrightarrow (|z|-6+i)z=5|z|+(|z|-2)i \quad (1)$$

Lấy môđun hai vế của (1) ta có:

$$\sqrt{(|z|-6)^2+1} \cdot |z| = \sqrt{25|z|^2+(|z|-2)^2}$$

Bình phương và rút gọn ta được:

$$|z|^4-12|z|^3+11|z|^2+4|z|-4=0 \Leftrightarrow (|z|-1)(|z|^3-11|z|^2+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|=1 \\ |z|^3-11|z|^2+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|=1 \\ |z|=10,9667... \\ |z|=0,62... \\ |z|=-0,587... \end{cases}$$

Do $|z| \geq 0$, nên ta có $|z|=1$, $|z|=10,9667...$, $|z|=0,62...$. Thay vào (1) ta có 3 số phức thỏa mãn đề bài.

72. Bài toán tập hợp điểm số phức

Câu 27: (Vận dụng) (Đề Minh Họa 2017) Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

- A. $r=4$ B. $r=5$ C. $r=20$ D. $r=22$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Giả sử } z=a+bi; w=x+yi; (a,b,x,y \in \mathbb{R})$$

$$\text{Theo đề } w=(3+4i)z+i \Rightarrow x+yi=(3+4i)(a+bi)+i$$

$$\Leftrightarrow x+yi=(3a-4b)+(3b+4a+1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-4b \\ y=3b+4a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-4b \\ y-1=3b+4a \end{cases} \quad \text{Ta có}$$

$$x^2+(y-1)^2=(3a-4b)^2+(4a+3b)^2=25a^2+25b^2=25(a^2+b^2)$$

$$\text{Mà } |z|=4 \Leftrightarrow a^2+b^2=16. \text{ Vậy } x^2+(y-1)^2=25.16=400$$

$$\text{Bán kính đường tròn là } r=\sqrt{400}=20.$$

Câu 28: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Xét các điểm số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. 1. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có: $(\bar{z} + i)(z + 2) = (a - bi + i)(a + bi + 2) = (a^2 + 2a + b^2 - b) + (a - 2b + 2)i$

Vì $(\bar{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo nên ta có: $a^2 + 2a + b^2 - b = 0 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 29: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 3i)(z - 3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. 3. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

Ta có: $(\bar{z} + 3i)(z - 3) = x^2 + y^2 - 3x - 3y + (3x + 3y - 9)i$.

Để $(\bar{z} + 3i)(z - 3)$ là số thuần ảo thì $x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện trên là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 30: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 2i)(z - 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. 4. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Vì $(\bar{z} + 2i)(z - 2) = [x + (2 - y)i][x - 2 + yi] = [x(x - 2) - y(2 - y)] + [xy + (x - 2)(2 - y)]i$

là số thuần ảo nên có phần thực bằng không do đó $x(x - 2) - y(2 - y) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 +$

$(y - 1)^2 = 2$. Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 31: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng?

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

Ta có: $(\bar{z} - 2i)(z + 2) = (a - bi - 2i)(a + bi + 2) = a^2 + 2a + b^2 + 2b - 2(a + b + 2)i$

Vì $(\bar{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo nên ta có $a^2 + 2a + b^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = 2$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 32: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $(z + 2i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

- A. $(1; -1)$. B. $(1; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Điểm biểu diễn cho z là $M(x; y)$.

Ta có: $(z + 2i)(\bar{z} + 2) = (x + yi + 2i)(x - yi + 2)$

$= x(x + 2) + y(y + 2) + i[(x - 2)(y + 2) - xy]$ là số thuần ảo

$$\Leftrightarrow x(x + 2) + y(y + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2.$$

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có tâm $I(-1; -1)$.

Câu 33: (Vận dụng cao) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- A. $2\sqrt{3}$ B. 12 C. 20 D. $2\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $w = \frac{3+iz}{1+z} \Leftrightarrow w(1+z) = 3+iz \Leftrightarrow w - 3 = (i-w)z \Leftrightarrow z = \frac{w-3}{i-w}$ (do $w = i$ không thỏa mãn)

Thay $z = \frac{w-3}{i-w}$ vào $|z| = \sqrt{2}$ ta được:

$$\left| \frac{w-3}{i-w} \right| = 2 \Leftrightarrow |w-3| = 2|i-w| (*). \text{ Đặt } w = x + yi, \text{ ta được:}$$

$$(*) \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 2[x^2 + (1-y)^2] \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0. \text{ Đây là đường tròn có}$$

Tâm là $I(-3; 2)$, bán kính $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Câu 34: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{5+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 52.

B. $2\sqrt{13}$.

C. $2\sqrt{11}$.

D. 44.

Lời giải

Chọn B

Gọi $w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } w = \frac{5+iz}{1+z} \Leftrightarrow z = \frac{5-w}{w-i}$$

$$\text{nên: } |z| = \left| \frac{5-w}{w-i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |5-w| = \sqrt{2}|w-i| \Leftrightarrow (5-x)^2 + y^2 = 2[x^2 + (y-1)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10x - 4y - 23 = 0$$

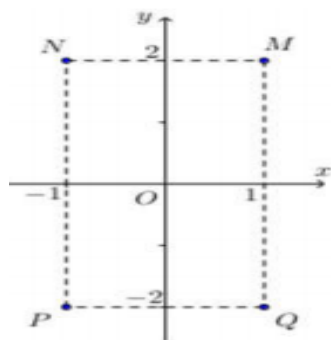
Vậy bán kính đường tròn biểu diễn cho w là: $r = \sqrt{25 + 4 + 23} = 2\sqrt{13}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.A	4.B	5.D	6.B	7.B	8.A	9.C	10.A
11.C	12.C	13.A	14.A	15.D	16.C	17.C	18.B	19.B	20.D
21.D	22.D	23.D	24.D	25.B	26.B	27.C	28.C	29.D	30.D
31.B	32.D	33.D	34.B						

73. Phép chia số phức

Câu 1: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 3-i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên?



A. Điểm P

B. Điểm Q

C. Điểm M

D. Điểm N

Lời giải

Chọn B

$$(1+i)z = 3-i \Leftrightarrow z = \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i. \text{ Vậy điểm biểu diễn của } z \text{ là } Q(1; -2).$$

Câu 2: **(Vận dụng cao) (Đề THPTQG 2017 Mã 123)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B. 2** **C. Vô số** **D. 1**

Lời giải

Chọn D

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Điều kiện $z \neq 4$

$$|z - 3i| = 5 \Leftrightarrow |x + (y - 3)i| = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6y = 16 \quad (1)$$

$$\text{Do } \frac{z}{z-4} = \frac{x+yi}{(x-4)+yi} \text{ là số thuần ảo nên phần thực } \frac{x(x-4)+y^2}{(x-4)^2+y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4x - 6y = 16 \Rightarrow x = 4 + \frac{3}{2}y$, thay vào (1) ta được:

$$\left(4 + \frac{3}{2}y\right)^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = -\frac{24}{13}$$

Với $y = 0$ ta được $x = 4$, suy ra $z = 4$ (loại)

Với $y = -\frac{24}{13}$ ta được $x = \frac{16}{13}$ và $z = \frac{16}{13} - \frac{24}{13}i$ (thỏa mãn)

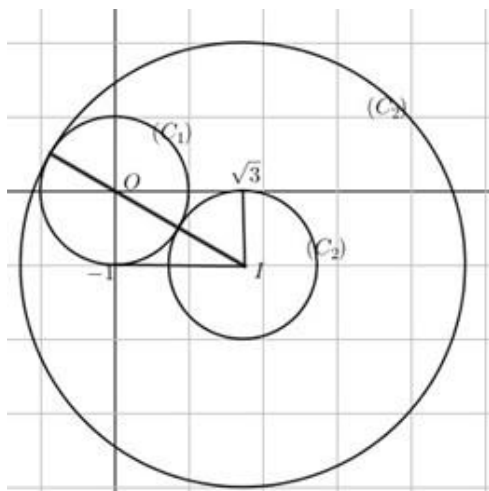
Vậy có một số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z = \frac{16}{13} - \frac{24}{13}i$

Câu 3: **(Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z \cdot \bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S .

A. 2. **B. 4.** **C. 1.** **D. 3.**

Lời giải

Chọn A



$$\text{Gọi } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}), \text{ ta có hệ } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \quad (1) \\ (x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 = m^2 \quad (m \geq 0) \end{cases}$$

Ta thấy $m = 0 \Rightarrow z = \sqrt{3} - i$ không thỏa mãn $z \cdot \bar{z} = 1$ suy ra $m > 0$.

Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn (1) là đường tròn (C_1) có

$O(0; 0), R_1 = 1$, tập hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm $I(\sqrt{3}; -1), R_2 = m$,

ta thấy $OI = 2 > R_1$ suy ra I nằm ngoài (C_1) .

Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với $(C_1), (C_2)$

tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều này xảy ra khi $OI = R_1 + R_2 \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$

hoặc $R_2 = R_1 + OI \Leftrightarrow m = 1 + 2 = 3$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.A							
-----	-----	-----	--	--	--	--	--	--	--

74. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. 3.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 4z^2 - 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } |z_1| + |z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

Câu 2: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Kí hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1z_2$.

A. $P = 1$

B. $P = 2$

C. $P = -1$

D. $P = 0$

Lời giải

Chọn D

Cách 1

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$$

Cách 2: Theo định lý Vi-et: $z_1 + z_2 = -1$; $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Khi đó $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 + z_1 z_2 = 1^2 - 1 = 0$.

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.

- A.** $T = \sqrt{2}$ **B.** $T = 2$ **C.** $T = 8$ **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2i \\ z_2 = 2i \end{cases}$

Suy ra $M(0; -2); N(0; 2)$ nên $T = OM + ON = \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{2^2} = 4$.

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

- A.** $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$ **B.** $P = \frac{2}{3}$ **C.** $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$ có $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -11 < 0$. Căn bậc hai của Δ là $\pm i\sqrt{11}$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phức phân biệt

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{11}}{6} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i; \quad z_2 = \frac{1-i\sqrt{11}}{6} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i$$

Từ đó suy ra:

$$P = |z_1| + |z_2| = \left|\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i\right| + \left|\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Cách khác: Sử dụng máy tính Casio FX 570ES Plus hỗ trợ tìm nghiệm phương trình bậc 2 sau đó vào môi trường số phức (Mode 2 CMPLX) tính tổng môđun của 2 nghiệm vừa tìm được.

Câu 5: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A.** 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$ có hai nghiệm phức $z_1 = 3 + i$ và $z_2 = 3 - i$.

Khi đó: $z_1^2 + z_2^2 = (3 + i)^2 + (3 - i)^2 = 16$.

Mã 001

Câu 6: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A. $12\sqrt{2}\pi$. B. 8. C. 28. D. $\int_0^1 xf(5x)dx = 1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có: $z^2 - 6z + 14 = 0$ có 2 nghiệm $z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}i$

Do đó $z_1^2 + z_2^2 = (3 - \sqrt{5}i)^2 + (3 + \sqrt{5}i)^2 = 8$.

Cách 2: Áp dụng định lý Vi ét ta có $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = 6^2 - 2.14 = 8$.

Câu 7: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 16. D. 26.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{cases}$

Do đó $z_1^2 + z_2^2 = (2 + i)^2 + (2 - i)^2 = 6$.

Câu 8: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A. 10. B. 8. C. 16. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$ có hai nghiệm phức là $z_1 = 2 + \sqrt{3}i, z_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

Vậy $z_1^2 + z_2^2 = (2 + \sqrt{3}i)^2 + (2 - \sqrt{3}i)^2 = 2$.

Câu 9: (Thông hiểu) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. $2\sqrt{5}$. B. $\sqrt{5}$. C. 3. D. 10.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có : } z^2 - 3z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{3+\sqrt{11}i}{2} \\ z_2 = \frac{3-\sqrt{11}i}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra } |z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{5}.$$

Câu 10: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1 + \sqrt{2}i$ và $1 - \sqrt{2}i$ là nghiệm.

A. $z^2 - 2z - 3 = 0$ **B.** $z^2 + 2z + 3 = 0$ **C.** $z^2 - 2z + 3 = 0$ **D.** $z^2 + 2z - 3 = 0$

Lời giải

Chọn C

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 \cdot z_2 = 3 \end{cases}$, do đó z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$

75. Phương trình quy về bậc hai

Câu 11: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

A. $T = 4$ **B.** $T = 2\sqrt{3}$ **C.** $T = 4 + 2\sqrt{3}$ **D.** $T = 2 + 2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C

$$z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -3 \\ z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm i\sqrt{3} \\ z = \pm 2 \end{cases}$$

$$T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = |i\sqrt{3}| + |i\sqrt{3}| + |-2| + |2| = 2\sqrt{3} + 4$$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.D	4.D	5.A	6.B	7.A	8.D	9.A	10.C
11.C									

76. Phương pháp hình học

Câu 1: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD 2017) Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất cả giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$ **B.** $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$ **C.** $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$ **D.** $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$

Lời giải

Chọn B

Gọi A là điểm biểu diễn số phức z , $F_1(-2;1)$, $F_2(4;7)$ và $N(1;-1)$.

Từ $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $F_1F_2=6\sqrt{2}$ nên ta có A là đoạn thẳng F_1F_2 . Gọi H là hình chiếu của N lên F_1F_2 , ta có $H\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Suy ra $P=NH+NF_2=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

77. Phương pháp đại số

Câu 2: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.

A. $P = -1$.

B. $P = -5$.

C. $P = 3$.

D. $P = 7$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0 &\Leftrightarrow (a + 2) + (b + 1)i = |z| + i|z| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = |z| \\ b + 1 = |z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1) \\ b + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được $a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = a + 1$. Thay vào (1) ta được

$$a + 2 = \sqrt{a^2 + (a + 1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 > 1 \text{ (do } |z| > 1) \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3. \text{ Suy ra } b = 4.$$

Do đó $z = 3 + 4i$ có $|z| = 5 > 1$ (thỏa điều kiện $|z| > 1$).

Vậy $P = a + b = 3 + 4 = 7$.

Câu 3: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 8a + 6b - 20$

Đặt $A = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2} \\ A^2 &\leq (1^2 + 1^2)((a + 1)^2 + (b - 3)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2) = 2(2(a^2 + b^2) - 4b + 12) \\ &= 2(16a + 8b - 28) = 8(4a + 2b - 7) \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác ta có:

$$4a + 2b - 7 = 4(a - 4) + 2(b - 3) + 15 \leq \sqrt{(4^2 + 2^2)((a - 4)^2 + (b - 3)^2)} + 15 = 25 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $A^2 \leq 200$

$$\text{Để } A_{\max} = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b - 7 = 25 \\ \frac{a-4}{4} = \frac{b-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy $P = a + b = 10$.

Câu 4: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 10.

B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } w = \frac{2+iz}{1+z} \Leftrightarrow z = \frac{2-w}{w-i}$$

$$\text{nên: } |z| = \left| \frac{2-w}{w-i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |2-w| = \sqrt{2}|w-i| \Leftrightarrow (2-x)^2 + y^2 = 2[x^2 + (y-1)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính: $r = \sqrt{4+4+2} = \sqrt{10}$.

Cách 2:

$$\begin{aligned} w &= \frac{2+iz}{1+z} = \frac{(2+iz)(z-1)}{z^2-1} = (2-i)z + 2i - 2 \\ \Rightarrow z &= \frac{w+2-2i}{2-i} \Rightarrow |z| = \frac{|w+2-2i|}{|2-i|} \Leftrightarrow |w+2-2i| = \sqrt{10} \end{aligned}$$

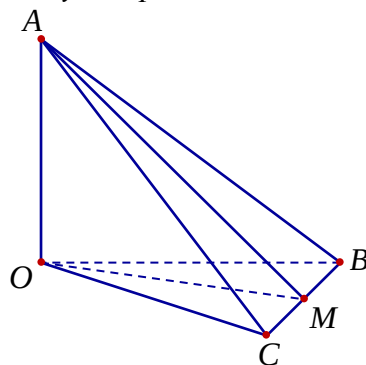
Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính: $r = \sqrt{10}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.A	4.D						
-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--	--

78. Xác định góc giữa hai đường thẳng (dùng định nghĩa)

Câu 1: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



A. $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$. B. 30° .

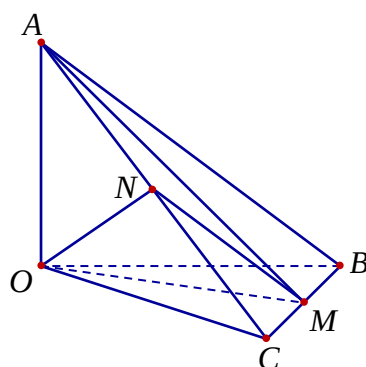
C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Gọi N là trung điểm của AC , ta có $MN \parallel AB \Rightarrow (OM; AB) = (OM; MN) = \widehat{OMN}$.

Do $\Delta OAB = \Delta OCB = \Delta OAC$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau nên $OM = ON = MN = \frac{AB}{2} \Rightarrow (OM; AB) = \widehat{OMN} = 60^\circ$.

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{OA}^2 = a^2, \overrightarrow{OB}^2 = b^2, \overrightarrow{OC}^2 = c^2, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, |\overrightarrow{AB}| = a\sqrt{2}, |\overrightarrow{OM}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(OM; AB) = |\cos(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{AB})| = \frac{|\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (OM; AB) = 60^\circ.$$

79. Xác định góc giữa mặt phẳng và đường thẳng

Câu 2: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SD . Tang của góc giữa đường thẳng BM và

mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

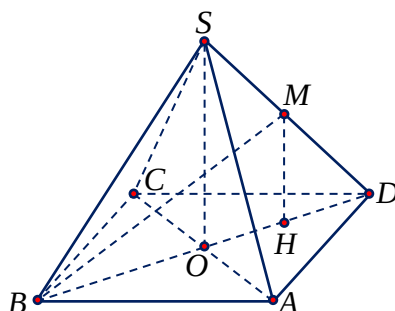
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $(ABCD)$ và $O = AC \cap BD$.

Ta có MH song song với SO và $MH = \frac{1}{2}SO$.

BM có hình chiếu vuông góc trên $(ABCD)$ là BH

Do đó góc giữa BM và $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{2}}{4}; BH = \frac{3}{4}BD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Trong tam giác MBH vuông tại H nên có: $\tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}$.

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 60° .

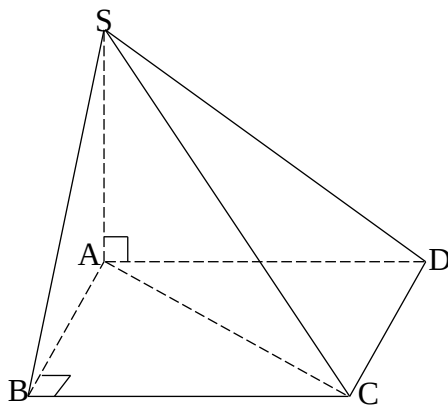
B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc giữa SB và AB .

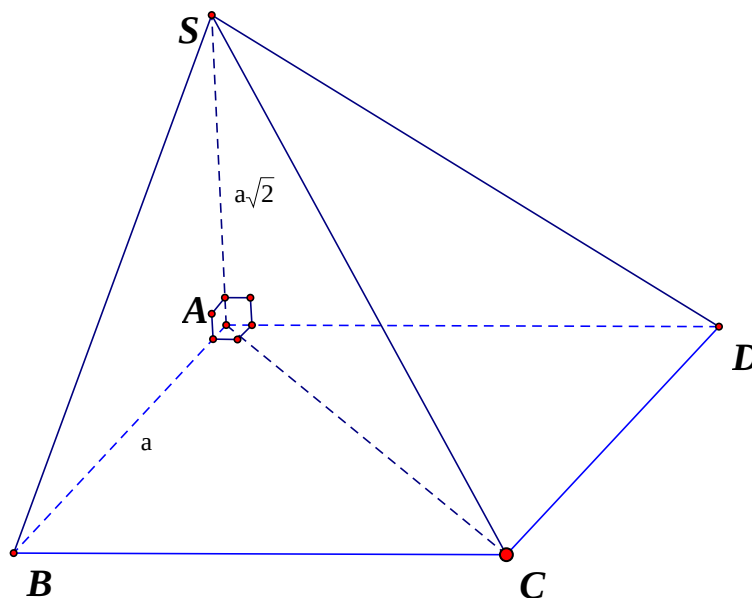
Tam giác SAB vuông tại A , $\cos \widehat{ABS} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABS} = 60^\circ$.

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy là $\widehat{SCA}$.

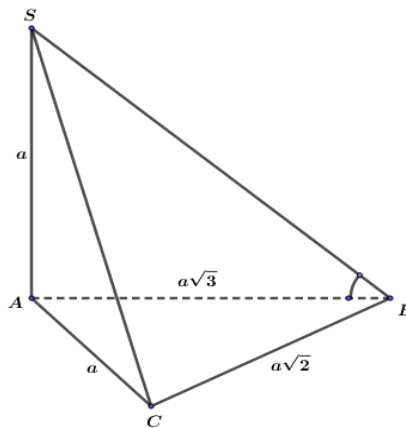
Khi đó: $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{SA}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$. Chọn A

Câu 5: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) .

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}.$$

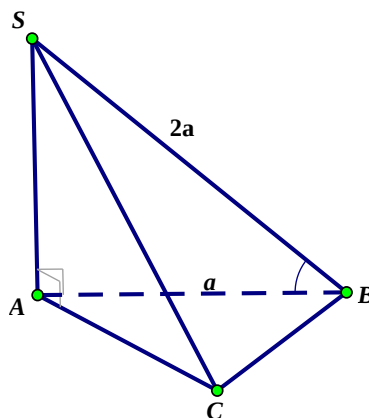
Mặt khác có ΔABC vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

Khi đó $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $(\widehat{SB, (ABC)}) = 30^\circ$.

- Câu 6:** (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng
- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

Chọn A



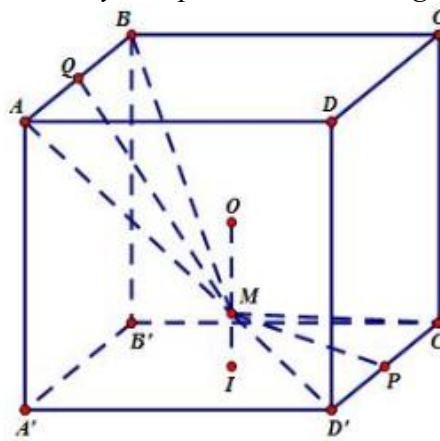
Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng đáy.

Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là $\widehat{SBA}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$

80. Xác định góc giữa hai mặt phẳng

- Câu 7:** (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.

B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Không mất tính tổng quát, ta giả sử các cạnh của hình lập phương bằng 6.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB . Khi đó ta có

$$MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10}, MQ = \sqrt{34}, PQ = 6\sqrt{2}.$$

Áp dụng định lí côsin ta được

$$\cos PMQ = \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \frac{-14}{\sqrt{340}}.$$

Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có

$$\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{340}} = \frac{7\sqrt{85}}{85}$$

Câu 8: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng

A. 30° .

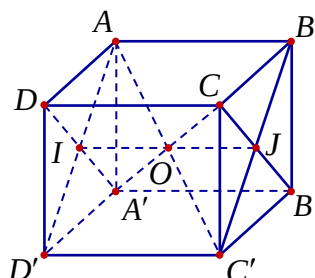
B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D



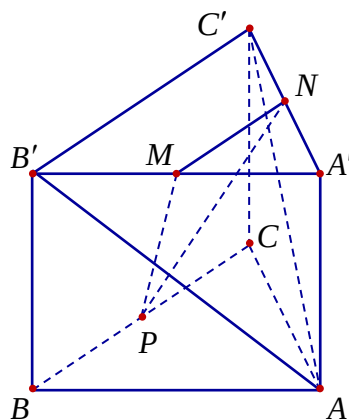
Ta có: $CD \perp (ADD'A') \Rightarrow CD \perp A'D$

$$\begin{cases} A'D \perp AD' \\ CD \perp AD' \end{cases} \Rightarrow AD' \perp (A'B'CD)$$

Mà $AD' \subset (ABC'D') \Rightarrow (ABC'D') \perp (A'B'CD)$

Do đó: góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ABC'D')$ bằng 90° .

Câu 9: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng



A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

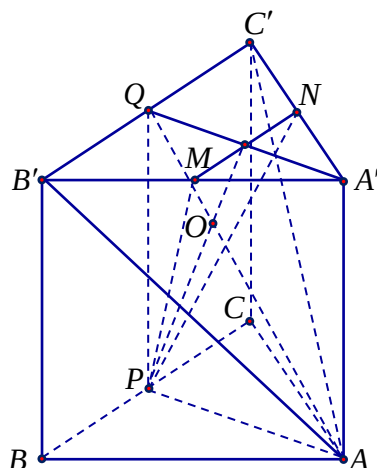
B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, Q lần lượt là trung điểm của $MN, B'C'$. Gọi $O = PI \cap AQ$.

Khi đó $\begin{cases} O \in (AB'C') \cap (MNP) \\ B'C' \parallel MN \\ B'C' \subset (AB'C'), MN \subset (MNP) \end{cases}$ nên giao tuyến của $(AB'C')$ và (MNP) là đường

thẳng d qua O và song song $MN, B'C'$.

Tam giác $AB'C'$ cân tại A nên $AQ \perp B'C' \Rightarrow AQ \perp d$.

Tam giác PMN cân tại P nên $PI \perp MN \Rightarrow PI \perp d$.

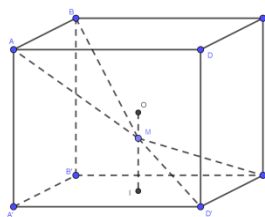
Do đó góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) là góc giữa AQ và PI .

Ta có $AP = 3, AQ = \sqrt{13}, IP = \frac{5}{2}$.

Vì $\triangle OAP \sim \triangle OQI$ và $\frac{AP}{IQ} = 2$ nên $OA = \frac{2}{3}AQ = \frac{2\sqrt{13}}{3}; OP = \frac{2}{3}IP = \frac{5}{3}$.

$$\cos(\widehat{(AB'C'), (MNP)}) = \cos(\widehat{AQ, PI}) = |\cos(\widehat{AOP})| = \frac{OA^2 + OP^2 - AP^2}{2OA \cdot OP} = \frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Câu 10: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là điểm thuộc OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó, cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

C. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.

D. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi độ dài cạnh của hình lập phương là a .

Hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) lần lượt chứa hai đường thẳng $C'D', AB$ mà $AB // C'D'$, nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng qua M và song song với AB .

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $C'D', AB$. Các tam giác $\triangle MC'D', \triangle MAB$ cân ở M nên $MP \perp C'D', MQ \perp AB$.

Do đó nếu α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) thì $\cos \alpha = |\cos(\widehat{PMQ})|$ (1)

$$MQ = \sqrt{MI^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}OI\right)^2 + IQ^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{6}; MP = \frac{5a}{6}; PQ = a\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = |\cos \widehat{PMQ}| = \left| \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2 \cdot MP \cdot MQ} \right| = \left| \frac{\frac{25a^2}{36} + \frac{13a^2}{36} - 2a^2}{2 \cdot \frac{5a}{6} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{6}} \right| = \frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

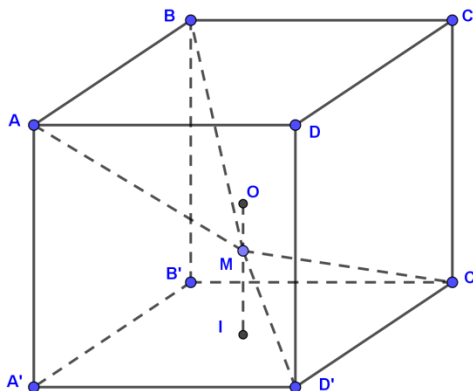
Câu 11: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng.

A. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

B. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.

C. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

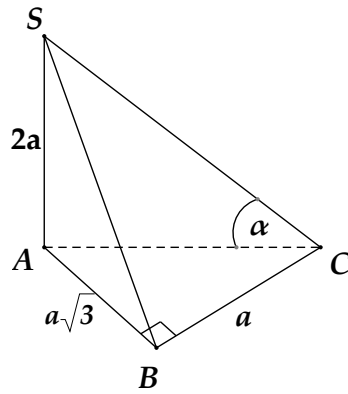
D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.



$$\sin \alpha = \frac{6\sqrt{13}}{65}.$$

- ### D. 60° .

Trang 238



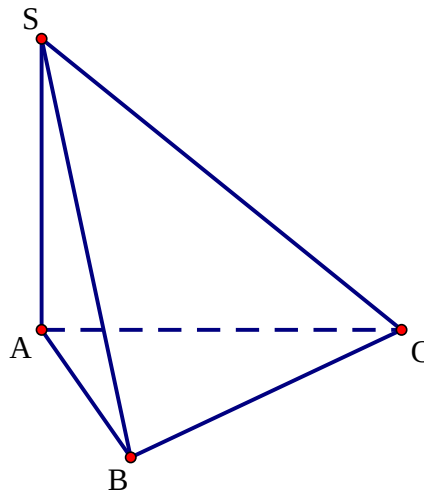
Ta có: $SA \perp (ABC)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (ABC) là $\widehat{SCA} = \alpha$.

$$\tan \alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{SA}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{2a}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2}} = 1$$

$\Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Câu 13: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$ và $BC = \sqrt{3}a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 90° .

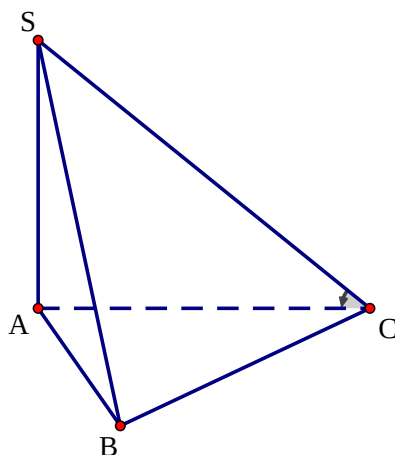
B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn D



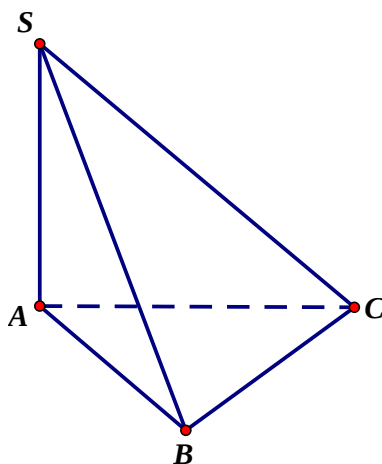
$$\text{Ta có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (\sqrt{3}a)^2} = 2a$$

A là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), C là hình chiếu của C lên mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow (\widehat{SC; (ABC)}) = (\widehat{SC; AC}) = \widehat{SCA}.$$

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{2a} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

Câu 14: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 45° .

B. 60° .

C. 30° .

D. 90°

Lời giải

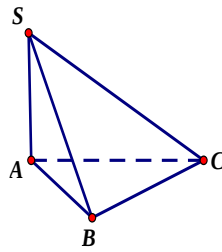
Chọn A

$$\text{Vì tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } B \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Ta có } (\widehat{SC; (ABC)}) = \widehat{SCA}$$

$$\text{Mà } \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

Câu 15: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = \sqrt{2}a$.

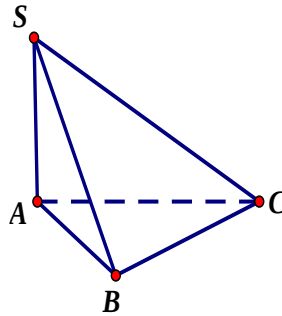


Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} SC \cap (ABC) = \{C\} \\ SA \perp (ABC) \end{cases}$.

$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a = SA$.

Vì ΔSAC vuông cân tại A nên ta có $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.A	4.B	5.C	6.A	7.B	8.D	9.B	10.D
11.D	12.B	13.D	14.A	15.B					

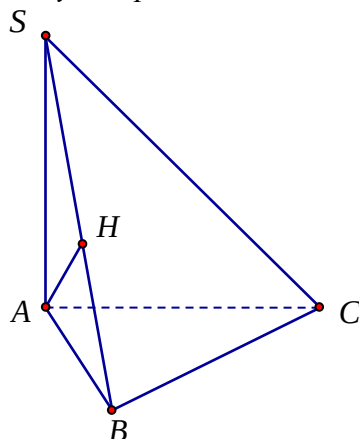
82. Khoảng cách điểm đến đường mặt

Câu 1: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn A



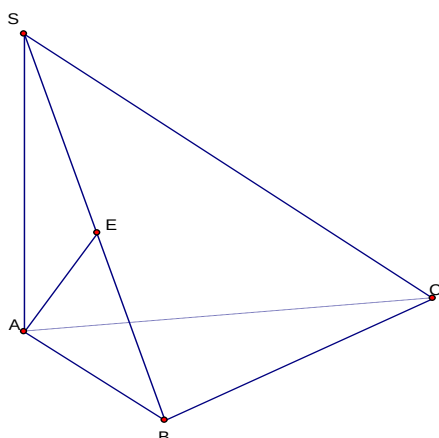
Trong tam giác SAB dựng AH vuông góc SB thì $AH \perp (SBC)$ do đó khoảng cách cần tìm là AH . Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{5}{4a^2}$ suy ra $AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 2: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. a . C. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Theo giả thiết ΔASB vuông cân tại $A \Rightarrow SB = a\sqrt{2}$.

Gọi E là trung điểm của $SB \Rightarrow AE \perp SB$ (1)

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

và ΔABC vuông tại $B \Rightarrow BC \perp AB$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(A, (SBC)) = AE = \frac{1}{2}SB = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$.

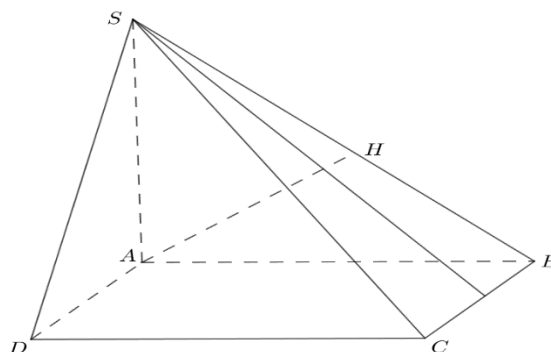
B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{6}a}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow \begin{cases} (SAB) \perp (SBC) \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \end{cases}$

Trong mặt phẳng (SAB) : Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH = d(A; (SBC))$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$$

$\Rightarrow d(A; (SBC)) = AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. Chọn B

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\sqrt{2}a$.

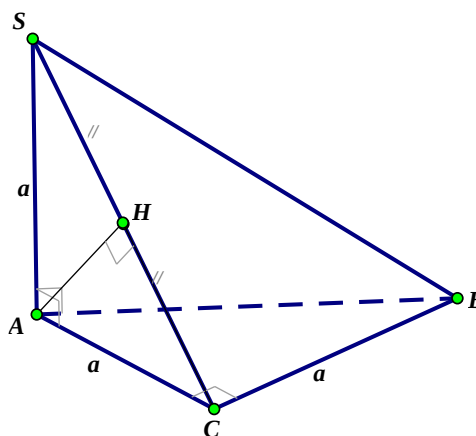
B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$

Khi đó $(SBC) \perp (SAC)$ theo giao tuyến là SC .

Trong (SAC) , kẻ $AH \perp SC$ tại H suy ra $AH \perp (SBC)$ tại H .

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH .

Ta có $AC = BC = a, SA = a$ nên tam giác SAC vuông cân tại A .

$$\text{Suy ra } AH = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

$$\text{Cách 2: Ta có } d(A, (SBC)) = \frac{\mathcal{V}_{A.SBC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\mathcal{V}_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}}.$$

Vì $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SC$ nên tam giác SBC vuông tại C .

$$\text{Suy ra } d(A, (SBC)) = \frac{\mathcal{V}_{A.SBC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\mathcal{V}_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\frac{1}{3}SA \cdot \frac{1}{2}CA^2}{\frac{1}{2}SC \cdot BC} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Câu 5: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (Minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

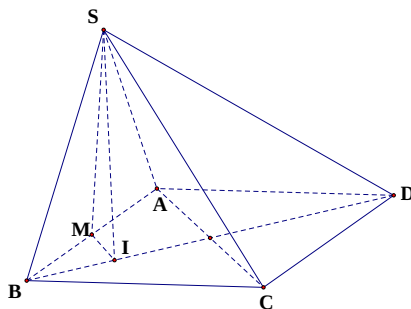
B. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải

Chọn B



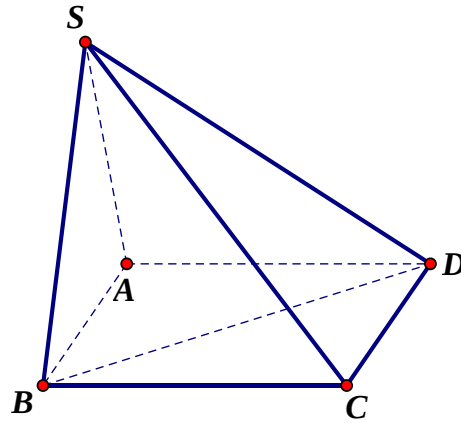
Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow SM \perp (ABCD)$.

Ta có $d(A, (SBD)) = 2d(M, (SBD))$. Kẻ $MI \perp BD$ ta có $(SMI) \perp (SBD)$.

$$d(M, (SBD)) = d(M, SI) = \frac{SM \cdot MI}{\sqrt{SM^2 + MI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{2a^2}{16}}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

$$\text{Vậy } d(A, (SBD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 6: (Vận dụng) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến (SBD) bằng? (minh họa như hình vẽ sau)



A. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

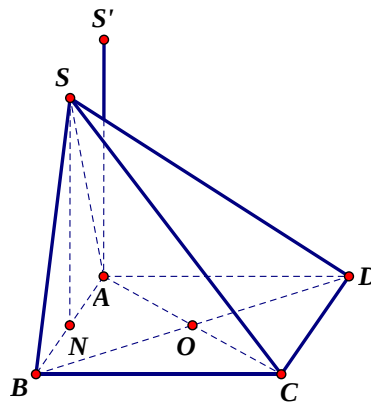
B. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Không mất tính tổng quát, cho $a = 1$.

Gọi N là trung điểm của đoạn AB . Dựng S' sao cho $SS'AN$ là hình chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ:

A là gốc tọa độ, tia AB ứng với tia Ox , tia AD ứng với tia Oy , tia AS' ứng với tia Oz .

$A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, S_1 .

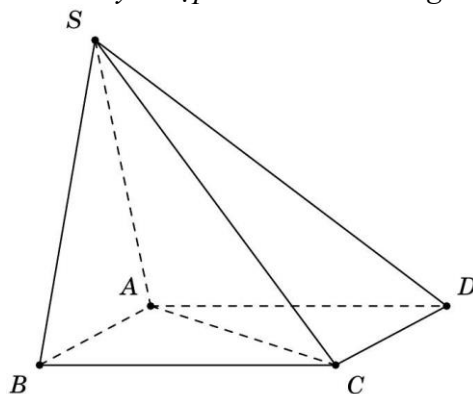
Phương trình mặt phẳng (SBD) là: $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + z - \sqrt{3} = 0$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có O là trung điểm của AC .

Ta có $d(C; (SBD)) = d(A; (SBD)) = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy chọn đáp án **D**.

Câu 7: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ).



Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

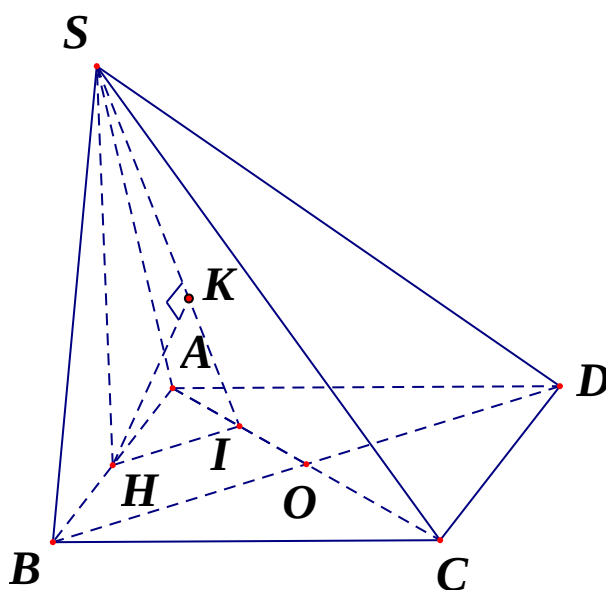
B. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, H là trung điểm của cạnh AB .

Do tam giác ΔSAB đều nên $SH \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Do $BD \cap (SAC) = O$ và O, H lần lượt là trung điểm của BD, AB nên $d(D, (SAC)) = d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC))$.

Gọi I là trung điểm của cạnh AO , ta có $\begin{cases} HI \parallel BO \\ BO \perp AC \end{cases} \Rightarrow HI \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHI) \Rightarrow (SAC) \perp (SHI)$.

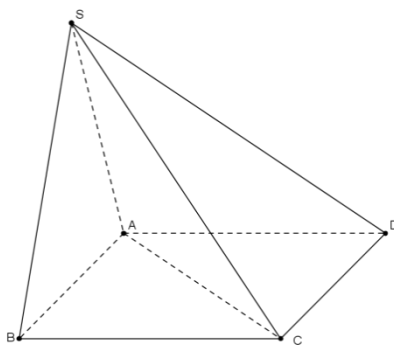
Trong tam giác ΔSHI dựng $HK \perp SI$ ($K \in SI$) ta có $HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H, (SAC)) = HK$.

Tam giác ΔSHI vuông tại H , HK là đường cao, ta có $HK = \frac{HI \cdot HS}{SI}$, trong đó $HI = \frac{1}{2}BO =$

$$\frac{a\sqrt{2}}{4}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SI = \sqrt{HI^2 + HS^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}, \text{ suy ra } HK = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{14}}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

$$\text{Vậy } d(D, (SAC)) = 2d(H, (SAC)) = 2 \cdot HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 8: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng



A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

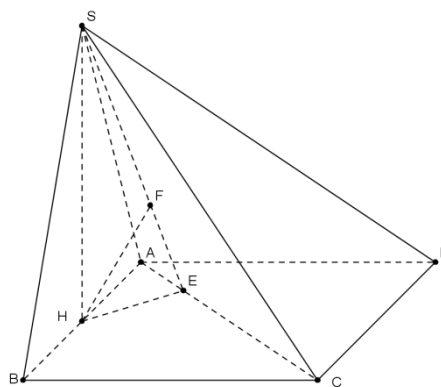
B. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

C. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AB . Ta có: $SH \perp (ABCD)$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $HE \perp AC$ tại E .

Mà $AC \perp SH$ nên $AC \perp (SHE) \Rightarrow (SAC) \perp (SHE)$.

Trong (SHE) , kẻ $HF \perp SE$ tại $F \Rightarrow HF \perp (SAC)$ tại F .

$\Rightarrow d(H, (SAC)) = HF$.

Ta có: $HE = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{21}}{14} = d(H, (SAC))$.

Do H là trung điểm $AB \Rightarrow d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 9: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

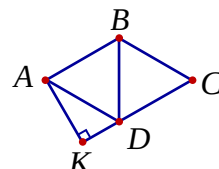
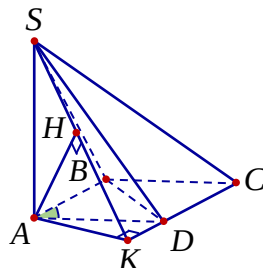
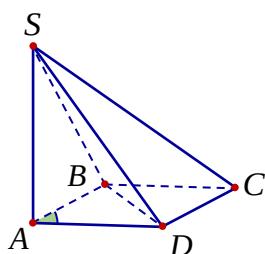
B. $\frac{a\sqrt{15}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Diện tích hình thoi $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích hình chóp $S.ABCD: V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $SD = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$, $SC = 2a$.

Nửa chu vi ΔSCD là $p_{\Delta SCD} = \frac{3a+a\sqrt{2}}{2}$.

$$S_{\Delta SCD} = \sqrt{p(p-a)(p-2a)(p-a\sqrt{2})} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

$$d(B, (SCD)) = \frac{3V_{S.BCD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{6}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Cách 2: Ta có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$, suy ra $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AK \perp CD$ tại K .

Trong mặt phẳng (SAK) , kẻ $AH \perp SK$ tại H .

Suy ra $AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$.

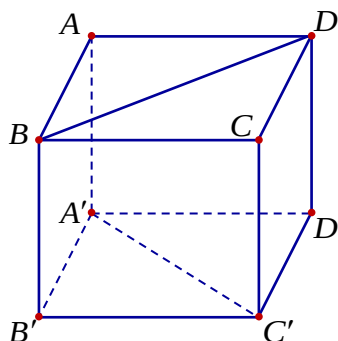
Tam giác SAK vuông tại A , AH là đường cao, suy ra:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}, \text{ do } AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

83. Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau

Câu 10: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A. $\sqrt{3}a$.

B. a .

C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

D. $\sqrt{2}a$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $BD // (A'B'C'D')$

$$\Rightarrow d(BD, A'C') = d(BD, (A'B'C'D')) = d(B, (A'B'C'D')) = BB' = a.$$

Cách 2: Gọi O, O' lần lượt tâm của hai đáy. Ta có: OO' là đoạn vuông góc chung của BD và $A'C'$.

$$\text{Do đó } d(BD, A'C') = OO' = a.$$

Câu 11: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, BC = 2a, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$.

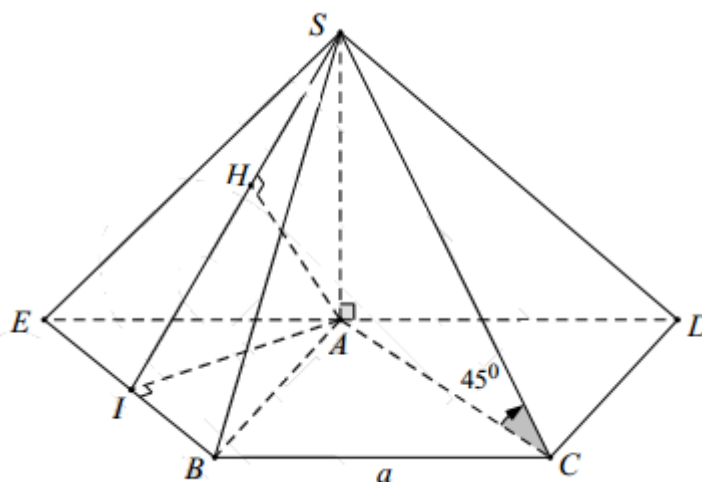
B. $\frac{2a}{3}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng điểm E sao cho $ACBE$ là hình bình hành,

Khi đó: $AC \parallel EB \Rightarrow AC \parallel (SBE)$.

$$\Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBE)) = d(A, (SBE)). \quad (1)$$

Kẻ $AI \perp EB (I \in EB)$,

$$\text{kẻ } AH \perp SI (H \in SI) \Rightarrow d(A, (SEB)) = AH. \quad (2)$$

$$\text{Tam giác } ABE \text{ vuông tại } A \Rightarrow \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$$\text{Xét } \triangle SAI, \text{ ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}a. \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } h = d(AC, SB) = \frac{2a}{3}.$$

Câu 12: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, BC = 2a, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A. $\frac{\sqrt{30}a}{6}$.

B. $\frac{4\sqrt{21}a}{21}$.

C. $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$.

D. $\frac{\sqrt{30}a}{12}$.

$$\text{Vậy } d(BD, SC) = \frac{|[\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{SC}] \cdot \overrightarrow{BC}|}{|[\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{SC}]|} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

D. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Ta có $\triangle OBC$ vuông cân tại O , M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow OM \perp BC$$

Dựng hình chữ nhật $OMBN$, ta có $\begin{cases} OM \parallel BN \\ BN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow OM \parallel (ABN)$

$$\Rightarrow d(AB, OM) = d(OM, (ABN)) = d(O, (ABN))$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AN ta có:

$$\begin{cases} BN \perp ON \\ BN \perp OA \end{cases} \Rightarrow BN \perp (OAN) \Rightarrow OH \perp BN \text{ mà } OH \perp AN$$

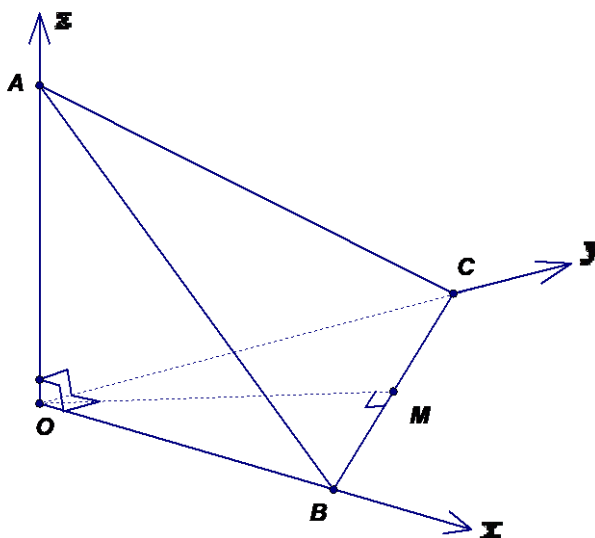
$$\Rightarrow OH \perp (ABN) \Rightarrow d(O, (ABN)) = OH$$

$\triangle OAN$ vuông tại O , đường cao OH

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{BC^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{OB^2 + OC^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{4a^2 + 4a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(AB, OM) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Nhận xét:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó $O(0; 0; 0)$, $B(2a; 0; 0)$, $C(0; 2a; 0)$, $A(0; 0; a)$

M là trung điểm của $BC \Rightarrow M(a; a; 0)$

Ta có $\overrightarrow{OM} = (a; a; 0)$; $\overrightarrow{OB} = (0; 2a; 0)$; $\overrightarrow{AB} = (2a; 0; -a)$

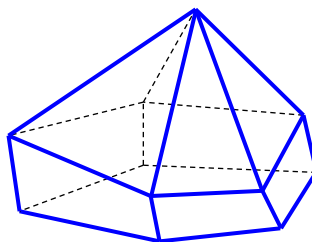
$$\Rightarrow [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}] = (-a^2; a^2; -2a^2) \Rightarrow d(AB, OM) = \frac{|[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}] \cdot \overrightarrow{OB}|}{|[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}]|} = \frac{2a^3}{\sqrt{a^4 + a^4 + 4a^4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.B	4.B	5.B	6.D	7.D	8.C	9.A	10.B
11.B	12.C	13.D							

84. Xác định số đỉnh, cạnh, mặt bên của một khối đa diện

Câu 1: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Hình đa diện trong hình vẽ có bao nhiêu mặt?



A. 6

B. 10

C. 12

D. 11

Lời giải

Chọn D

Đếm đáy hình chóp có 5 mặt và 5 mặt của lăng trụ và 1 mặt đáy. Vậy có 11 mặt.

Câu 2: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 1 mặt phẳng

B. 2 mặt phẳng

C. 3 mặt phẳng

D. 4 mặt phẳng

Lời giải

Chọn D

Hình lăng trụ tam giác đều có 3 mặt phẳng đối xứng là 3 mặt phẳng trung trực của 3 cạnh đáy và một mặt phẳng đối xứng là mặt phẳng trung trực của cạnh bên.

85. Phân chia, lắp ghép các khối đa diện

Câu 3: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

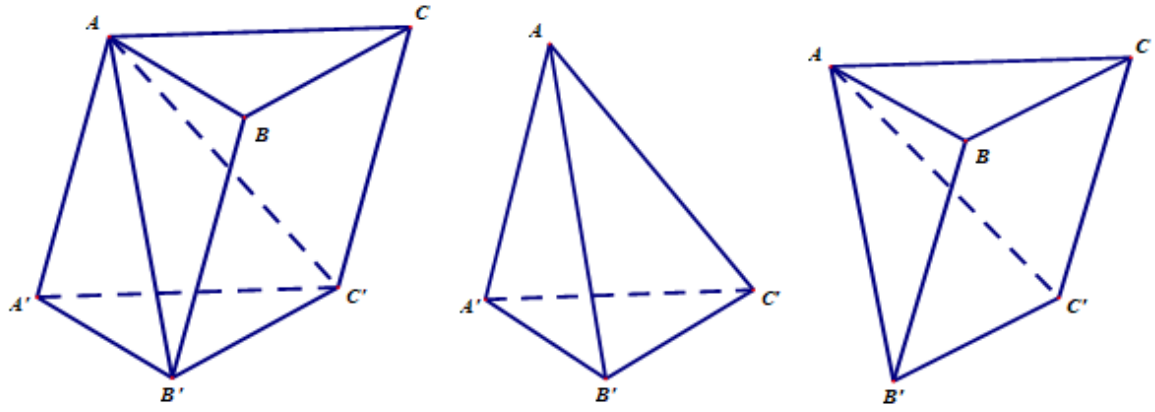
B. Hai khối chóp tam giác.

C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

D. Hai khối chóp tứ giác.

Lời giải

Chọn A



Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối chóp

Chóp tam giác: $A.A'B'C'$ và chóp tứ giác: $A.BB'C'C$.

86. Phép biến hình trong không gian

Câu 4: (Nhận biết) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?



A. Tứ diện đều. **B.** Bát diện đều. **C.** Hình lập phương. **D.** Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải

Chọn A

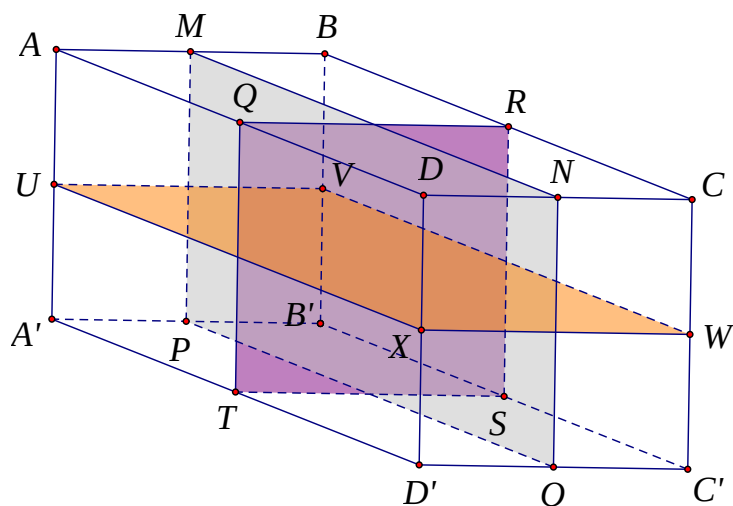
Dễ dàng thấy hình bát diện đều, hình lập phương và hình lăng trụ lục giác đều có tâm đối xứng. Còn tứ diện đều không có tâm đối xứng.

Câu 5: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3 mặt phẳng **B.** 4 mặt phẳng **C.** 6 mặt phẳng **D.** 9 mặt phẳng

Lời giải

Chọn A



Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước đôi một khác nhau.
 Khi đó có 3 mặt phẳng đối xứng là $MNOP, QRST, UVWX$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.A	4.A	5.A					
-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--	--	--

87. Diện tích xung quanh diện tích toàn phần

Câu 1: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho hình bát diện đều cạnh a . Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = 4\sqrt{3}a^2$ B. $S = \sqrt{3}a^2$ C. $I = 2\sqrt{3}a^2$ D. $I = 8a^2$

Lời giải

Chọn C

Bát diện đều có 8 mặt bằng nhau, mỗi mặt là một tam giác đều cạnh a

$$\text{Vậy } S = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2.$$

88. Tính thể tích các khối đa diện

Câu 2: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} h = a \\ S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow V = h \cdot S = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 3: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

- A. $V = \frac{1}{3}Bh$. B. $V = \frac{1}{6}Bh$. C. $V = Bh$. D. $V = \frac{1}{2}Bh$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là $V = \frac{1}{3}Bh$.

Câu 4: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho khối chóp có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao $4a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{4}{3}a^3$. B. $\frac{16}{3}a^3$. C. $4a^3$. D. $16a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 4a = \frac{4}{3}a^3.$$

Câu 5: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $4a^3$. B. $\frac{16}{3}a^3$. C. $\frac{4}{3}a^3$. D. $16a^3$.

Lời giải

Chọn A

$$V = S_{\text{day}} \cdot h = a^2 \cdot 4a = 4a^3.$$

Câu 6: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{2}{3}a^3$. B. $\frac{4}{3}a^3$. C. $2a^3$. D. $4a^3$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{day}} \cdot h = a^2 \cdot 2a = 2a^3.$$

Câu 7: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

- A. $3Bh$. B. Bh . C. $\frac{4}{3}Bh$. D. $\frac{1}{3}Bh$.

Lời giải

Chọn B

Câu 8: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

A. $\pi r^2 h$.

B. $2\pi r^2 h$.

C. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

D. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải

Chọn C

Câu 9: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $3Bh$.

B. Bh .

C. $\frac{4}{3}Bh$.

D. $\frac{1}{3}Bh$.

Lời giải

Chọn B

Câu 10: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $\frac{4}{3}Bh$.

B. $3Bh$.

C. $\frac{1}{3}Bh$.

D. Bh .

Lời giải

Chọn D

Câu 11: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

A. $\frac{4}{3}Bh$.

D. $\frac{1}{3}Bh$.

C. $3Bh$.

D. Bh .

Lời giải

Chọn D

Công thức cơ bản.

Câu 12: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Thể tích khối lập phương có cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$.

B. $2a^3$.

C. a^3 .

D. $6a^3$.

Lời giải

Chọn A

Câu 13: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 24$

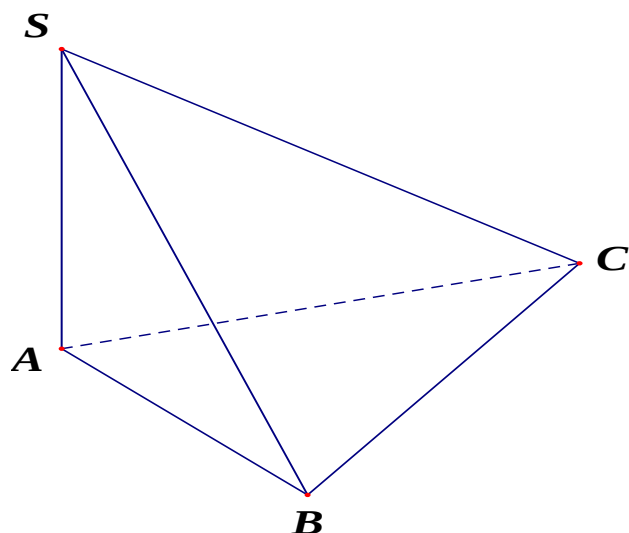
B. $V = 32$

C. $V = 192$

D. $V = 40$

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A, $S_{ABC} = 24$, $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = 32$

Câu 14: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

A. $V = a^3$

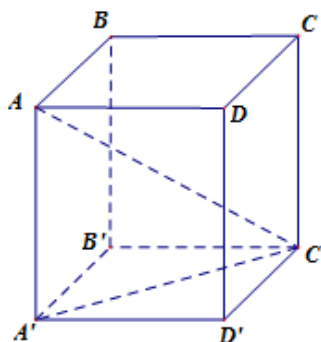
B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$

C. $V = 3\sqrt{3}a^3$

D. $V = \frac{1}{3}a^3$

Lời giải

Chọn A



Giả sử khối lập phương có cạnh bằng x ; ($x > 0$)

Xét tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' ta có:

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow A'C' = x\sqrt{2}$$

Xét tam giác $A'AC'$ vuông tại A' ta có

$$AC'^2 = A'A^2 + A'C'^2 \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + 2x^2 \Leftrightarrow x = a$$

Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = a^3$.

Câu 15: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$

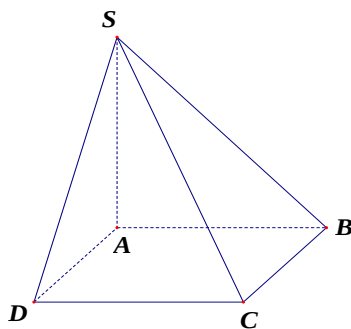
B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

C. $V = \sqrt{2}a^3$

D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA$ là đường cao của hình chóp

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD: V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

Câu 16: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB . Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V = \frac{7}{2}a^3$

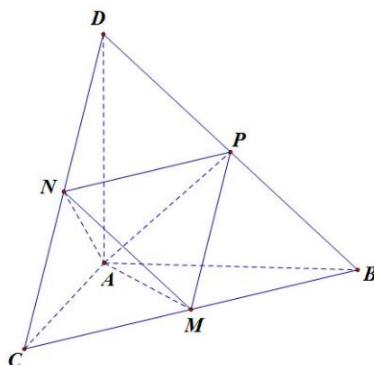
B. $V = 14a^3$

C. $V = \frac{28}{3}a^3$

D. $V = 7a^3$

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{3} AB \cdot \frac{1}{2} AD \cdot AC = \frac{1}{6} 6a \cdot 7a \cdot 4a = 28a^3$$

$$\text{Ta nhận thấy } S_{MNP} = \frac{1}{2} S_{MNP} = \frac{1}{4} S_{BCD} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 7a^3$$

Câu 17: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A. $h = \frac{\sqrt{3}a}{6}$

B. $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

C. $h = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

D. $h = \sqrt{3}a$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Do đáy là tam giác đều cạnh } 2a \text{ nên } S_{\Delta ABC} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

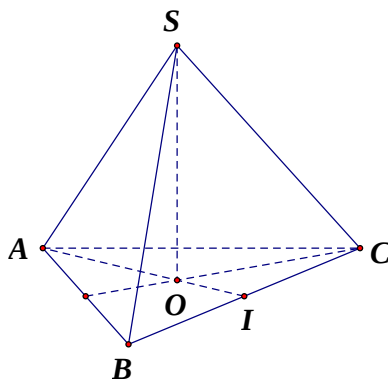
$$\text{Mà } V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3a^3}{\sqrt{3}a^2} = \sqrt{3}a$$

Câu 18: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A. $V = \frac{\sqrt{13}a^3}{12}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{6}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Do đáy là tam giác đều nên gọi I là trung điểm cạnh BC , khi đó AI là đường cao của tam giác đáy. Theo định lý Pitago ta có $AI = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, và $AO = \frac{2}{3}AI = \frac{2a\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOA vuông tại O ta có $SO = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}$

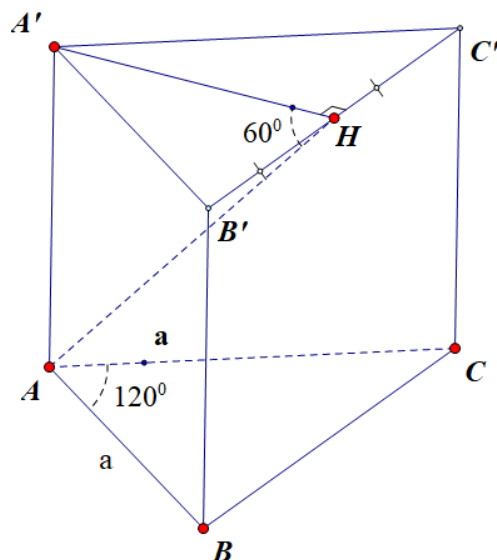
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Câu 19: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{8}$ **B.** $V = \frac{9a^3}{8}$ **C.** $V = \frac{a^3}{8}$ **D.** $V = \frac{3a^3}{4}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $B'C'$, khi đó góc giữa mp $(AB'C')$ và đáy là góc $\widehat{AHA'} = 60^\circ$

$$\text{Ta có } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$B'C' = a\sqrt{3} \Rightarrow A'H = \frac{2S_{\Delta ABC}}{B'C'} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{\Delta ACB} \cdot AA' = \frac{3a^3}{8}$$

Câu 20: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{6}$

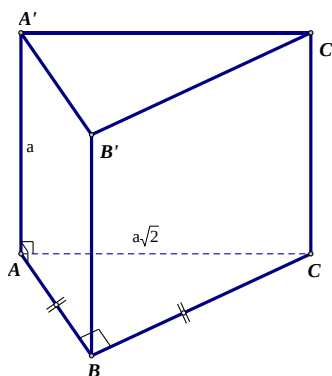
B. $V = \frac{a^3}{3}$

C. $V = \frac{a^3}{2}$

D. $V = a^3$

Lời giải

Chọn C



Tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$. Suy ra: $S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2 \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{2}$.

Câu 21: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho khối chóp có đáy hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích cả khối chóp đã cho bằng

A. $4a^3$.

B. $\frac{2}{3}a^3$.

C. $2a^3$.

D. $AB = a$.

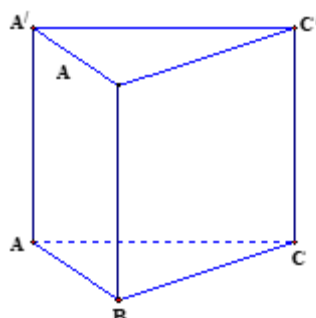
Lời giải

Chọn B

Diện tích đáy của hình chóp $B = a^2$.

Thể tích của khối chóp đã cho là $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 2a = \frac{2}{3}a^3$.

Câu 22: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho khối chóp đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = a\sqrt{3}$ (minh hoạ như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $\frac{3a^3}{4}$.

B. $\frac{3a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{4}$.

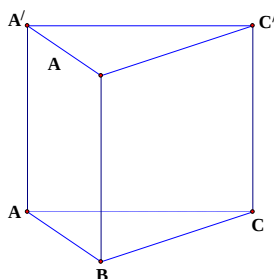
D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 23: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho khối chóp đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$ (minh hoạ như hình vẽ bên).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\sqrt{3}a^3$.

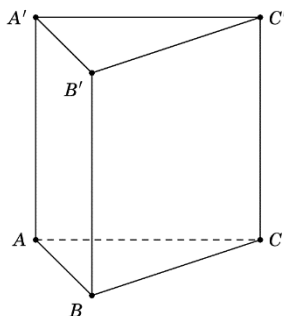
D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 2a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 24: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và $AA' = 3a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

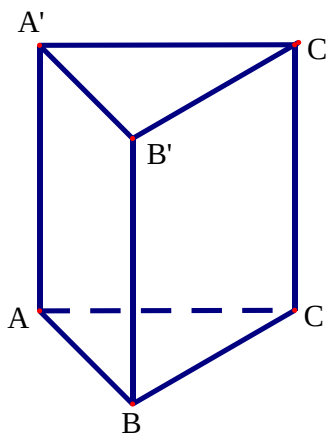
- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $\sqrt{3}a^3$. C. $6\sqrt{3}a^3$. D. $3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3a = 3\sqrt{3}a^3$.

Câu 25: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{2}a$.



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$. D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

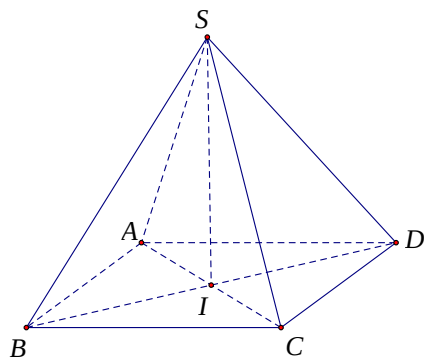
Thể tích của khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{2}a = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 26: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$ B. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$ C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$

Lời giải

Chọn A



Chiều cao của khối chóp: $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{4a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}SI \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} a^2 = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$

Câu 27: (Vận dụng) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\frac{a^3}{2}$

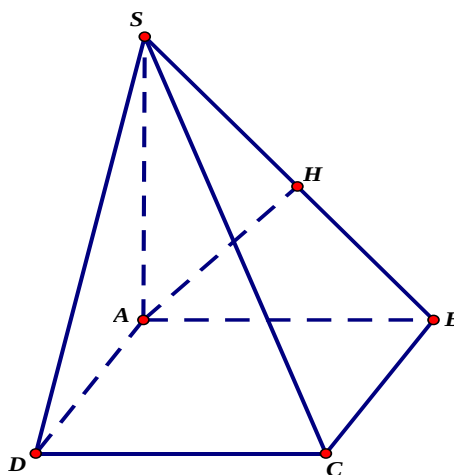
B. $\frac{a^3}{3}$

C. a^3

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp AH$. Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Suy ra $d(A; (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Câu 28: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$

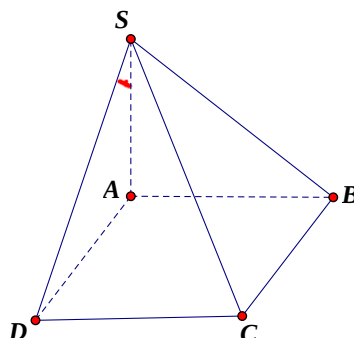
B. $V = \sqrt{3}a^3$

C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D



Góc giữa SD và $\text{mp}(SAB)$ là $\widehat{DSA} = 30^\circ$.

Ta có $SA = \frac{AD}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V = \frac{8}{3}$

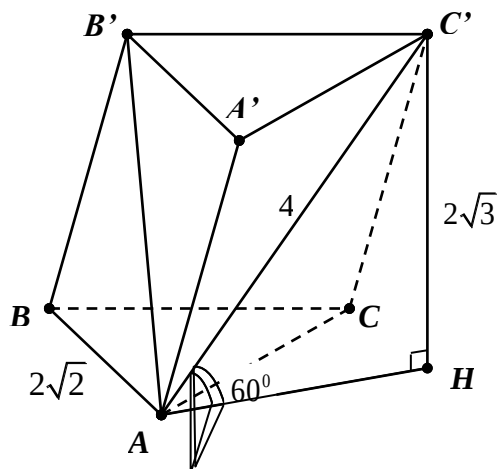
B. $V = \frac{16}{3}$

C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Phân tích: Tính thể tích của khối đa diện $ABCB'C'$ bằng thể tích khối của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ trừ đi thể tích của khối chóp $A.A'B'C'$.

Giả sử đường cao của lăng trụ là $C'H$. Khi đó góc giữa AC' mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{C'AH} = 60^\circ$.

Ta có: $\sin 60^\circ = \frac{C'H}{AC'} \Rightarrow C'H = 2\sqrt{3}; S_{\Delta ABC} = 4; V_{ABC.A'B'C'} = C'H \cdot S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$.

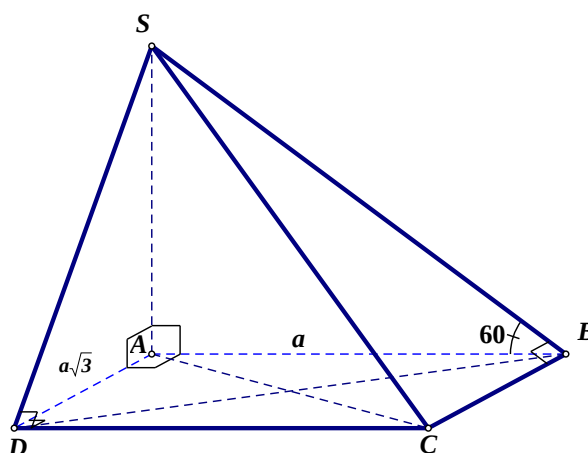
$$V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} C'H \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}; \quad V_{ABB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = 8\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 30: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = 3a^3$ B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ C. $V = a^3$ D. $V = \frac{a^3}{3}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $S_{ABCD} = \sqrt{3}a^2$.

$$\text{Vì } \begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp SB \subset (SBC) \\ BC \perp AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SBA}. \text{ Vậy } \widehat{SBA} = 60^\circ$$

Xét tam giác vuông SAB ($\hat{A} = 1v$) có: $\tan 60^\circ = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

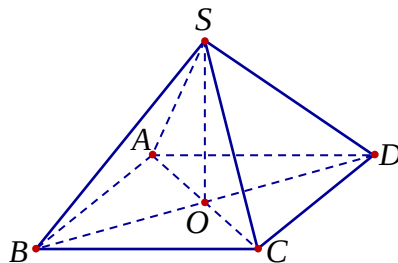
$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = a^3.$$

Câu 31: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$ B. $\frac{8a^3}{3}$ C. $\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn A



Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$, tâm O , khi đó $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ AB = SA = 2a \end{cases}$.

Ta có:

$$S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2, OA = \frac{1}{2}2a\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2} \cdot 4a^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3.$$

Câu 32: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\sqrt{2}a^3$

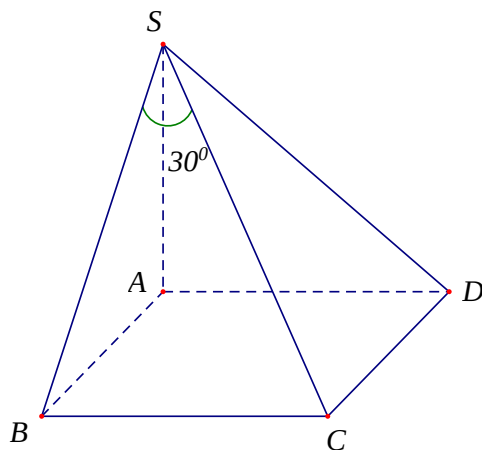
B. $\frac{2a^3}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn C



+) Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên: $S_{ABCD} = a^2$

+) Chứng minh được $BC \perp (SAB) \Rightarrow$ góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSA} = 30^\circ$.

+) Đặt $SA = x \Rightarrow SB = \sqrt{x^2 + a^2}$. Tam giác SBC vuông tại B nên $\tan \widehat{CSA} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{SB}$

Ta được: $SB = BC\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a\sqrt{2}$.

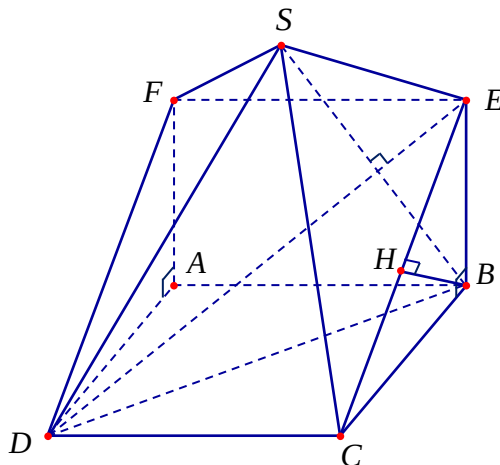
Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ (Đvtt)

Câu 33: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE . Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng.

- A. $\frac{7}{6}$. B. $\frac{11}{12}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi V là thể tích cần tìm. Ta có $V = V_{S.CDEF} + V_{ADF.BCE}$ (*)

- Hạ $BH \perp CE \Rightarrow BH \perp (CDEF)$.

Trong tam giác BEC vuông tại B , ta có: $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BC^2} = 2 \Rightarrow BH = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$V_{S.CDEF} = \frac{1}{3} d(S; CDEF) \cdot S_{CDEF}$. Mà $d(S; CDEF) = d(B; CDEF) = BH$ nên

$$V_{S.CDEF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot DC \cdot EC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

- $V_{ADF.BCE} = AB \cdot S_{\triangle BCE} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (2)$.

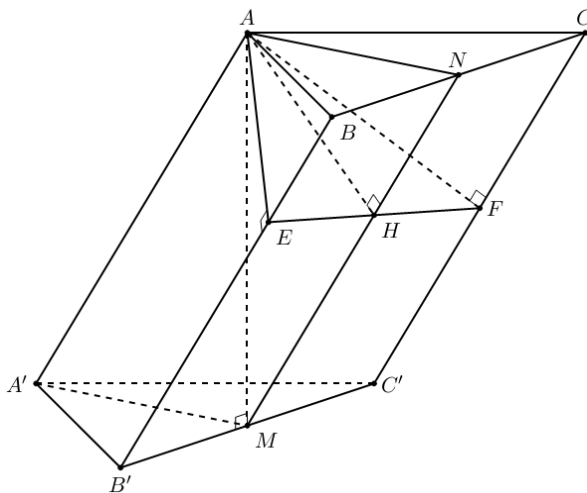
Thay vào (*) ta có $V = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Câu 34: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. 2. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm BC . Kẻ $AE \perp BB'$ tại E , $AF \perp CC'$ tại F .

Ta có $EF \cap MN = H$ nên H là trung điểm EF .

Ta có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF) \Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$.

Khi đó $d(A, BB') = AE = 1$, $d(A, CC') = AF = \sqrt{3}$, $d(C, BB') = EF = 2$.

Nhận xét: $AE^2 + AF^2 = EF^2$ nên tam giác AEF vuông tại A , suy ra $AH = \frac{EF}{2} = 1$.

Ta lại có $\begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ MN // AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (AEF) \Rightarrow MN \perp AH$.

Tam giác AMN vuông tại A có đường cao AH nên $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AN^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow AM = 2$.

Mặt khác $\begin{cases} (AA'NM) \perp (ABC) \\ (AA'NM) \perp (AEF) \\ (AA'NM) \cap (ABC) = AN \\ (AA'NM) \cap (AEF) = AH \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng (ABC) và (AEF) là $\widehat{HAN}$.

Hình chiếu của tam giác ABC lên mặt phẳng (AEF) là tam giác AEF nên $S_{\Delta AEF} =$

$$S_{\Delta ABC} \cdot \cos \widehat{HAN} \Rightarrow \frac{1}{2} AE \cdot AF = S_{\Delta ABC} \cdot \frac{AH}{AN} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AE \cdot AF \cdot AN}{AH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1} = 1.$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AM = 2$.

Câu 35: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{3}$.

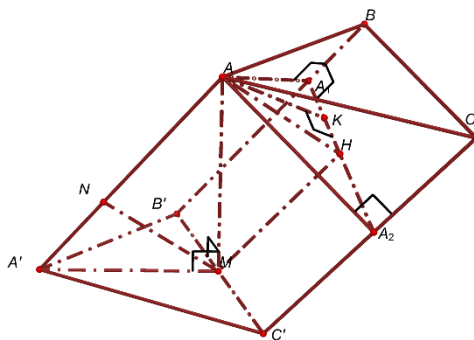
B. 2.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B



Gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của A trên BB', CC' . Theo đề ra $AA_1 = 1; AA_2 = \sqrt{3}; A_1A_2 = 2$.

Do $AA_1^2 + AA_2^2 = A_1A_2^2$ nên tam giác AA_1A_2 vuông tại A .

Gọi H là trung điểm A_1A_2 . Ta có: $AH = \frac{A_1A_2}{2} = 1$.

Lại có $MH \parallel BB' \Rightarrow MH \perp (AA_1A_2) \Rightarrow MH \perp AH$ mà $AA' \parallel MH \Rightarrow AA' \perp AH$.

Kẻ MH song song với AH , cắt AA' tại N . Ta có $MN = AH = 1$ và $AA' \perp MN$.

Trong tam giác vuông $A'MN$ có $\sin \widehat{MA'N} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MA'N} = 30^\circ$.

Suy ra trong tam giác vuông $A'MA$ có $AA' = \frac{A'M}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Gọi K là chân đường cao trong tam giác vuông AA_1A_2 . Ta có $AK \perp (BCC'B')$ và $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AA_1^2} + \frac{1}{AA_2^2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $V_{ABCC'} = \frac{1}{3} AK \cdot S_{\Delta BCC'} = \frac{1}{3} \cdot AK \cdot \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot CC' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$.

Mà $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{ABCC'} = 2$.

Câu 36: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

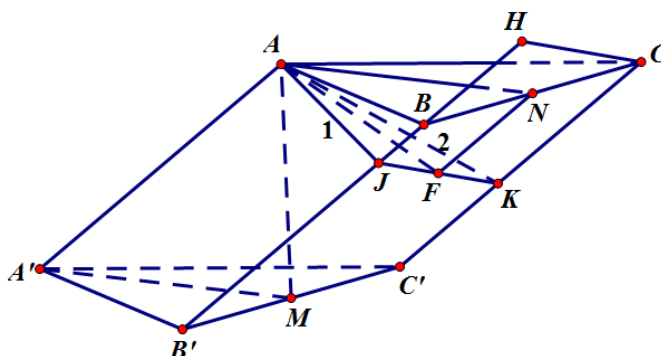
B. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB' và CC' , H là hình chiếu vuông góc của C lên BB'

Ta có $AJ \perp BB'$ (1).

$AK \perp CC' \Rightarrow AK \perp BB'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BB' \perp (AJK) \Rightarrow BB' \perp JK \Rightarrow JK // CH \Rightarrow JK = CH = \sqrt{5}$.

Xét ΔAJK có $JK^2 = AJ^2 + AK^2 = 5$ suy ra ΔAJK vuông tại A .

Gọi F là trung điểm JK khi đó ta có $AF = JF = FK = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi N là trung điểm BC , xét tam giác vuông ANF ta có:

$$\cos \widehat{NAF} = \frac{AF}{AN} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NAF} = 60^\circ. (AN = AM = \sqrt{5} \text{ vì } AN // AM \text{ và } AN = AM).$$

$$\text{Vậy ta có } S_{\Delta AJK} = \frac{1}{2} AJ \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow S_{\Delta AJK} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta AJK}}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Xét tam giác AMA' vuông tại M ta có $\widehat{MAA'} = \widehat{AMF} = 30^\circ$ hay $AM = A'M \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ là } V = AM \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Câu 37: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $27\sqrt{3}$.

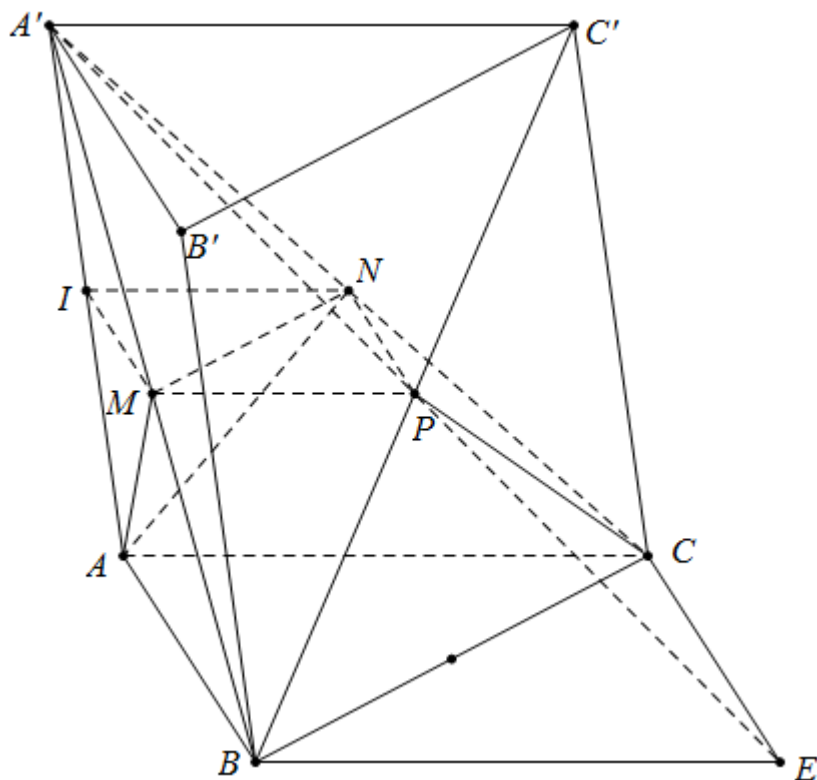
B. $21\sqrt{3}$.

C. $30\sqrt{3}$.

D. $36\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Diện tích của đáy $S = 6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, chiều cao lăng trụ $h = 8$.

Gọi I là trung điểm AA' . Ta có $(MINP) \parallel (ABC)$.

Gọi E là giao điểm của $A'P$ và (ABC) , suy ra $BE \parallel AC$ và $BE = 2MP = AC$, hay E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABEC$.

Ta có $V = V_{A'.ABEC} - V_{P.BEC} - V_{A'.IMP} - V_{A.IMN}$.

Trong đó:

$$V_{A'.ABEC} = \frac{1}{3} \cdot 2S \cdot h = \frac{2}{3}Sh.$$

$$V_{P.BEC} = \frac{1}{3} \cdot S_{BEC} \cdot d(P, (ABC)) = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{6}Sh.$$

$$V_{A'.IMP} = \frac{1}{3} S_{IMP} \cdot d(A', (IMP)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{12}Sh.$$

$$V_{A.IMN} = \frac{1}{3} S_{IMN} \cdot d(A, (IMN)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{24}Sh.$$

$$\text{Vậy } V = V_{A'.ABEC} - V_{P.BEC} - V_{A'.IMP} - V_{A.IMN} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} \right) Sh = \frac{3}{8}Sh = 27\sqrt{3}.$$

Câu 38: (Vận dụng cao) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABA'B'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $12\sqrt{3}$.

B. $16\sqrt{3}$.

C. $\frac{28\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } V = V_{A'.ABEC} - V_{P.BEC} - V_{A'.IMP} - V_{A.IMN}$$

$$\text{Với } V_{A'.ABEC} = \frac{1}{3} S_{ABEC} \cdot h = \frac{2}{3} S \cdot h.$$

$$V_{P.BEC} = \frac{1}{3} S_{BEC} \cdot d(P, (ABC)) = \frac{1}{6} S \cdot h.$$

$$V_{A'.IMP} = \frac{1}{3} S_{IMP} \cdot d(A', (IMP)) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{12} Sh.$$

$$V_{A.IMN} = \frac{1}{3} S_{IMN} \cdot d(A, (IMN)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{24} Sh.$$

$$\text{Vậy } V = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} \right) Sh = \frac{3}{8} Sh = 12\sqrt{3}.$$

Câu 39: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A', BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $9\sqrt{3}$.

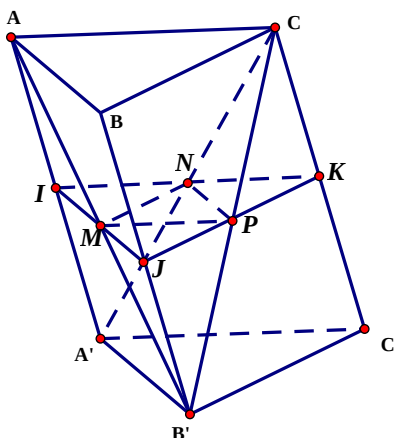
B. $10\sqrt{3}$.

C. $7\sqrt{3}$.

D. $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$V_{ABC.A'B'C'} = 6 \cdot 16 \frac{\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3},$$

$$\text{Thể tích cần tìm là } V_1 = V_{A'B'C'.MNP_{ABC.MNP}}$$

$$V_2 = V_{A'.AMN} = V_{B'.BMP} = V_{C'.CNP}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 2V_1 + 3V_2$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{4} S_{AB'C'} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{4} V_{A'.AB'C'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{12} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 2V_1 + \frac{1}{4} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_1 = \frac{3}{8} V_{ABC.A'B'C'} = 9\sqrt{3}$$

Câu 40: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$

B. $8\sqrt{3}$

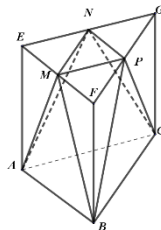
C. $6\sqrt{3}$

D. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Chia đôi khối lăng trụ bằng mặt phẳng (MNP) . Khi đó ta có $(MNP) \cap BB' = \{F\}$ thì

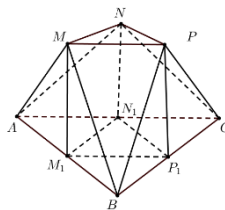
$$V_{ABC.EFG} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Lại có } V_{ABC.MNP} = V_{ABC.EFG} - V_{B.MPF} - V_{A.EMN} - V_{C.NPG}$$

$$\text{Để thấy } V_{B.MPF} = V_{A.EMN} = V_{C.NPG} = \frac{1}{4}V_{ABC.EFG} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Tức là } V_{ABC.MNP} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4 \cdot 4^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$$

Cách 2



$$S_{ABC} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}; V_{ABC.A'B'C'} = V$$

Hạ M_1, N_1, P_1 lần lượt vuông góc AB, AC, BC ,

khi đó M_1, N_1, P_1 lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC

$$\text{Khi đó } V_{ABCMNP} = V_{MNP.M_1N_1P_1} + V_{B.MPP_1M_1} + V_{C.NPP_1N_1} + V_{A.MNN_1M_1}$$

$$\text{Để thấy } S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{ABC}; MM_1 = \frac{1}{2}AA' \text{ nên } V_{MNP.M_1N_1P_1} = \frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{8}V$$

$$\text{Do đây là tam giác đều nên } V_{B.MPP_1M_1} = V_{C.NPP_1N_1} = V_{A.MNN_1M_1}$$

$$\text{Ta có } d(B; (MPP_1M_1)) = \frac{1}{2}d(B; (ACC'A')); S_{MPP_1M_1} = \frac{1}{4}S_{ACC'A'} \text{ nên } V_{B.MPP_1M_1} = \frac{1}{8}V_{B.ACC'A'} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{12}V.$$

$$\text{Do đó } V_{ABCMNP} = \frac{1}{8}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{12}V = \frac{3}{8}V = \frac{3}{8} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

Câu 41: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB' . Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 1.

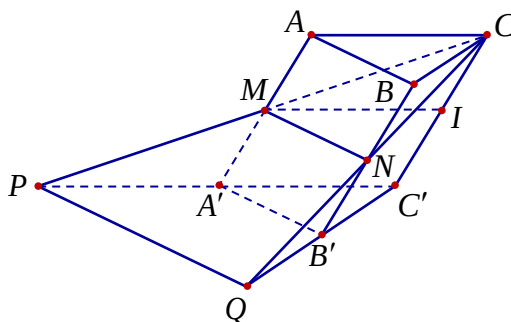
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của CC' , h là chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$

$$\text{Ta có } V_{C.C'PQ} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\Delta C'PQ} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot 4S_{\Delta C'A'B'} = \frac{4}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4}{3}.$$

$$V_{MNI.A'B'C'} = \frac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}.$$

$$V_{C.MNI} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot S_{MNI} = \frac{1}{6} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Suy ra } V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - (V_{MNI.A'B'C'} + V_{C.MNI}) = \frac{2}{3}.$$

Câu 42: (Vận dụng cao) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm A có thể tích V . Tính V .

A. $\frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$

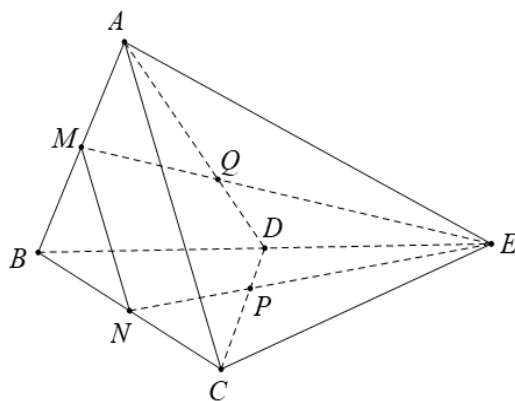
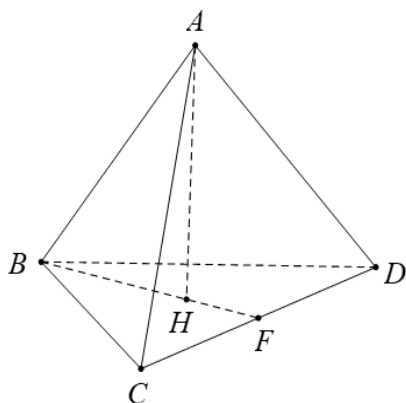
B. $\frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{18}$

D. $\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$

Lời giải

Chọn D



Tính thể tích T có khối tứ diện $ABCD$. Gọi F là trung điểm BC và H trọng tâm tam giác BCD .

$$\text{Ta có } BF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } BH = \frac{2}{3}BF = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ suy ra } BH = \sqrt{AB^2 - BF^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Thể tích tứ diện } ABCD \text{ là } T = \frac{1}{3}AH \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Gọi diện tích một mặt của tứ diện là S . Gọi P là giao điểm của NE và CD , tương tự cho Q .

Ta thấy P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác BEC và BEA nên $PD = \frac{1}{3}DC, QD = \frac{1}{3}AD$

Sử dụng công thức tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{B.ACE}}{V_{B.ACD}} = 2 \text{ nên } V_{B.ACE} = 2T; \frac{V_{E.BMN}}{V_{E.BAC}} = \frac{1}{4} \text{ nên } V_{E.BMN} = \frac{1}{4} \cdot 2T = \frac{T}{2}.$$

$$\text{Nên } V_{E.AMNC} = V_{E.ABC} - V_{E.BMN} = 2T - \frac{T}{2} = \frac{3}{2}T.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.DCA}} = \frac{1}{9} \text{ nên } V_{E.DPQ} = \frac{1}{9}T. \text{ Nên } V_{ACPQ} = T - \frac{1}{9}T = \frac{8}{9}T$$

$$\text{Suy ra } V = V_{E.AMNC} - V_{E.ACPQ} = \frac{3}{2}T - \frac{8}{9}T = \frac{11}{18}T = \frac{11a^3\sqrt{2}}{216}$$

89. Tỉ số thể tích

Câu 43: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD . Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$

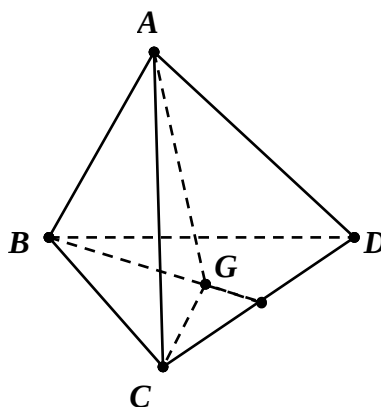
A. $V = 3$

B. $V = 4$

C. $V = 6$

D. $V = 5$

Lời giải



Chọn B

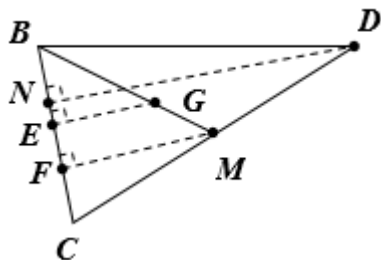
Cách 1:

Phân tích: tứ diện $ABCD$ và khối chóp $A.GBC$ có cùng đường cao là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) . Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có $S_{ABGC} = S_{ABGD} = S_{ACGD} \Rightarrow S_{ABCD} = 3S_{ABGC}$ (xem phần chứng minh).

Áp dụng công thức thể tích hình chóp ta có:

$$\left. \begin{array}{l} V_{ABCD} = \frac{1}{3}h \cdot S_{ABCD} \\ V_{A.GBC} = \frac{1}{3}h \cdot S_{\Delta GBC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{A.GBC}} = \frac{\frac{1}{3}h \cdot S_{ABCD}}{\frac{1}{3}h \cdot S_{\Delta GBC}} = \frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta GBC}} = 3 \Rightarrow V_{A.GBC} = \frac{1}{3}V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

Chứng minh: Đặt $DN = h; BC = a$.



$$+) MF // ND \Rightarrow \frac{MF}{DN} = \frac{CM}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow MF = \frac{1}{2} DN \Rightarrow MF = \frac{h}{2}.$$

$$+) GE // MF \Rightarrow \frac{GE}{MF} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow GE = \frac{2}{3} MF = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$$

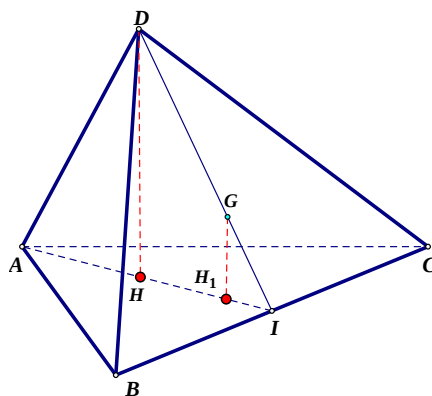
$$+) \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle GBC}} = \frac{\frac{1}{2} DN \cdot BC}{\frac{1}{2} GE \cdot BC} = \frac{\frac{1}{2} ha}{\frac{1}{2} \frac{h}{3} a} = 3 \Rightarrow S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle GBC}$$

$$+) \text{ Chứng minh tương tự có } S_{\triangle BCD} = 3S_{\triangle GBD} = 3S_{\triangle GCD} \Rightarrow S_{\triangle BGC} = S_{\triangle BGD} = S_{\triangle CGD}$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } \frac{d(G; (ABC))}{d(D; (ABC))} = \frac{GI}{DI} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G; (ABC)) = \frac{1}{3} d(D; (ABC)).$$

$$\text{Nên } V_{G.ABC} = \frac{1}{3} d(G; (ABC)) \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot V_{D.ABC} = 4$$



Câu 44: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho khối tứ diện có thể tích bằng V . Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

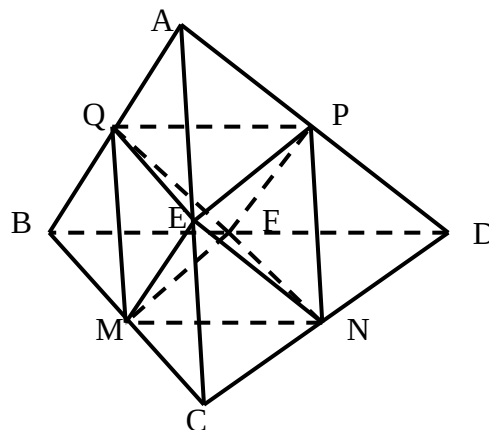
B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.

C. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.

D. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a . Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V'' = 4 \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{2}$.

(Vì với tứ diện cạnh giảm nửa thì thể tích giảm $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$)

Vậy $V' = \frac{V}{2} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác (giống nhau) có cùng đáy là hình bình hành

úp lại. Suy ra: $V' = 2V_{N.MEPF} = 4 \cdot V_{N.MEP} = 4 \cdot V_{P.MNE} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} V = \frac{1}{2} V$

(Do chiều cao giảm một nửa, cạnh đáy giảm một nửa nên diện tích giảm 4)

Cách 3. Ta có $\frac{V'}{V} = \frac{V - V_{A.QEP} - V_{B.QMF} - V_{C.MNE} - V_{D.NPF}}{V}$

$$= 1 - \frac{V_{A.QEP}}{V} - \frac{V_{B.QMF}}{V} - \frac{V_{C.MNE}}{V} - \frac{V_{D.NPF}}{V} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 45: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \frac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

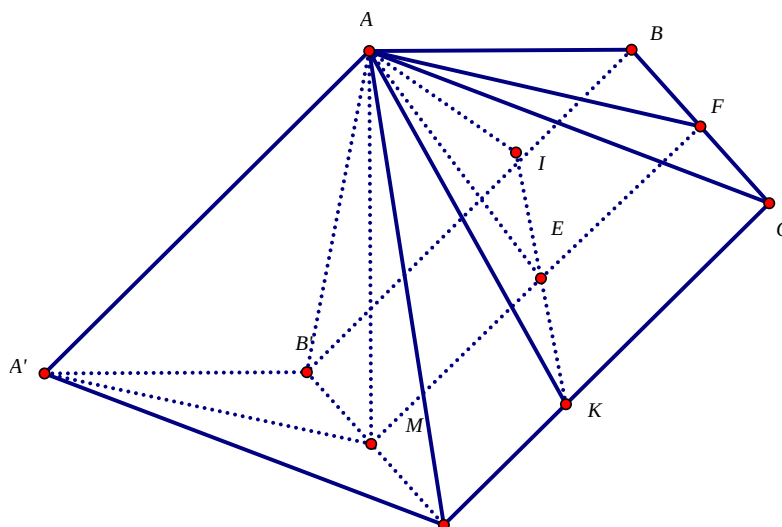
B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$ (hình vẽ).

Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2 $\Rightarrow AI = 1$, $AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của BC . $A'M = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{15}}{3}$

Ta có $\left. \begin{matrix} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{matrix} \right\} \Rightarrow BB' \perp (AIK) \Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC' \parallel BB' \Rightarrow d(C, BB') = d(K, BB') = IK = \sqrt{5} \Rightarrow \Delta AIK$ vuông tại A .

Gọi E là trung điểm của $IK \Rightarrow EF \parallel BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Lại có $AM \perp (ABC)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AIK) là góc giữa EF và AM

bằng góc $\widehat{AME} = \widehat{FAE}$. Ta có $\cos \widehat{FAE} = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30^\circ$.

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là ΔAIK nên ta có: $S_{AIK} =$

$$S_{ABC} \cos \widehat{EAF} \Rightarrow 1 = S_{ABC} \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = S_{ABC}.$$

Xét ΔAMF vuông tại A : $\tan \widehat{AMF} = \frac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow AM = \sqrt{5}$.

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

90. Các bài toán khác(góc, khoảng cách,..) Liên quan đến thể tích khối đa diện

Câu 46: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

A. $h = \frac{2}{3}a$

B. $h = \frac{4}{3}a$

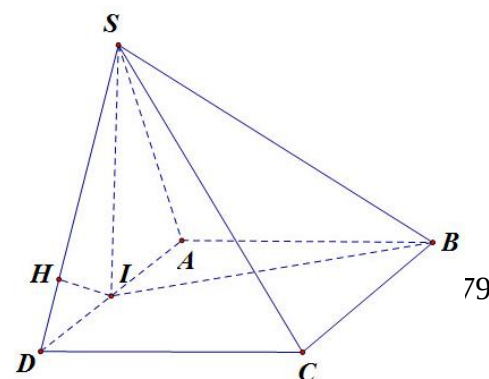
C. $h = \frac{8}{3}a$

D. $h = \frac{3}{4}a$

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của AD . Tam giác SAD cân tại S



$$\Rightarrow SI \perp AD$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

$\Rightarrow SI$ là đường cao của hình chóp.

$$\text{Theo giả thiết } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{4}{3} a^3 = \frac{1}{3} SI \cdot 2a^2 \Leftrightarrow SI = 2a$$

Vì AB song song với (SCD)

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(I, (SCD))$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SD .

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} SI \perp DC \\ ID \perp DC \end{cases} \Rightarrow IH \perp DC. \text{ Ta có } \begin{cases} IH \perp SD \\ IH \perp DC \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I, (SCD)) = IH$$

$$\text{Xét tam giác } SID \text{ vuông tại } I: \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{2a^2} \Rightarrow IH = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(I, (SCD)) = \frac{4}{3} a.$$

Câu 47: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, và $OA = OB = a, OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

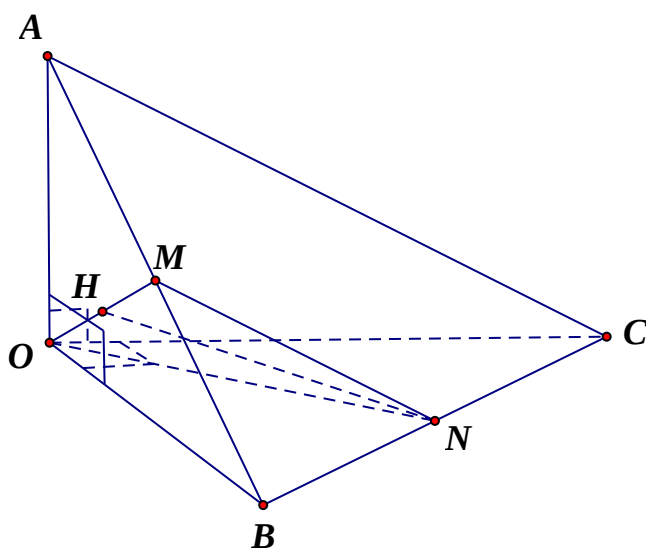
A. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

D. $\frac{2a}{3}$

Lời giải



Chọn D

Gọi N là trung điểm của BC suy ra $MN \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (OMN)$

$$\Rightarrow d(OM; AC) = d(C; (OMN)) = d(B; (OMN)).$$

$$V_{A.OBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \cdot 2a = \frac{1}{3} a^3.$$

$$\frac{V_{M.OBC}}{V_{A.OBC}} = \frac{d(M; (ABC))}{d(A; (ABC))} \cdot \frac{S_{OBN}}{S_{OBC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{M.OBC} = \frac{1}{12} a^3.$$

$$\text{Xét tam giác vuông cân } AOB: OM = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } BOC: ON = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a.$$

$$\text{Xét tam giác } BAC: MN = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a.$$

$$\text{Trong tam giác cân } OMN, \text{ gọi } H \text{ là trung điểm của } OM \text{ ta có } NH = \sqrt{NM^2 - HM^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} a.$$

$$\text{Suy ra } S_{OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot NH = \frac{3}{8} a^2.$$

$$\text{Vậy } d(B; OMN) = \frac{3V_{M.OBN}}{S_{OMN}} = \frac{2}{3} a.$$

91. Toán thực tế

Câu 48: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Ông A dự định sử dụng hết $6,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $2,26\text{m}^3$.

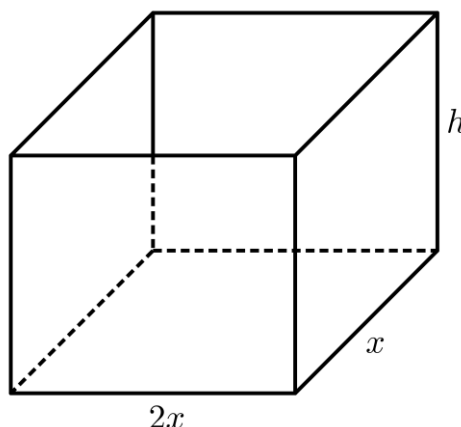
B. $1,61\text{m}^3$.

C. $1,33\text{m}^3$.

D. $1,50\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn D



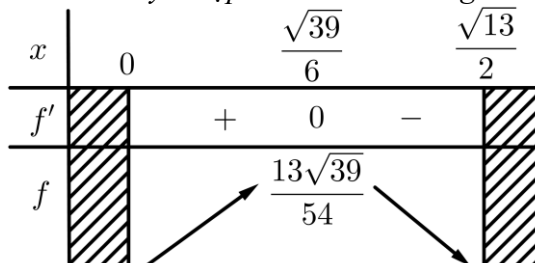
Giả sử bể cá có kích thước như hình vẽ.

$$\text{Ta có: } 2x^2 + 2xh + 4xh = 6,5 \Leftrightarrow h = \frac{6,5 - 2x^2}{6x}.$$

$$\text{Do } h > 0, x > 0 \text{ nên } 6,5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Lại có } V = 2x^2 h = \frac{6,5x - 2x^3}{3} = f(x), \text{ với } x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right).$$

$$f'(x) = \frac{13}{6} - 2x^2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{39}}{6}.$$



Vậy $V \leq f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50 \text{ m}^3$.

Câu 49: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao 200 mm . Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 mm . Giả định 1 m^3 gỗ có giá a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá $7a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A.** $85,5.a$ (đồng). **B.** $9,07.a$ (đồng). **C.** $8,45.a$ (đồng). **D.** $90,07.a$ (đồng).

Lời giải

Chọn C

Thể tích phần lõi than chì: $V_1 = \pi \cdot 0,001^2 \cdot 0,2 = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$.

Số tiền làm lõi than chì $T_1 = (2\pi \cdot 10^{-7}) 7a \cdot 10^6 = 1,4\pi a$ (đồng).

Thể tích phần thân bằng gỗ của bút

$$V_2 = 6 \cdot \frac{(0,003)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 0,2 - 2\pi \cdot 10^{-7} = [\sqrt{3} \cdot 27 \cdot 10^{-7} - 2\pi \cdot 10^{-7}] \text{ m}^3.$$

Số tiền làm phần thân bằng gỗ của bút

$$T_2 = [27\sqrt{3} \cdot 10^{-7} - \pi \cdot 2 \cdot 10^{-7}] a \cdot 10^6 = [2,7\sqrt{3} - \pi \cdot 0,2] a \text{ (đồng)}.$$

Vậy giá vật liệu làm bút chì là: $T = T_1 + T_2 \approx 8,45.a$ (đồng).

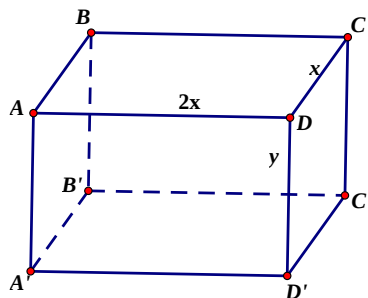
92. Cực trị

Câu 50: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Ông A dự định sử dụng hết $6,7 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A.** $1,57 \text{ m}^3$. **B.** $1,11 \text{ m}^3$. **C.** $1,23 \text{ m}^3$. **D.** $2,48 \text{ m}^3$.

Lời giải:

Đáp án A



Gọi chiều rộng của hình hộp là x , chiều dài là $2x$, chiều rộng là y .

Tổng diện tích các mặt bên là: $S = 2x^2 + 2(xy + 2xy) = 6,7 \Leftrightarrow 2x^2 + 6xy = 6,7 \Leftrightarrow y = \frac{6,7-2x^2}{6x}$

Thể tích $V = 2x^2y = \frac{1}{3}(6,7x - 2x^3)$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{3}(6,7x - 2x^3)$ với $x \in (0; \sqrt{\frac{6,7}{2}})$, giá trị lớn nhất của nó là 1,57 đạt được tại $x = \sqrt{\frac{6,7}{6}}$.

Câu 51: (Vận dụng cao) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V = 144$

B. $V = 576$

C. $V = 576\sqrt{2}$

D. $V = 144\sqrt{6}$

Lời giải

Chọn B

Gọi độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình chóp tứ giác đều lần lượt là $x; h (x, h > 0)$. Ta có đáy là hình vuông với độ dài nửa đường chéo bằng $\frac{x}{\sqrt{2}}$ suy ra độ dài cạnh bên $l = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{2}}$.

Ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $R = \frac{l^2}{2h} = \frac{h^2 + \frac{x^2}{2}}{2h} = 9 \Leftrightarrow x^2 = 36h - 2h^2$.

Diện tích đáy của hình chóp $S = x^2$ nên $V = \frac{1}{3}h \cdot x^2 = \frac{1}{3}h(36h - 2h^2)$

Ta có $\frac{1}{3}h \cdot (36h - 2h^2) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot h(36 - 2h) \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h+h+36-2h}{3}\right)^3 = 576 \Rightarrow V \leq 576$, dấu bằng xảy ra khi $h = h = 36 - 2h \Leftrightarrow h = 12, x = 12$ vậy $V_{max} = 576$.

Câu 52: (Vận dụng cao) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = 3\sqrt{2}$

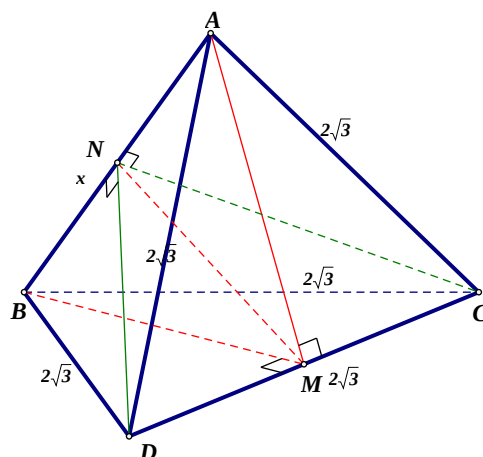
B. $x = \sqrt{6}$

C. $x = 2\sqrt{3}$

D. $x = \sqrt{14}$

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB .

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} CD \perp MB \\ CD \perp MA \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (MAB) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} CD \perp MN \\ CD \perp AB \end{array} \right.$$

Tam giác MAB cân tại M nên $MN \perp AB$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD) = \frac{1}{6} x \cdot 2\sqrt{3} \cdot MN \cdot \sin 90^\circ$$

$$= \frac{1}{6} x \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} x \cdot \sqrt{36 - x^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left[\frac{x^2 + (36 - x^2)}{2} \right] = 3\sqrt{3}.$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{36 - x^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$.

Câu 53: Vậy với $x = 3\sqrt{2}$ thì V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$. **(Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 2)$ và đi qua điểm $A(1; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 72.

B. 216.

C. 108.

D. 36.

Lời giải

Chọn D

Đặt $AB = a, AC = b, AD = c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A , nội tiếp mặt cầu (S) .

Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB ,

AC, AD và đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$.

$$\text{Xét } V = V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2 = \frac{1}{36}a^2b^2c^2.$$

$$\text{M}\ddot{a} \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 \geq a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{4R^2}{3}\right)^3 \geq 36.V^2 \Leftrightarrow V \leq R^3.\frac{4\sqrt{3}}{27}$$

Víði $R = IA = 3\sqrt{3}$.

Vậy V_{max} . (lời giải của thầy Bình Hoang)

Câu 54: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 2)$ và đi qua điểm $A(0; 1; 1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho $AB,$

AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{8}{3}$.

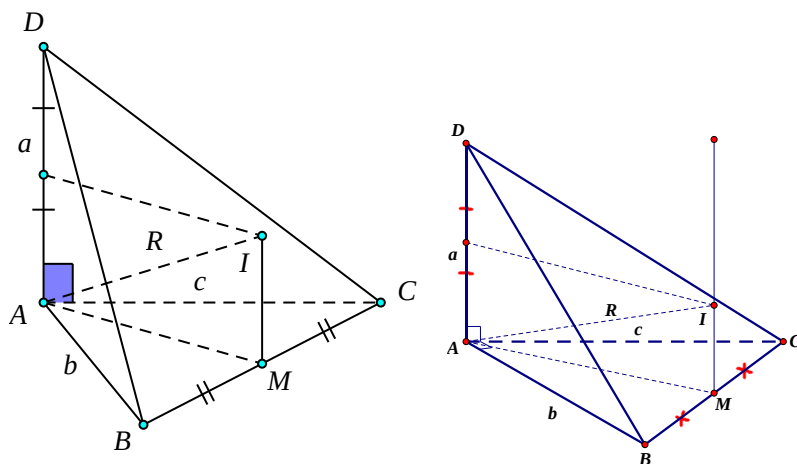
B. 4.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 8.

Lời giải

Chọn C



Đặt: $AD = a, AB = b, AC = c$.

Ta có:

- $R = IA = \sqrt{3}$.
- $AM = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}; IM = \frac{a}{2} \Rightarrow R^2 = IA^2 = \frac{b^2+a^2+c^2}{4} = 3$.

AD BĐT Cosi: $b^2 + a^2 + c^2 \geq 3\sqrt{b^2a^2c^2} \Rightarrow b^2a^2c^2 \leq \frac{(b^2+a^2+c^2)^3}{27} \Leftrightarrow abc \leq 8$.

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}abc \leq \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}.$$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.A	4.A	5.A	6.C	7.B	8.C	9.B	10.D
11.D	12.A	13.B	14.A	15.D	16.D	17.D	18.B	19.A	20.C
21.B	22.A	23.D	24.D	25.A	26.A	27.B	28.D	29.D	30.C
31.A	32.C	33.D	34.A	35.B	36.B	37.A	38.A	39.A	40.C
41.D	42.D	43.B	44.A	45.D	46.B	47.D	48.D	49.C	50.A
51.B	52.A	53.D	54.C						

93. Thể tích khối nón, khối trụ

Câu 1: (Nhận biết) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho khối (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π . Tính thể tích V của khối nón (N)

A. $V = 12\pi$.

B. $V = 20\pi$.

C. $V = 36\pi$.

D. $V = 60\pi$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } S_{xq} = 15\pi \Rightarrow \pi r l = 15\pi \Leftrightarrow l = 5 \Rightarrow h = 4.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 12\pi.$$

Câu 2: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h bằng

- A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $2\pi r h$. C. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. D. $\pi r^2 h$.

Lời giải

Chọn D

$$V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h.$$

Câu 3: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính r là

- A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $\pi r^2 h$. C. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. D. $2\pi r^2 h$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính r là $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Câu 4: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Thể tích của khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

- A. $\pi r^2 h$. B. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. C. $2\pi r^2 h$ D. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Câu 5: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính đáy r là

- A. $2\pi r^2 h$. B. $\pi r^2 h$. C. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. D. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$.

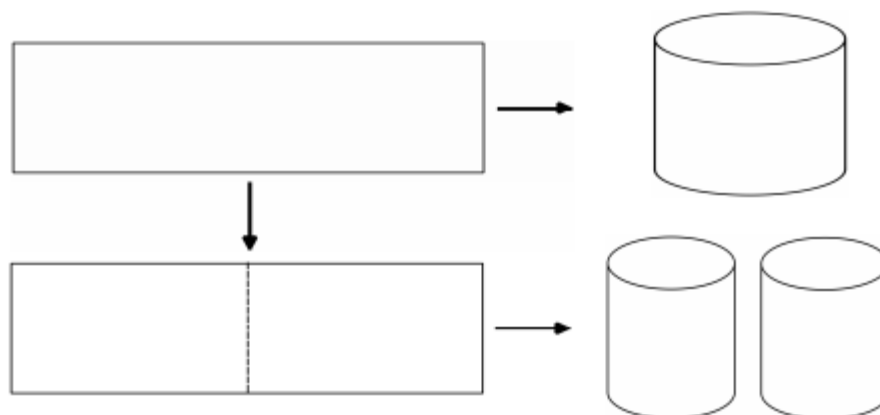
Lời giải

Chọn C

Câu 6: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm.240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):.

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = 1$

C. $\frac{V_1}{V_2} = 2$

D. $\frac{V_1}{V_2} = 4$

Lời giải

Chọn C

Ban đầu bán kính đáy là R , sau khi cắt tấm tôn bán kính đáy là $\frac{R}{2}$

Đường cao của các khối trụ là không đổi

Ta có $V_1 = h\pi R^2$, $V_2 = 2 \cdot h\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = h\pi \frac{R^2}{2}$. Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V_2} = 2$

Câu 7: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón:

A. $V = 16\pi\sqrt{3}$

B. $V = \frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$

C. $V = 12\pi$

D. $V = 4\pi$

Lời giải

Chọn D

Ta có $V = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 4\pi$.

Câu 8: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, có bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,8m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 2,8m.

B. 2,6m.

C. 2,1m.

D. 2,3m.

Lời giải

Chọn C

Gọi chiều cao của các bể nước hình trụ là h . Bán kính đáy của bể nước dự định làm là R .

Thể tích của bể nước hình trụ có bán kính đáy 1m là $V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot h = \pi h$ (m^3).

Thể tích của bể nước hình trụ có bán kính đáy 1,8m là $V_2 = \pi \cdot 1,8^2 \cdot h = 3,24\pi h$ (m^3).

Khi đó bể nước dự định làm có thể tích là $V_3 = V_1 + V_2 = \pi \cdot h + 3,24\pi \cdot h = 4,24\pi h$ (m^3).

Mà $V_3 = \pi \cdot R^2 \cdot h \Leftrightarrow 4,24\pi h = \pi \cdot R^2 \cdot h \Leftrightarrow R^2 = 4,24 \Leftrightarrow R \approx 2,06(m)$.

Vậy bán kính đáy của bể nước dự định làm là $R \approx 2,06$ (m).

Câu 9: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Tính thể tích V của khối trụ có bán kính $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

A. $V = 32\pi$

B. $V = 64\sqrt{2}\pi$

C. $V = 128\pi$

D. $V = 32\sqrt{2}\pi$

Lời giải

Chọn B

$$V = \pi r^2 h = 16 \cdot 4\sqrt{2}\pi = 64\sqrt{2}\pi$$

Câu 10: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$.

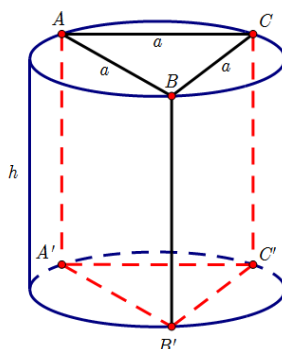
B. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$.

C. $V = 3\pi a^2 h$.

D. $V = \pi a^2 h$.

Lời giải

Chọn B

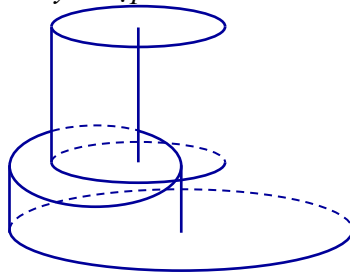


Khối trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều có hình tròn đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác đáy của lăng trụ, và chiều cao bằng chiều cao lăng trụ.

Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là $V = h \cdot S = h \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2 h}{3}$ (đvtt).

Câu 11: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ (H_1), (H_2) xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \frac{1}{2}r_1, h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng 30 (cm^3), thể tích khối trụ (H_1) bằng



A. $24 (\text{cm}^3)$.

B. $15 (\text{cm}^3)$.

C. $20 (\text{cm}^3)$.

D. $10 (\text{cm}^3)$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối trụ (H_1) là $V_1 = \pi r_1^2 h_1$

Thể tích của khối trụ (H_2) là $V_2 = \pi r_2^2 h_2$, suy ra $V_2 = \pi \left(\frac{1}{2} r_1\right)^2 \cdot 2h_1 = \frac{1}{2} V_1$

Theo bài ra ta có $V_1 + V_2 = 30 (\text{cm}^3) \Leftrightarrow 3V_2 = 30 (\text{cm}^3)$

Do đó ta có thể tích hai khối trụ lần lượt là $V_1 = 20 (\text{cm}^3)$, $V_2 = 10 (\text{cm}^3)$

Câu 12: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Trong hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$

A. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$

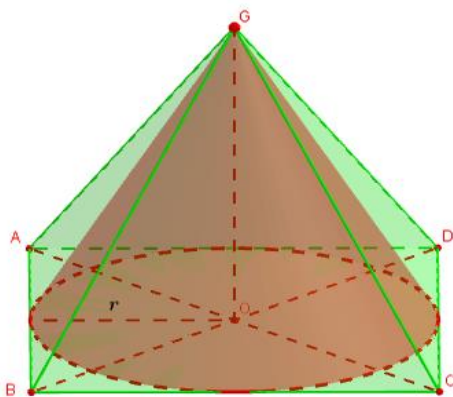
B. $V = \frac{\pi a^3}{2}$

C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$

D. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Lại có $OC = \frac{AC}{2} = a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OC^2} = a$.

Bán kính $r = \frac{AB}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Suy thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{6}$.

94. Diện tích xung quanh, toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính ...

Câu 13: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian, cho tam giác vuông ABC tại A , $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB .

A. $l = a$

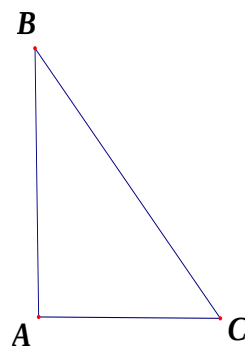
B. $l = a\sqrt{2}$

C. $l = a\sqrt{3}$

D. $l = 2a$

Lời giải

Chọn D



Xét tam giác ABC vuông tại A ta có $BC^2 = AC^2 + AB^2 = 4a^2 \Leftrightarrow BC = 2a$

Đường sinh của hình nón cũng chính là cạnh huyền của tam giác $\Leftrightarrow l = BC = 2a$

Câu 14: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

- A. $2\sqrt{2}a$. B. $3a$. C. $2a$. D. $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{xq} = \pi r l \Leftrightarrow 3\pi a^2 = \pi a l \Leftrightarrow l = \frac{3\pi a^2}{\pi a} = 3a$.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón đã cho là $3a$.

Câu 15: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l bằng

- A. $\pi r l$. B. $4\pi r l$. C. $2\pi r l$. D. $\frac{4}{3}\pi r l$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay: $S_{xq} = 2\pi r l$.

Câu 16: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

- A. $S_{tp} = 4\pi$ B. $S_{tp} = 2\pi$ C. $S_{tp} = 6\pi$ D. $S_{tp} = 10\pi$

Lời giải

Chọn A

Quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh MN nên hình trụ có bán kính $r = AM = \frac{AD}{2} = 1$

Vậy diện tích toàn phần của hình trụ $S_{tp} = 2\pi r \cdot AB + 2\pi r^2 = 2\pi + 2\pi = 4\pi$

Câu 17: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

B. $l = 2\sqrt{2}a$.

C. $l = \frac{3a}{2}$.

D. $l = 3a$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \pi al = 3\pi a^2 \Rightarrow l = 3a$.

Câu 18: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

A. $S_{xq} = 12\pi$

B. $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi$

C. $S_{xq} = \sqrt{39}\pi$

D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = 4\sqrt{3}\pi$.

Câu 19: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

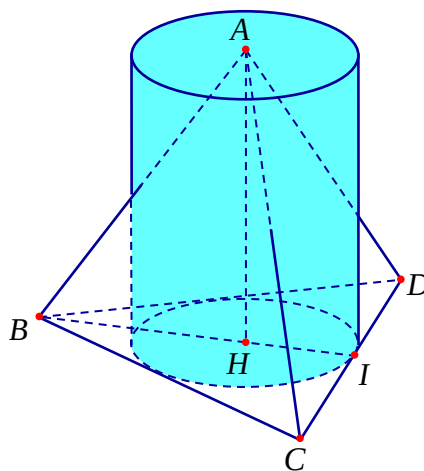
B. $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$.

C. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$.

D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Tam giác BCD đều cạnh 4 có diện tích: $S_{BCD} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

Áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối tứ diện đều cạnh a là $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{16}{3}\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Độ dài đường cao khối tứ diện: $h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Bán kính đáy đường tròn nội tiếp tam giác BCD : $r = \frac{S}{p} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 20: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Cho hình trụ có chiều cao $5\sqrt{3}$. Cắt mặt trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

- A. $10\sqrt{3}\pi$. B. $5\sqrt{39}\pi$. C. $20\sqrt{3}\pi$. D. $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có hình vẽ bên, với khoảng cách từ O đến mặt phẳng cắt

là $OH = 1$ (với H là trung điểm cạnh AB); $AD = BC = 5\sqrt{3}$.

Gọi R là bán kính đường tròn mặt đáy của hình trụ.

Ta có diện tích thiết diện: $S_{ABCD} = 30$.

$$\Leftrightarrow AB \cdot BC = 30$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot 5\sqrt{3} = 30$$

$$\Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}.$$

Suy ra: $AH = \sqrt{3}$.

$$OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 = R.$$

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng:

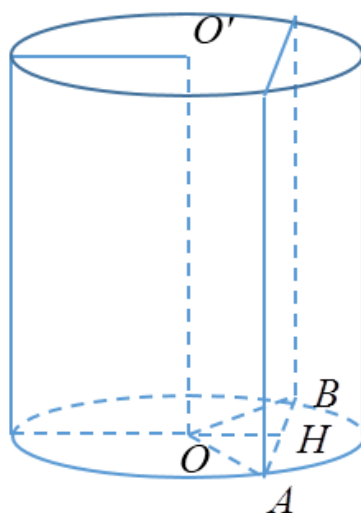
$$S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot l = 2\pi \cdot 2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi.$$

Câu 21: (Vận dụng) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

- A. $24\sqrt{2}\pi$. B. $8\sqrt{2}\pi$. C. $12\sqrt{2}\pi$. D. $16\sqrt{2}\pi$.

Lời giải

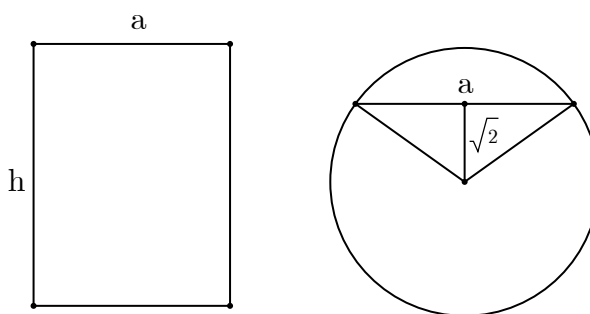
Chọn D



Ta có $AB = \frac{16}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, $OH = \sqrt{2}$ nên $r = OA = OB = 2$.

Do đó diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 2,4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\pi$.

Cách 2:



Ta có thiết diện và đáy của hình trụ như hình vẽ trên.

Theo đề ta có $a \cdot h = 16 \Rightarrow a \cdot 4\sqrt{2} = 16 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}$.

Mà $R^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2 + (\sqrt{2})^2 = 4 \Rightarrow R = 2$.

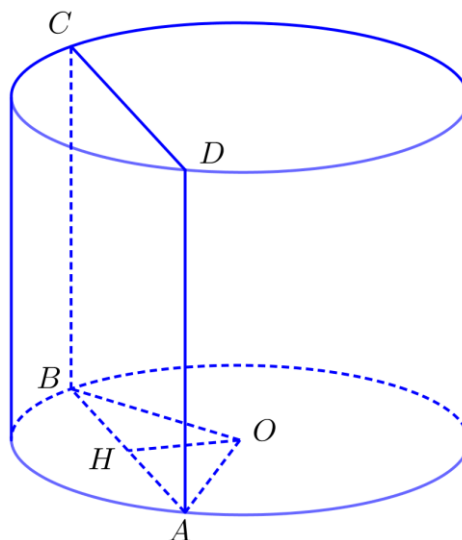
Vậy ta tính được diện tích xung quanh của hình trụ $S = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\pi$.

Câu 22: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\sqrt{10}\pi$. **B.** $6\sqrt{34}\pi$. **C.** $3\sqrt{10}\pi$. **D.** $3\sqrt{34}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB$ và $OH \perp BC$ nên $OH \perp (ABCD) \Rightarrow OH = d(O, (ABCD)) = 1$.

Ta có $S_{ABCD} = 12\sqrt{2} \Rightarrow AB \cdot h = 12\sqrt{2} \Rightarrow AB = 4$.

Mà $AH = \frac{1}{2}AB = 2$.

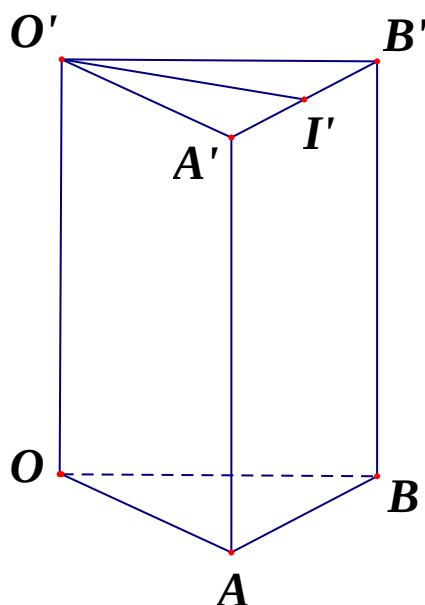
$R = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{5}$ và $l = h = 3\sqrt{2}$.

Vậy $S_{xq} = 2\pi Rl = 6\pi\sqrt{10}$.

- Câu 23: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104)** Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 18. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng
- A.** $6\sqrt{3}\pi$. **B.** $6\sqrt{39}\pi$. **C.** $3\sqrt{39}\pi$. **D.** $12\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy hình trụ $\Rightarrow OO' = 3\sqrt{3}$.

Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được là hình chữ nhật $ABB'A'$ có diện tích bằng 18.

Gọi I' là trung điểm của cạnh $A'B'$, ta có $d(O', (ABB'A')) = O'I' \Rightarrow O'I' = 1$.

Do $ABB'A'$ là hình chữ nhật nên $S_{AA'B'B} = AA' \cdot A'B' \Rightarrow A'B' = \frac{S_{AA'B'B}}{AA'} = \frac{S_{AA'B'B}}{OO'} = \frac{18}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$
 $\Rightarrow A'I' = \sqrt{3}$.

Tam giác $\Delta O'I'A'$ vuông tại $I' \Rightarrow O'A' = \sqrt{O'I'^2 + I'A'^2} = 2$.

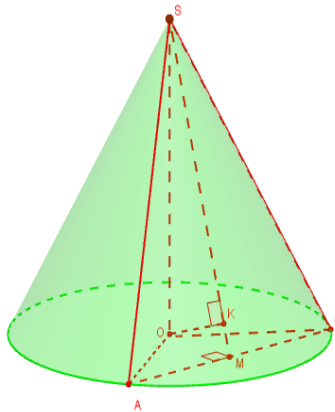
Vậy $S_{xq} = \pi \cdot O'A' \cdot OO' = \pi \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\pi$.

- Câu 24: (Vận dụng cao) (Đề THPTQG 2017 Mã 123)** Cho một hình nón có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P) .

- A.** $d = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ **B.** $d = a$ **C.** $d = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ **D.** $d = \frac{\sqrt{5}a}{5}$

Lời giải

Chọn A



Có $(P) \equiv (SAB)$.

Ta có $SO = a = h, OA = OB = r = 2a, AB = 2a\sqrt{3}$, gọi M là hình chiếu của O lên AB suy ra M là trung điểm AB , gọi H là hình chiếu của O lên SM suy ra $d(O; (SAB)) = OH$.

Ta tính được $OM = \sqrt{OA^2 - MA^2} = a$ suy ra SOM là tam giác vuông cân tại O , suy ra H là trung điểm của SM nên $OH = \frac{SM}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

95. Khối tròn xoay nội tiếp, ngoại tiếp khối đa diện

Câu 25: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC .

- A. $V = \pi a^3$ B. $V = \sqrt{3}\pi a^3$ C. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$ D. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $AC = AB \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$. Vậy thể tích khối nón là : $V = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

Câu 26: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD=8$, $CD=6$, $AC'=12$. Tính diện tích toàn phần S_p của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

- A. $S_p = 576\pi$. B. $S_p = 10(2\sqrt{11}+5)\pi$.
C. $S_p = 26\pi$. D. $S_p = 5(4\sqrt{11}+4)\pi$.

Lời giải

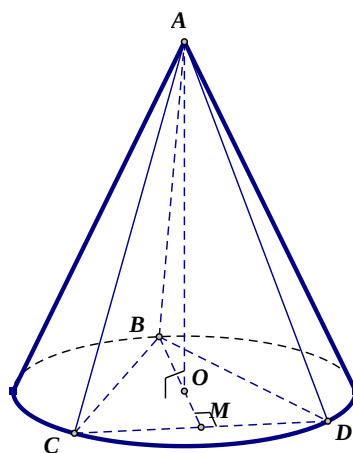
Chọn B

Hình trụ có : bán kính đáy $R = \frac{1}{2}A'C' = 5$, đường sinh, chiều cao $l = h = AA' = 2\sqrt{11}$.

$$S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 10(2\sqrt{11} + 5)\pi.$$

A. $S_{xq} = 3\sqrt{3}\pi a^2$ **B.** $S_{xq} = 6\sqrt{3}\pi a^2$ **C.** $S_{xq} = 12\pi a^2$ **D.** $S_{xq} = 6\pi a^2$

Chọn A



Ta có $BM = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$; $r = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

$$S_{xq} = \pi r l = \pi r . AB = \pi a \sqrt{3} . 3a = 3\sqrt{3} . \pi a^2 .$$

A. $V = \sqrt[3]{3}\pi$ **B.** $V = \sqrt[9]{3}\pi$ **C.** $V = 3\pi$ **D.** $V = 9\pi$

Chon C

$$\text{Ta có } V_1 + V_2 = V_3 \Leftrightarrow \pi R_1^2 h + \pi R_2^2 h = \pi R_3^2 h \Leftrightarrow R_3 = \sqrt{1 + 1,4^2} = 1,7.$$

Câu 31: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và 1,5 m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới hình trụ có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A.** 1,6 m. **B.** 2,5 m. **C.** 1,8 m. **D.** 2,1 m.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Tổng thể tích của hai bể ban đầu là: } V = \pi \cdot 1^2 \cdot h + \pi \cdot 1,5^2 \cdot h = \pi h \cdot \frac{13}{4}.$$

$$\Rightarrow R_d = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \approx 1,8 \text{ m.}$$

Câu 32: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Một chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút chì và đáy là hình tròn bán kính 1 mm. Giả định 1 m³ gỗ có giá trị a (triệu đồng), 1 m³ than chì có giá trị $8a$ (triệu đồng). khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A.** 9,7.a (đồng). **B.** 97,03.a (đồng). **C.** 90,7.a (đồng). **D.** 9,07.a (đồng).

Lời giải

Chọn D

$$\text{Thể tích phần phần lõi được làm bằng than chì: } V_r = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 = 0,2 \cdot 10^{-6} \pi \text{ (m}^3\text{)}.$$

Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều:

$$V = B \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0,2 = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} \text{ (m}^3\text{)}.$$

$$\text{Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ: } V_t = V - V_r = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6} \pi \text{ (m}^3\text{)}.$$

Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì:

$$0,2 \cdot 10^{-6} \pi \cdot 8a + \left(\frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6} \pi \right) a \approx 9,07 \cdot 10^{-6} \cdot a \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 33: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3mm và chiều cao bằng 200mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1mm. Giả định 1m³ gỗ có giá a (triệu đồng), 1m³ than chì có giá $6a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây.

- A.** 84,5.a (đồng). **B.** 78,2.a (đồng). **C.** 8,45.a (đồng). **D.** 7,82.a (đồng).

Hướng dẫn giải

Chọn D

Thể tích phần phần lõi được làm bằng than chì: $V_r = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 = 0,2 \cdot 10^{-6} \pi \text{ (m}^3\text{)}.$

Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều:

$$V = B \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0,2 = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} \text{ (m}^3\text{)}.$$

Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ: $V_t = V - V_r = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6} \pi \text{ (m}^3\text{)}.$

Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì:

$$0,2 \cdot 10^{-6} \pi \cdot 6a + \left(\frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6} \pi \right) a \approx 7,82 \cdot 10^{-6} \cdot a \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 34: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Giả định 1m^3 gỗ có giá a (triệu đồng). 1m^3 than chì có giá $9a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A.** $97,03a$ đồng. **B.** $10,33a$ đồng. **C.** $9,7a$ đồng. **D.** $103,3a$ đồng.

Lời giải

Chọn C

$$3\text{mm} = 0,003\text{m}; 200\text{mm} = 0,2\text{m}; 1\text{mm} = 0,001\text{m}$$

Diện tích đáy của phần than chì: $S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 10^{-6} \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích đáy phần bút bằng gỗ: $S_2 = 6S_{OAB} - S_1 = \left(6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} - \pi \right) \cdot 10^{-6} = \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi \right) \cdot 10^{-6} \text{ (m}^2\text{)}$

Thể tích than chì cần dùng: $V_1 = S_1 \cdot h = \pi r^2 0,2 = 0,2\pi \cdot 10^{-6} \text{ (m}^3\text{)}$

Thể tích gỗ làm bút chì: $V_2 = S_2 \cdot h = \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi \right) \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^3\text{)}$

Tiền làm một cây bút: $V_1 \cdot 9a + V_2 \cdot a = (9V_1 + V_2)a = \left(9 \cdot 0,2\pi \cdot 10^{-6} + \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} - \pi \right) \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} \right) a = 9,7a \text{ (đồng)}$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.A	4.D	5.C	6.C	7.D	8.C	9.B	10.B
11.C	12.C	13.D	14.B	15.C	16.A	17.D	18.B	19.A	20.C
21.D	22.A	23.A	24.A	25.D	26.B	27.A	28.C	29.D	30.A
31.C	32.D	33.D	34.C						

97. Bài toán sử dụng định nghĩa, tính chất, vị trí tương đối

Câu 1: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Diện tích mặt cầu bán kính R bằng

- A. $\frac{4}{3}\pi R^2$. B. $2\pi R^2$. C. $4\pi R^2$. D. πR^2 .

Lời giải

Chọn C

Câu 2: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Thể tích của khối cầu bán kính R bằng:

- A. $\frac{4}{3}\pi R^3$. B. $4\pi R^3$. C. $2\pi R^3$. D. $\frac{3}{4}\pi R^3$.

Lời giải

Chọn A

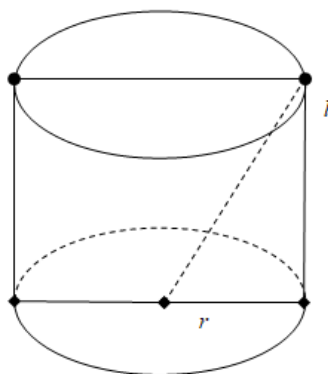
Lý thuyết về mặt cầu và khối cầu. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 3: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

- A. $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ B. $r = 5$ C. $r = \frac{5\sqrt{2}\pi}{2}$ D. $r = 5\sqrt{\pi}$

Lời giải

Chọn A



Diện tích xung quanh của hình trụ: $2\pi rl$ (l : độ dài đường sinh) Có $l = 2r$

$$S_{xq} = 2\pi rl \Leftrightarrow 2\pi rl = 50\pi \Leftrightarrow 2\pi r 2r = 50\pi \Leftrightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

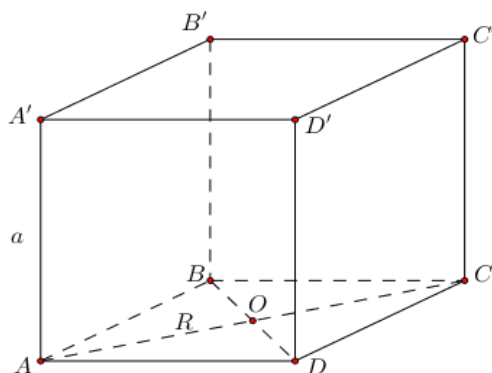
98. Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện

Câu 4: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{\pi a^3}{4}$ B. $V = \pi a^3$ C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$ D. $V = \frac{\pi a^3}{2}$

Lời giải

Chọn D



Bán kính đường tròn đáy là $R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; chiều cao $h = a$.

Vậy thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 5: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{5a}{2}$

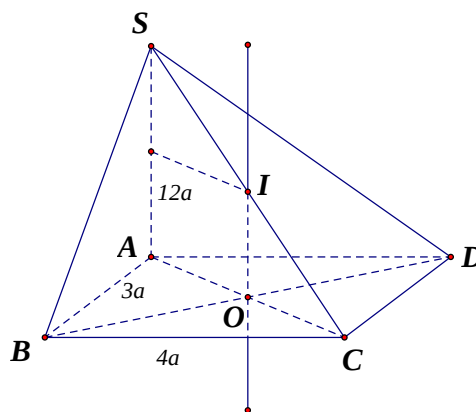
B. $R = \frac{17a}{2}$

C. $R = \frac{13a}{2}$

D. $R = 6a$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$

Vì $SA \perp AC$ nên

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 13a$$

Nhận thấy: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$. Tương tự: $CD \perp SD$

Do các điểm A, B, D đều nhìn đoạn thẳng SC dưới một góc vuông nên gọi I là trung điểm của đoạn thẳng SC thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Vậy $R = \frac{SC}{2} = \frac{13a}{2}$.

Câu 6: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Tìm bán kính R mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

A. 100

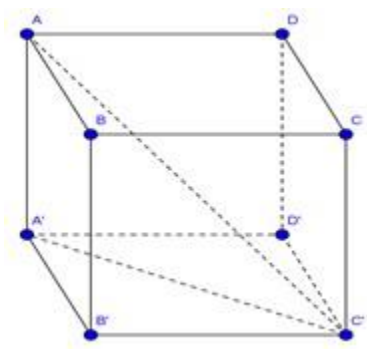
B. $R = 2\sqrt{3}a$

C. $R = \sqrt{3}a$

D. $R = a$

Lời giải

Chọn C



Đường chéo của hình lập phương: $AC' = 2\sqrt{3}a$. Bán kính $R = \frac{AC'}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 7: (Vận dụng) (Đề Minh Họa 2017) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$

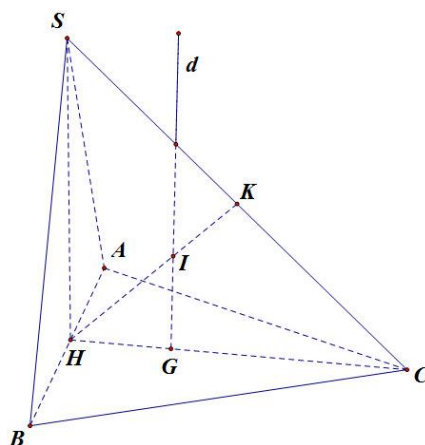
B. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$

C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$

D. $V = \frac{5\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB

Vì $\triangle SAB$ đều nên $SH \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH$ là đường cao của hình chóp $S.ABC$

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Qua G kẻ đường thẳng d song song với $SH \Rightarrow d \perp (ABC)$

Gọi K là trung điểm của SC , vì $\triangle SHC$ vuông cân tại H ($SH = HC$) $\Rightarrow HK$ là đường trung trực ứng với SC .

Gọi $I = d \cap HK$ ta có $\begin{cases} IA = IB = IC \\ IS = IC \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS$

$\Rightarrow I$ là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Xét hai tam giác đều $\triangle ABC = \triangle SAB$ có độ dài các cạnh bằng 1.

G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow CG = \frac{2}{3}CH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle HIG$ vuông tại G ta có $IG = HG = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow IC = \frac{\sqrt{15}}{6}$

Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $V = \frac{4}{3}\pi IC^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \frac{5\pi\sqrt{15}}{54}$.

Cách 2:

R_b, R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB và $ABC \Rightarrow R_b = R_d = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ là $R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \frac{GT^2}{4}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{15}}{6}$

Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\pi\sqrt{15}}{54}$.

Câu 8: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \sqrt{3}a$.

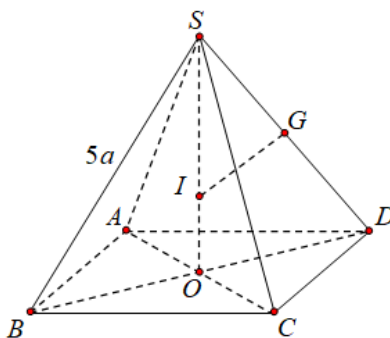
B. $R = \sqrt{2}a$.

C. $R = \frac{25a}{8}$.

D. $R = 2a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là trung điểm SD , $GI \perp SD$, $I \in SO$.

Ta có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$ nên $BD = 3\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2} = 6a$, $OD = 3a$.

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = 4a$

Ta có $\triangle SOD \sim \triangle SGI$ (g-g), suy ra $\frac{SO}{SG} = \frac{SD}{SI} \Rightarrow 4a \cdot R = \frac{1}{2}(5a)^2 \Rightarrow R = \frac{25a}{8}$

Câu 9: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$ và $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

A. $R = 3a$

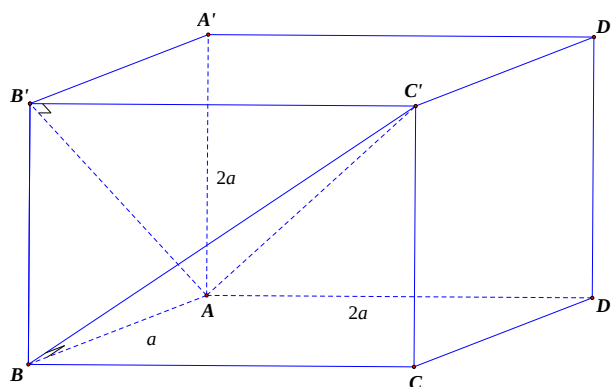
B. $R = \frac{3a}{4}$

C. $R = \frac{3a}{2}$

D. $R = 2a$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC'} = 90^\circ$ nên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ có đường kính AC' . Do đó bán kính là $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = \frac{3a}{2}$.

Câu 10: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C , AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) , $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$

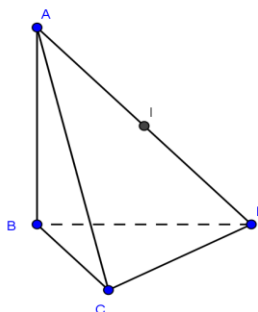
B. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$

C. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$

D. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn C



Tam giác BCD vuông tại C nên áp dụng định lí Pitago, ta được $BD = 5a$.

Tam giác ABD vuông tại B nên áp dụng định lí Pitago, ta được $AD = 5a\sqrt{2}$.

Vì B và C cùng nhìn AD dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là trung điểm I của AD . Bán kính mặt cầu này là: $R = \frac{AD}{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Cho mặt cầu bán kính R ngoại tiếp một hình lập phương cạnh a . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$

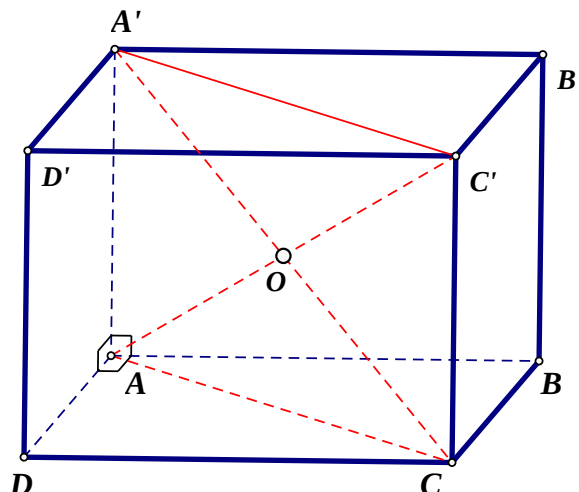
B. $a = 2R$

C. $a = 2\sqrt{3}R$

D. $a = \frac{\sqrt{3}R}{3}$

Lời giải

Chọn A



Nối $AC' \cap A'C = O$. Ta có: O cách đều các đỉnh của hình lập phương do đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp, bán kính mặt cầu:

$$R = OA = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + AD^2 + AB^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

99. Toán tổng hợp về mặt cầu

Câu 12: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính $R = 3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H . Gọi T là giao điểm của tia HO với (S) , tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C) .

A. $V = \frac{32\pi}{3}$

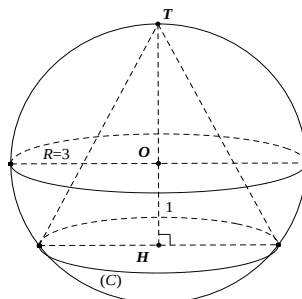
B. $V = 16\pi$

C. $V = \frac{16\pi}{3}$

D. $V = 32\pi$

Lời giải

Chọn A



Gọi r là bán kính đường tròn (C) thì r là bán kính đáy của hình nón a có: $r^2 = R^2 - OH^2 = 8$. $HT = HO + OT = 1 + 3 = 4 = h$ là chiều cao của hình nón

Suy ra: $V_{nón} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{(C)} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 8 = \frac{32\pi}{3}$

Câu 13: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD 2017) Cho mặt cầu tâm O bán kính R . Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) . Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao $h (h > R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

A. $h = \sqrt{3}R$

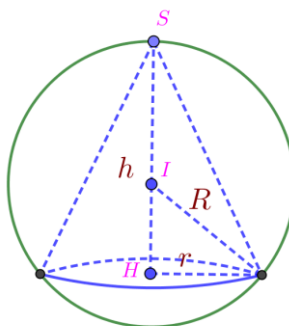
B. $h = \sqrt{2}R$

C. $h = \frac{4R}{3}$

D. $h = \frac{3R}{2}$

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

Gọi I là tâm mặt cầu và H , r là tâm và bán kính của (C) .

Ta có $IH = h - R$ và $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2Rh - h^2$.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{\pi}{3}h(2Rh - h^2)$.

Ta có $h \cdot h \cdot (4R - 2h) \leq \left(\frac{h + h + 4R - 2h}{3}\right)^3 = \left(\frac{4R}{3}\right)^3 \Rightarrow h^2(2R - h) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4R}{3}\right)^3$.

Do đó V lớn nhất khi $h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}$.

Cách 2:

Gọi I là tâm mặt cầu và H , r là tâm và bán kính của (C) .

Ta có $IH = h - R$ và $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2Rh - h^2$.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{\pi}{3}h(2Rh - h^2) = \frac{\pi}{3}(2h^2R - h^3)$

Xét hàm $f(h) = -h^3 + 2h^2R$, $h \in (R, 2R)$, có $f'(h) = -3h^2 + 4hR$.

$$f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0 \text{ hoặc } h = \frac{4R}{3}.$$

Bảng biến thiên

h	R	$\frac{4R}{3}$	$2R$
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$	$\frac{32R^3}{27}$		

Câu 14: $\max f(h) = \frac{32}{27}R^3$, tại $h = \frac{4R}{3}$. Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn

nhất là $V = \frac{1}{3}\pi \frac{32}{27}R^3 = \frac{32}{81}\pi R^3$ khi $h = \frac{4R}{3}$. **(Vận dụng cao) (Đề chính thức BGD 2017 mã**

đề 110) Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S) . Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S) . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{16}$

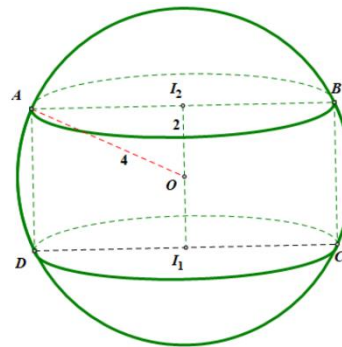
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn B



Ta có $r = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$. Thể tích của khối trụ (H) là $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 12 \cdot 4 = 48\pi$.

Thể tích của khối cầu (S) là $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.A	4.D	5.C	6.C	7	8.C	9.C	10.C
11.A	12.A	13.C	14.B						

100. Tìm tọa độ điểm, véc-tơ liên quan đến hệ trục Oxyz

Câu 1: (Nhận biết) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(-2; 2; 1)$. B. $I(1; 0; 4)$. C. $I(2; 0; 8)$. D. $I(2; -2; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB với $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$ được tính bởi

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4)$$

Câu 2: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm

$A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $\pi = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx}{\sqrt{x(x+1)}}$ là điểm

- A. $\int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$. B. $N(0; -1; 1)$. C. $P(0; -1; 0)$. D.

$Q(0; 0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Tự luận:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $\pi = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx}{\sqrt{x(x+1)}}$.

Mặt phẳng (Oyz) : $x = 0$ có VTPT $\vec{n} = (1; 0; 0)$.

Đường thẳng AH qua $A(3; -1; 1)$ và vuông góc với (Oyz) nên nhận $\vec{n} = (1; 0; 0)$ làm VTCP.

$$\Rightarrow AH: \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow H(3+t; -1; 1).$$

Mà $H \in (Oyz) \Rightarrow 3+t = 0 \Rightarrow H(0; -1; 1)$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Với $M(a; b; c)$ thì hình chiếu của nó trên (Oyz) là $M'(0; b; c)$. Do đó chọn đáp án **B**.

Câu 3: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

- A. $OA = 3$ B. $OA = 9$ C. $OA = \sqrt{5}$ D. $OA = 5$

Lời giải

Chọn A

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Câu 4: **(Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là:

- A.** $(3; 3; -1)$. **B.** $(-1; -1; -3)$. **C.** $(3; 1; 1)$. **D.** $(1; 1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tọa độ của một véc tơ là tọa độ của điểm sau trừ đi tọa độ điểm đầu.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1; 2 - 1; 1 - (-2)) \text{ hay } \overrightarrow{AB} = (1; 1; 3).$$

Câu 5: **(Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A.** $(2; 1; 0)$. **B.** $(0; 0; -1)$. **C.** $(2; 0; 0)$. **D.** $(0; 1; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 6: **(Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A.** $(3; 0; 0)$. **B.** $(3; -1; 0)$. **C.** $(0; 0; 1)$. **D.** $(0; -1; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0; 0; 1)$.

Câu 7: **(Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A.** $A(0; 0; -1)$. **B.** $B(2; 0; -1)$. **C.** $C(0; 1; 0)$. **D.** $D(2; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu của điểm M thuộc trục Oy , nên loại các đáp án **A, B, D**. Chọn đáp án **C**.

Câu 8: **(Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A.** $(0; 1; 0)$. **B.** $(3; 0; 0)$. **C.** $(0; 0; -1)$ **D.** $(3; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là: $A(0; 1; 0)$.

Câu 9: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(1; 2; 3)$. B. $(-1; -2; 3)$. C. $(3; 5; 1)$. D. $(3; 4; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3)$.

Câu 10: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- A. $D(-2; 1; 0)$, $D(-4; 0; 0)$ B. $D(0; 0; 0)$, $D(-6; 0; 0)$
C. $D(6; 0; 0)$, $D(12; 0; 0)$ D. $D(0; 0; 0)$, $D(6; 0; 0)$

Lời giải

Chọn D

Gọi $D(x; 0; 0) \in Ox$

$$AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Câu 11: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H . Tìm tọa độ điểm H .

- A. $H(-3; 0; -2)$ B. $H(-1; 4; 4)$ C. $H(3; 0; 2)$ D. $H(1; -1; 0)$

Lời giải

Chọn C

Tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Tọa độ điểm H là giao điểm của d và (P) , ta có:

$$2(1 + 2t) - 2(2 - 2t) - (3 - t) - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy $H(3; 0; 2)$.

Câu 12: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

- A. $(1; 3; 2)$. B. $(2; 6; 4)$. C. $(2; -1; 5)$. D. $(4; -2; 10)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của } AB. \text{ Khi đó } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2; -1; 5).$$

Câu 13: (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

- A. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$ B. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$
C. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 17$ D. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

Lời giải

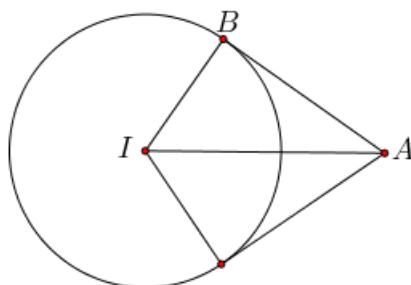
Chọn B

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1; 0; 0) \Rightarrow IM = \sqrt{13}$. Suy ra phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM là: $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Câu 14: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

- A. 12. B. 8. C. 16. D. 4.

Lời giải



Chọn D

Ta có $A \in (Oxy) \Rightarrow c = 0$.

Suy ra $A(a; b; 0)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; \sqrt{2})$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

Ta có $\widehat{BIA} = 45^\circ$ nên tam giác ABI vuông cân tại $B \Rightarrow IA = \sqrt{6}$.

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 4 - b^2 \Rightarrow b \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$$

* Với $b = \pm 2 \Rightarrow a = 0$. Ta được $A_1(0; 2; 0)$, $A_2(0; -2; 0)$.

* Với $b = \pm 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$ (loại).

* Với $b = 0 \Rightarrow a = \pm 2$. Ta được $A_3(2; 0; 0)$, $A_4(-2; 0; 0)$.

Vậy có 4 điểm A thỏa bài toán.

101. Tích vô hướng và ứng dụng

Câu 15: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

A. $m = -6$.

B. $m = 0$.

C. $m = -4$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{MN}(-3; -2; 2); \overrightarrow{NP}(2; m-2; 1)$$

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$.

102. Phương trình mặt cầu (xác định tâm, bán kính, viết pt mặt cầu đơn giản, vị trí tương đối hai mặt cầu, điểm đến mặt cầu, đơn giản)

Câu 16: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9. \text{ Tìm tọa độ tâm } I \text{ và tính bán kính } R \text{ của } (S)$$

A. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$

B. $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$

C. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$

D. $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 3$

Câu 17: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$.

A. $I(-1; 2; -4)$, $R = 5\sqrt{2}$

B. $I(-1; 2; -4)$, $R = 2\sqrt{5}$

C. $I(1; -2; 4)$, $R = 20$

D. $I(1; -2; 4)$, $R = 2\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn D

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R .

Nên mặt cầu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 20$ có tâm và bán kính là $I(1; -2; 4), R = 2\sqrt{5}$.

Câu 18: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 8$. Tính bán kính R của (S) .

- A. $R = 8$** **B. $R = 4$** **C. $R = 2\sqrt{2}$** **D. $R = 64$**

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt cầu tổng quát: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$.

Câu 19: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(3; 1; -1)$.** **B. $(3; -1; 1)$.** **C. $(-3; -1; 1)$.** **D. $(-3; 1; -1)$.**

Lời giải

Chọn C

Tâm của (S) có tọa độ là $(-3; -1; 1)$.

Câu 20: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 3$ có bán kính bằng

- A. $\sqrt{3}$.** **B. $2\sqrt{3}$.** **C. 3 .** **D. 9 .**

Lời giải

Chọn A

Câu 21: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$?

- A. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$** **B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 3$**
C. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$ **D. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$**

Lời giải

Chọn C

Gọi mặt cầu cần tìm là (S) .

Ta có (S) là mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính R .

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$ nên ta có

$$R = d(I; (P)) = \frac{|1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

Câu 22: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

- A. $m \leq 6$ B. $m > 6$ C. $m < 6$ D. $m \geq 6$

Lời giải

Chọn C

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là một phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6.$$

Câu 23: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A. $\sqrt{7}$. B. 9. C. 3. D. $\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$$

Vậy bán kính mặt cầu là $R = 3$.

Câu 24: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A. 3. B. 9. C. $\sqrt{15}$. D. $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$$

Vậy bán kính mặt cầu là $R = 3$.

Câu 25: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A. 9. B. $\sqrt{15}$. C. $\sqrt{7}$. D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Bán kính mặt cầu là: } R = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2 - (-7)} = 3.$$

Câu 26: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A. 9. B. 3. C. 15. D. $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

$\Rightarrow (S)$ có bán kính $R = \sqrt{9} = 3$.

Câu 27: (Thông hiểu) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A là

- A. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 29$. B. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$.
C. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$. D. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 5$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu có bán kính $R = IA = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5}$.

Suy ra phương trình mặt cầu là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$.

Câu 28: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0; 0; 1)$, $B(m; 0; 0)$, $C(0; n; 0)$, $D(1; 1; 1)$ với $m > 0$; $n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D . Tính bán kính R của mặt cầu đó?

- A. $R = 1$. B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $R = \frac{3}{2}$. D. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(1; 1; 0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx + my + mnz - mn = 0$

Mặt khác $d(I; (ABC)) = \frac{|1 - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2 n^2}} = 1$ (vì $m + n = 1$) và $ID = 1 = d(I; (ABC))$.

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D . Khi đó $R = 1$.

Câu 29: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2; 3; 3)$, $N(2; -1; -1)$, $P(-2; -1; 3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$.

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$ B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$ D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$

Lời giải

Chọn B

Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0(*)$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $M(2; 3; 3)$, $N(2; -1; -1)$, $P(-2; -1; 3)$ và có tâm I thuộc

$$mp(P) \text{ nên ta có hệ phương trình } \begin{cases} 4a + 6b + 6c - d = 22 \\ 4a - 2b - 2c - d = 6 \\ 4a + 2b - 6c + d = -14 \\ 2a + 3b - c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} : T/m(*)$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

103. Các bài toán cực trị

Câu 30: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B

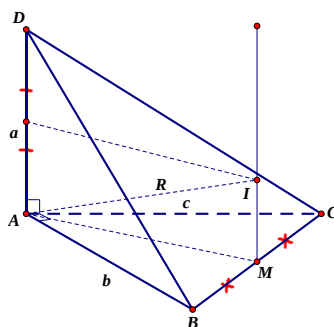
$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}.$$

Câu 31: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và đi qua điểm $A(1; 0; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng

- A. $\frac{64}{3}$. B. 32. C. 64. D. $\frac{32}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Đặt $AD = a$; $AB = b$; $AC = c$.

Khi đó $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = \frac{1}{6} a \cdot b \cdot c$.

Ta có bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = 2\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm BC khi đó ta có $AM = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$.

Vì tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong mặt cầu (S) nên ta có $IM // AD$ và $IM = \frac{1}{2}AD \Rightarrow IM = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác AIM vuông tại M ta có $AI^2 = AM^2 + IM^2 \Rightarrow 12 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 48$.

Vậy ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6}a.b.c \Rightarrow V_{ABCD}^2 = \frac{1}{36}a^2.b^2.c^2 \leq \frac{1}{36} \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{27} = \frac{1024}{9}$.

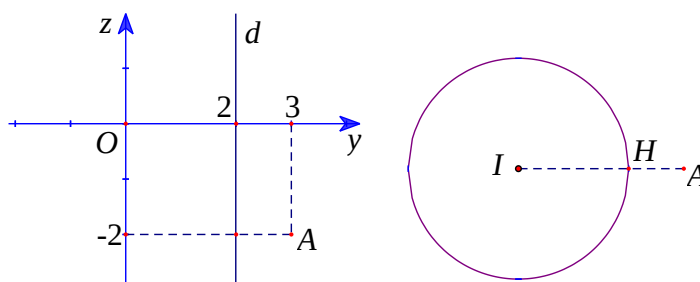
Hay ta có $V_{ABCD} \leq \sqrt{\frac{1024}{9}} = \frac{32}{3}$.

Câu 32: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 3; -2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(-2; 0; -2)$. **B.** $N(0; -2; -5)$. **C.** $Q(0; 2; -5)$. **D.** $M(0; 4; -2)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $M(x; y; z)$ là điểm tùy ý thuộc d . Vì d thay đổi, song song với trục Oz và cách Oz một khoảng bằng 2 nên M thuộc mặt trụ (T): $x^2 + y^2 = 4$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với trục Oz . Khi đó, (P): $z = -2$, cắt trục Oz tại điểm $I(0; 0; -2)$ và cắt (T) theo giao tuyến là đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$ ((C) nằm trong mặt phẳng (P)).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Khi d thay đổi thì H thuộc (C).

Do đó, khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất khi H là giao điểm của IA với (C), H nằm giữa I và A , tức là $H(0; 2; -2)$.

Do đó, khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất thì d đi qua H và song song với Oz , suy ra

$d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$. Vậy d đi qua điểm $Q(0; 2; -5)$.

* C2: Gọi $M(a; b; c)$ là điểm tùy ý thuộc d . Vì d thay đổi, song song với trục Oz và cách Oz một khoảng bằng 2 nên ta có $a^2 + b^2 = 4$.

Ta có: $AM^2 = a^2 + (b - 3)^2 + (c + 2)^2 \geq a^2 + (b - 3)^2 = a^2 + b^2 + 9 - 6b = 13 - 6b$;

$AM^2 = 13 - 6b$ khi $c = -2$.

Từ $a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow -2 \leq b \leq 2 \Rightarrow 13 - 6b \geq 1 \Rightarrow AM^2 = 13 - 6b \geq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$

Do đó, $AM \geq 1$ và $AM = 1$ khi $a = 0$, $b = 2$ và $c = -2$.

Khi đó, đường thẳng d đi qua điểm $M(0; 2; -2)$.

Vì d song song với Oz nên phương trình của d là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$.

Vậy d đi qua điểm $Q(0; 2; -5)$.

Câu 33: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 20.

B. 8.

C. 12.

D. 16.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Vì $A(a; b; c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a; b; 0)$.

TH1 : $A(a; b; c) \in (S) \Rightarrow a^2 + b^2 = 4$. Vì $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên có các điểm thỏa mãn là

$A_1(2; 0; 0); A_2(-2; 0; 0); A_3(0; 2; 0); A_4(0; -2; 0)$.

TH2 : Điểm $A(a; b; c) \notin (S) \Rightarrow IA > R$. Giả sử có hai tiếp tuyến IM, IN là hai tiếp của (S) đi qua A và vuông góc với nhau.

TH2.1 : IM, IN, IA đồng phẳng, khi đó $IMAN$ là hình vuông có cạnh là $R = \sqrt{5}$.

Khi đó : $IA = R\sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 9$. Vì $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên có các điểm thỏa mãn là $A_5(3; 0; 0); A_6(-3; 0; 0); A_7(0; 3; 0); A_8(0; -3; 0)$.

TH2.2 : IM, IN, IA không đồng phẳng khi đó IA là trục của mặt nón tròn xoay có hai đường sinh IM, IN và $IM \perp IN$ nên $R < IA < R\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 < a^2 + b^2 < 9$.

* Nếu $a^2 + b^2 = 5$, vì $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên ta có các điểm thỏa mãn là : $A_9(1; 2; 0); A_{10}(1; -2; 0);$

$A_{11}(-1; 2; 0); A_{12}(-1; -2; 0); A_{13}(2; 1; 0); A_{14}(2; -1; 0); A_{15}(-2; 1; 0); A_{16}(-2; -1; 0)$.

* Nếu $a^2 + b^2 = 6$, vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên vô nghiệm.

* Nếu $a^2 + b^2 = 7$ vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên vô nghiệm.

* Nếu $a^2 + b^2 = 8$, vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên có các điểm thỏa mãn là

$A_{17}(2; 2; 0); A_{18}(2; -2; 0); A_{19}(-2; 2; 0); A_{20}(-2; -2; 0)$.

Vậy có tất cả 20 điểm $A(a; b; c)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 34: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 12.

B. 16.

C. 20.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

$(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$ có tâm $I(0; 0; 1), R = \sqrt{5}$

$$A(a; b; c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a; b; 0)$$

TH1: $A(a; b; c) \in (S) \Rightarrow a^2 + b^2 = 4$. Do $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên có các điểm thỏa mãn là

$$A_1(0; 2; 0), A_2(2; 0; 0), A_3(0; -2; 0), A_4(-2; 0; 0)$$

TH2: $A(a; b; c) \notin (S) \Rightarrow IA > R$ Giả sử có hai tiếp tuyến IM, IN là hai tiếp tuyến của đi qua A và vuông góc với nhau.

+) IM, IN, IA đồng phẳng. Khi đó $IMAN$ là hình vuông cạnh là $R = \sqrt{5}$. Khi đó $IA = R\sqrt{2} = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 + b^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 9$. Do $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên có các điểm thỏa mãn là

$$A_5(0; 3; 0), A_6(3; 0; 0), A_7(0; -3; 0), A_8(-3; 0; 0)$$

+) IM, IN, IA không đồng phẳng. Khi đó IA là trục của mặt nón tròn xoay có hai đường sinh IM, IN . $R < IA < R\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 < a^2 + b^2 < 9$

* $a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow a = \pm 1, b = \pm 2 \Rightarrow A(1; 2; 0), A(-1; 2; 0), A(-1; -2; 0), A(1; -2; 0),$

$$A(2; 1; 0), A(2; -1; 0), A(-2; -1; 0), A(-2; 1; 0)$$

* $a^2 + b^2 = 6(VN)$

* $a^2 + b^2 = 7(VN)$

$$a^2 + b^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2, b = \pm 2 \Rightarrow A(2; 2; 0), A(-2; 2; 0), A(-2; -2; 0), A(2; -2; 0)$$

Vậy có tất cả 20 điểm thỏa mãn.

Câu 35: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2; 1; 3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 5)$ và bán kính $R = 6$.

$$IE = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R \Rightarrow \text{điểm } E \text{ nằm trong mặt cầu } (S).$$

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) , A và B là hai giao điểm của Δ với (S) .

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp OE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.

$$\text{Suy ra: } \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P; \vec{EI}] = (5; -5; 0) = 5(1; -1; 0).$$

$$\text{Vậy phương trình của } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$$

Câu 36: (Vận dụng cao) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$, điểm $M(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , thuộc (P) và cắt (S) tại 2 điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u}(1; a; b)$, tính $T = a - b$.

A. $T = 0$

B. $T = -1$

C. $T = -2$

D. $T = 1$

Lời giải

Chọn B

Nhận thấy điểm M nằm bên trong mặt cầu (S) . Để $AB = \sqrt{R^2 - d^2(O, \Delta)}$ nhỏ nhất khi $d(O, \Delta)$ lớn nhất. Ta thấy $d(O, \Delta) \leq OM = \text{const}$. Dấu '=' xảy ra khi $\Delta \perp OM$.

$$\text{Suy ra } \vec{u} \cdot \vec{OM} = 0 \text{ và } \vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0 \text{ nên } \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 1 + a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } T = a - b = -1.$$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.A	4.D	5.B	6.C	7.C	8.A	9.A	10.D
11.C	12.C	13.B	14.A	15.B	16.A	17.D	18.C	19.C	20.A
21.C	22.C	23.C	24.A	25.D	26.B	27.B	28.A	29.B	30.B
31.D	32.C	33.A	34.C	35.C	36.B				

104. Tích có hướng và ứng dụng

Câu 1: (Nhận biết) (THPT QG 2017 Mã 105) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$. Tính bán kính R của (S) .

A. $R = 3$

B. $R = 18$

C. $R = 9$

D. $R = 6$

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có dạng:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \Rightarrow R = 3.$$

Câu 2: (Vận dụng cao) (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(0; -1; 1)$, $C(2; 1; -1)$ và $D(3; 1; 4)$. Hỏi tất cả có bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

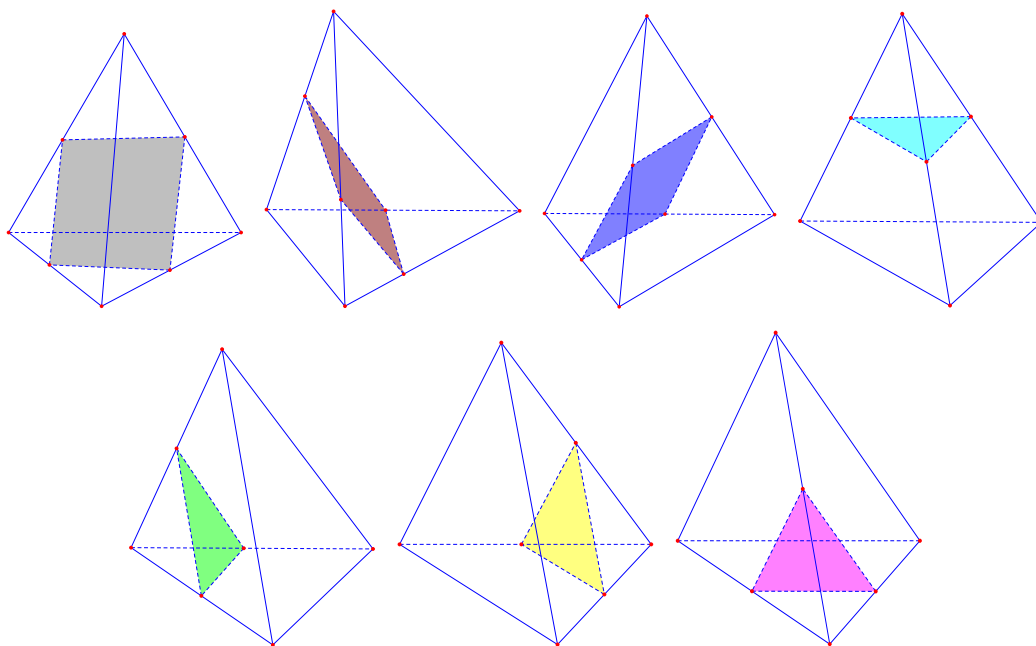
- A. 1 mặt phẳng B. 4 mặt phẳng C. 7 mặt phẳng D. có vô số

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -1)$, $\overrightarrow{AD} = (2; 3; 4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -24 \neq 0$

Suy ra A, B, C và D là 4 đỉnh của một tứ diện. Các mặt phẳng cách đều 4 đỉnh của tứ diện $ABCD$ gồm có 7 trường hợp sau:



105. Xác định vector pháp tuyến

Câu 3: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$ B. $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$ C. $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$ D. $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$

Lời giải

Chọn D

Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$ là $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

Câu 4: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 5 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$. B. $\vec{n}_3 = (-1; 2; 3)$. C. $\vec{n}_4 = (1; 2; -3)$. D. $\vec{n}_2 = (1; 2; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) : $x + 2y + 3z - 5 = 0$ là $\vec{n}_2 = (1; 2; 3)$.

Câu 5: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) : $3x + 2y + z - 4 = 0$ có một vector pháp tuyến là

A. $\vec{n}_3 = (-1; 2; 3)$. B. $\vec{n}_4 = (1; 2; -3)$. C. $\vec{n}_2 = (3; 2; 1)$. D. $\vec{n}_1 = (1; 2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) : $3x + 2y + z - 4 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (3; 2; 1)$.

Câu 6: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) : $2x + 3y + z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1 = (2; 3; -1)$. B. $\vec{n}_3 = (1; 3; 2)$. C. $\vec{n}_4 = (2; 3; 1)$. D. $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) : $2x + 3y + z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_4 = (2; 3; 1)$.

Câu 7: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) : $2x + y + 3z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là:

A. $\vec{n}_4 = (1; 3; 2)$. B. $\vec{n}_1 = (3; 1; 2)$. C. $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$. D. $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) : $2x + y + 3z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là $(2; 1; 3)$.

Câu 8: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) : $x + 2y + 3z - 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P)

A. $\vec{n}_3 = (1; 2; -1)$. B. $\vec{n}_4 = (1; 2; 3)$. C. $\vec{n}_1 = (1; 3; -1)$. D. $\vec{n}_2 = (2; 3; -1)$.

Lời giải

Chọn B.

(P) : $x + 2y + 3z - 1 = 0$ có một vtpt là $\vec{n}_4 = (1; 2; 3)$.

Câu 9: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) : $2x - y + 3z + 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P)

A. $\vec{n}_1 = (2; -1; -3)$. B. $\vec{n}_4 = (2; 1; 3)$. C. $\vec{n}_2 = (2; -1; 3)$. D. $\vec{n}_3 = (2; 3; 1)$.

Lời giải

Chọn C

(P): $2x - y + 3z + 1 = 0$ có một vtpt là $\vec{n}_2 = (2; -1; 3)$.

Câu 10: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - 3y + z - 2 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P)

A. $\vec{n}_3 = (-3; 1; -2)$. **B.** $\vec{n}_2 = (2; -3; -2)$. **C.** $\vec{n}_1 = (2; -3; 1)$. **D.** $\vec{n}_4 = (2; 1; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt phẳng (P): $2x - 3y + z - 2 = 0$ suy ra vector pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}_1 = (2; -3; 1)$.

Câu 11: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $4x + 3y + z - 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến (P)?

A. $\vec{n}_4 = (3; 1; -1)$. **B.** $\vec{n}_3 = (4; 3; 1)$. **C.** $\vec{n}_2 = (4; 1; -1)$. **D.** $\vec{n}_1 = (4; 3; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình mặt phẳng (P): $4x + 3y + z - 1 = 0$ ta có vector pháp tuyến $\vec{n}_3 = (4; 3; 1)$.

Câu 12: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) ?

A. $\vec{l} = (1; 0; 0)$ **B.** $\vec{m} = (1; 1; 1)$ **C.** $\vec{j} = (0; 1; 0)$ **D.** $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Lời giải

Chọn D

Do mặt phẳng (Oxy) vuông góc với trục Oz nên nhận vector $\vec{k} = (0; 0; 1)$ làm một vector pháp tuyến.

106. Viết phương trình mặt phẳng

Câu 13: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$ và $ln \frac{5}{3}$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$. **B.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$. **C.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. **D.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có phương trình của mặt phẳng

(MNP) là $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$.

Câu 14: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

A. $x - 2y + 3z - 12 = 0$

B. $x - 2y - 3z + 6 = 0$

C. $x - 2y + 3z + 12 = 0$

D. $x - 2y - 3z - 6 = 0$

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -3)$ là $1(x - 1) - 2(y - 2) + 3(z + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 12 = 0$

Câu 15: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz) ?

A. $y = 0$

B. $x = 0$

C. $y - z = 0$

D. $z = 0$

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (Oyz) đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{l} = (1; 0; 0)$ nên ta có phương trình mặt phẳng (Oyz) là $1(x - 0) + 0(y - 0) + 0(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 16: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; -1; 2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A. $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

B. $x + 2y - 2z - 1 = 0$.

C. $3x + 2z - 1 = 0$.

D. $3x + 2z + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; -2; 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm.

$\vec{n} = -\overrightarrow{BC} = (1; 2; -2)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

Câu 17: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. 5.

B. $x + y + z = 0$.

C. $y = 0$.

D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn C

Câu 18: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1)$ và $B(1; 2; 3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB .

A. $x + y + 2z - 3 = 0$ **B.** $x + y + 2z - 6 = 0$

C. $x + 3y + 4z - 7 = 0$

D. $x + 3y + 4z - 26 = 0$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0; 1; 1)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 2)$ là vectơ pháp tuyến
 $(P): 1(x - 0) + 1(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 3 = 0$.

Câu 19: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

A. $x + y - 3z - 8 = 0$ **B.** $x - y - 3z + 3 = 0$

C. $x + y + 3z - 9 = 0$ **D.** $x + y - 3z + 3 = 0$

Lời giải

Chọn D

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó, (P) tiếp xúc với (S) tại A khi chỉ khi (P) đi qua $A(2; 1; 2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA} = (-1; -1; 3)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là $-x - y + 3z - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z + 3 = 0$.

Câu 20: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$; $B(0; -2; 0)$; $C(0; 0; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (ABC) ?

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1$. **B.** $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$. **C.** $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$. **D.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn đi qua 3 điểm A, B, C là $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$.

Câu 21: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 1)$ và $B(2; 1; 0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $3x - y - z - 6 = 0$. **B.** $3x - y - z + 6 = 0$.

C. $x + 3y + z - 5 = 0$.

D. $x + 3y + z - 6 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Rightarrow dx = 2\cos t \cdot dt$.

Mặt phẳng cần tìm vuông góc với AB nên nhận $\Rightarrow dx = 2\cos t \cdot dt$ làm vector pháp tuyến.

Do đó phương trình của mặt phẳng cần tìm là

$$3(x + 1) - (y - 2) - (z - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z + 6 = 0.$$

Câu 22: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 0; 1)$ và $B(-2; 2; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

A. $3x + y + z - 6 = 0$ **B.** $3x - y - z = 0$

C. $6x - 2y - 2z - 1 = 0$

D. $3x - y - z + 1 = 0$

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

(α) đi qua $I(1; 1; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-6; 2; 2)$ làm một VTPT.

$$\Rightarrow (\alpha): -6(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 2) = 0 \Rightarrow (\alpha): 3x - y - z = 0.$$

Câu 23: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 2 = 0$ có phương trình là

A. $2x - y + 3z - 9 = 0.$

B. $2x - y + 3z + 11 = 0.$

C. $2x - y - 3z + 11 = 0.$

D. $2x - y + 3z - 11 = 0.$

Lời giải

Chọn D

Gọi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) , mặt phẳng (Q) có dạng $2x - y + 3z + D = 0$.

$$A(2; -1; 2) \in (Q) \Rightarrow D = -11.$$

Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x - y + 3z - 11 = 0$.

Câu 24: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3}$ có phương trình là

A. $3x + 2y + z - 5 = 0.$

B. $2x + y + 3z + 2 = 0.$

C. $x + 2y + 3z + 1 = 0$.

D. $2x + y + 3z - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng Δ .

Một vtpt của (P) là $\vec{n}_P = \vec{u}_\Delta = (2; 1; 3)$.

Phương trình mặt phẳng (P) : $2(x - 1) + (y - 2) + 3(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z + 2 = 0$.

Câu 25: (Thông hiểu) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Trong không gian $Oxyz$, Cho hai điểm $A(5; -4; 2)$ và $B(1; 2; 4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

A. $2x - 3y - z + 8 = 0$.

B. $3x - y + 3z - 13 = 0$.

C. $2x - 3y - z - 20 = 0$.

D. $3x - y + 3z - 25 = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AB} = (-4; 6; 2) = -2(2; -3; -1)$$

(P) đi qua $A(5; -4; 2)$ nhận $\vec{n} = (2; -3; -1)$ làm VTPT

$$(P): 2x - 3y - z - 20 = 0$$

Câu 26: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; 0)$ và $B(5; 1; -2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x - y - z + 5 = 0$.

B. $2x - y - z - 5 = 0$.

C. $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

D. $3x + 2y - z - 14 = 0$.

Lời giải

Chọn B.

Mặt phẳng trung trực (P) của AB đi qua trung điểm $I(3; 2; -1)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AB} = (4; -2; -2)$ làm vector pháp tuyến. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4(x - 3) - 2(y - 2) - 2(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z - 5 = 0$.

Câu 27: (Thông hiểu) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 0)$ và $B(3; 0; 2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có phương trình là?

A. $2x + y + z - 4 = 0$.

B. $2x - y + z - 2 = 0$.

C. $x + y + z - 3 = 0$.

D. $2x - y + z + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(1; 1; 1)$ là trung điểm của AB .

$$\overrightarrow{AB} = (4; -2; 2).$$

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua trung điểm I và nhận véc tơ $\overrightarrow{AB} = (4; -2; 2)$ làm một véc tơ pháp tuyến có phương trình là: $2(x - 1) - (y - 1) + (z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 2 = 0$.

- Câu 28:** (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 2)$ và $B(6; 5; -4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là
- A.** $2x + 2y - 3z - 17 = 0$. **B.** $4x + 3y - z - 26 = 0$.
- C.** $2x + 2y - 3z + 17 = 0$. **D.** $2x + 2y + 3z - 11 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm $I(4; 3; -1)$ của đoạn thẳng AB và nhận $\overrightarrow{AB} = (4; 4; -6)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là:

$$2(x - 4) + 2(y - 3) - 3(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - 3z - 17 = 0.$$

- Câu 29:** (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 104) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 0; 1)$ và $B(-2; 2; 3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là
- A.** $6x - 2y - 2z - 1 = 0$. **B.** $3x + y + z - 6 = 0$. **C.** $x + y + 2z - 6 = 0$.
- D.** $3x - y - z = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AB} = (-6; 2; 2) = -2(3; -1; -1).$$

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Suy ra tọa độ điểm $I(1; 1; 2)$.

Do đó mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua điểm $I(1; 1; 2)$ và nhận $\vec{n} = (3; -1; -1)$ là vector pháp tuyến có phương trình là $3(x - 1) - 1(y - 1) - 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0$.

- Câu 30:** (Thông hiểu) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3; -1; 1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$?
- A.** $x - 2y + 3z + 3 = 0$ **B.** $3x + 2y + z - 8 = 0$
- C.** $3x - 2y + z + 12 = 0$ **D.** $3x - 2y + z - 12 = 0$

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng cần tìm đi qua $M(3; -1; 1)$ và nhận VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta = (3; -2; 1)$ làm VTPT nên có phương trình: $3x - 2y + z - 12 = 0$.

Câu 31: (Vận dụng) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và

$$d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$$

A. $(P): 2x - 2z + 1 = 0$

B. $(P): 2y - 2z + 1 = 0$

C. $(P): 2x - 2y +$

$1 = 0$

D. $(P): 2y - 2z - 1 = 0$

Lời giải

Chọn B

Ta có: d_1 đi qua điểm $A(2; 0; 0)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (-1; 1; 1)$

d_2 đi qua điểm $B(0; 1; 2)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (2; -1; -1)$

Vì (P) song song với hai đường thẳng d_1 và d_2 nên VTPT của (P) là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0; 1; -1)$

Khi đó (P) có dạng $y - z + D = 0 \Rightarrow$ loại đáp án A và C

Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M(0; \frac{1}{2}; 1)$ của AB

Do đó $(P): 2y - 2z + 1 = 0$

Câu 32: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$. Từ đó ta có $OA = |a|$, $OB = |b|$, $OC = |c|$

Mặt phẳng đoạn chắn đi qua các điểm A, B, C có dạng: $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì $M \in (P)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1$.

Vì $OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c|$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ |a| = |b| = |c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ |a| = |b| \\ |b| = |c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ a = b \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 2 \\ a = -b = c = 2 \\ a = -b = -c = -2 \end{cases}$$

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

- Câu 33: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình
- A.** $6x + 8y + 11 = 0$. **B.** $3x + 4y + 2 = 0$. **C.** $3x + 4y - 2 = 0$. **D.** $6x + 8y - 11 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; -1; -1)$ và bán kính $R = 3$.

* Ta tính được $AI = 5, AM = \sqrt{AI^2 - R^2} = 4$.

* Phương trình mặt cầu (S') tâm $A(2; 3; -1)$, bán kính $AM = 4$ là:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16.$$

* M luôn thuộc mặt phẳng $(P) = (S) \cap (S')$ có phương trình: $3x + 4y - 2 = 0$.

- Câu 34: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4t \\ z = -3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

$$d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d .

$$\vec{u}_{\Delta} = [\vec{u}_d; \vec{n}_P] = (-1; 4; 3)$$

Gọi A là giao điểm của d và (P) . Tọa độ A là nghiệm của phương trình:

$$(-1 + 2t) + (-t) - (-2 + 2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow A(3; -2; 2)$$

Phương trình Δ qua $A(3; -2; 2)$ có vtcp $\vec{u}_{\Delta} = (-1; 4; 3)$ có dạng: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

- Câu 35: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 104)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -1; 0)$, $B(1; 2; 1)$, $C(3; -2; 0)$ và $D(1; 1; -3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 3; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -1; 0)$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương: $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; -2)$.

Phương trình của đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}.$$

Với $t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ thuộc đường thẳng Δ .

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần tìm:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}.$$

Câu 36: (Vận dụng) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - 3z = 0$.

Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 ?

A. $2x - y + 2z - 13 = 0$

B. $2x - y + 2z + 22 = 0$

C. $2x - y + 2z + 13 = 0$

D. $2x + y + 2z - 22 = 0$

Lời giải:

Chọn A

Tọa độ giao điểm của d_1 và (P) là $A(4; -1; 2)$

Mặt phẳng cần tìm đi qua A và nhận $\vec{u}_2(2; -1; 2)$ làm VTCP có phương trình $2x - y + 2z - 13 = 0$.

Câu 37: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu

$(S): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 2$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Xét điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x + 2y + 2z + 15 = 0$.

B. $2x + 2y + 2z - 15 = 0$.

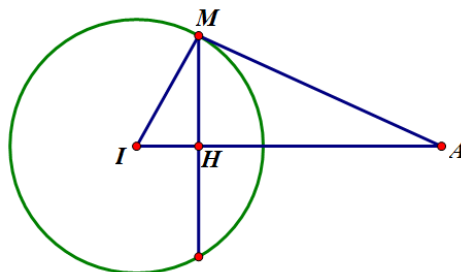
C. $x + y + z + 7 = 0$. **D.** $x + y + z - 7 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

(S) có tâm $I(2; 3; 4)$; bán kính $R = \sqrt{2}$

$A(1; 2; 3) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-1; -1; -1)$, tính được $IA = \sqrt{3}$.



Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA} = (-1; -1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên tính được $IM^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IM^2}{IA} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, từ đó tính được $\overrightarrow{IH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IA}$ tìm được $H\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$

Mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $-\left(x - \frac{4}{3}\right) - \left(y - \frac{7}{3}\right) - \left(z - \frac{10}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 7 = 0$.

107. Tìm tọa độ điểm liên quan đến mặt phẳng

Câu 38: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A.** $Q(2; -1; 5)$ **B.** $N(-5; 0; 0)$ **C.** $P(0; 0; -5)$ **D.** $M(1; 1; 6)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $1 - 2 \cdot 1 + 6 - 5 = 0$ nên $M(1; 1; 6)$ thuộc mặt phẳng (P) .

Câu 39: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x - 2y + z - 35 = 0$ và điểm $A(-1; 3; 6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) , tính OA' .

- A.** $OA' = 3\sqrt{26}$ **B.** $OA' = 5\sqrt{3}$
C. $OA' = \sqrt{46}$ **D.** $OA' = \sqrt{186}$

Lời giải

Chọn D

$+A'$ đối xứng với A qua (P) nên AA' vuông góc với (P)

$+Suy ra phương trình đường thẳng AA' :$

$$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 3 - 2t \\ z = 6 + t \end{cases}$$

$+Gọi H là giao điểm của AA' và mặt phẳng $(P) \Rightarrow H(-1 + 6t; 3 - 2t; 6 + t)$$

+ Do H thuộc $(P) \Rightarrow 6(-1 + 6t) - 2(3 - 2t) + 1(6 + t) - 35 = 0 \Leftrightarrow 41t - 41 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(5; 1; 7)$

+ A' đối xứng với A qua (P) nên H là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(11; -1; 8) \Rightarrow OA' = \sqrt{11^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{186}$

108. Các bài toán khoảng cách

Câu 40: (Nhận biết) (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P)

- A. $d = \frac{5}{9}$ B. $d = \frac{5}{29}$ C. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$ D. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Lời giải

Chọn C

Khoảng cách từ điểm A đến (P) là $d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

Câu 41: (Thông hiểu) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. 3. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Lấy điểm $M(0; 0; 5) \in (P)$.

Do $(P) \parallel (Q)$ nên $d((P), (Q)) = d(M, (Q)) = \frac{|x_M + 2y_M + 2z_M - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3}$.

109. Các bài toán xét vị trí tương đối

Câu 42: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

- A. $(S): (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 8$ B. $(S): (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 10$
C. $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 8$ D. $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 10$

Lời giải

Chọn D

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến

$$\text{Ta có } R^2 = r^2 + (d(I, (P)))^2 = 1 + \left(\frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} \right)^2 = 10$$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;1)$ bán kính $R = \sqrt{10}$ là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$.

110. Các bài toán cực trị

Câu 43: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vector $\vec{u}(1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

A. $MN = 3$

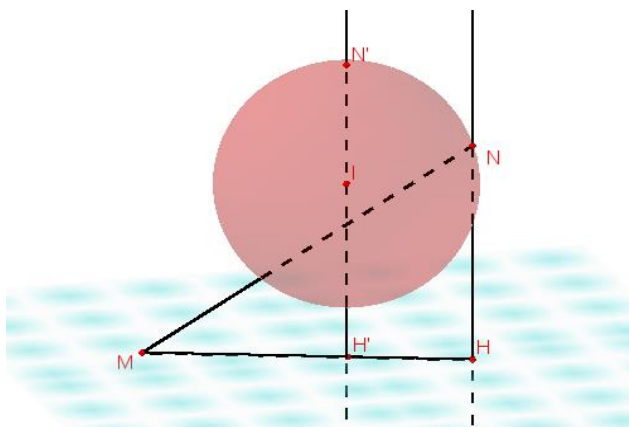
B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$

C. $MN = 3\sqrt{2}$

D. $MN = 14$

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n} = (1; -2; 2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $r = 1$.

Nhận thấy rằng góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}$ bằng 45° . Vì $d(I; (P)) = 2 > 1 = r$ nên (P) không cắt (S) .

Gọi H là hình chiếu của N lên (P) thì $\widehat{NMH} = 45^\circ$ và $MN = \frac{NH}{\sin 45^\circ} = NH\sqrt{2}$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N \equiv N'$ và $H \equiv H'$ với N' là giao điểm của đường thẳng d qua I , vuông góc (P) và H' là hình chiếu của I lên (P) .

Lúc đó $NH'(I; (P))_{\max}$ và $MN \frac{NH_{\max}}{\sin 45^\circ \sqrt{2}_{\max}}$.

Câu 44: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

A. 135.

B. 105.

C. 108.

D. 145.

Lời giải

Chọn A

Tìm tọa độ điểm I :

Cách 1: Gọi I là điểm thỏa mãn $2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(x_I - 2) + 3(x_I + 3) = 0 \\ 2(y_I + 2) + 3(y_I - 3) = 0 \\ 2(z_I - 4) + 3(z_I + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_I + 5 = 0 \\ 5y_I - 5 = 0 \\ 5z_I - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -1 \\ y_I = 1 \\ z_I = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } I(-1; 1; 1) \text{ cố định.}$$

Cách 2: Gọi I là điểm thỏa mãn $2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}$

$$\text{Ta có } 2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\vec{OA} - \vec{OI}) + 3(\vec{OB} - \vec{OI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} + 3\vec{OB}) \Rightarrow I(1; 1; 1).$$

Tổng quát: Cho điểm I thỏa mãn $m\vec{IA} + n\vec{IB}$ với $m + n \neq 0$ thì $\vec{OI} = \frac{1}{m+n}(m\vec{OA} + n\vec{OB})$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } 2MA^2 + 3MB^2 &= 2\vec{MA}^2 + 3\vec{MB}^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + 3(\vec{MI} + \vec{IB})^2 \\ &= 5\vec{MI}^2 + 2\vec{MI}(2\vec{IA} + 3\vec{IB}) + 2\vec{IA}^2 + 3\vec{IB}^2 = 5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2. \end{aligned}$$

Vậy $2MA^2 + 3MB^2$ nhỏ nhất thì $5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2$ nhỏ nhất hay M là hình chiếu của

$$\text{điểm } I \text{ trên mặt phẳng } (P) \Rightarrow \vec{IM} = k\vec{n}_{(P)} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 2k - 1 \\ y_M = -k + 1 \\ z_M = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\text{Mà } M \in (P) \Rightarrow 2(2k - 1) - (-k + 1) + 2(2k + 1) - 8 = 0 \Leftrightarrow 9k - 9 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow M(1; 0; 3).$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } 2MA^2 + 3MB^2 = 5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 = 135.$$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.D	5.C	6.C	7.C	8	9.C	10.C
11.B	12.D	13.D	14.C	15.B	16.A	17.C	18.A	19.D	20.C
21.B	22.B	23.D	24.B	25.C	26	27.B	28.A	29.D	30.D
31.B	32.A	33.C	34.C	35.A	36.A	37.D	38.D	39.D	40.C
41.B	42.D	43.C	44.A						

111. Xác định vtcp

Câu 1: (Nhận biết) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho

$$\text{đường thẳng } d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t; \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 - t \end{cases}. \text{ Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của } d?$$

$$\text{A. } \vec{u}_1 = (0; 3; -1) \quad \text{B. } \vec{u}_2 = (1; 3; -1) \quad \text{C. } \vec{u}_3 = (1; -3; -1) \quad \text{D. } \vec{u}_4 = (1; 2; 5)$$

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=2+3t \\ z=5-t \end{cases}; (t \in \mathbb{R})$ nhận véc tơ $\vec{u} = (0; 3; -1)$ làm VTCP

Câu 2: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 1)$. **B.** $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$. **C.** $\vec{u}_3 = (2; 1; 1)$. **D.** $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3: (Nhận biết) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$ và $B(0; 1; 2)$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng AB .

A. $\vec{b} = (-1; 0; 2)$. **B.** $\vec{c} = (1; 2; 2)$. **C.** $\vec{d} = (-1; 1; 2)$. **D.** $\vec{a} = (-1; 0; -2)$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 2)$ suy ra đường thẳng AB có VTCP là $\vec{b} = (-1; 0; 2)$.

Câu 4: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một véc tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$. **B.** $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$. **C.** $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$. **D.** $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 5: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng

$d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ có một vector chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (3; -1; 5)$. **B.** $\vec{u}_4 = (1; -1; 2)$. **C.** $\vec{u}_2 = (-3; 1; 5)$. **D.** $\vec{u}_3 = (1; -1; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_4 = (1; -1; 2)$.

Câu 6: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Trong không gian $0 < m \leq 1$, cho đường thẳng

$d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$. Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d ?

A. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$. **B.** $\vec{u}_4 = (1; 2; -3)$. **C.** $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$. **D.** $\vec{u}_1 = (2; 1; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$.

- Câu 7: (Nhận biết) (THPTQG 2019 Mã đề 102)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?
- A.** $\vec{u}_1 = (2; 5; 3)$. **B.** $\vec{u}_4 = (2; -5; 3)$. **C.** $\vec{u}_2 = (1; 3; 2)$. **D.** $\vec{u}_3 = (1; 3; -2)$.

Lời giải

Chọn B

- Câu 8: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 103)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{2}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?
- A.** $\vec{u}_2 = (1; -3; 2)$. **B.** $\vec{u}_3 = (-2; 1; 3)$. **C.** $\vec{u}_1 = (-2; 1; 2)$. **D.** $\vec{u}_4 = (1; 3; 2)$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 9: (Nhận biết) (THPT QG 2019 Mã đề 104)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?
- A.** $\vec{u}_1 = (3; -1; 5)$. **B.** $\vec{u}_3 = (2; 6; -4)$. **C.** $\vec{u}_4 = (-2; -4; 6)$. **D.** $\vec{u}_2 = (1; -2; 3)$.

Lời giải

Chọn D

$d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{3}$ có vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d = (1; -2; 3)$

- Câu 10: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy . Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 ?
- A.** $\vec{u}_2 = (1; 2; 0)$ **B.** $\vec{u}_3 = (1; 0; 0)$ **C.** $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$ **D.** $\vec{u}_1 = (0; 2; 0)$

Lời giải

Chọn C

M_1 là hình chiếu của M lên trục $Ox \Rightarrow M_1(1; 0; 0)$.

M_2 là hình chiếu của M lên trục $Oy \Rightarrow M_2(0; 2; 0)$.

Khi đó: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; 2; 0)$ là một vectơ chỉ phương của M_1M_2 .

112. Viết phương trình đường thẳng

- Câu 11: (Nhận biết) (Đề tham khảo BGD 2017)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1} & \text{B. } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2} \\ \text{C. } \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2} & \text{D. } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1} \end{array}$$

Lời giải

Chọn D

Do đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-2+t \end{cases}$ đi qua điểm $M(1;0;-2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(2;3;1)$

nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$.

Câu 12: (Nhận biết) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 5 = 0$?

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=1+t \\ y=1+3t \\ z=1-t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=1+t \\ y=3t \\ z=1-t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=1+3t \\ y=1+3t \\ z=1-t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=1+3t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases} \end{array}$$

Lời giải

Chọn B

Vecto chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u} = (1; 3; -1)$ nên suy ra chỉ đáp án A hoặc B đúng. Thử tọa độ điểm $A(2; 3; 0)$ vào ta thấy đáp án B thỏa mãn

Câu 13: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \begin{cases} x=-2t \\ y=-1+t \\ z=3+t \end{cases} & \text{B. } \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1} \\ \text{C. } \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} & \text{D. } x-2y+z=0 \end{array}$$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng đi qua A và song song BC nhận $\overrightarrow{BC} = (-2; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương
 $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng cần tìm: $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.

Chú ý: Đáp án A không nhận được, vì đó là phương trình tham số của đường thẳng cần tìm, chứ không phải phương trình chính tắc.

Câu 14: (Thông hiểu) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$, $(Q): x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} = (1; 1; 1) \\ \vec{n}_{(Q)} = (1; -1; 1) \end{cases}$ và $[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (2; 0; -2) = 2(1; 0; -1)$. Vì đường thẳng d song song với hai mặt phẳng, nên nhận véc tơ $(1; 0; -1)$ làm véc tơ chỉ phương.

Câu 15: (Thông hiểu) (THPT QG 2019 Mã đề 103) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; 2; -1)$ và $D(2; 0; -2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Có $\vec{BC} = (-1; 1; -1)$, $\vec{BD} = (0; -1; -2)$.

Mặt phẳng (BCD) nhận vector pháp tuyến là $[\vec{BD}, \vec{BC}] = (3; 2; -1)$.

Đường thẳng đi vuông góc với (BCD) nên nhận vector chỉ phương là $[\vec{BD}, \vec{BC}] = (3; 2; -1)$.

Có 2 đáp án thỏa mãn vector chỉ phương là $\vec{u} = (3; 2; -1)$ là A và C.

Kiểm tra thấy đường thẳng trong đáp án C đi qua điểm A. Vậy chọn C.

Câu 16: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x + 3 = 0$?

A. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1; -5; 3)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (2; -1; 4)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P): x + 3 = 0$.

Suy ra mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M_0(1; -5; 3)$ và có VTPT là $[\vec{n}_p; \vec{u}_d] = (0; 4; 1)$

$$\Rightarrow (Q): 4y + z + 17 = 0.$$

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là

$$\begin{cases} 4y + z + 17 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$$

Cách 2: Ta có $M \in d \Rightarrow M(1 + 2t; -5 - t; 3 + 4t)$. Gọi M' là hình chiếu của M trên

$$(P): x + 3 = 0. \text{ Suy ra } M'(-3; -5 - t; 3 + 4t). \text{ Suy ra } d': \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

So sánh với các phương án, ta chọn D là đáp án đúng.

Câu 17: (Vận dụng) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 5 = 0$. Đường thẳng vuông góc với (P) , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$. **B.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$.
C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$. **D.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

- Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường thẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ cần tìm với d_1 và d_2 , khi đó $M(3 - t; 3 - 2t; -2 + t)$, $N(5 - 3s; -1 + 2s; 2 + s) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2 - 3s + t; -4 + 2s + 2t; 4 + s - t)$.
- Đường thẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ vuông góc với (P) suy ra $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{n}_p = (1; 2; 3)$. Do đó $\frac{2-3s+t}{1} = \frac{-4+2s+2t}{2} = \frac{4+s-t}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ s = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1; -1; 0)$.
- Vậy đường thẳng cần tìm qua $\Rightarrow M(1; -1; 0)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 3)$ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$.

Câu 18: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $B = \Delta \cap Ox \Rightarrow B(b; 0; 0)$ và $\overrightarrow{BA} = (1 - b; 2; 3)$.

Do $\Delta \perp d$, Δ qua A nên $\overrightarrow{BA} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(1 - b) + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

Từ đó Δ qua $B(-1; 0; 0)$, có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BA} = (2; 2; 3)$ nên có phương trình

$$\Delta: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}.$$

Câu 19: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 101) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} =$

$(1; -2; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = -6 - 5t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = 1 + 2t' \end{cases}$.

Chọn điểm $B(2; -1; 3) \in \Delta$, $AB = 3$.

Điểm $C\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}; 1\right)$ hoặc $C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}; 1\right)$ nằm trên d thỏa mãn $AC = AB$.

Kiểm tra được điểm $C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}; 1\right)$ thỏa mãn $\widehat{BAC}$ nhọn.

Trung điểm của BC là $I\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}; 2\right)$. Đường phân giác cần tìm là AI có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = (2; 11; -5)$ và có phương trình $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$.

Câu 20: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 3)$

và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Oy

có phương trình là.

A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ

$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$ có VTCP $\vec{u} = (1; -2; 2)$.

Gọi $M(0; m; 0) \in Oy$, ta có $\overrightarrow{AM} = (-2; m - 1; -3)$

Do $\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2 - 2(m - 1) - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Ta có Δ có VTCP $\overrightarrow{AM} = (-2; -4; -3)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$.

Câu 21: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 102) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3; 5)$ và có vector chỉ phương

$\vec{u}(1; 2; -2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 6 + 11t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -3 + 5t \\ z = 5 + t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 \\ z = 5 + 7t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có điểm $A(1; -3; 5)$ thuộc đường thẳng d , nên $A(1; -3; 5)$ là giao điểm của d và Δ .

Một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{v}(-3; 0; -4)$. Ta xét:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{3}(1; 2; -2) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right);$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{5}(-3; 0; -4) = \left(-\frac{3}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right).$$

Nhận thấy $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 > 0$, nên góc tạo bởi hai vector $\vec{u}_1, \vec{v}_1$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ .

Ta có $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \left(-\frac{4}{15}; \frac{10}{15}; -\frac{22}{15}\right) = -\frac{15}{2}(2; -5; 11)$ là vector chỉ phương của đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ hay đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có

vector chỉ phương là $\vec{w}_1 = (2; -5; 11)$. Do đó có phương trình: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$.

Câu 22: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} =$

$(0; -7; -1)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 11t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = 2 + t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = -2 + t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 3)$ và có VTCP $\vec{a} = (1; 1; 0)$.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-7) + 0 \cdot (-1) = -7 < 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{u}) > 90^\circ$.

Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có VTCP: $\vec{b} = -\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(5; 12; 1) // (5; 12; 1)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là
$$\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Câu 23: (Vận dụng) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 0), B(2; 0; 2), C(2; -1; 3), D(1; 1; 3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -2 - 3t. \\ z = 2 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 3t. \\ z = 3 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 + 3t. \\ z = 2 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t. \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng cần tìm đi qua $C(2; -1; 3)$ và có vector chỉ phương là $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (-4; -3; -1)$ nên có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Ta thấy điểm $M(-2; -4; 2)$ thuộc đường thẳng đi qua C (ứng với $t = -1$) và vuông góc với mặt phẳng (ABD) nên ta chọn đáp án **C**.

Câu 24: (Vận dụng) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 2), B(1; 2; 1), C(3; 2; 0)$ và $D(1; 1; 3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4t. \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4. \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 4t. \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t. \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{BC} = (2; 0; -1), \overrightarrow{BD} = (-2; -1; 3)$$

Mặt phẳng (BCD) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-1; -4; -2)$.

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) nên có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{n}$. Do đó loại đáp án A, **B**.

Thay tọa độ của điểm $A(1; 0; 2)$ vào phương trình ở đáp án C và D thì thấy đáp án C thỏa mãn.

Câu 25: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1), B(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3})$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$ B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$
C. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$ D. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2}$

Lời giải

Chọn A

Xét bài toán: Cho ΔABC , gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi a, b, c là độ dài các cạnh. Khi đó ta có $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Chứng minh. Gọi D và E lần lượt là chân các đường phân giác của ΔABC kẻ từ B và C .

Dựng tia Ax song song BD cắt CE tại M . Dựng tia Ay song song CE cắt BD tại N .

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$. Mặt khác $\Delta EAM \sim \Delta EBI$, suy ra $\frac{EA}{EB} = \frac{AM}{BI}$.

Hơn nữa, $\frac{EA}{EB} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

Do đó $\frac{AM}{BI} = \frac{b}{a} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{b}{a} \overrightarrow{BI}$.

Tương tự: $\overrightarrow{AN} = \frac{c}{a} \overrightarrow{CI}$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a} \overrightarrow{BI} + \frac{c}{a} \overrightarrow{CI} \Leftrightarrow a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Áp dụng bài toán trên cho ΔOAB , ta được $AB.\overrightarrow{IO} + OB.\overrightarrow{IA} + OA.\overrightarrow{IB} = \vec{0} (*)$.

Ta có $OA = 3, OB = 4, AB = 5$;

$\overrightarrow{IO} = (-a; -b; -c), \overrightarrow{IA} = (2-a; 2-b; 1-c), \overrightarrow{IB} = \left(-\frac{8}{3}-a; \frac{4}{3}-b; \frac{8}{3}-c\right)$.

Từ (*) ta có
$$\begin{cases} -5a + 4(2-a) + 3\left(-\frac{8}{3}-a\right) = 0 \\ -5b + 4(2-b) + 3\left(\frac{4}{3}-b\right) = 0 \\ -5c + 4(1-c) + 3\left(\frac{8}{3}-c\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Do đó $I(0; 1; 1)$.

Mặt khác, ta có: $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (4; -8; 8)$.

Suy ra vec tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u} = (1; -2; 2)$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình là $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

Nhận xét: Điểm $K(-1; 3-1) \in d$ nên phương trình đường thẳng d viết lại $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 26: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Trong không gian $Oxyz$, cho đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = (-2; 1; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

A. $\begin{cases} x = 1 + 27t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = 11 - 10t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = -11 - 10t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 17t \\ z = 1 + 10t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$A = d \cap \Delta$$

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 1t. \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Chọn điểm $B(-1; 2; 3) \in \Delta, AB = 3$.

Gọi $C \in d$ thỏa mãn $AC = AB \Rightarrow C\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}; 1\right)$ hoặc $C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}; 1\right)$

Kiểm tra được điểm $C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}; 1\right)$ thỏa mãn BAC là góc nhọn.

Trung điểm của BC là $I\left(-\frac{9}{10}; \frac{3}{10}; 2\right)$. Đường phân giác cần tìm là AI có vectơ chỉ phương là

$\vec{u} = (19; 7; -10)$ có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + 19t \\ y = 1 + 7t \\ z = 1 - 10t \end{cases}$. Tọa độ điểm của đáp án B thuộc AI .

Câu 27: (Vận dụng cao) (Đề THPTQG 2017 Mã 123) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

- A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

+) VTCP của Δ, Δ' lần lượt là $\vec{u} = (3; 2; 1)$ và $\vec{v} = (1; 3; -2)$; $[\vec{u}, \vec{v}] = (-7; 7; 7)$

+) Vì d vuông góc với Δ và Δ' nên $\vec{u}_d = (-1; 1; 1)$.

+) d đi qua $M(-1; 1; 3)$ nên $d: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

113. Tìm tọa độ điểm liên quan đường thẳng

Câu 28: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$.

- A. $P(1; 1; 2)$. B. $N(2; -1; 2)$. C. $Q(-2; 1; -2)$. D. $M(-2; -2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$ đi qua điểm $(-2; 1; -2)$.

Câu 29: (Nhận biết) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây

thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

- A. $P(1; 2; 5)$. B. $N(1; 5; 2)$. C. $Q(-1; 1; 3)$. D. $M(1; 1; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Dựa vào lý thuyết: Nếu d qua $M(x_0; y_0; z_0)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ thì

phương trình đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 ta chọn đáp án **B**.

Cách 2. Thay tọa độ các điểm M vào phương trình đường thẳng d , ta có:

$$\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 2 = 5 + t \\ 5 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -3 \text{ (Vô lý)} \\ t = 1 \end{cases} \text{Loại đáp án } \mathbf{A}.$$

Thay tọa độ các điểm N vào phương trình đường thẳng d , ta có:

$$\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 5 = 5 + t \\ 2 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = 0. \text{ Nhận đáp án } \mathbf{B}.$$

Câu 30: (Nhận biết) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào sau đây?

- A.** $Q(2; -1; 2)$. **B.** $M(-1; -2; -3)$. **C.** $P(1; 2; 3)$. **D.** $N(-2; 1; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm P vào phương trình d ta được: $\frac{1-1}{2} = \frac{2-2}{-1} = \frac{3-3}{2}$ (đúng).

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $P(1; 2; 3)$.

Câu 31: (Thông hiểu) (THPT QG 2017 Mã 105) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; -2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - y + 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α) ?

- A.** $3x - y + 2z - 6 = 0$ **B.** $3x - y + 2z + 6 = 0$ **C.** $3x - y - 2z + 6 = 0$
D. $3x + y + 2z - 14 = 0$

Lời giải

Chọn A

Gọi $(\beta) // (\alpha)$, PT có dạng $(\beta): 3x - y + 2z + D = 0$ (điều kiện $D \neq 4$);

Ta có: (β) qua $M(3; -1; -2)$ nên $3 \cdot 3 - (-1) + 2 \cdot (-2) + D = 0 \Leftrightarrow D = -6$ (thỏa đk);

Vậy $(\beta): 3x - y + 2z - 6 = 0$

Câu 32: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

- A.** $M(-1; 0; -3)$ **B.** $M(2; 3; 3)$
C. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$ **D.** $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $M \in d$ nên $\exists t \in \mathbb{R} : M(1+t; 2+t; 1+2t)$. Đk : $1+2t < 0 \Rightarrow t < -\frac{1}{2} (*)$

$$MA^2 + MB^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow (-t)^2 + (-3-t)^2 + (1-2t)^2 + (-2-t)^2 + (-t)^2 + (2-2t)^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow 12t^2 - 2t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(L) \\ t = -\frac{5}{6}(T/m) \end{cases}$$

Với $t = -\frac{5}{6}$, ta có $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

114. Khoảng cách

Câu 33: (Thông hiểu) (Đề tham khảo BGD 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P) .

A. $d = \frac{1}{3}$.

B. $d = \frac{5}{3}$.

C. $d = \frac{2}{3}$.

D. $d = 2$.

Lời giải

Chọn D

(P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}(2; -2; -1)$ và đường thẳng Δ có vecto chỉ phương $\vec{u}(2; 1; 2)$ thỏa mãn $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ nên $\Delta // (P)$ hoặc $\Delta \subset (P)$

Do đó: lấy $A(1; -2; 1) \in \Delta$ ta có: $d(\Delta(P)) = d(A; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2(-2) - 1 + 1|}{\sqrt{4+4+1}} = 2$.

115. Vị trí tương đối

Câu 34: (Thông hiểu) (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình:

$$\frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}. \text{ Xét mặt phẳng } (P): 10x + 2y + mz + 11 = 0, \text{ m là tham số thực. Tìm tất}$$

cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ .

A. $m = -2$

B. $m = 2$

C. $m = -52$

D. $m = 52$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $\Delta: \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; 1; 1)$

Mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (10; 2; m)$

Để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ thì $\vec{u}$ phải cùng phương với $\vec{n} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{1}{2} =$

$$\frac{1}{m} \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 35: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** d cắt và không vuông góc với (P) **B.** d vuông góc với (P)
C. d song song với (P) **D.** d nằm trong (P)

Lời giải

Chọn A

Ta có đường thẳng d đi qua $M(-1; 0; 5)$ có vtcp $\vec{u} = (1; -3; -1)$ và mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n} = (3; -3; 2)$

$M \notin (P) \Rightarrow$ loại đáp án **D.**

$\vec{n}, \vec{u}$ không cùng phương $\Rightarrow$ loại đáp án **B.**

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 10 \Rightarrow \vec{n}, \vec{u}$ không vuông góc $\Rightarrow$ loại đáp án **C.**

Câu 36: (Thông hiểu) (Đề thử nghiệm THPTQG 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M .

Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A.** $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ **B.** $\frac{AM}{BM} = 2$ **C.** $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ **D.** $\frac{AM}{BM} = 3$

Lời giải

Chọn D

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z); \overrightarrow{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}; \overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1)$ và

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=7k \\ -3=3k \\ z-1=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ -1=k \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0).$$

$$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2); \overrightarrow{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow BM = 2AB.$$

Câu 37: (Vận dụng) (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 0; 2)$

và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

- A.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ **C.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 2)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d , nên nhận véc tơ chỉ phương của d là vectơ pháp tuyến $(P): 1(x-1) + y + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 5 = 0$

Gọi B là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng $d \Rightarrow B(1+t; t; -1+2t)$

Vì $B \in (P) \Leftrightarrow (1+t) + t + 2(-1+2t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow B(2; 1; 1)$

Ta có đường thẳng Δ đi qua A và nhận vectơ $\vec{AB} = (1; 1; -1)$ là véc tơ chỉ phương có

dạng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Cách 2:

Gọi $d \cap \Delta = B \Rightarrow B(1+t; t; -1+2t)$

$\vec{AB} = (t; t; -3+2t)$, Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}_d = (1; 1; 2)$

Vì $d \perp \Delta$ nên $\vec{AB} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow t + t + 2(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $\vec{AB} = (1; 1; -1)$. Ta có đường thẳng Δ đi qua $A(1; 0; 2)$ và nhận véc tơ $\vec{AB} = (1; 1; -1)$

là véc tơ chỉ phương có dạng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

116. Tổng hợp mặt phẳng đường thẳng mặt cầu

Câu 38: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 104) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; -2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc nhau và $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -4$

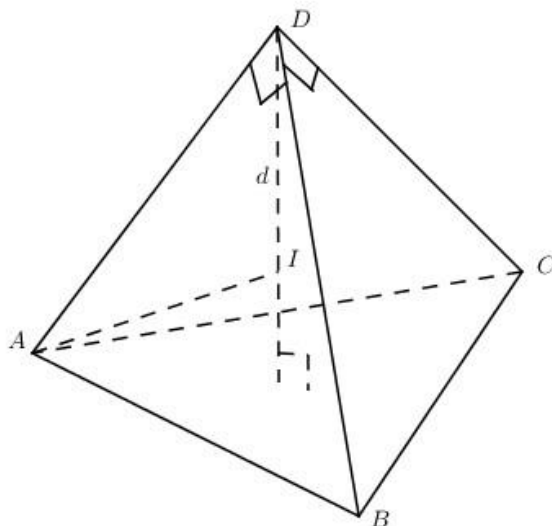
B. $S = -1$

C. $S = -2$

D. $S = -3$

Lời giải

Chọn B



Xét trục d của ΔABC , ta có $(ABC): x + y + z + 2 = 0$, do ΔABC đều nên d đi qua trọng

tâm $G\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 1; 1)$ suy ra $d: \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + t \\ y = -\frac{2}{3} + t \\ z = -\frac{2}{3} + t \end{cases}$

Ta thấy $\Delta DAB = \Delta DBC = \Delta DCA$, suy ra $DA = DB = DC \Rightarrow D \in d$ nên giả sử $D\left(-\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{4}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right); \overrightarrow{BD} = \left(-\frac{2}{3} + t; \frac{4}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right); \overrightarrow{CD} = \left(-\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; \frac{4}{3} + t\right)$

Có $\begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \Rightarrow D\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right) \\ t = \frac{2}{3} \Rightarrow D(0; 0; 0) \text{ (loại)} \end{cases}$

Ta có $I \in d \Rightarrow I\left(-\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right)$, do tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm I nên $IA = ID \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow S = -1$.

Câu 39: (Vận dụng) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$; $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với d, Δ .

A. $y + z + 3 = 0$ **B.** $x + z + 1 = 0$ **C.** $x + y + 1 = 0$ **D.** $x + z - 1 = 0$

Lời giải.

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -2)$; $R = \sqrt{2}$.

Vecto chỉ phương của $d: \vec{u}_d = (1; 2; -1)$. Vecto chỉ phương của $\Delta: \vec{u}_\Delta = (1; 1; -1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình.

Ta có $[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (-1; 0; -1)$ nên chọn một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát dạng $x + z + D = 0$.

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|-1-2+D|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow |D - 3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 5 \\ D = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với d , Δ là $x + z + 1 = 0$.

Câu 40: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$ và điểm $A(2; 3; 4)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x + 2y + 2z - 15 = 0$.

B. $x + y + z - 7 = 0$.

C. $2x + 2y + 2z + 15 = 0$.

D. $x + y + z + 7 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy A nằm ngoài mặt cầu (S) . Tâm mặt cầu là $I(1; 2; 3)$.

Đường thẳng AM tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow AM \perp IM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) + (y - 3)(y - 2) + (z - 4)(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 - 1)(x - 1) + (y - 2 - 1)(y - 2) + (z - 3 - 1)(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - (x + y + z - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - 7 = 0 \text{ (Do } (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 0 \text{)}.$$

Câu 41: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Gọi $M = \Delta \cap (P) \Rightarrow M \in \Delta \Rightarrow M(t; 2t - 1; t + 1)$

$M \in (P) \Rightarrow t - 2(2t - 1) - (t + 1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 1; 2)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; -2; -1)$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (1; 2; 1)$

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ

$\Rightarrow$ Đường thẳng d nhận $\frac{1}{2}[\vec{n}, \vec{u}] = (0; -1; 2)$ làm véc tơ chỉ phương và $M(1; 1; 2) \in d$

$$\Rightarrow \text{Phương trình đường thẳng } d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Câu 42: (Vận dụng) (Đề tham khảo THPTQG 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$. **B.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$. **D.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: phương pháp tự luận

Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(0; -1; 2)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) .

Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M_0(0; -1; 2)$ và có VTPT là $[\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (-3; 2; 1) = - (3; -2; -1)$

$\Rightarrow (Q): 3x - 2y - z = 0$.

Gọi Δ là hình chiếu của d trên (P) , nên tập hợp các điểm thuộc Δ là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Cho $x = 0 \Rightarrow M(1; 1; 1)$.

Cho $y = 0 \Rightarrow N(\frac{3}{4}; 0; \frac{9}{4})$.

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là đường thẳng qua

$M(1; 1; 1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{MN} = (-\frac{1}{4}; -1; \frac{5}{4}) = -\frac{1}{4}(1; 4; -5)$ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

Câu 43: (Vận dụng cao) (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B , C và bán kính bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) .

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho có phương trình là

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{đk: } a^2 + b^2 + c^2 > 0).$$

Khi đó ta có hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} d(A; (P)) = 2 \\ d(B; (P)) = 1 \\ d(C; (P)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2 \\ \frac{|3a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 1 \\ \frac{|-a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+2b+c+d| = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |3a-b+c+d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |-a-b+c+d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

Khi đó ta có: $|3a-b+c+d| = |-a-b+c+d|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b+c+d = -a-b+c+d \\ 3a-b+c+d = a+b-c-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a-b+c+d = 0 \end{cases}$$

Với $a = 0$ thì ta có

$$\begin{cases} |2b+c+d| = 2\sqrt{b^2+c^2} \\ |2b+c+d| = 2|-b+c+d| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c+d| = 2\sqrt{b^2+c^2} \\ 4b-c-d = 0 \\ c+d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = d = 0, b \neq 0 \\ c+d = 4b, c = \pm 2\sqrt{2}b \end{cases}$$

Do đó có 3 mặt phẳng thỏa bài toán.

$$\text{Với } a-b+c+d = 0 \text{ thì ta có } \begin{cases} |3b| = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2a| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 4|a| \\ |2a| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = \frac{4}{3}|a| \\ |c| = \frac{\sqrt{11}}{3}|a| \end{cases}$$

Do đó có 4 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Câu 44: (Vận dụng cao) (Đề chính thức BGD 2017 mã đề 110) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 6; 2)$ và $B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = 1$

B. $R = \sqrt{6}$

C. $R = \sqrt{3}$

D. $R = 2$

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3; 2; 1)$

$$d(I; (P)) = \frac{|3+2+1|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(3; 2; 1)$ và bán kính $R' = \frac{AB}{2} = 3\sqrt{2}$

Ta có $H \in (S)$. Mặt khác $H \in (P)$ nên $H \in (C) = (S) \cap (P)$

$$\text{Bán kính của đường tròn } (C) \text{ là } R = \sqrt{R'^2 - d^2(I; (P))} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}.$$

Câu 45: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho

AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng.

A. 256.

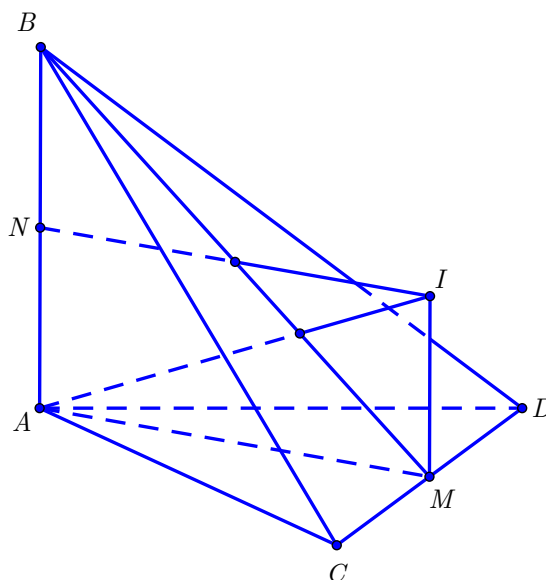
B. 128.

C. $\frac{256}{3}$.

D. $\frac{128}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Bán kính mặt cầu là $R = IA = 4\sqrt{3}$.

Do AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau nên $R = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 + AD^2}}{2}$

Suy ra $AB^2 + AC^2 + AD^2 = 4R^2$.

Áp dụng bất đẳng thức cauchy ta có:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 + AD^2 &\geq 3\sqrt[3]{AB^2 \cdot AC^2 \cdot AD^2} \\ \Rightarrow 4R^2 &\geq 3\sqrt[3]{AB^2 \cdot AC^2 \cdot AD^2} \\ \Rightarrow AB \cdot AC \cdot AD &\leq \frac{8\sqrt{3}}{9} R^3 = 512 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD \leq \frac{256}{3}.$$

Vậy $\text{Max} V_{ABCD} = \frac{256}{3}$. Đạt được khi $AB = AC = AD = 8$.

Câu 46: (Vận dụng cao) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 104) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$ và điểm $A(-1; -1; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) . M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $3x + 4y - 2 = 0$. B. $3x + 4y + 2 = 0$.

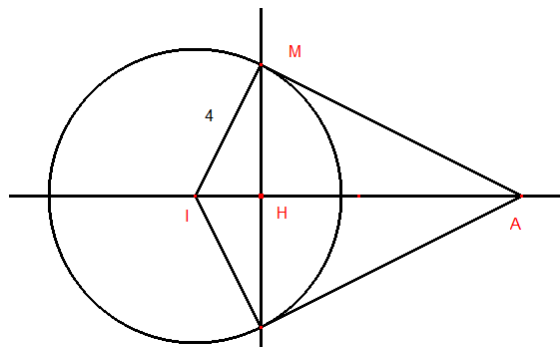
C. $6x + 8y + 11 = 0$. D. $6x + 8y - 11 = 0$.

Lời giải

Chọn A

(S) có tâm $I(2; 3; -1)$; bán kính $R = 4$

$A(-1; -1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-3; -4; 0)$, tính được $IA = 5$.



Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA} = (-3; -4; 0)$ làm vector pháp tuyến.

Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên tính được $IM^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IM^2}{IA} = \frac{16}{5}$, từ đó tính được $\overrightarrow{IH} = \frac{16}{25} \overrightarrow{IA}$ tìm được $H\left(\frac{2}{25}; \frac{11}{25}; -1\right)$

Mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $-3\left(x - \frac{2}{25}\right) - 4\left(y - \frac{11}{25}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0$.

117. Các bài toán cực trị

Câu 47: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 101) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 4; -3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(-3; 0; -3)$. B. $M(0; -3; -5)$. C. $N(0; 3; -5)$. D. $Q(0; 5; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Điểm A thuộc mặt phẳng (Oyz) và có tung độ dương.

Đường thẳng d thuộc mặt trụ có trục là Oz và có bán kính bằng 3 (phương trình: $x^2 + y^2 = 9$).

Do đó khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất thì d phải nằm trong mặt phẳng (Oyz) và cách Oz một khoảng bằng 3, đồng thời đi qua điểm có tung độ dương.

Vậy d đi qua điểm **$N(0; 3; -5)$** .

Cách 2

Vì d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d là đường sinh của mặt trụ tròn xoay có trục là Oz và bán kính bằng 3.

Dễ thấy: $d(A; Oz) = 4$ nên $\min d(A; d) = d(A; Oz) - d(d; Oz) = 1$.

Mặt khác, điểm $A \in (Oyz)$ nên $d \subset (Oyz)$

do $d(d; Oz) = 3$ nên d đi qua điểm $K(0; 0; 3)$.

$$d // Oz \Rightarrow d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = z_0 + t \end{cases}.$$

Kiểm tra 4 đáp án ta thấy $N(0; 3; -5)$ thỏa mãn.

- Câu 48: (Vận dụng cao) (THPTQG 2019 Mã đề 102)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 4; -3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?
- A.** $P(-3; 0; -3)$. **B.** $M(0; 11; -3)$. **C.** $N(0; 3; -5)$. **D.** $Q(0; -3; -5)$.

Lời giải

Chọn D

Vì d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d là đường sinh của mặt trụ tròn xoay có trục là Oz và bán kính bằng 3.

Dễ thấy: $d(A; Oz) = 4$ nên $\max d(A; d) = d(A; Oz) + d(d; Oz) = 7$.

Mặt khác, điểm $A \in (Oyz)$ nên $d \subset (Oyz)$ để khoảng cách từ A đến d lớn nhất thì điểm $A(0; 4; -3)$ và d nằm khác phía với trục Oz

do $d(d; Oz) = 3$ nên d đi qua điểm $K(0; -3; 0)$ khác phía với điểm $A(0; 4; -3)$.

$$\text{Vì } d // Oz \Rightarrow d: \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = t \end{cases}$$

Kiểm tra 4 đáp án ta thấy $Q(0; -3; -5)$ thỏa mãn.

Cách 2:

Gọi $X(a; b; c)$ là hình chiếu của A lên d và $d(A, Oz) = 4$.

Nhận xét: Họ các đường thẳng d tạo thành một khối trụ với trục là Oz và bán kính $R = 3$.

Để khoảng cách từ A đến d là lớn nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} d \subset (Oyz) (1) \\ \max d(A, d) = d(A, Oz) + R = 7 (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow a = 0$.

Ta có: $d(d, Oz) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = -3 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow b = -3$.

Khi đó: $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = c + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

- Câu 49: (Vận dụng cao) (THPT QG 2019 Mã đề 104)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 3; -2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(-2; 0; -3)$.

B. $M(0; 8; -5)$.

C. $N(0; 2; -5)$.

D. $P(0; -2; -5)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Giả sử đường thẳng d đi qua điểm $M_0(a; b; c)$.

Do d song song với trục Oz nên vectơ chỉ phương của đường thẳng d là: $\vec{u} = (0; 0; 1)$.

Đường thẳng d cách trục Oz một khoảng bằng 2 nên khoảng cách từ điểm O đến d bằng

$$2. \text{ Khi đó: } \frac{|\overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4.$$

$$\text{Khoảng cách từ điểm } A \text{ đến đường thẳng } d \text{ là: } h = \frac{|\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{a^2 + (b-3)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 6b + 9} = \sqrt{13 - 6b}.$$

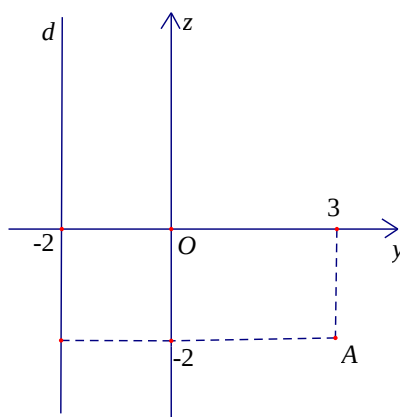
$$\text{Từ ta có: } -2 \leq b \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 13 - 6b \leq 25 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{13 - 6b} \leq 5.$$

$$\text{Do đó: } h_{\max} = 5 \text{ khi } b = -2, a = 0.$$

Vậy khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm $P(0; -2; -5)$.

Cách 2:

Do đường thẳng d song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2 nên tập hợp các đường thẳng d tạo thành mặt trụ tròn xoay có trục là Oz , bán kính bằng 2. Khi đó khoảng cách từ A đến d lớn nhất khi và chỉ khi d , Oz , A cùng nằm trên mặt phẳng Oyz và d , A ở hai phía đối với Oz .



Khi đó khoảng cách từ A đến d lớn nhất bằng 5.

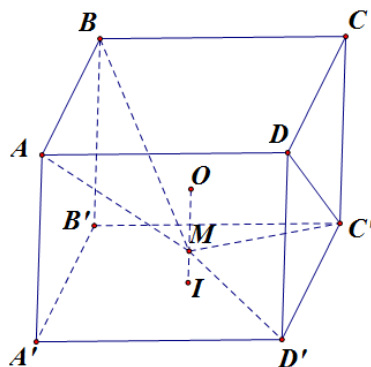
Vậy khoảng cách từ A đến d lớn nhất bằng 5 khi d đi qua điểm $P(0; -2; -5)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.A	4.B	5.B	6.C	7.B	8.A	9.D	10.C
11.D	12.B	13.B	14.D	15.C	16.D	17.A	18.A	19.C	20.A
21.B	22.B	23.C	24.C	25.A	26.B	27.D	28.C	29.B	30.C
31.A	32.C	33.D	34.B	35.A	36.A	37.B	38.B	39.B	40.B
41.A	42.C	43.B	44.B	45.C	46.A	47.C	48.D	49.D	

118. Ứng dụng phương pháp tọa độ

Câu 1: (Vận dụng) (Đề Chính Thức 2018 - Mã 103) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

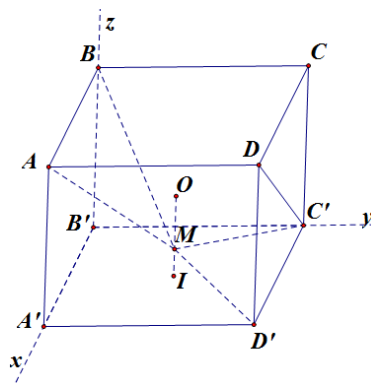
B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.

Lời giải

Chọn D



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, cạnh hình lập phương là 1, ta được tọa độ các điểm như sau :

$$M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right), C'(0; 1; 0), D'(1; 1; 0) \text{ và } A(1; 0; 1), B(0; 0; 1).$$

$$\text{Khi đó } \vec{n}_{(MC'D')} = (0; 1; 3); \vec{n}_{(MAB)} = (0; 5; 3) \text{ nên } \cos((MAB), (MC'D')) = \frac{|5 \cdot 1 + 3 \cdot 3|}{\sqrt{5^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{7\sqrt{85}}{85}.$$

$$\text{Suy ra } \sin((MAB), (MC'D')) = \sqrt{1 - \left(\frac{7\sqrt{85}}{85}\right)^2} = \frac{6\sqrt{85}}{85}.$$

Câu 2: (Vận dụng cao) (THPTQG 2019 Mã đề 102) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 12.

B. 4.

C. 8.

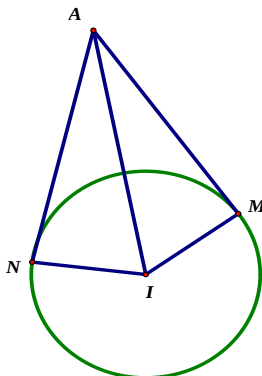
D. 16.

Lời giải

Chọn A

Do $A(a; b; c) \in (Oxy)$ nên suy ra $A(a; b; 0)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; \sqrt{2})$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.



Ta thấy mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) nên từ một điểm A bất kì thuộc mặt phẳng (Oxy) và nằm ngoài (S) kẻ tiếp tuyến đến (S) thì các tiếp tuyến đó nằm trên một hình nón đỉnh A , các tiếp điểm nằm trên một đường tròn được xác định. Còn nếu $A \in (S)$ thì ta kẻ các tiếp tuyến đó sẽ thuộc một mặt phẳng tiếp diện của (S) tại điểm A .

Để có ít nhất hai tiếp tuyến qua A thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi

TH1. Hoặc $A \in (S) \Leftrightarrow IA = R$.

TH2. Hoặc các tiếp tuyến tạo thành mặt nón và góc ở đỉnh của mặt nón là:

$$\widehat{MAN} \geq 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{MAI} \geq 45^\circ \text{ suy ra } \sin \widehat{MAI} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{IM}{IA} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{IA} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow IA \leq \sqrt{6}.$$

Vậy điều kiện bài toán là $\sqrt{3} \leq IA \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 \leq IA^2 \leq 6$.

Ta có $IA^2 = a^2 + b^2 + 2$.

Do đó, $3 \leq IA^2 \leq 6 \Leftrightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq a^2 + b^2 \leq 4 (*)$

Do $a, b \in \mathbb{Z}$ nên ta có 12 điểm thỏa mãn $(*)$ là:

$A(0; 1; 0), A(0; -1; 0), A(0; 2; 0), A(0; -2; 0)$

$A(1; 0; 0), A(-1; 0; 0), A(2; 0; 0), A(-2; 0; 0)$

$A(1; 1; 0), A(1; -1; 0), A(-1; 1; 0), A(-1; -1; 0).$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A								
-----	-----	--	--	--	--	--	--	--	--