

Mục lục

Chương 1.	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	1
Bài 1.	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC	1
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	4
	✎ Dạng toán 1. Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn	4
	✎ Dạng toán 2. Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles	5
	✎ Dạng toán 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác	7
	✎ Dạng toán 4. Tính các giá trị lượng giác của một góc lượng giác	8
	✎ Dạng toán 5. Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác	11
	✎ Dạng toán 6. Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức	12
	✎ Dạng toán 7. Vận dụng thực tiễn	14
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	15
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	25
Bài 2.	CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC	29
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	29
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	30
	✎ Dạng toán 1. Sử dụng công thức cộng, công thức nhân đôi	30
	✎ Dạng toán 2. Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng	31
	✎ Dạng toán 3. Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích	32
	✎ Dạng toán 4. Các bài toán chứng minh, rút gọn	34
	✎ Dạng toán 5. Vận dụng thực tiễn	37
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	38
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	44
Bài 3.	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ	47
A	Kiến thức cần nhớ	47
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	48
	✎ Dạng toán 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác	48
	✎ Dạng toán 2. Tính chẵn lẻ của hàm số	51

📁	Dạng toán 3. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất.....	52
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	55
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	57
Bài 4.	PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	59
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	59
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	61
📁	Dạng toán 1. Giải các phương trình lượng giác cơ bản.....	61
📁	Dạng toán 2. Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng.....	64
📁	Dạng toán 3. Vận dụng thực tiễn.....	65
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	66
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	72

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

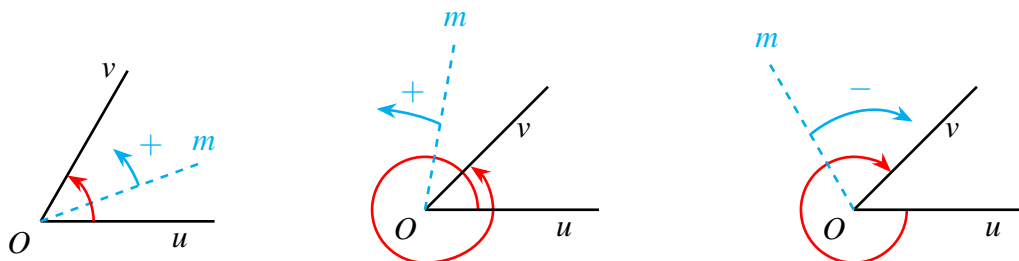
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. GÓC LƯỢNG GIÁC

☀ **Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác:** Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này.

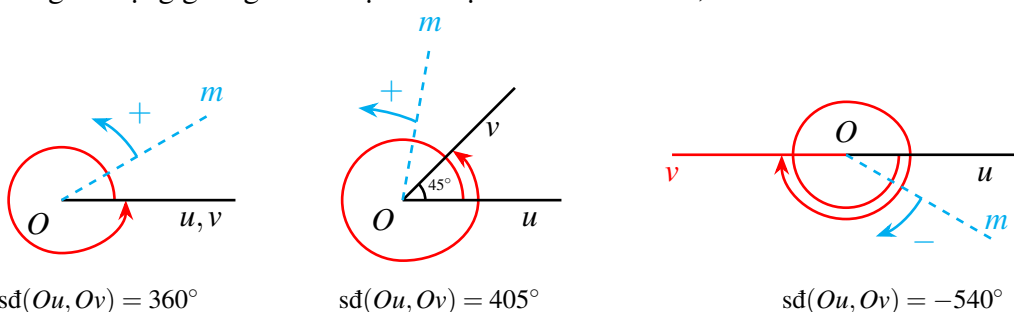
Ghi nhớ 1:

- Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .



Ghi nhớ 2:

- Khi tia Om quay một góc α° , ta nói số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) bằng α° , kí hiệu $sđ(Ou, Ov) = \alpha^\circ$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha^\circ$.
- Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo α° của nó.



- Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou và tia cuối Ov sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là

$$sđ(Ou, Ov) = \alpha^\circ + k360^\circ, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) + \text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) + k360^\circ \quad \text{với } k \in \mathbb{Z}.$$

2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Đơn vị đo góc và cung tròn

- Đơn vị độ ($^\circ$): Chia đường tròn thành 360 cung tròn bằng nhau thì góc ở tâm chắn bởi cung đó sẽ có số đo là 1° .
- Đơn vị radian (rad): Trên đường tròn, nếu một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì ta nói cung đó có số đo là 1 rad. Khi đó, góc ở tâm chắn cung đó cũng có số đo 1 rad.

! Khi viết số đo một góc theo đơn vị rad, ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ ta hiểu là góc $\frac{\pi}{2}$ rad.

- Mối liên hệ giữa độ và radian: Độ dài đường tròn là $2\pi R$ nên có số đo là 2π rad tương ứng với 360° . Suy ra

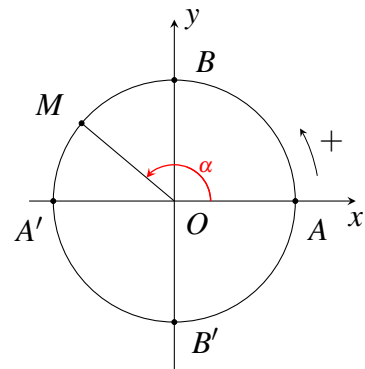
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Độ dài cung tròn: Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì sẽ có độ dài là $l = R\alpha$.

3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

Đường tròn lượng giác:

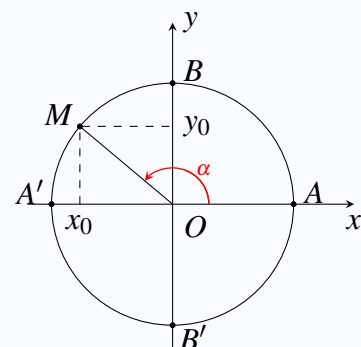
- Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tâm O bán kính 1, cùng với gốc $A(1;0)$ và chiều quay dương (như quy ước) gọi là đường tròn lượng giác.
- Cho góc lượng giác số đo α . Trên đường tròn lượng giác, tồn tại duy nhất điểm M sao cho góc lượng giác (OA, OM) bằng α (hình bên). Khi đó, M gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

Ghi nhớ 1: Giả sử $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo α .

- ① Tung độ y_0 của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$, hay $\sin \alpha = y_0$.
- ② Hoành độ x_0 của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$, hay $\cos \alpha = x_0$.
- ③ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, với $\cos \alpha \neq 0$.
- ④ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, với $\sin \alpha \neq 0$.



Ghi nhớ 2: Ta có các kết quả sau được suy ra từ định nghĩa

① Vì $-1 \leq x_0; y_0 \leq 1$ nên

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

② $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha.$$

③ $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ và

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha.$$

4. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

⚙ **Công thức lượng giác cơ bản:** Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

① $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

② $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$ với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

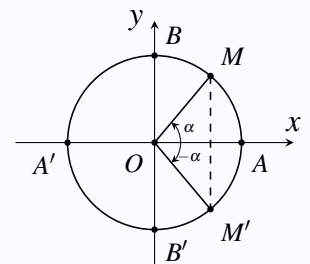
③ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$ với $\alpha \neq k\pi.$

④ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1,$ với $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}.$

⚙ **Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:**

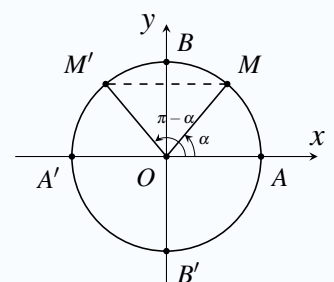
Góc đối nhau: α và $-\alpha$ tương ứng với hai điểm "đại diện" là điểm M và điểm M' . Muốn so sánh sin, ta so sánh tung độ; muốn so sánh cos, ta so sánh hoành độ. Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua trục hoành nên ta có kết quả sau:

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



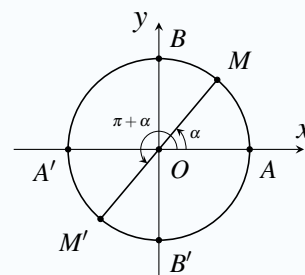
Góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua trục tung nên ta có kết quả sau:

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



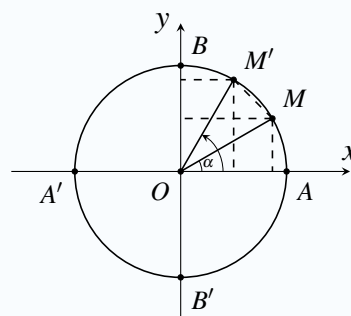
Góc hơn kém π : α và $\alpha + \pi$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua gốc O nên ta có kết quả sau:

- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$



Góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' có hoành độ và tung độ ngược nhau nên ta có kết quả sau:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 ĐỔI ĐƠN VỊ GIỮA ĐỘ VÀ RADIAN. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

☑ Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian:

- $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$
- $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

☑ Xét đường tròn có bán kính R .

- Cung tròn có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) thì có độ dài là $l = R\alpha$.
- Cung tròn có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) thì có độ dài là $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R$.

≡ Ví dụ 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian.

a) 72° ;

b) 600° ;

c) $-37^\circ 45' 30''$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ.

a) $\frac{5\pi}{18}$;

b) $\frac{3\pi}{5}$;

c) -4 .

Ví dụ 3. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung, biết số đo tương ứng

a) $\frac{3\pi}{4}$

b) 51°

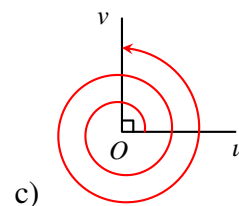
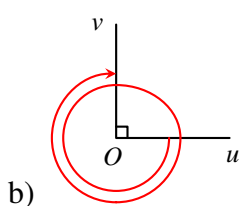
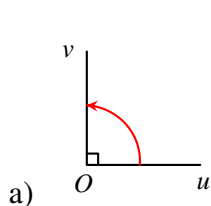
c) $\frac{1}{3}$

Ví dụ 4. Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

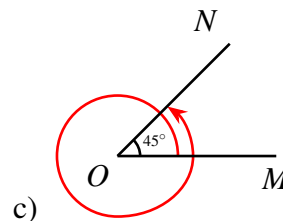
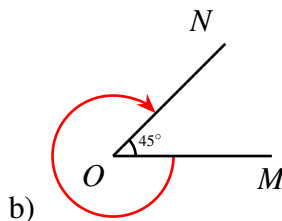
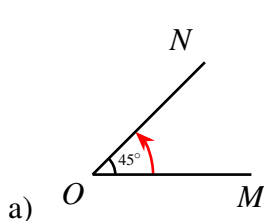
DT**2****Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles**

- Khi xác định số đo của góc lượng giác, ta cần chú ý đến chiều quay (chiều dương ngược kim đồng hồ, chiều âm cùng kim đồng hồ). Từ đó xác định chính xác số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) .
- Giả sử α° là một số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) . Suy ra số đo các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou , tia cuối Ov có dạng $\alpha^\circ + k \cdot 360^\circ$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hệ thức Chasles: $\text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) - \text{sđ}(Ou, Ov) + k360^\circ$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 5. Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) được biểu diễn trong hình bên dưới.



Ví dụ 6. Cho $\widehat{MON} = 45^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên dưới và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



.....

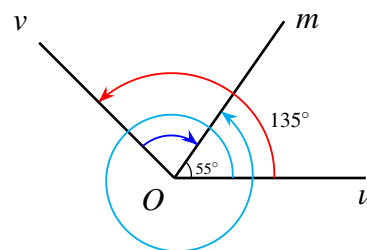
.....

.....

.....

Ví dụ 7.

Xác định số đo các góc lượng giác (Ou, Ov) , (Ov, Om) và (Ou, Om) được minh họa ở hình bên.



.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8. Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác trong mỗi trường hợp sau:

- a) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 510° ;
- b) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{7\pi}{6}$.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 9. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{5\pi}{4}$. Tìm số đo các góc lượng giác (Ov, Ow) .

.....

.....

.....

.....

3

Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn gốc $A(1;0)$ làm điểm đầu. Để biểu diễn góc lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$.

⚠ Nếu $|\alpha| > 2\pi$ ta phân tích $\alpha = \beta + k2\pi$, với $-\pi < \beta < \pi$. Khi đó, ta chỉ cần xác định điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \beta$.

≡ Ví dụ 10. Biểu diễn các góc (cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau

a) $\frac{\pi}{4}$;

b) $-\frac{11\pi}{2}$;

c) 120° ;

d) -765° .

Ví dụ 11. Trên đường tròn lượng giác, biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

a) $x_1 = k\pi$;

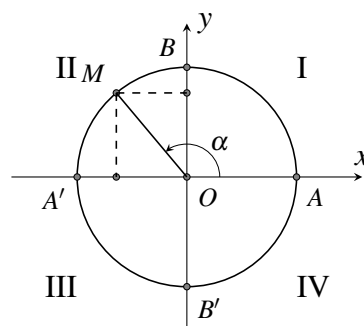
$$\text{b) } x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán.

Chú ý:

Nếu đề bài có giới hạn miền của góc α , thì ta cần xem trên miền đó, các tỉ số lượng giác tương ứng sẽ mang dấu như thế nào. Cụ thể:

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	−	−
$\cos \alpha$	+	−	−	+
$\tan \alpha$	+	−	+	−
$\cot \alpha$	+	−	+	−



Ví dụ 12. Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = \frac{2017\pi}{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 13. Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc lượng giác sau

a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

b) $-\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

c) $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

b) $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

d) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.





a) $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

b) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

c) $\sin \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha < 0$.

d) $\cos \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$.

DT**5****Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác****Hướng 1:**

- Từ tỉ số lượng giác đã cho, ta tính toán các giá trị lượng giác có trong biểu thức M .
- Thay tất cả giá trị vừa tìm được vào M , suy ra kết quả.

Hướng 2:

- Biến đổi biểu thức M về tỉ số lượng giác đã cho.
- Thay kết quả vào M , suy ra kết quả.

Ví dụ 16. Cho $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 17. Cho $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $M = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 18. Cho $\cot \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 19. Biết $\sin x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$.

Ví dụ 20. Tính giá trị của biểu thức $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.

DT

6

Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức

Ví dụ 21. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha;$

b) $B = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha};$

c) $C = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha;$

d) $D = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha};$

≡ Ví dụ 22. Chứng minh rằng $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \tan^2 \alpha + 2$.

Ví dụ 23. Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(A + B) = \sin C$.

b) $\cos(A + B) + \cos C = 0$.

c) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.

d) $\tan(A - B + C) = -\tan 2B$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

DT

7

Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 24. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn Bưu điện Hà Nội theo thứ tự dài 1,75 mét và 1,26 mét. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút và kim giờ vạch được cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu mét?

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Ví dụ 25. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1 h; 3 h; 5 h.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	



≡ **Ví dụ 26.** Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức:

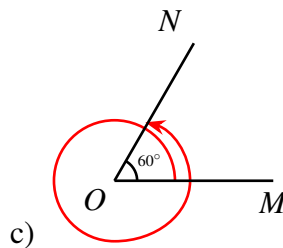
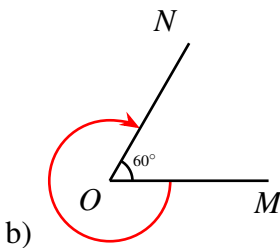
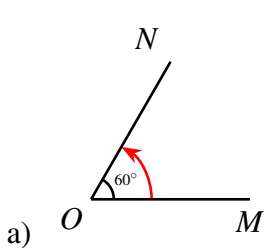
$$B(t) = 80 + 7 \sin \frac{\pi t}{12}$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

- a) 6 giờ sáng; b) 10 giờ 30 phút sáng;
c) 12 giờ trưa; d) 8 giờ tối.

C // BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1** Cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên dưới và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



- ## 2 Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau

- a) Đường tròn có bán kính $R = 5$ và cung có số đo 72° .
- b) Đường tròn có bán kính $R = 18$ và cung có số đo 150° .



3 Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo như sau:

a) $\frac{9\pi}{4}$.

b) -765° .

c) $x = k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

4 Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $-\frac{\pi}{7}$. Trong các số $-\frac{29\pi}{7}; -\frac{22}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{41\pi}{7}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?

5 Hai góc lượng giác có số đo $\frac{39\pi}{7}$ và $\frac{m\pi}{9}$ (m là số nguyên) có thể cùng tia đầu, tia cuối được không?

- 6 Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo -270° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo 135° . Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) .

- 7 Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$.

- 8 Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

- 9 Cho $\tan \alpha = 3$ và $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

10 Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

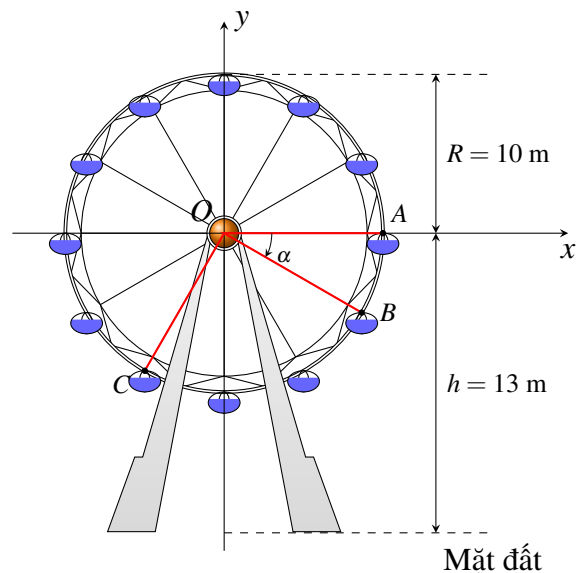
11 Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.

12 Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

- Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
- Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm.

13 Trong Hình bên, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C .

- Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13 + 10\sin \alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB . Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.
- Khi điểm B cách mặt đất 4 m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



- 14 Bánh xe có đường kính (tính cả lốp) là 55 cm. Nếu xe chạy với vận tốc 40 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng?

- 15 Rút gọn các biểu thức sau: (không còn căn thức)

a) $A = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}};$

b) $B = \sqrt{1 - \cot^2 x \cdot \sin^2 x} + 1.$

- 16 Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ.$

b) $B = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \dots \tan 80^\circ.$

c) $C = \cot 20^\circ + \cot 40^\circ + \dots + \cot 140^\circ + \cot 160^\circ.$

17 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $E = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha;$

b) $F = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 4 \sin^2 x \cos^2 x.$

18 Rút gọn các biểu thức sau (*giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa*).

a) $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x);$

b) $B = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}$ với $\pi < x < 2\pi.$

19 Cho $\tan \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$.

20 Chứng minh các hệ thức sau

a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$;

b) $1 - \cot^4 \alpha = \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^4 \alpha}$;

c) $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 1 + 2\tan^2 \alpha$;

d) $2(1 - \sin \alpha)(1 + \cos \alpha) = (1 - \sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

21 Chứng minh các hệ thức sau

a) $\frac{1 + \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} = \frac{2}{3 \cos^2 \alpha};$

b) $\frac{\sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha};$

c) $\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} = \tan \alpha \tan \beta;$

d) $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \tan^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$

22 Chứng minh các hệ thức sau

$$\text{a) } \frac{1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2; \quad \text{b) } \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x.$$

23 Chứng minh các hệ thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1};$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\cot^2 x + 1)}.$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề số 1

Câu 1. Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{5}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 2. Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ.

- A. 6° . B. 15° . C. 10° . D. 5° .

Câu 3. Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là?

- A. Cung có độ dài bằng nửa đường kính. B. Cung có độ dài bằng đường kính.
C. Cung có độ dài bằng 1. D. Cung tương ứng với góc ở tâm 60° .

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $1 \text{ rad} = 60^\circ$. B. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. C. $1 \text{ rad} = 1^\circ$. D. $1 \text{ rad} = 180^\circ$.

Câu 5. Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo *radian* của cung tròn đó là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 6. Đổi số đo của góc 70° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{7}{18}$. B. $\frac{7\pi}{18}$. C. $\frac{70}{\pi}$. D. $\frac{7}{18\pi}$.

Câu 7. Đổi số đo của góc $-\frac{3\pi}{16}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $-33^\circ 45'$. B. $-32^\circ 55'$. C. $33^\circ 45'$. D. $-29^\circ 30'$.

Câu 8. Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. -286° . B. $286^\circ 28' 44''$. C. $-286^\circ 44' 28''$. D. $-286^\circ 28' 44''$.

Câu 9. Đổi số đo của góc $45^\circ 32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 0,794. B. 0,7947. C. 0,795. D. 0,7948.

Câu 10. Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20 cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

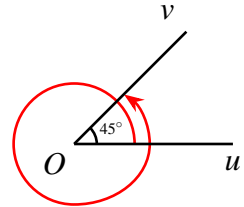
- A. $\ell = 2,94$ cm. B. $\ell = 3,39$ cm. C. $\ell = 1,49$ cm. D. $\ell = 3,93$ cm.

Câu 11. Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 1,5 và bán kính bằng 20 cm.

- A. 40 cm. B. 60 cm. C. 30 cm. D. 20 cm.

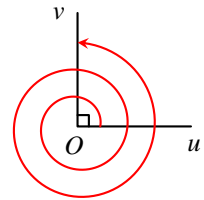
Câu 12. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 405° . B. 385° . C. -405° . D. 45° .



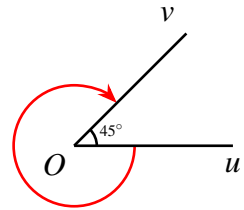
Câu 13. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 450° . B. -450° . C. 810° . D. 90° .



Câu 14. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 45° . B. -315° . C. 315° . D. 405° .

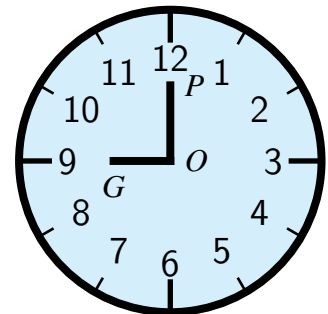


Câu 15. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\frac{\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của các góc lượng giác (Ov, Ow) .

- A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo các góc lượng giác (OG, OP) là

- A. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. B. $-90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
C. $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.



Câu 17. Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho góc lượng giác (OA, OM) có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox. Số đo các góc lượng giác (OA, ON) là

- A. $135^\circ + k360^\circ$. B. -45° .
C. 315° . D. $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

- A. $\frac{k\pi}{3}$. B. $k\pi$. C. $\frac{k2\pi}{3}$. D. $\frac{k\pi}{2}$.

Câu 19. Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu độ.

- A. $\frac{5}{8}\pi$. B. $\frac{8}{5}\pi$. C. $\frac{5}{3}\pi$. D. $\frac{3}{5}\pi$.

Câu 20. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

- A. $\frac{k2\pi}{3}$. B. $\frac{k\pi}{2}$. C. $\frac{k\pi}{3}$. D. $k\pi$.

2. Đề số 2

Câu 1. Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

Câu 2. Cho α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$. B. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha < 0$.
C. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$. D. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha > 0$.

Câu 3. Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 4. Cho α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 5. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$. B. $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$. C. $\sin(\alpha - \pi) < 0$. D. $\sin(\alpha - \pi) > 0$.

Câu 6. Tính giá trị của $\cot \frac{89\pi}{6}$.

- A. $\cot \frac{89\pi}{6} = \sqrt{3}$. B. $\cot \frac{89\pi}{6} = -\sqrt{3}$. C. $\cot \frac{89\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cot \frac{89\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. Tính giá trị biểu thức $P = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 4$. D. $P = 8$.

Câu 8. Tính giá trị biểu thức $P = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Câu 9. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\sin 60^\circ < \sin 150^\circ$. B. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ$. C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. D. $\cot 60^\circ > \cot 240^\circ$.

Câu 10. Với mọi số thực α , ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

- A. $-\sin \alpha$. B. $\cos \alpha$. C. $\sin \alpha$. D. $-\cos \alpha$.

Câu 11. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

- A. $-\tan \alpha$. B. $\cot \alpha$. C. $\tan \alpha$. D. $-\cot \alpha$.

Câu 12. Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

- A. $A = \cos \alpha + \sin \alpha$. B. $A = 2 \sin \alpha$. C. $A = \sin \alpha \cos \alpha$. D. $A = 0$.

Câu 13. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng.

- A. $\sin(A + C) = -\sin B$. B. $\cos(A + C) = -\cos B$.
C. $\tan(A + C) = \tan B$. D. $\cot(A + C) = \cot B$.

Câu 14. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Câu 15. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 16. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$. B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$. D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$.

Câu 17. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Câu 18. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.

- A. $P = -3$. B. $P = \frac{3}{7}$. C. $P = \frac{12}{25}$. D. $P = -\frac{12}{25}$.

Câu 19. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$.

- A. $P = -\frac{4}{9}$. B. $P = \frac{4}{9}$. C. $P = -\frac{4}{19}$. D. $P = \frac{4}{19}$.

Câu 20. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{15}{13}$. B. $P = \frac{15}{13}$. C. $P = -13$. D. $P = 13$.

§2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Công thức cộng:

$$\textcircled{1} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{2} \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{3} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{4} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{5} \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

$$\textcircled{6} \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

2. Công thức nhân đôi:

$$\textcircled{1} \sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

$$\textcircled{2} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$\textcircled{3} \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$$

$$\textcircled{4} \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3. Công thức hạ bậc:

$$\textcircled{1} \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{3} \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\textcircled{1} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

$$\textcircled{2} \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)].$$

$$\textcircled{3} \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

$$\textcircled{4} \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)].$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\textcircled{1} \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{3} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{4} \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

a) $\sin 75^\circ$

b) $\sin 15^\circ$

c) $\tan \frac{7\pi}{12}$.

d) $\cot \frac{5\pi}{8}$.

e) $\cos 795^\circ$.

f) $\sin 18^\circ$.

≡ Ví dụ 2. Cho $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$; $\cos 2\alpha$ và $\sin\left(\alpha + \frac{19\pi}{4}\right)$.



Ví dụ 3. Cho $\tan \alpha = -2$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$, $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4. Cho $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DT**2****Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng**

Ví dụ 5. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \cos 45^\circ \cos 15^\circ$.

b) $B = \cos 75^\circ \sin 15^\circ$.

c) $C = \sin 75^\circ \sin 15^\circ$.

d) $D = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $\cos 5a \sin 3a$.

b) $2 \cos(a+b) \cos(a-b)$.

c) $\sin(a-b) \cos(b-a)$.

d) $4 \cos x \cos 2x \cos 3x$.

Ví dụ 7. Chứng minh $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$.

DT

3

Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích

Ví dụ 8. Tính giá trị biểu thức lượng giác sau

a) $C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$.

b) $D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$.



a) $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a.$

b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.



a) $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ$.

b) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$.

c) $\sin 20^\circ - \sin 100^\circ + \sin 140^\circ = 0.$

d) $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$.



Ví dụ 11. Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \frac{\sqrt{2}\cos a - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{-\sqrt{2}\sin a + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}.$

b) $B = (\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b.$

Ví dụ 12. Chứng minh các biểu thức sau

a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$

b) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta).$



a) $A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right);$

b) $B = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right).$

1. **Introduction**
 2. **Background**
 3. **Methodology**
 4. **Results**
 5. **Conclusion**

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$

$$\text{b) } \frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \cot \alpha$$

$$\text{c) } \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

d) $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x = 1$



1. **Introduction**
 2. **Background**
 3. **Methodology**
 4. **Results**
 5. **Conclusion**

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$

b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$.

Ví dụ 16. Một thiết bị trễ kỹ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5 \sin t$ và phát lại được nốt thuần $f_2(t) = 5 \cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là một sóng âm hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$) của sóng âm.

Ví dụ 17. Trong Vật lý, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)},$$

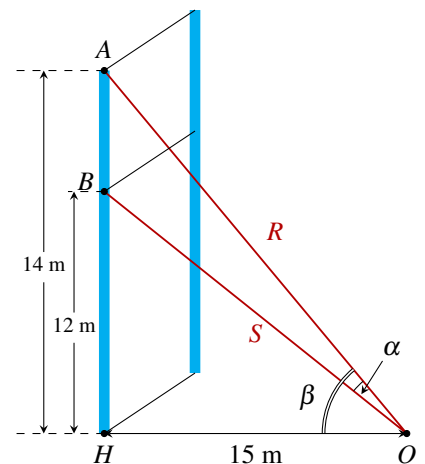
$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Ví dụ 18.

Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình bên).

- Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



b) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\cos(a+b), \sin(a-b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}, 0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}, 90^\circ < b < 180^\circ$.

2 Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.



3 Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{5}$. Tính $\sin 2\alpha$.

4 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4};$

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha.$

5 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos 2\alpha;$

b) $\sin \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha;$

c) $\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha;$

d) $\tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{2}{\tan 2\alpha}.$

6 Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos a + \sin a = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right).$

b) $\cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right).$

7 Rút gọn biểu thức sau

a) $A = \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a};$

b) $B = \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}.$

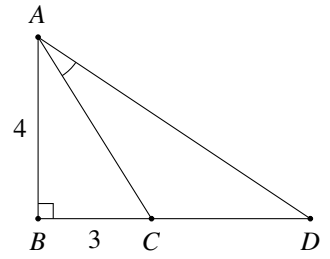
8 Chứng minh rằng $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$, với điều kiện biểu thức có nghĩa.

9 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + a \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - a \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2a;$

b) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \frac{3}{2}.$

- 10 Tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD (làm tròn đến hàng phần chục).



- 11 Dao động của một vật là tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương, có phương trình lần lượt là $x_1 = 6 \cos 100\pi t$ (mm) và $x_2 = 6 \sin 100\pi t$ (mm), (t tính bằng giây). Tính li độ của vật tại thời điểm $t = 0,25$ giây.

- 12 Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

b) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2 \cos A \cos B \cos C$.

c) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$;

d) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$.

Câu 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\cos(a - b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b.$

B. $\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b.$

C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Câu 2. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

A. $P = -\frac{24}{25}$.

B. $P = \frac{24}{25}$.

C. $P = -\frac{12}{25}$.

D. $P = \frac{12}{25}$.

Câu 4. Biết $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P = -\frac{3}{5}$.

B. $P = \frac{3}{5}$.

C. $P = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

D. $P = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 5. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

A. $P = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}$.

B. $P = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.

C. $P = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$.

D. $P = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$.

Câu 6. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$.

A. $P = -\frac{120}{119}$.

B. $P = -\frac{119}{120}$.

C. $P = \frac{120}{119}$.

D. $P = \frac{119}{120}$.

Câu 7. Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

B. $P = \frac{3}{2}$.

C. $P = -\frac{3}{2}$.

D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 8. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

A. $P = \frac{527}{625}$.

B. $P = -\frac{527}{625}$.

C. $P = \frac{524}{625}$.

D. $P = -\frac{524}{625}$.

Câu 9. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{11}{113}$.

B. $P = \frac{13}{113}$.

C. $P = \frac{15}{113}$.

D. $P = \frac{17}{113}$.

Câu 10. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$.

A. $P = \sqrt{5}$.

B. $P = -\sqrt{5}$.

C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 11. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$.

A. $P = \frac{10}{9}$.

B. $P = \frac{9}{10}$.

C. $P = -\frac{10}{9}$.

D. $P = -\frac{9}{10}$.

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

B. $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$.

C. $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 13. Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$.

- A. $P = 12$. B. $P = \frac{21}{2}$. C. $P = 6$. D. $P = 21$.

Câu 14. Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a+b)$.

- A. $\frac{56}{65}$. B. $\frac{63}{65}$. C. $-\frac{33}{65}$. D. 0.

Câu 15. Cho hai góc nhọn $a; b$ thỏa $\cos a = \frac{1}{3}$; $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

- A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Câu 16. Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 17. Cho $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x+y$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Câu 18. Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

- A. $\frac{p}{q-1}$. B. $-\frac{p}{q-1}$. C. $\frac{2p}{1-q}$. D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Câu 19. Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5\cos(100\pi t + \pi)$ (cm) và $x_2 = 5\cos(100\pi t - \pi/2)$ (cm). Phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là

- A. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm). B. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).
C. $x = 10\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm). D. $x = 10\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

Câu 20. Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số theo các phương trình: $x_1 = 2\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (cm) ; $x_2 = 2\cos(5\pi t)$ (cm). Biên độ của dao động tổng hợp của hai dao động trên là

- A. 2. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

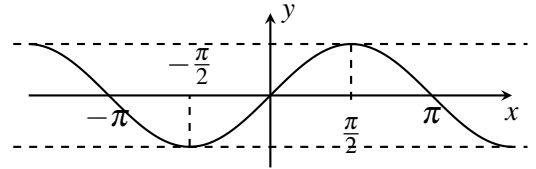
—HẾT—

§3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

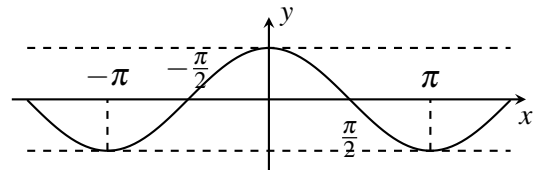
1. Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



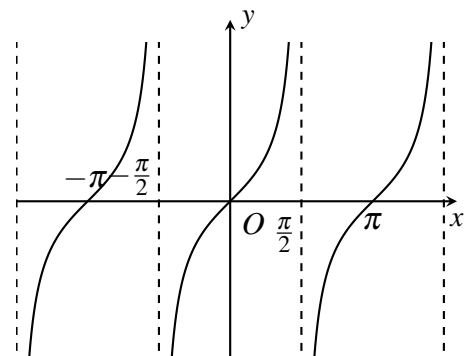
2. Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



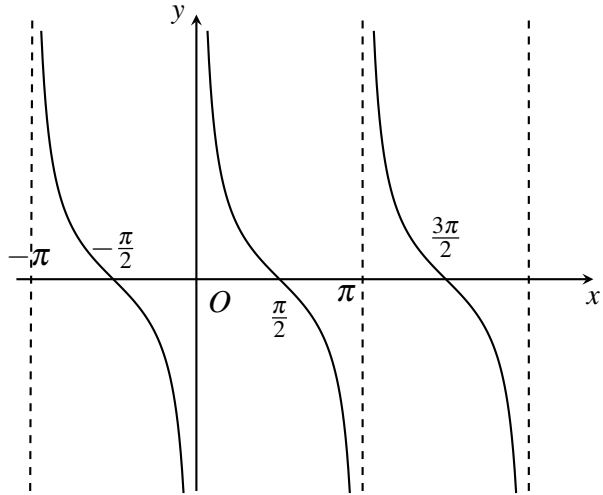
3. Hàm số $y = \tan x$

- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$; Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



4. Hàm số $y = \cot x$

- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Ta chú ý một số điều kiện sau:

- $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ xác định $\Leftrightarrow g(x) \neq 0$.
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.
- $y = \tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $y = \cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a) $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x}$

b) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

c) $y = \frac{2 + 3\cos 2x}{\sin x}$

d) $y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$

e) $y = \frac{\sin x - 3}{\cos x + 1}$

f) $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x + 2}$

g) $y = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1}$

h) $y = \frac{2\sin x - 3}{2\sin x + 3}$

i) $y = \sin \frac{x-1}{x+2}$

j) $y = \sqrt{3 - 2\cos x}$

k) $y = \frac{\sqrt{\cos x + 2}}{1 + \cos x}$

l) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$



c) $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m}$

 $\mathbb{R}$.

2

Tính chẵn lẻ của hàm số

Ta thực hiện các bước sau:

- ① Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số – Tập $\mathcal{D}$ phải đối xứng.
- ② Tính $f(-x)$ (chỗ nào có biến x , ta thay bởi $-x$) và thu gọn kết quả. Khi đó
 - Nếu $f(-x) = f(x)$: hàm số đã cho là hàm chẵn.
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$: hàm số đã cho là hàm lẻ.
 - Nếu không rơi vào 2 trường hợp trên, ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

GHI NHỚ

- ① Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. ② Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
③ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. ④ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

≡ Ví dụ 5. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = |x| \sin x$.

b) $f(x) = \tan |x|$.

≡ Ví dụ 6. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$.

b) $f(x) = \sqrt{2 + \sin x} + \sqrt{2 - \sin x}$.

b) $f(x) = \tan x + \cot x$.

Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất

☒ Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số, từ đó, kết luận.

f) $y = (3 - \sin x)^2 + 1$



c) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$

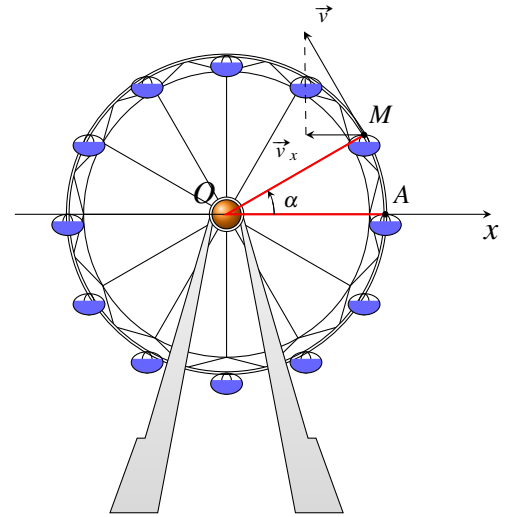


c) $y = \cos 2x - \sin x + 3$

Ví dụ 13.

Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình bên).

- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x
- Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

**C BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

1 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cot \left(3x - \frac{\pi}{4} \right).$

b) $y = \frac{\sin x}{\cos 2x - 1}.$

c) $y = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{1 - \cos x}}.$

d) $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$

2 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 3 - 2\sin 2x$

b) $y = 5 - 3\cos 4x$.

c) $y = 3 - 2|\sin 2x|$.

d) $y = 3\sin^2 2x - 4$

3 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

4 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3$.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**Câu 1.** Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty]$. D. $[-1; 1]$.

Câu 2. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

- A. $[-2; 2]$. B. $[0; 2]$. C. $[-1; 1]$. D. $[0; 1]$.

Câu 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn. B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn. D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 4. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

- A. $y = \sin^2 x$. B. $y = x \cos 2x$. C. $y = x \sin x$. D. $y = \cos x$.

Câu 5. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π . B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
C. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π . D. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 6. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

- A. $T = 2\pi$. B. $T = \frac{\pi}{2}$. C. $T = \pi$. D. $T = 4\pi$.

Câu 7. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y = \sin 2x$. D. $y = \tan x - \sin 2x$.

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 9. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x}$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

- A. $x \neq k2\pi$. B. $x \neq k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 11. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$. B. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

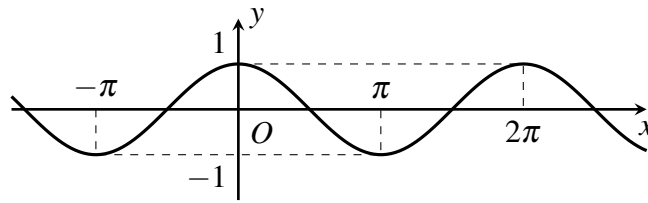
Câu 12. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

- A. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos 3x - 1}{\cos x + 1}$ là

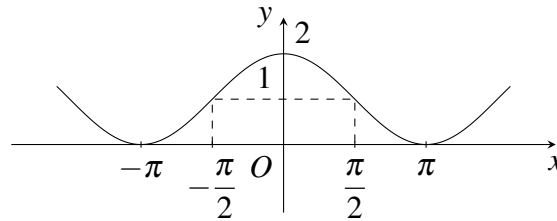
- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 14. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = 1 + \sin x$. B. $y = 1 - \sin x$. C. $y = \sin x$. D. $y = \cos x$.

Câu 15. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



- A. $y = \cos x + 1$. B. $y = 2 - \sin x$. C. $y = 2 \cos x$. D. $y = \cos^2 x + 1$.

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$.

- A. $\min y = -2, \max y = 4$. B. $\min y = 2, \max y = 4$.
C. $\min y = -2, \max y = 3$. D. $\min y = -1, \max y = 4$.

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2 \cos^2 3x$.

- A. $\min y = 1, \max y = 2$. B. $\min y = 1, \max y = 3$.
C. $\min y = 2, \max y = 3$. D. $\min y = -1, \max y = 3$.

Câu 18. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2} \sin x + 3$.

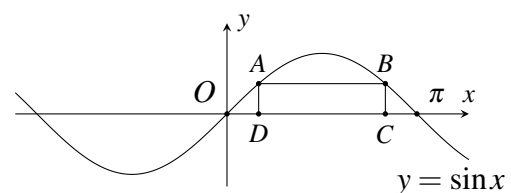
- A. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 1$. B. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}$.
C. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2$. D. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 3$.

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2 \sin^2 x}$.

- A. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 4$. B. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 3$.
C. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 2$. D. $\min y = \frac{1}{2}, \max y = 4$.

Câu 20. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn ABCD là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



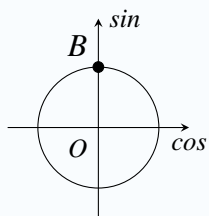
—HẾT—

§4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

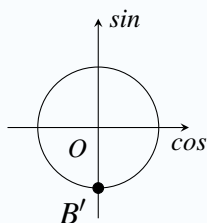
A // KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình $\sin x = a$.

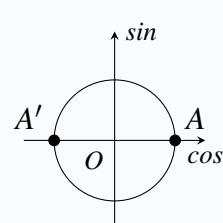
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

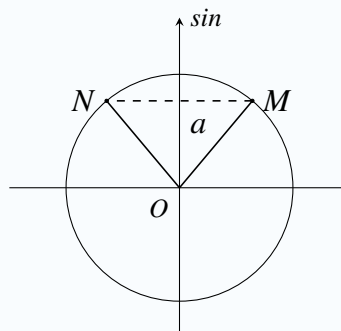
☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **sin** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

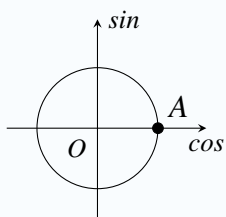
$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

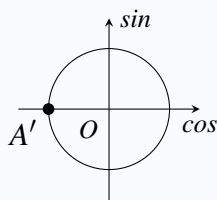
$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Phương trình $\cos x = a$.

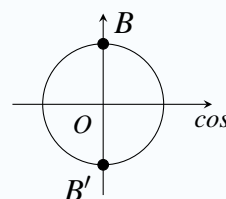
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$



$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

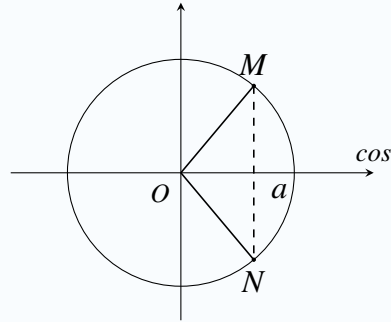
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **cos** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- ☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

3. Phương trình $\tan x = a$.

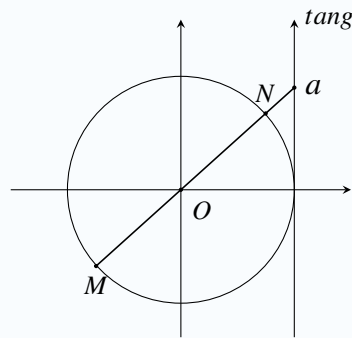
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ 0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

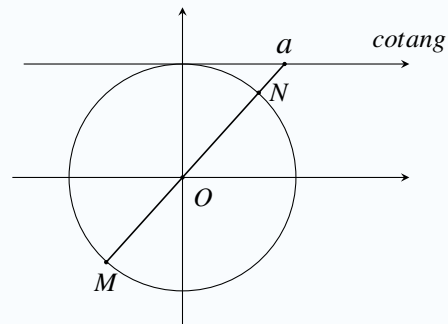


- ☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\cot x = a$.

- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **$\frac{1}{a}$** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng. Riêng $a = 0$ thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Giải các phương trình lượng giác cơ bản

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số a quy đổi về góc "đẹp" hay xấu;
- Chọn và ráp công thức nghiệm.

≡ Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

f) $3 \cos x - 1 = 0$.

≡ Ví dụ 2.

a) $\tan 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{3} \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$

c) $\tan(x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

e) $\sqrt{3}\cot x - 1 = 0$

f) $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$.



a) $\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$ trên $(0, 3\pi)$.

b) $\sqrt{2}\sin(x-1) = -1$ trên $(-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

c) $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ trên $(-\pi, \pi)$.

d) $\tan(3x+2) - \sqrt{3} = 0$ trên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

DT

2

Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng

- Biến đổi về một trong các cấu trúc sau

① $\sin u = \sin v$

② $\cos u = \cos v$

③ $\tan u = \tan v$

④ $\cot u = \cot v$

- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác sau:

① $-\sin x = \sin(-x).$

② $-\cos x = \cos(\pi - x).$

③ $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

④ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

≡ Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = \sin 2x$

b) $\sin 2x - \sin x = 0$

c) $\sin 5x + \sin x = 0$

d) $\cos 2x - \cos x = 0$

e) $\cos 8x + \cos x = 0$

f) $\cos 4x - \sin x = 0$

Ví dụ 5. (B.2013). Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DT**3****Vận dụng thực tiễn**

Ví dụ 6. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

.....

.....

.....

.....

.....

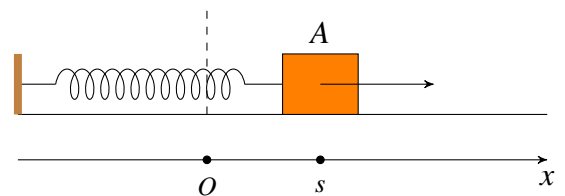
.....

.....

Ví dụ 7.

Trong Hình bên, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right)$.

Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

A graph showing the trajectory of a projectile in a Cartesian coordinate system. The horizontal axis is labeled x and the vertical axis is labeled y . The origin is marked with O . A blue parabolic curve starts at the origin and opens downwards. The equation of the curve is given as $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$.

C

2 Giải phương trình $\tan(x + 30^\circ) + 1 = 0$ với $-90^\circ < x < 360^\circ$.

3 Giải các phương trình sau:

a) $\cos 3x = \sin 2x$

b) $\cos 3x - 2 \cos \frac{\pi}{4} = 0$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

d) $\cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$

e) $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

f) $2 \cos(2x - 60^\circ) - 1 = 0$

g) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$

h) $\cos\left(\frac{x}{3} - 30^\circ\right) = 1$

i) $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$



a) $\tan x = \sqrt{3}$.

b) $\cot(x - \frac{\pi}{3}) = 1.$

c) $\tan(x + 48^\circ) = \tan 25^\circ$.

d) $\tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{7}.$

- $$h(t) = 29 + 3 \sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right]$$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\sin x = \frac{1}{2}$. B. $\tan x = \sqrt{3}$. C. $\sin x = 3$. D. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-7\pi}{6} + k2\pi$.
C. $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

- A. $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. C. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 6. Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = -1$ là

- A. $-k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $\left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\{90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 8. Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ trong khoảng $(0; \pi)$ là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10. Phương trình $\sin x - \cos x = 1$ có một nghiệm là

- A. $-\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. π .

Câu 11. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

- A. $x = \pi + k2\pi$. B. $x = k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 12. Xét trên $(-\pi; \pi)$, phương trình $\sin x = \frac{2}{3}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 13. Cho phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi n là số các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; 3\pi]$ thì giá trị của n là

- A. $n = 8$. B. $n = 5$. C. $n = 6$. D. $n = 2$.

Câu 14. Tính tổng các nghiệm $x \in [0; 2018\pi]$ của phương trình $\sin 2x = 1$.

- A. $S = \frac{4071315\pi}{2}$. B. $S = \frac{4071315\pi}{4}$. C. $S = \frac{8141621\pi}{2}$. D. $S = \frac{8141621\pi}{4}$.

Câu 15. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $\cos x + \sin 2x = 0$

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 16. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- A. 16145. B. 20181. C. 20179. D. 16144.

Câu 17. Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?

- A. 5. B. 6. C. 4. D. 7.

Câu 18. Với giá trị của tham số m thì phương trình $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2m = 0$ vô nghiệm?

- A. $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^2 \pi x = m^2 - 9$ có nghiệm.

- A. 5. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 20. Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất.

- A. $t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$. B. $t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.
C. $t = \frac{8\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$. D. $t = \frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.

—HẾT—

Mục lục

Chương 1.	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	1
Bài 1.	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC	1
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	4
	✎ Dạng toán 1. Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn	4
	✎ Dạng toán 2. Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles	6
	✎ Dạng toán 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác	7
	✎ Dạng toán 4. Tính các giá trị lượng giác của một góc lượng giác	9
	✎ Dạng toán 5. Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác	11
	✎ Dạng toán 6. Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức	12
	✎ Dạng toán 7. Vận dụng thực tiễn	13
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	14
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	22
Bài 2.	CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC LƯỢNG GIÁC	31
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	31
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	32
	✎ Dạng toán 1. Sử dụng công thức cộng, công thức nhân đôi	32
	✎ Dạng toán 2. Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng	34
	✎ Dạng toán 3. Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích	35
	✎ Dạng toán 4. Các bài toán chứng minh, rút gọn	36
	✎ Dạng toán 5. Vận dụng thực tiễn	39
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	40
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	44
Bài 3.	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ	51
A	Kiến thức cần nhớ	51
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	52
	✎ Dạng toán 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác	52
	✎ Dạng toán 2. Tính chẵn lẻ của hàm số	53

📁	Dạng toán 3. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất.....	54
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	55
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	57
Bài 4.	PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	62
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	62
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	64
📁	Dạng toán 1. Giải các phương trình lượng giác cơ bản.....	64
📁	Dạng toán 2. Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng.....	64
📁	Dạng toán 3. Vận dụng thực tiễn.....	65
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	67
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	71
	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC CHỦ ĐỀ	76
A	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1.....	76
B	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2.....	76
C	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3.....	76
D	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 4.....	76

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

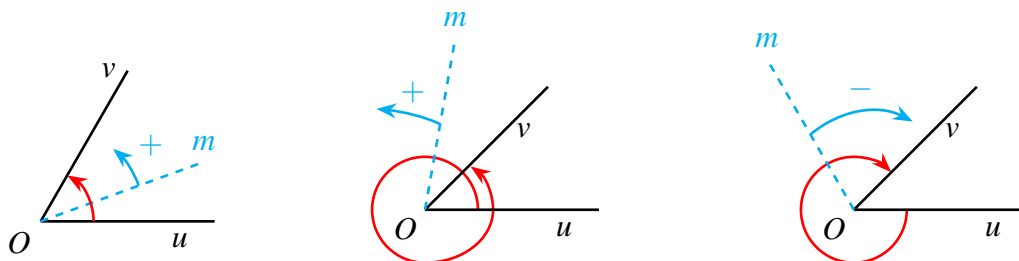
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. GÓC LƯỢNG GIÁC

☀ **Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác:** Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này.

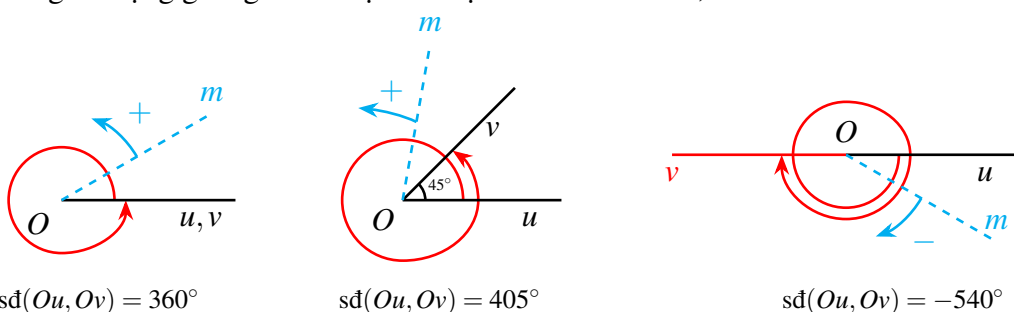
Ghi nhớ 1:

- Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .



Ghi nhớ 2:

- Khi tia Om quay một góc α° , ta nói số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) bằng α° , kí hiệu $sđ(Ou, Ov) = \alpha^\circ$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha^\circ$.
- Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo α° của nó.



- Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou và tia cuối Ov sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là

$$sđ(Ou, Ov) = \alpha^\circ + k360^\circ, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) + \text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) + k360^\circ \quad \text{với } k \in \mathbb{Z}.$$

2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Đơn vị đo góc và cung tròn

- Đơn vị độ ($^\circ$): Chia đường tròn thành 360 cung tròn bằng nhau thì góc ở tâm chắn bởi cung đó sẽ có số đo là 1° .
- Đơn vị radian (rad): Trên đường tròn, nếu một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì ta nói cung đó có số đo là 1 rad. Khi đó, góc ở tâm chắn cung đó cũng có số đo 1 rad.

! Khi viết số đo một góc theo đơn vị rad, ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ ta hiểu là góc $\frac{\pi}{2}$ rad.

- Mối liên hệ giữa độ và radian: Độ dài đường tròn là $2\pi R$ nên có số đo là 2π rad tương ứng với 360° . Suy ra

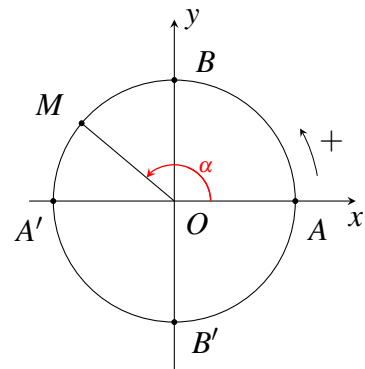
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Độ dài cung tròn: Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì sẽ có độ dài là $l = R\alpha$.

3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

Đường tròn lượng giác:

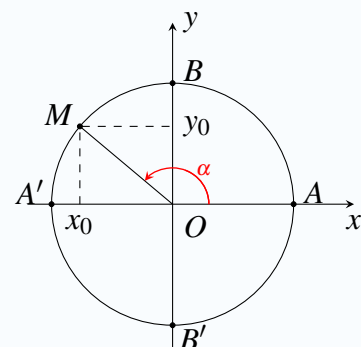
- Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tâm O bán kính 1, cùng với gốc $A(1;0)$ và chiều quay dương (như quy ước) gọi là đường tròn lượng giác.
- Cho góc lượng giác số đo α . Trên đường tròn lượng giác, tồn tại duy nhất điểm M sao cho góc lượng giác (OA, OM) bằng α (hình bên). Khi đó, M gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

Ghi nhớ 1: Giả sử $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo α .

- ① Tung độ y_0 của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$, hay $\sin \alpha = y_0$.
- ② Hoành độ x_0 của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$, hay $\cos \alpha = x_0$.
- ③ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, với $\cos \alpha \neq 0$.
- ④ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, với $\sin \alpha \neq 0$.



Ghi nhớ 2: Ta có các kết quả sau được suy ra từ định nghĩa

① Vì $-1 \leq x_0; y_0 \leq 1$ nên

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

② $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha.$$

③ $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ và

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha.$$

4. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

⚙ **Công thức lượng giác cơ bản:** Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

① $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

② $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$ với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

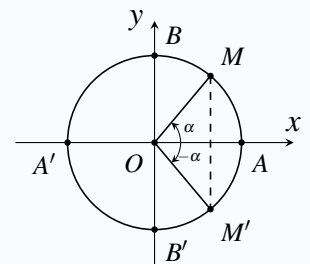
③ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$ với $\alpha \neq k\pi.$

④ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1,$ với $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}.$

⚙ **Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:**

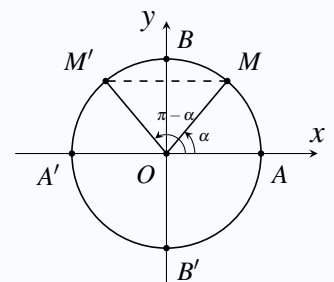
Góc đối nhau: α và $-\alpha$ tương ứng với hai điểm "đại diện" là điểm M và điểm M' . Muốn so sánh $\sin$, ta so sánh tung độ; muốn so sánh $\cos$, ta so sánh hoành độ. Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua trục hoành nên ta có kết quả sau:

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



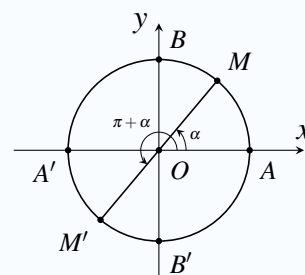
Góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua trục tung nên ta có kết quả sau:

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



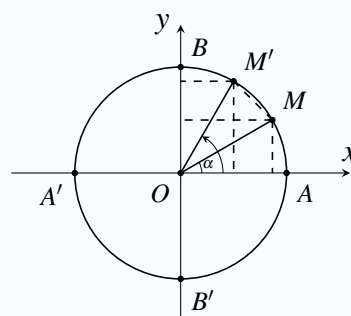
Góc hơn kém π : α và $\alpha + \pi$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua gốc O nên ta có kết quả sau:

- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$



Góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' có hoành độ và tung độ ngược nhau nên ta có kết quả sau:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn

☑ Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian:

• $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

• $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

☑ Xét đường tròn có bán kính R .

• Cung tròn có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) thì có độ dài là $l = R\alpha$.

• Cung tròn có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) thì có độ dài là $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R$.

Ví dụ 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian.

a) 72° ;

b) 600° ;

c) $-37^\circ 45' 30''$.

Lời giải.

Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ nên

• $72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$

• $600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3}$

$$\bullet -37^{\circ}45'30'' = -37^{\circ} - \left(\frac{45}{60}\right)^{\circ} - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^{\circ} = \left(\frac{4531}{120}\right)^{\circ} = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587.$$

□

≡ Ví dụ 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ.

a) $\frac{5\pi}{18};$

b) $\frac{3\pi}{5};$

c) $-4.$

💬 Lời giải.

Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ nên

$$\bullet \frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 50^{\circ}.$$

$$\bullet \frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 108^{\circ}.$$

$$\bullet -4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx -2260^{\circ}48'.$$

□

≡ Ví dụ 3. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung, biết số đo tương ứng

a) $\frac{3\pi}{4}$

b) 51°

c) $\frac{1}{3}$

💬 Lời giải.

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ nên

$$\text{a) Ta có } l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8 \text{ m}$$

$$\text{b) Ta có } l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04 \text{ m.}$$

$$\text{c) Ta có } l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12 \text{ m.}$$

□

≡ Ví dụ 4. Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

💬 Lời giải.

Ta có tương ứng 1° sẽ có chiều dài là $\frac{40000}{360}$, suy ra $\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ sẽ có chiều dài tương ứng

$$\frac{40000}{360} \cdot \frac{1}{60} \approx 1,852 \text{ km.}$$

Vậy 1 hải lí dài 1,852 km.

□

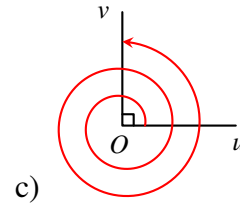
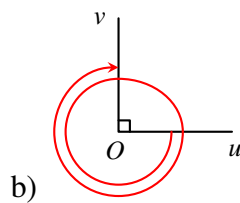
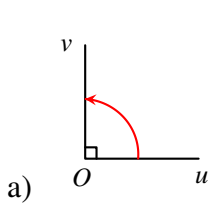
DT

2

Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles

- Khi xác định số đo của góc lượng giác, ta cần chú ý đến chiều quay (chiều dương ngược kim đồng hồ, chiều âm cùng kim đồng hồ). Từ đó xác định chính xác số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) .
- Giả sử α° là một số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) . Suy ra số đo các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou , tia cuối Ov có dạng $\alpha^\circ + k \cdot 360^\circ$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hệ thức Chasles: $\text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) - \text{sđ}(Ou, Ov) + k360^\circ$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 5. Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) được biểu diễn trong hình bên dưới.



Lời giải.

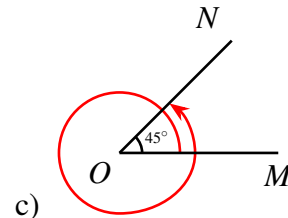
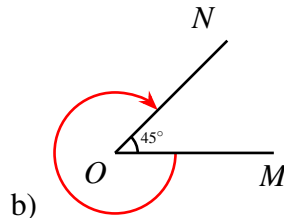
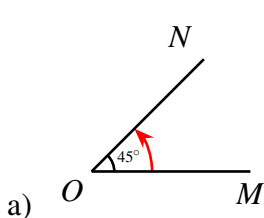
a) 90° .

b) -630° .

c) 810° .

□

Ví dụ 6. Cho $\widehat{MON} = 45^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên dưới và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



Lời giải.

a) 45° .

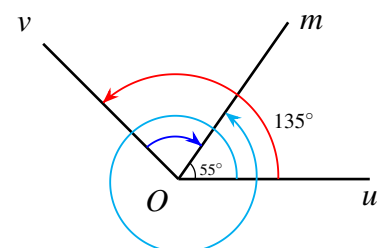
b) -315° .

c) 405° .

□

Ví dụ 7.

Xác định số đo các góc lượng giác (Ou, Ov) , (Ov, Om) và (Ou, Om) được minh họa ở hình bên.



Lời giải.

• $(Ou, Ov) = 135^\circ$.

• $(Ov, Om) = -80^\circ$.

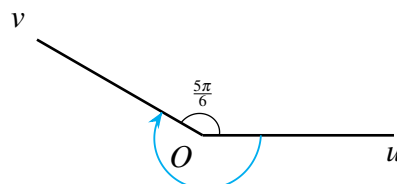
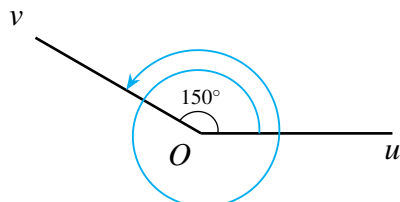
• $(Ou, Om) = 415^\circ$.

□

Ví dụ 8. Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác trong mỗi trường hợp sau:

- a) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 510° ;
 b) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{7\pi}{6}$.

Lời giải.



- a) Ta có $510^\circ = 360^\circ + 150^\circ$. Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 510° được biểu diễn ở hình 1.
 b) Ta có $-\frac{7\pi}{6} = -\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{7\pi}{6}$ được biểu diễn ở hình 2.

Ví dụ 9. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{5\pi}{4}$. Tìm số đo các góc lượng giác (Ov, Ow) .

Lời giải.

Theo hệ thức Chasles, ta có:

$$\begin{aligned}(Ov, Ow) &= (Ou, Ow) - (Ou, Ov) + k2\pi \\ &= \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k2\pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

DT

3

Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn gốc $A(1;0)$ làm điểm đầu. Để biểu diễn góc lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$.



Nếu $|\alpha| > 2\pi$ ta phân tích $\alpha = \beta + k2\pi$, với $-\pi < \beta < \pi$. Khi đó, ta chỉ cần xác định điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \beta$.

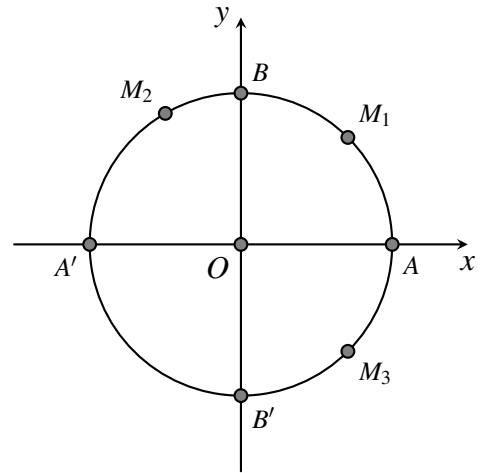
Ví dụ 10. Biểu diễn các góc (cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau

- a) $\frac{\pi}{4}$; b) $-\frac{11\pi}{2}$; c) 120° ; d) -765° .

Lời giải.

a) Ta có $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8} \cdot 2\pi$. Ta chia đường tròn thành tám phần bằng nhau.
 Khi đó điểm M_1 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo $\frac{\pi}{4}$.

b) Ta có $-\frac{11\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + (-3) \cdot 2\pi$ do đó điểm biểu diễn bởi góc $-\frac{11\pi}{2}$ trùng với góc $-\frac{\pi}{2}$.
 Khi đó điểm B' là điểm biểu diễn bởi góc có số đo $-\frac{11\pi}{2}$.



c) Ta có $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$. Ta chia đường tròn thành ba phần bằng nhau.
 Khi đó điểm M_2 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo 120° .

d) Ta có $-765^\circ = -45^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$ do đó điểm biểu diễn bởi góc -765° trùng với góc -45° .
 Hơn nữa $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn làm tám phần bằng nhau (chú ý góc âm).
 Khi đó điểm M_3 (điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB'}$) là điểm biểu diễn bởi góc có số đo -765° .

□

Ví dụ 11. Trên đường tròn lượng giác, biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

a) $x_1 = k\pi$;

b) $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

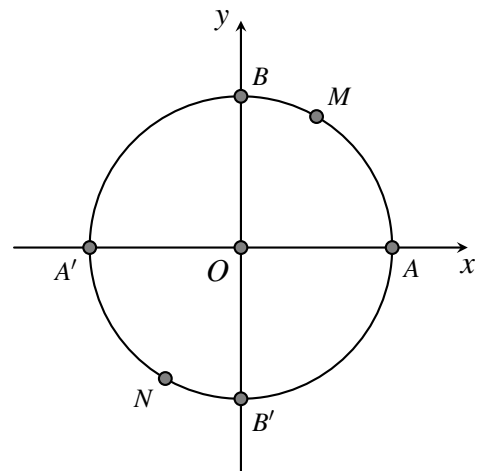
Lời giải.

a) Ta có $x_1 = \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_1 = k\pi$. Với

- $k = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ được biểu diễn bởi điểm A.
- $k = 1 \Rightarrow x_1 = \pi$ được biểu diễn bởi B.

b) Ta có $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$. Với

- $k = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M.
- $k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi N.



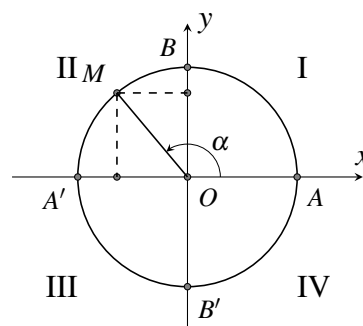
□

⚙ **Phương pháp:** Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán.

⚙ **Chú ý:**

Nếu đề bài có giới hạn miền của góc α , thì ta cần xem trên miền đó, các tỉ số lượng giác tương ứng sẽ mang dấu như thế nào. Cụ thể:

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	−	−
$\cos \alpha$	+	−	−	+
$\tan \alpha$	+	−	+	−
$\cot \alpha$	+	−	+	−



≡ **Ví dụ 12.** Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = \frac{2017\pi}{3}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có: $\frac{2017\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 672\pi = \frac{\pi}{3} + 336 \cdot 2\pi$, suy ra

- $\cos\left(\frac{2017\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- $\sin \frac{2017\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\tan \frac{2017\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
- $\cot \frac{2017\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

≡ **Ví dụ 13.** Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc lượng giác sau

- a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$. b) $-\frac{3\pi}{4} + k2\pi$. c) $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

💬 **Lời giải.**

≡ **Ví dụ 14.** Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α , biết

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; b) $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
- c) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. d) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Do $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -2\sqrt{2}$.

b) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

- $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$, suy ra $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$.

- $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{3}$.

d) Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin \alpha < 0$, suy ra $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}$.

- $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{3}{4}$.

□

≡ Ví dụ 15. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α , biết

a) $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

b) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

c) $\sin \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha < 0$.

d) $\cos \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$.

💬 Lời giải.

a) Ta có $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

- $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2$.

b) Ta có $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$, suy ra $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

c) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - (0.8)^2 = 0.36 \Rightarrow \cos \alpha = \pm 0.6$.

Do $\tan \alpha < 0$ và $\sin \alpha = 0.8 > 0$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -0.6$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}.$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{3}{4}.$$

d) Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - (0.8)^2 = 0.36 \Rightarrow \sin \alpha = \pm 0.6$.

Do $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$ nên $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ cùng dấu, suy ra $\sin \alpha > 0$. Vậy, $\sin \alpha = 0.6$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}.$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{3}.$$

□

DT**5**

Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác

⚙ Hướng 1:

- Từ tỉ số lượng giác đã cho, ta tính toán các giá trị lượng giác có trong biểu thức M .
- Thay tất cả giá trị vừa tìm được vào M , suy ra kết quả.

⚙ Hướng 2:

- Biến đổi biểu thức M về tỉ số lượng giác đã cho.
- Thay kết quả vào M , suy ra kết quả.

≡ **Ví dụ 16.** Cho $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$.

💬 Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, suy ra $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Từ đó, ta tính được $M = 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 3 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5}$.

□

≡ **Ví dụ 17.** Cho $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $M = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

💬 Lời giải.

Ta biến đổi $M = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$. Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$M = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow M = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}.$$

□

≡ **Ví dụ 18.** Cho $\cot \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} \\ &= \frac{2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) - 3 \cot \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right)}{5 + \cot^3 \alpha} \\ &= \frac{-3 \cot^3 \alpha + 2 \cot^2 \alpha - 3 \cot \alpha + 2}{5 + \cot^3 \alpha} \\ &= -\frac{35}{16}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 19. Biết $\sin x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \cos (2\pi - x) + \cos (3\pi + x)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin x \\ \cos (2\pi - x) = \cos x \\ \cos (3\pi + x) = -\cos x \end{cases} \Rightarrow A = -\sin x + \cos x - \cos x = -\sin x = -\frac{1}{3}.$$

□

Ví dụ 20. Tính giá trị của biểu thức $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos (180^\circ - x) &= -\cos x \Rightarrow \cos x + \cos (180^\circ - x) = 0. \\ \Rightarrow \begin{cases} \cos 20^\circ + \cos 160^\circ = 0 \\ \cos 40^\circ + \cos 140^\circ = 0 \\ \cos 60^\circ + \cos 120^\circ = 0 \\ \cos 80^\circ + \cos 100^\circ = 0 \end{cases} &\Rightarrow B = \cos 90^\circ + \cos 180^\circ = -1. \end{aligned}$$

□

DT

6

Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức

Ví dụ 21. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha;$

b) $B = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha};$

c) $C = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha;$

d) $D = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha};$

Lời giải.

a) Ta có: $A = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha = \sin^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha.$

b) $B = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 + \cot \alpha.$

c) $C = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = 1.$

d) Ta có $D = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 0.$



≡ Ví dụ 22. Chứng minh rằng $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \tan^2 \alpha + 2$.

💬 Lời giải.

Ta có: $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 2 + 2 \tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha = 3 \tan^2 \alpha + 2$.



≡ Ví dụ 23. Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(A + B) = \sin C$.

b) $\cos(A + B) + \cos C = 0$.

c) $\sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.

d) $\tan(A - B + C) = -\tan 2B$.

💬 Lời giải.

Do A, B, C là các góc của tam giác nên ta có $A + B + C = 180^\circ$.

a) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.

Từ đó suy ra $\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$.

b) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.

Từ đó suy ra $\cos(A + B) = \cos(180^\circ - C) = -\cos C \Rightarrow \cos(A + B) + \cos C = 0$.

c) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{A + B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$.

Từ đó suy ra $\sin \frac{A + B}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$.

d) Ta có $\tan(A - B + C) = \tan(A + B + C - 2B) = \tan(180^\circ - 2B) = -\tan 2B$.



DT

7

Vận dụng thực tiễn

≡ Ví dụ 24. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn Bưu điện Hà Nội theo thứ tự dài 1,75 mét và 1,26 mét. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút và kim giờ vạch được cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu mét?

💬 Lời giải.

Trong 15 phút kim giờ vạch được một cung tròn có số đo bằng $\frac{\pi}{24}$ và kim phút vạch được một cung tròn có số đo bằng $\frac{\pi}{2}$.

Trong 15 phút kim giờ vạch được cung tròn có độ dài bằng $1,26 \cdot \frac{\pi}{24} = \frac{21\pi}{400} \approx 0,16$ m.

Trong 15 phút kim phút vạch được cung tròn có độ dài bằng $1,75 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{8} \approx 2,75$ m.



≡ Ví dụ 25. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1 h; 3 h; 5 h.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

 Lời giải.

Trong 2 h, vệ tinh chuyển động hết 1 vòng quỹ đạo có độ dài là $2\pi \cdot 9000 = 18000\pi$ km. Suy ra

- b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km thì sẽ mất

$$\frac{200000}{9000\pi} \approx 7 \text{ giờ.}$$

≡ Ví dụ 26. Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức:

$$B(t) = 80 + 7 \sin \frac{\pi t}{12}$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

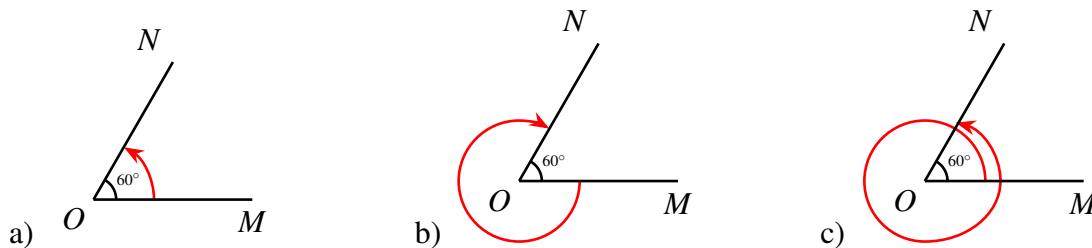
- a) 6 giờ sáng; b) 10 giờ 30 phút sáng;
c) 12 giờ trưa; d) 8 giờ tối.

 Lời giải.

- a) $t = 6$, suy ra $B = 87 \text{ mmHg}$.
b) $t = 10,5$, suy ra $B = 82,68 \text{ mmHg}$.
c) $t = 12$, suy ra $B = 80 \text{ mmHg}$.
d) $t = 20$, suy ra $B = 73,94 \text{ mmHg}$.

C // **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

- 1** Cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên dưới và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



- ## 2 Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau

- a) Đường tròn có bán kính $R = 5$ và cung có số đo 72° .
b) Đường tròn có bán kính $R = 18$ và cung có số đo 150° .

 Lời giải.

$$\text{a) } l = \frac{\pi \cdot 72}{180} \cdot 5 = 2\pi.$$

$$\text{b) } l = \frac{\pi \cdot 150}{180} \cdot 18 = 15\pi.$$



3 Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo như sau:

$$\text{a) } \frac{9\pi}{4}.$$

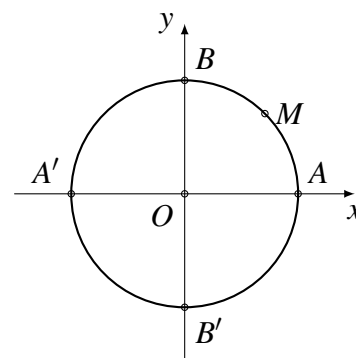
$$\text{b) } -765^\circ.$$

$$\text{c) } x = k\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải.

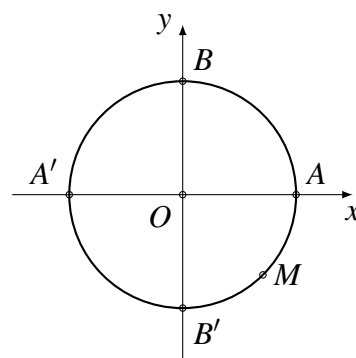
a)

Ta có $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi$. Do đó điểm biểu diễn cung lượng giác $\frac{9\pi}{4}$ trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác $\frac{\pi}{4}$.
 Vậy điểm cuối của cung $\frac{9\pi}{4}$ là điểm chính giữa M của cung nhỏ $\widehat{AB}$.



b)

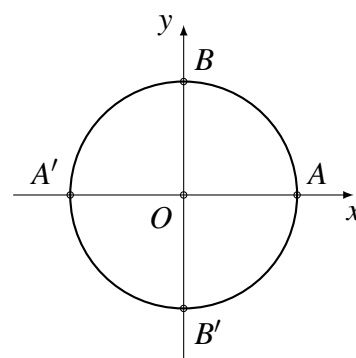
Ta có $-765^\circ = -45^\circ - 2 \cdot 360^\circ$. Do đó điểm biểu diễn cung lượng giác -765° trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác -45° . Lại có $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn thành 8 phần bằng nhau.
 Khi đó điểm M biểu diễn góc có số đo -765° .



c)

Ta có $x = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $k\pi$.

- Với $k = 0, x = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1, x = \pi$, được biểu diễn bởi điểm A' .



4 Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $-\frac{\pi}{7}$. Trong các số $-\frac{29\pi}{7}; -\frac{22}{7}; \frac{6\pi}{7}; \frac{41\pi}{7}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?

Lời giải.

$$\text{Ta có } -\frac{29\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = (-2) \cdot 2\pi, -\frac{22}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = -3\pi, \frac{6\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) = \pi \text{ và } \frac{41\pi}{7} - \left(-\frac{\pi}{7}\right) =$$

$3 \cdot 2\pi$.

Hai góc có cùng tia đầu, tia cuối thì sai khác nhau một bội của 2π nên các số $-\frac{29\pi}{7}; \frac{41\pi}{7}$ là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho. $\square$

- 5 Hai góc lượng giác có số đo $\frac{39\pi}{7}$ và $\frac{m\pi}{9}$ (m là số nguyên) có thể cùng tia đầu, tia cuối được không?

Lời giải.

Giả sử hai góc có cùng tia đầu, tia cuối khi đó $\frac{m\pi}{9} - \frac{39\pi}{7} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Hay $7m - 9 \cdot 39 = 9 \cdot 7 \cdot k2 \Leftrightarrow 7(m - 18k) = 351 \Leftrightarrow m - 18k = \frac{351}{7}$ với $k, m \in \mathbb{Z}$.

Vì về trái là một số nguyên, về phải là số thập phân nên dẫn tới vô lí.

Vậy hai góc lượng giác $\frac{39\pi}{7}$ và $\frac{m\pi}{9}$ (m là số nguyên) không thể cùng tia đầu, tia cuối. $\square$

- 6 Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo -270° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo 135° . Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) .

Lời giải.

Số đo của các góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov là

$$\begin{aligned} s\angle(Ou, Ov) &= sd(Ox, Ov) - sd(Ox, Ou) + k360^\circ \\ &= 135^\circ - (-270^\circ) + k360^\circ = 405^\circ + k360^\circ \\ &= 45^\circ + (k+1)360^\circ = 45^\circ + m360^\circ (m = k+1, m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy các góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $45^\circ + m360^\circ (m \in \mathbb{Z})$. $\square$

- 7 Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{13} \\ \sin \alpha = -\frac{5}{13} \end{cases}.$$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, do đó $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

Từ đó ta có $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$. $\square$

- 8 Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{13}.$$

Do $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{12}{5}.$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

$\square$

- 9 Cho $\tan \alpha = 3$ và $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Do } \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \text{ nên } \cos \alpha < 0, \text{ suy ra } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

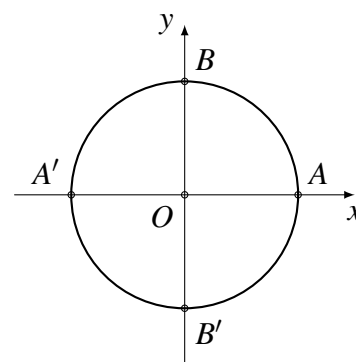
□

- 10 Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{k\pi}{2} = \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 4 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $k\frac{\pi}{2}$.

- Với $k = 0, x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 2, x_3 = \pi$, được biểu diễn bởi điểm A' .
- Với $k = 3, x_4 = \frac{3\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B' .



□

- 11 Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B + 2C = 180^\circ + C.$$

$$\Rightarrow \sin(A + B + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C.$$

□

- 12 Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

- Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
- Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm.

Lời giải.

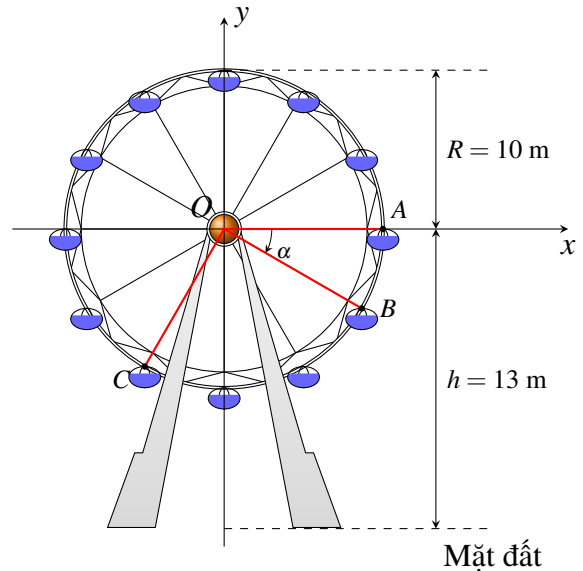
$$\text{a) Trong 1 giây, bánh xe quay được } \frac{11}{5} \text{ vòng, tức là quay được một góc } \frac{22\pi}{5} \text{ (rad) hay } 792^\circ.$$

$$\text{b) Trong 1 phút, bánh xe lăn được } l = 340 \cdot \frac{22\pi}{5} \cdot 60 \approx 281,990 \text{ (mm)} \approx 282 \text{ (m)}.$$

□

- 13 Trong Hình bên, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C .

- a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13 + 10 \sin \alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB . Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.
- b) Khi điểm B cách mặt đất 4 m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Lời giải.

□

- 14 Bánh xe có đường kính (tính cả lốp) là 55 cm. Nếu xe chạy với vận tốc 40 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng?

Lời giải.

Chu vi của bánh xe bằng 55π cm.

Trong 1 giây xe đi được $\frac{40 \cdot 10^5}{3600} = \frac{10000}{9}$ cm.

Như vậy, trong 1 giây bánh xe quay được $\frac{10000}{9 \cdot 55\pi} = \frac{2000}{99\pi}$ vòng.

□

- 15 Rút gọn các biểu thức sau: (không còn căn thức)

a) $A = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}};$

b) $B = \sqrt{1 - \cot^2 x \cdot \sin^2 x} + 1.$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)^2}} - \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)^2}} = \frac{|\sin x|}{|1 + \cos x|} - \frac{|\sin x|}{|1 - \cos x|} \\ &= \frac{|\sin x|}{1 + \cos x} - \frac{|\sin x|}{1 - \cos x} = \frac{|\sin x| \cdot [(1 - \cos x) - (1 + \cos x)]}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \\ &= \frac{-|\sin x| \cdot 2 \cos x}{\sin^2 x} = \begin{cases} -2 \cot x & \text{khi } \sin x > 0 \\ 2 \cot x & \text{khi } \sin x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sin^2 x} + 1 = \sqrt{1 - \cos^2 x} + 1 \\ &= |\sin x| + 1 = \begin{cases} \sin x + 1 & \text{khi } \sin x > 0 \\ -\sin x + 1 & \text{khi } \sin x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

- 16 Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ.$

b) $B = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \dots \tan 80^\circ.$

$$c) C = \cot 20^\circ + \cot 40^\circ + \dots + \cot 140^\circ + \cot 160^\circ.$$

Lời giải.

- a) Ta có $\sin 10^\circ = \sin 170^\circ$, $\sin 20^\circ = \sin 160^\circ, \dots$, suy ra $C = 2(\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ) + \sin^2 90^\circ$. Mặt khác ta có $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$, $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ, \dots$, có 4 cặp như vậy nên ta tính được $A = 5$.
- b) $\tan 10^\circ = \cot 80^\circ$, $\tan 20^\circ = \cot 70^\circ$, $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$, $\tan 40^\circ = \cot 50^\circ$. Do đó, ta tính được $B = 1$.
- c) $\cot 20^\circ = -\cot 160^\circ$, $\cot 40^\circ = -\cot 140^\circ, \dots$ nên ta tính được $C = 0$.

□

17 Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) E = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha;$$

$$b) F = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 4\sin^2 x \cos^2 x.$$

Lời giải.

$$a) E = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha - 1 = \tan^2 \alpha.$$

b) Ta có

- $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x;$
- Suy ra $F = 2[1 - 2\sin^2 x \cos^2 x] + 4\sin^2 x \cos^2 x = 2$

□

18 Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa).

$$a) A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x);$$

$$b) B = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} \text{ với } \pi < x < 2\pi.$$

Lời giải.

- a) Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x + 2 \cdot 2\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x;$
 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x;$
 $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x;$
 $\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x;$
 Suy ra $A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0.$

- b) Ta có $\sin(x + 2013\pi) = \sin(x + \pi + 1006 \cdot 2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x.$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } B &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x |\sin x|} \right).$$

Vì $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0$ nên $B = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\sqrt{2} \cot^2 x$.

□

19 Cho $\tan \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$.

Lời giải.

✓ Cách 1. Từ $\tan \alpha = 3 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3 \Rightarrow \sin \alpha = 3 \cos \alpha$.
Thay vào B và rút gọn.

✓ Cách 2. Ta biến đổi biểu thức B về $\tan \alpha$ như sau:

$$B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3\cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)} = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27+3+2 \cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}.$$

□

20 Chứng minh các hệ thức sau

a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$;

b) $1 - \cot^4 \alpha = \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^4 \alpha}$;

c) $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 1 + 2\tan^2 \alpha$;

d) $2(1 - \sin \alpha)(1 + \cos \alpha) = (1 - \sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

Lời giải.

a) Ta có $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$
 $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$.

b) Ta có $1 - \cot^4 \alpha = (1 + \cot^2 \alpha)(1 - \cot^2 \alpha) = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)$
 $= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{\sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} \right] = \frac{2\sin^2 \alpha - 1}{\sin^4 \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^4 \alpha}$.

c) Ta có $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 + 2\tan^2 \alpha$.

d) Ta có $2(1 - \sin \alpha)(1 + \cos \alpha) = 2 - 2\sin \alpha + 2\cos \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha$
 $= 1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha + 2\cos \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha$
 $= (1 - \sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

□

21 Chứng minh các hệ thức sau

a) $\frac{1 + \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} = \frac{2}{3\cos^2 \alpha}$;

b) $\frac{\sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha}$;

$$c) \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} = \tan \alpha \tan \beta;$$

$$d) \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \tan^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có } \frac{1 + \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} &= \frac{1 + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{1 - [(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)]} \\ &= \frac{1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 - [1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha]} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

$$b) \text{ Ta có } \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} = \frac{\sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)}{\cos \alpha \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right)} = \frac{\sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha)}.$$

$$c) \text{ Ta có } \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta} = \tan \alpha \tan \beta.$$

$$\begin{aligned} d) \text{ Ta có } \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \tan^2 \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left(\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} \right) \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

□

22 Chứng minh các hệ thức sau

$$a) \frac{1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2; \quad b) \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có } \frac{1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2. \end{aligned}$$

$$b) \text{ Ta có } \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x (1 - \sin^2 x)} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x (1 - \sin^2 x)} = \tan^4 x.$$

□

23 Chứng minh các hệ thức sau không phụ thuộc vào x .

$$a) A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}; \quad b) B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\cot^2 x + 1)}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \\
 &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
 &= 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1} = \frac{3(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)} = \frac{3}{2}.$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } B &= \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} - \frac{2 + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x - 1) \frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\tan x - 1} \\
 &= \frac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1.
 \end{aligned}$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Đề số 1

Câu 1. Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{5}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

💬 **Lời giải.**

Chọn đáp án **C**

□

Câu 2. Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ.

- A. 6° . B. 15° . C. 10° . D. 5° .

💬 **Lời giải.**

Từ công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} \Rightarrow a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{\frac{\pi}{12} \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = 15^\circ.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 3. Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là?

- A. Cung có độ dài bằng nửa đường kính. B. Cung có độ dài bằng đường kính.
C. Cung có độ dài bằng 1. D. Cung tương ứng với góc ở tâm 60° .

💬 **Lời giải.**

Cung có độ dài bằng bán kính (nửa đường kính) thì có số đo bằng 1 rad.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $1 \text{ rad} = 60^\circ$. B. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$. C. $1 \text{ rad} = 1^\circ$. D. $1 \text{ rad} = 180^\circ$.

💬 **Lời giải.**

Ta có π rad tương ứng với 180° . Suy ra 1 rad tương ứng với x° . Vậy $x = \frac{180 \cdot 1}{\pi}$.

Chọn đáp án **B**

Câu 5. Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo *radian* của cung tròn đó là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

$$\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{2R}{R} = 2 \text{ rad.}$$

Chọn đáp án **D**

Câu 6. Đổi số đo của góc 70° sang đơn vị radian.

A. $\frac{7}{18}$.

B. $\frac{7\pi}{18}$.

C. $\frac{70}{\pi}$.

D. $\frac{7}{18\pi}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Ta có } \alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} = \frac{70\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}.$$

Chọn đáp án **B**

Câu 7. Đổi số đo của góc $-\frac{3\pi}{16}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. $-33^\circ 45'$.

B. $-32^\circ 55'$.

C. $33^\circ 45'$.

D. $-29^\circ 30'$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{-\frac{3\pi}{16} \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = \left(-\frac{135}{4} \right)^\circ = -33^\circ 45'.$$

Chọn đáp án **A**

Câu 8. Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. -286° .

B. $286^\circ 28' 44''$.

C. $-286^\circ 44' 28''$.

D. $-286^\circ 28' 44''$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{-5 \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = -286^\circ 28' 44''.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 9. Đổi số đo của góc $45^\circ 32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

A. 0,794.

B. 0,7947.

C. 0,795.

D. 0,7948.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Trước tiên ta đổi } 45^\circ 32' = \left(45 + \frac{32}{60} \right)^\circ.$$

$$\text{Áp dụng công thức, ta được } \alpha = \frac{\left(45 + \frac{32}{60} \right) \cdot \pi}{180} = 0,7947065861.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 10. Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20 cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

A. $\ell = 2,94$ cm.

B. $\ell = 3,39$ cm.

C. $\ell = 1,49$ cm.

D. $\ell = 3,93$ cm.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\ell = R\alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{16} \approx 3,93 \text{ cm}$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 11. Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo $1,5$ và bán kính bằng 20 cm .

- A. 40 cm . B. 60 cm . C. 30 cm . D. 20 cm .

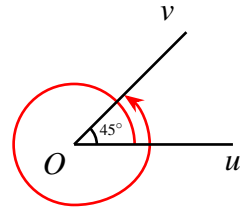
Lời giải.

Ta có $\ell = \alpha R = 1,5 \cdot 20 = 30 \text{ cm}$.

Chọn đáp án **(C)**

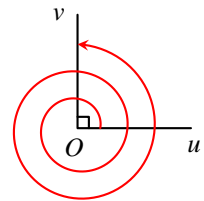
Câu 12. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 405° . B. 385° . C. -405° . D. 45° .



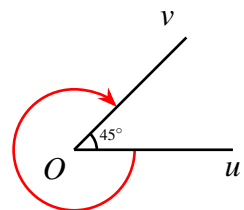
Câu 13. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 450° . B. -450° . C. 810° . D. 90° .



Câu 14. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 45° . B. -315° . C. 315° . D. 405° .



Câu 15. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\frac{\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của các góc lượng giác (Ov, Ow) .

- A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

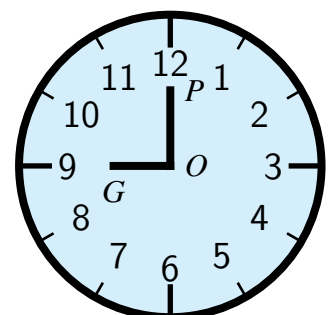
Lời giải.

$$(Ov, Ow) = (Ou, Ow) - (Ou, Ov) + k2\pi = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 16. Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo các góc lượng giác (OG, OP) là

- A. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. B. $-90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
C. $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.



Lời giải.

Theo hình vẽ, các góc lượng giác có tia đầu OG và tia cuối OP sẽ có số đo $-90^\circ + k360^\circ$ hay $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **C**



Câu 17. Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho góc lượng giác (OA, OM) có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox . Số đo các góc lượng giác (OA, ON) là

A. $135^\circ + k360^\circ$.

B. -45° .

C. 315° .

D. $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Vì số đo góc lượng giác (OA, OM) bằng 45° nên $\widehat{AOM} = 45^\circ$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $\widehat{AON} = 45^\circ$. Do đó số đo các góc lượng giác (OA, ON) là $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **D**



Câu 18. Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

A. $\frac{k\pi}{3}$.

B. $k\pi$.

C. $\frac{k2\pi}{3}$.

D. $\frac{k\pi}{2}$.

Lời giải.

Tam giác đều có góc ở đỉnh là 60° nên góc ở tâm là 120° tương ứng $\frac{k2\pi}{3}$.

Chọn đáp án **C**



Câu 19. Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu độ.

A. $\frac{5}{8}\pi$.

B. $\frac{8}{5}\pi$.

C. $\frac{5}{3}\pi$.

D. $\frac{3}{5}\pi$.

Lời giải.

Trong 2 giây bánh xe đạp quay được $\frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$ vòng tức là quay được cung có độ dài là $l = \frac{4}{5} \cdot 2\pi R = \frac{8}{5}\pi R$.

Ta có $l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{8}{5}\pi R}{R} = \frac{8}{5}\pi$.

Chọn đáp án **B**



Câu 20. Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

A. $\frac{k2\pi}{3}$.

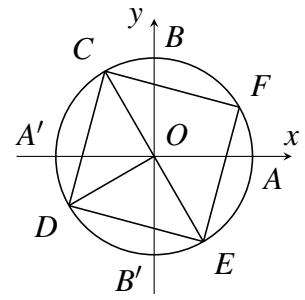
B. $\frac{k\pi}{2}$.

C. $\frac{k\pi}{3}$.

D. $k\pi$.

Lời giải.

Hình vẽ tham khảo (hình vẽ bên). Hình vuông $CDEF$ có góc $\widehat{DCE}$ là 45° nên góc ở tâm là 90° tương ứng $\frac{k\pi}{2}$.



Chọn đáp án **B**



2. Đề số 2

Câu 1. Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

Lời giải.

$$\text{Do } \alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ nhất} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**



Câu 2. Cho α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$. B. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha < 0$.
C. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$. D. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha > 0$.

Lời giải.

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ hai} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**



Câu 3. Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ ba} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**



Câu 4. Cho α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ tư} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$. B. $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$. C. $\sin(\alpha - \pi) < 0$. D. $\sin(\alpha - \pi) < 0$.

Lời giải.

Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ điểm cuối cung $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ III $\Rightarrow \sin(\alpha - \pi) < 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 6. Tính giá trị của $\cot \frac{89\pi}{6}$.

- A. $\cot \frac{89\pi}{6} = \sqrt{3}$. B. $\cot \frac{89\pi}{6} = -\sqrt{3}$. C. $\cot \frac{89\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cot \frac{89\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\cot \frac{89\pi}{6} = \cot \left(\frac{5\pi}{6} + 14\pi \right) = \cot \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 7. Tính giá trị biểu thức $P = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 4$. D. $P = 8$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$. Do đó $P = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 8. Tính giá trị biểu thức $P = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$. Do đó $P = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 9. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\sin 60^\circ < \sin 150^\circ$. B. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ$. C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. D. $\cot 60^\circ > \cot 240^\circ$.

Lời giải.

Dùng MTCT kiểm tra từng đáp án.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 10. Với mọi số thực α , ta có $\sin \left(\frac{9\pi}{2} + \alpha \right)$ bằng

- A. $-\sin \alpha$. B. $\cos \alpha$. C. $\sin \alpha$. D. $-\cos \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$.

Chọn đáp án **B**

Câu 11. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

- A. $-\tan \alpha$. B. $\cot \alpha$. C. $\tan \alpha$. D. $-\cot \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\tan(2017\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

Chọn đáp án **C**

Câu 12. Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

- A. $A = \cos \alpha + \sin \alpha$. B. $A = 2 \sin \alpha$. C. $A = \sin \alpha \cos \alpha$. D. $A = 0$.

Lời giải.

Ta có $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha - \sin \alpha = 0$.

Chọn đáp án **D**

Câu 13. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng.

- A. $\sin(A + C) = -\sin B$. B. $\cos(A + C) = -\cos B$.
C. $\tan(A + C) = \tan B$. D. $\cot(A + C) = \cot B$.

Lời giải.

Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A + C = \pi - B$.

Khi đó $\sin(A + C) = \sin(\pi - B) = \sin B$; $\cos(A + C) = \cos(\pi - B) = -\cos B$.

$\tan(A + C) = \tan(\pi - B) = -\tan B$; $\cot(A + C) = \cot(\pi - B) = -\cot B$.

Chọn đáp án **B**

Câu 14. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 15. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{2}{3} \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án **B**

Câu 16. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$.

B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$.

C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 17.** Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

D. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{\pi}{2} + 504 \cdot 2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 504 \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}. \text{ Mà } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{3}{5}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án **D** □**Câu 18.** Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.

A. $P = -3$.

B. $P = \frac{3}{7}$.

C. $P = \frac{12}{25}$.

D. $P = -\frac{12}{25}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Thay } \tan \alpha = -\frac{3}{4} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{12}{25}.$$

Chọn đáp án **D** □**Câu 19.** Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$.

A. $P = -\frac{4}{9}$.

B. $P = \frac{4}{9}$.

C. $P = -\frac{4}{19}$.

D. $P = \frac{4}{19}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Chia cả tử và mẫu của } P \text{ cho } \cos \alpha \text{ ta được } P = \frac{3 \tan \alpha - 2}{5 + 7 \tan \alpha} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 + 7 \cdot 2} = \frac{4}{19}.$$

Chọn đáp án **D** □**Câu 20.** Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{15}{13}$.

B. $P = \frac{15}{13}$.

C. $P = -13$.

D. $P = 13$.

 Lời giải.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\sin \alpha$ ta được $P = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{2 - 5 \cdot \frac{1}{3}} = 13$.

Chọn đáp án 



§2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC LƯỢNG GIÁC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Công thức cộng:

$$\textcircled{1} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{2} \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{3} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{4} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{5} \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

$$\textcircled{6} \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

2. Công thức nhân đôi:

$$\textcircled{1} \sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

$$\textcircled{2} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$\textcircled{3} \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$$

$$\textcircled{4} \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3. Công thức hạ bậc:

$$\textcircled{1} \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{3} \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\textcircled{1} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

$$\textcircled{2} \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)].$$

$$\textcircled{3} \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

$$\textcircled{4} \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)].$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\textcircled{1} \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{3} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{4} \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

Ví dụ 1. Hãy tính

a) $\sin 75^\circ$

b) $\sin 15^\circ$

c) $\tan \frac{7\pi}{12}$.

d) $\cot \frac{5\pi}{8}$.

e) $\cos 795^\circ$.

f) $\sin 18^\circ$.

Lời giải.

a) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

b) $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) Ta có $\tan \frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$.

d) Ta có $\cot \frac{5\pi}{8} = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\tan \frac{\pi}{8}$.

Lại có $1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$, suy ra:

$1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2}$ hoặc $\tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$.

Vì $\tan \frac{\pi}{8} > 0$ nên $\tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$. Vậy $\cot \frac{5\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$.

e) Ta có $795^\circ = 75^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ nên

$$\begin{aligned} \cos 795^\circ &= \cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

f) Ta có $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ nên $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$ (*). Trong đó

• $\cos 36^\circ = \cos(2 \cdot 18^\circ) = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$.

• $\begin{aligned} \sin 54^\circ &= \sin(18^\circ + 36^\circ) = \sin 18^\circ \cos 36^\circ + \sin 36^\circ \cos 18^\circ \\ &= \sin 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ) + 2 \sin 18^\circ \cos^2 18^\circ \\ &= \sin 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ) + 2 \sin 18^\circ (1 - \sin^2 18^\circ) \\ &= 3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ. \end{aligned}$

Thay hai kết quả này vào (*), ta được

$3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1$ hoặc $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ hoặc $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

Vì $0 < \sin 18^\circ < 1$ nên $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.



≡ Ví dụ 2. Cho $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$; $\cos 2\alpha$ và $\sin\left(\alpha + \frac{19\pi}{4}\right)$.

💬 Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\cos \alpha > 0$, suy ra $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}.$$

$$\bullet \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7}{25}.$$

$$\bullet \sin\left(\alpha + \frac{19\pi}{4}\right) = \sin \alpha \cdot \cos\left(\frac{19\pi}{4}\right) + \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$



≡ Ví dụ 3. Cho $\tan \alpha = -2$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$, $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

💬 Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\bullet \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\bullet \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\bullet \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{3}.$$



≡ Ví dụ 4. Cho $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

💬 Lời giải.

Vì $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$. Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$$\bullet \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\bullet \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Theo công thức cộng, ta có

- $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\alpha \cos\frac{\pi}{3} + \cos\alpha \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}};$

- $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\alpha \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$

7

2

Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng

≡ Ví dụ 5. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \cos 45^\circ \cos 15^\circ$.

b) $B = \cos 75^\circ \sin 15^\circ$.

c) $C = \sin 75^\circ \sin 15^\circ$.

d) $D = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}.$

 **Lời giải.**

$$\text{a) } A = \frac{1}{2} (\cos(45^\circ + 15^\circ) + \cos(45^\circ - 15^\circ)) = \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 30^\circ) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{b) } B = \frac{1}{2} [\sin(75^\circ + 15^\circ) - \sin(75^\circ - 15^\circ)] = \frac{1}{2} (\sin 90^\circ - \sin 60^\circ) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

c) $C = -\frac{1}{2}(\cos(75^\circ + 15^\circ) - \cos(75^\circ - 15^\circ)) = -\frac{1}{2}(\cos 90^\circ - \cos 60^\circ) = \frac{1}{4}.$

d) $D = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{16\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{6\pi}{12} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{-2\pi}{3} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$

7

≡ Ví dụ 6. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $\cos 5a \sin 3a$.

b) $2\cos(a+b)\cos(a-b).$

c) $\sin(a-b)\cos(b-a)$.

d) $4 \cos x \cos 2x \cos 3x$.

 **Lời giải.**

a) $\cos 5a \sin 3a = \sin 3a \cos 5a = \frac{1}{2} [\sin(3a - 5a) + \sin(3a + 5a)] = \frac{1}{2} [\sin(-2a) + \sin 8a].$

b) $2 \cos(a+b) \cos(a-b) = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(a+b-a+b) + \cos(a+b+a-b)] = \cos 2b + \cos 2a.$

c) $\sin(a-b)\cos(b-a) = \frac{1}{2} [\sin(a-b-b+a) + \sin(a-b+b-a)] = \frac{1}{2} \sin(2a-2b).$

d)

$$\begin{aligned} 4 \cos x \cos 2x \cos 3x &= 4(\cos 4x \cos 2x) \cos x = 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 6x) \cos x \\ &= 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 6x \cos x = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x. \end{aligned}$$

7

Ví dụ 7. Chứng minh $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 140^\circ) \\ &= \frac{1}{4}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ) \\ &= \frac{1}{4}(\cos^2 20^\circ + \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \cos 40^\circ) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 40^\circ}{2} + \frac{\cos 60^\circ + \cos 20^\circ}{2} - \frac{1}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\cos 40^\circ\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

□

DT

3

Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích

Ví dụ 8. Tính giá trị biểu thức lượng giác sau

a) $C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}.$

b) $D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}.$

Lời giải.

a) Ta có $C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)}{-2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)} = -\frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}.$

b) Ta có $D = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0.$

□

Ví dụ 9. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tích.

a) $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a.$

b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$

Lời giải.

a) $\sin a + \sin 3a + \sin 5a = \sin 5a + \sin a + \sin 3a = 2 \sin 3a \cos 2a + \sin 3a = \sin 3a(2 \cos 2a + 1).$
 Vậy $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a = \sin 3a(2 \cos 2a + 1).$

b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos 3x + \cos x) + (\cos 2x + 1)$
 $= 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 + 1 = 2 \cos x (\cos 2x + \cos x) = 2 \cos x \cdot 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$
 Vậy $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 4 \cos x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}.$

□

Ví dụ 10. Chứng minh

a) $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ$.

b) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$.

c) $\sin 20^\circ - \sin 100^\circ + \sin 140^\circ = 0$.

d) $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$.

Lời giải.

a) Ta có $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = 2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 5^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ$.

b) Ta có $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = (-2) \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin(-18^\circ) = \sin 18^\circ$.

c) Ta có $\sin 20^\circ - \sin 100^\circ + \sin 140^\circ = (\sin 20^\circ + \sin 140^\circ) - \sin 100^\circ = 2 \cdot \sin 80^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 100^\circ = \sin 80^\circ - \sin 80^\circ = 0$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ &= (\tan 9^\circ + \tan 81^\circ) - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ) \\ &= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cdot \cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \cdot \cos 63^\circ} \\ &= \frac{\cos 27^\circ \cdot \cos 63^\circ - \cos 9^\circ \cdot \cos 81^\circ}{\cos 9^\circ \cdot \cos 81^\circ \cdot \cos 27^\circ \cdot \cos 63^\circ} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (\cos 90^\circ + \cos 36^\circ) - \frac{1}{2} \cdot (\cos 90^\circ + \cos 72^\circ)}{\frac{1}{2} \cdot (\cos 90^\circ + \cos 36^\circ) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos 90^\circ + \cos 72^\circ)} \\ &= \frac{2 \cdot (\cos 36^\circ - \cos 72^\circ)}{\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ} \\ &= \frac{(-4) \cdot \sin 54^\circ \cdot \sin(-18^\circ)}{\sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ} \\ &= 4. \end{aligned}$$

□

DT

4

Các bài toán chứng minh, rút gọn

Ví dụ 11. Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}$.

b) $B = (\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b$.

Lời giải.

a) Ta có $A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right)} = \frac{\sqrt{2} \sin a}{\sqrt{2} \cos a} = \tan a$.

b) Ta có $B = \tan(a - b) (1 + \tan a \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b = 1$.

□

Ví dụ 12. Chứng minh các biểu thức sau

$$\text{a) } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta. \quad \text{b) } \frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta).$$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) &= -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) \\ &= -\frac{1}{2}[(1 - 2\sin^2 \alpha) - (1 - 2\sin^2 \beta)] = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} &= \frac{\sin \alpha + \frac{1}{2}[\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(-\alpha)]}{\cos \alpha - \left(-\frac{1}{2}\right)[\cos(\alpha + 2\beta) - \cos(-\alpha)]} \\ &= \frac{\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\beta)} \\ &= \frac{2\sin(\alpha + \beta)\cos(-\beta)}{2\cos(\alpha + \beta)\cos(-\beta)} = \tan(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

□

≡ Ví dụ 13. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$\text{a) } A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right);$$

$$\text{b) } B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right).$$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2\alpha \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + 2\cos \frac{4\pi}{3} \cos 2\alpha \right] = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

$$\text{b) } \forall \alpha + \frac{\pi}{6} = \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{2} \text{ suy ra } \begin{cases} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right) = -\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} B &= \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \cos \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .

□

≡ Ví dụ 14. Chứng minh các đẳng thức sau trong điều kiện có nghĩa của biểu thức

$$a) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$$

$$b) \frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \cot \alpha$$

$$c) \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$d) \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x = 1$$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} a) \text{ VT} &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \\ &= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \text{VP}. \end{aligned}$$

$$b) \text{ VT} = \frac{1 - \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (2 \cos \alpha - 1)}{\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha = \text{VP}.$$

$$\begin{aligned} c) \text{ VT} &= \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \text{VP}. \end{aligned}$$

$$d) P = \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \cos x (\sin x + \cos x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

□

≡ Ví dụ 15. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$a) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$b) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C).$$

 **Lời giải.**

$$a) \text{ Ta có } \sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$\text{Mặt khác trong tam giác } ABC, \text{ ta có } A + B + C = \pi \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Ta có } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C \\ &= 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C \\ &= 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C. \end{aligned}$$

Vì $A + B + C = \pi$ suy ra $\cos(A + B) = -\cos C$ nên

$$\begin{aligned} & 2 - \cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2 C \\ &= 2 + \cos C \cos(A - B) + \cos C \cos(A + B) \\ &= 2 + \cos C [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \\ &= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos B \\ &= 2(1 + \cos A \cos B \cos C). \end{aligned}$$

□

DT**5****Vận dụng thực tiễn**

≡ Ví dụ 16. Một thiết bị trễ kỹ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5 \sin t$ và phát lại được nốt thuần $f_2(t) = 5 \cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là một sóng âm hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$) của sóng âm.

💬 Lời giải.

Ta có $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = 5(\sin t + \cos t) = 5\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. Suy ra

- Biên độ âm $k = 5\sqrt{2}$.
- Pha ban đầu $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

□

≡ Ví dụ 17. Trong Vật lý, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}, \\ x_2(t) &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

💬 Lời giải.

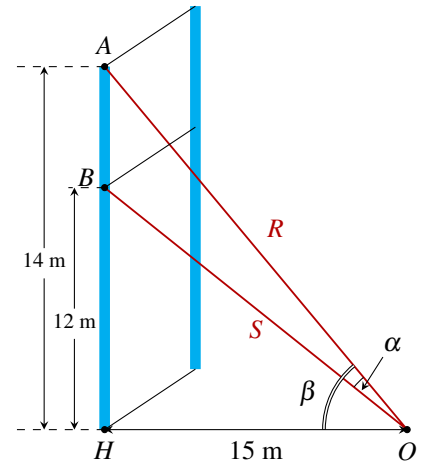
Ta có $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \right] = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$. Suy ra

- Biên độ âm $k = 2\sqrt{2}$.
- Pha ban đầu $\varphi = -\frac{\pi}{12}$.

□

≡ Ví dụ 18.

Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình bên).



- Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải.

- Đặt $\widehat{HOA} = \beta$ và $\widehat{HOB} = \beta_1$. Ta tính được

$$\tan \beta = \frac{AH}{HO} = \frac{14}{15}; \quad \tan \beta_1 = \frac{BH}{HO} = \frac{12}{15}.$$

Khi đó

$$\tan \alpha = \tan(\beta - \beta_1) = \frac{\tan \beta - \tan \beta_1}{1 + \tan \beta \tan \beta_1} = \frac{10}{131}.$$

- Với $\tan \alpha = \frac{10}{131}$ và góc $0 < \alpha < 90^\circ$, suy ra $\alpha = 4^\circ$.

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính

- $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
- $\cos(a+b), \sin(a-b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}, 0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}, 90^\circ < b < 180^\circ$.

Lời giải.

- Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$\text{Ta có } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{6}}{6}.$$

- Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$. Do đó $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Suy ra $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = \frac{-2\sqrt{2} - 1}{-2\sqrt{2} + 1} = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}.$$

c) Có $0^\circ < a < 90^\circ$ nên $\cos a = \frac{3}{5}$, $90^\circ < b < 180^\circ$ nên $\cos b = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{3}{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8+3\sqrt{5}}{15}.$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a = \frac{4}{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6+4\sqrt{5}}{15}.$$

□

- 2) Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$

Do $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{24}{7}$.

□

- 3) Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{5}$. Tính $\sin 2\alpha$.

Lời giải.

Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{25}$.

Do $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin 2\alpha = \frac{4}{25} - 1 = -\frac{21}{25}$.

□

- 4) Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$;

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$.

Lời giải.

a) Ta có $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$
 $= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$.

b) Ta có $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$
 $- 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$
 $= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2$
 $= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4\alpha) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$.

□

- 5) Chứng minh các đẳng thức sau

a) $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos 2\alpha$;

b) $\sin \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha$;

c) $\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$;

d) $\tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{2}{\tan 2\alpha}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) &= 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) \right] \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } \sin \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin \alpha (1 + 2\cos^2 \alpha - 1) = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \sin 2\alpha \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } \frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} &= \frac{\sin 2\alpha + (1 - \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha + (1 + \cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha + 2\sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)}{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \tan \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{d) Ta có } \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = 2 \cdot \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \cdot \tan \alpha} = -\frac{2}{\tan 2\alpha}.$$

□

6 Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a) } \cos a + \sin a = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right).$$

$$\text{b) } \cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right).$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \cos a + \sin a &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin a \right) = \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} + \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác ta cũng có } \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin a \right) &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right) = \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right). \end{aligned}$$

□

7 Rút gọn biểu thức sau

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}; & \text{b) } B &= \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \frac{(\cos a + \cos 3a) + 2 \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a \cos a + 2 \cos 2a}{2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a} \\ &= \frac{2 \cos 2a (\cos a + 1)}{2 \sin 2a (\cos a + 1)} = \cot 2a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right) &= 2 \cos a \cos \frac{\pi}{3} = \cos a; \\ \cot a - \cot \frac{a}{2} &= \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos a - \cos \frac{a}{2} \sin a}{\sin a \sin \frac{a}{2}} \\ &= \frac{\sin \left(\frac{a}{2} - a \right)}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{-\sin \frac{a}{2}}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = -\frac{1}{\sin a}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\cos a}{-\frac{1}{\sin a}} = -\sin a \cos a = -\frac{\sin 2a}{2}.$$

□

- 8 Chứng minh rằng $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$, với điều kiện biểu thức có nghĩa.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{\left[\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2}{\left[\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2} = \frac{2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}{2 \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} = \cot^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

□

- 9 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + a \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - a \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2a;$

b) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \frac{3}{2}.$

Lời giải.

a) Ta có

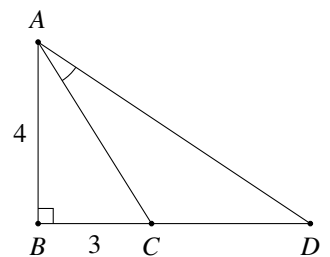
$$\begin{aligned} \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + a \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - a \right) &= \left(\sin \frac{\pi}{8} \cos a + \sin a \cos \frac{\pi}{8} \right)^2 - \left(\sin \frac{\pi}{8} \cos a - \sin a \cos \frac{\pi}{8} \right)^2 \\ &= 4 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \sin a \cos a = \sin \frac{\pi}{4} \sin 2a = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2a \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} &\cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) \\ &= \cos^2 \alpha + \left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} \right)^2 + \left(\cos \frac{2\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \alpha \right)^2 \\ &= \cos^2 \alpha + 2 \left(\frac{1}{4} \cos^2 \alpha + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right) = \frac{3}{2} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

- 10 Tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD (làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải.

Đặt $\widehat{BAC} = \varphi$ thì $\tan \varphi = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$. Theo hình vẽ

$$\tan \widehat{BAD} = \tan(\varphi + 30^\circ) = \frac{\tan \varphi + \tan 30^\circ}{1 - \tan \varphi \tan 30^\circ} = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}.$$

Ta có $\tan \widehat{BAD} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB \tan \widehat{BAD}$. Khi đó

$$CD = BD - BC = AB \tan \widehat{BAD} - 3 = 6,4.$$

□

- 11** Dao động của một vật là tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương, có phương trình lần lượt là $x_1 = 6 \cos 100\pi t$ (mm) và $x_2 = 6 \sin 100\pi t$ (mm), (t tính bằng giây). Tính li độ của vật tại thời điểm $t = 0,25$ giây.

- 12** Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

b) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2 \cos A \cos B \cos C$.

c) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$;

d) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$.

Lời giải.

a)

b)

c) Ta có $\tan \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \cot \left(\frac{C}{2} \right) = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}}$. Suy ra

$$\frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}.$$

Tức là $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$.

d) Từ kết quả câu a) ta có

$$\frac{1}{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{C}{2} \cot \frac{A}{2}} = 1 \Leftrightarrow \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b.$

B. $\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b.$

C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

🗨️ **Lời giải.**Ta có $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$ Chọn đáp án **(B)** □**Câu 2.** Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$

B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$

C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$

D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$

🗨️ **Lời giải.**Chọn đáp án **(B)** □**Câu 3.** Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

A. $P = -\frac{24}{25}.$

B. $P = \frac{24}{25}.$

C. $P = -\frac{12}{25}.$

D. $P = \frac{12}{25}.$

🗨️ **Lời giải.**Ta có $P = \sin 2(\alpha + \pi) = \sin(2\alpha + 2\pi) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$ Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}.$ Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{3}{5}.$ Thay $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$ Chọn đáp án **(A)** □**Câu 4.** Biết $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right).$

A. $P = -\frac{3}{5}.$

B. $P = \frac{3}{5}.$

C. $P = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}.$

D. $P = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}.$

🗨️ **Lời giải.**Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}.$ Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}.$ Suy ra $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}.$ Chọn đáp án **(C)** □**Câu 5.** Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$

A. $P = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}.$

B. $P = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}.$

C. $P = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}.$

D. $P = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}.$

🗨️ **Lời giải.**Ta có $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha.$ Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}.$ Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$

Thay $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ và $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 6. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$.

- A. $P = -\frac{120}{119}$. B. $P = -\frac{119}{120}$. C. $P = \frac{120}{119}$. D. $P = \frac{119}{120}$.

Lời giải.

Ta có $P = \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{12}{13}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ vào P , ta được $P = \frac{120}{119}$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 7. Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = -\frac{3}{2}$. D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $P = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 8. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

- A. $P = \frac{527}{625}$. B. $P = -\frac{527}{625}$. C. $P = \frac{524}{625}$. D. $P = -\frac{524}{625}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$.

Suy ra $P = \cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{625} - 1 = -\frac{527}{625}$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 9. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{11}{113}$. B. $P = \frac{13}{113}$. C. $P = \frac{15}{113}$. D. $P = \frac{17}{113}$.

Lời giải.

Ta có $\cot \alpha = 15 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 15 \Leftrightarrow \cos \alpha = 15 \sin \alpha$.

$$\text{Suy ra } P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 30 \sin^2 \alpha = \frac{30}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{30}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{30}{1 + 15^2} = \frac{15}{113}.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 10. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$.

- A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = -\sqrt{5}$. C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $P^2 = 1 + \sin \alpha$. Với $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$. Khi đó $\begin{cases} 0 \leq \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq \cos \frac{\alpha}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, suy ra

$$P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} < 0.$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{16}{25}$. Vì $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ vào P^2 , ta được $P^2 = \frac{1}{5}$. Suy ra $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 11. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$.

- A. $P = \frac{10}{9}$. B. $P = \frac{9}{10}$. C. $P = -\frac{10}{9}$. D. $P = -\frac{9}{10}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}.$$

Nhắc lại công thức: Nếu đặt $t = \tan \alpha$ thì $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\text{Do đó } \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{5}, \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{5}.$$

Thay $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{10}{9}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

- A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. C. $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Vì $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$.

$$\text{Ta có } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}.$$

Suy ra $\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$. Do $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Vậy $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 13. Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$.

- A. $P = 12$. B. $P = \frac{21}{2}$. C. $P = 6$. D. $P = 21$.

Lời giải.

Ta có $P = \left(1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \left(1 - 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha\right) (-1 - 2 \cos 2\alpha)$.

Thay $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{5}{2} + 1\right) \left(-1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 14. Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a + b)$.

- A. $\frac{56}{65}$. B. $\frac{63}{65}$. C. $-\frac{33}{65}$. D. 0.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$ mà $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}$.

Tương tự, ta có $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ mà $b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}$.

Khi đó $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 15. Cho hai góc nhọn $a; b$ thỏa $\cos a = \frac{1}{3}$; $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b)$.

- A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải.

Ta có $P = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)$
 $= (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2 = \cos^2 a \cdot \cos^2 b - (1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 b) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 16. Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1$ suy ra $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án **(B)****Câu 17.** Cho $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{3\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi}{3}$.

D. π .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}} = -1.$$

Mặt khác $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ suy ra $0 < x + y < \pi$. Do đó $x + y = \frac{3\pi}{4}$.Chọn đáp án **(B)****Câu 18.** Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

A. $\frac{p}{q-1}$.

B. $-\frac{p}{q-1}$.

C. $\frac{2p}{1-q}$.

D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Lời giải.

Vì $\tan \alpha, \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ nên theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = -p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{p}{q-1}.$$

Chọn đáp án **(A)****Câu 19.** Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5\cos(100\pi t + \pi)$ (cm) và $x_2 = 5\cos(100\pi t - \pi/2)$ (cm). Phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là

A. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

B. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

C. $x = 10\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

D. $x = 10\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= 5\cos(100\pi t + \pi) + 5\cos(100\pi t - \pi/2) \\ &= 5[\cos(100\pi t + \pi) + \cos(100\pi t - \pi/2)] \\ &= 5 \cdot 2\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{3\pi}{4} \\ &= -5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)****Câu 20.** Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số theo các phương trình: $x_1 = 2\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (cm); $x_2 = 2\cos(5\pi t)$ (cm). Biên độ của dao động tổng hợp của hai dao động trên là

A. 2.

B. 4.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{2}$.

 **Lời giải.**

$$\text{Xét } x(t) = x_1 + x_2 = 2\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos(5\pi t) = 2\sqrt{2}\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Chọn đáp án 



—HẾT—

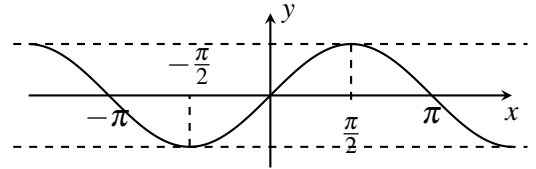


§3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

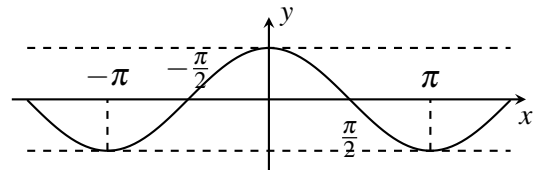
1. Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



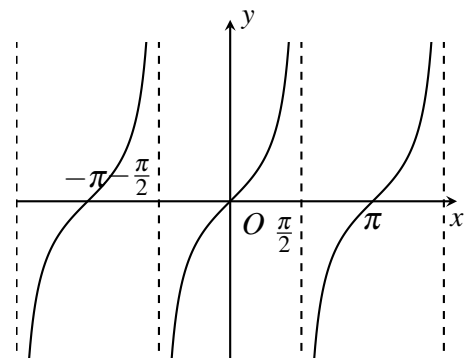
2. Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



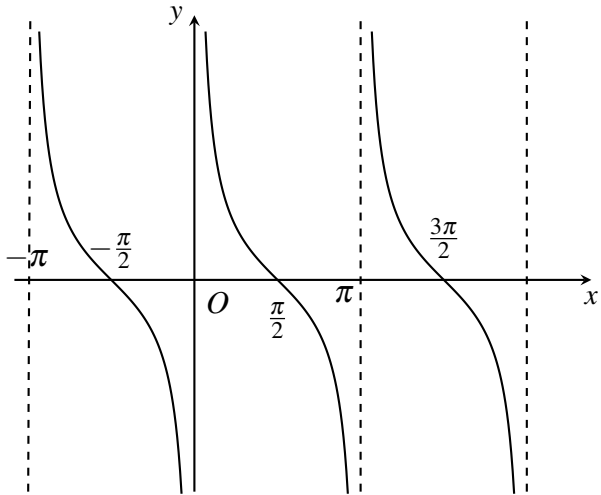
3. Hàm số $y = \tan x$

- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$; Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



4. Hàm số $y = \cot x$

- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Ta chú ý một số điều kiện sau:

- $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ xác định $\Leftrightarrow g(x) \neq 0$.
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.
- $y = \tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $y = \cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

- $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x}$
- $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$
- $y = \frac{2 + 3\cos 2x}{\sin x}$
- $y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$
- $y = \frac{\sin x - 3}{\cos x + 1}$
- $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x + 2}$
- $y = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1}$
- $y = \frac{2\sin x - 3}{2\sin x + 3}$
- $y = \sin \frac{x-1}{x+2}$
- $y = \sqrt{3-2\cos x}$
- $y = \frac{\sqrt{\cos x + 2}}{1 + \cos x}$
- $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

- $y = 2\tan x + 3$
- $y = 2\tan 2x - 4\sin x$
- $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số sau có tập xác định $\mathbb{R}$.

- $y = \sqrt{m - \cos x}$
- $y = \sqrt{2\sin x - m}$
- $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m}$

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{\cos^2 x - (2+m)\cos x + 2m}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} \cos^2 x - (2+m)\cos x + 2m &\geq, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (\cos x - 2)(\cos x - m) &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1). \end{aligned}$$

Do $\cos x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \cos x - m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \cos x \leq m, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $m \geq 1$. □

DT 2 Tính chẵn lẻ của hàm số

Ta thực hiện các bước sau:

- ① Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số – Tập $\mathcal{D}$ phải đối xứng.
- ② Tính $f(-x)$ (chỗ nào có biến x , ta thay bởi $-x$) và thu gọn kết quả. Khi đó
 - Nếu $f(-x) = f(x)$: hàm số đã cho là hàm chẵn.
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$: hàm số đã cho là hàm lẻ.
 - Nếu không rơi vào 2 trường hợp trên, ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

GHI NHỚ

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| ① Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. | ② Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn. |
| ③ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. | ④ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ. |

Ví dụ 5. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = |x| \sin x$.

b) $f(x) = \tan |x|$.

Lời giải.

- a) Tập xác định của hàm số: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 $+ \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
 $+ f(-x) = |-x| \sin(-x) = -|x| \sin x = -f(x)$.
 Vậy hàm số lẻ.

- b) Tập xác định của hàm số: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 $+ \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
 $+ f(-x) = \tan |-x| = \tan |x| = f(x)$.
 Vậy hàm số chẵn. □

Ví dụ 6. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$.

b) $f(x) = \sqrt{2 + \sin x} + \sqrt{2 - \sin x}$.

Lời giải.

a) Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ nên $\mathcal{D}$ là tập đối xứng.

Ta có $f(-x) = \sin^2(-2x) + \cos(-3x) = \sin^2 2x + \cos 3x = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

Do đó hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$f(-x) = \sqrt{2 + \sin(-x)} + \sqrt{2 - \sin(-x)} = \sqrt{2 - \sin x} + \sqrt{2 + \sin x} = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho chẵn trên D .

c)

□

Ví dụ 7. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$.

b) $f(x) = \tan x + \cot x$.

Lời giải.

a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Ta có $f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$.

Có $f(-x) = \cos(-2x) = \cos 2x = f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq l\pi \end{cases} \text{ (với } k, l \in \mathbb{Z} \text{)}.$

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, l\pi \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$, là một tập đối xứng.

Do đó $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$. Ta có $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

□

DT

3

Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất

Ta thường dùng một trong 3 phương pháp sau:

☑ Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản

① $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

② $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

③ $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

④ $0 \leq |\sin x|, |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

☑ Sử dụng điều kiện có nghiệm

① $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.

② $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.

③ $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

☑ Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số, từ đó, kết luận.

≡ **Ví dụ 8.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

- a) $y = 2\sin x + 3$ b) $y = \frac{1 - 2\sin^2 x}{3}$ c) $y = \sqrt{2 + \cos x} - 1$
 d) $y = 4\sin x \cos x + 1$; e) $y = 4 - 3\sin^2 2x$. f) $y = (3 - \sin x)^2 + 1$

≡ **Ví dụ 9.** Tìm x để hàm số $y = (\sin x + 3)^2 - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

≡ **Ví dụ 10.** Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

≡ **Ví dụ 11.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

- a) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ b) $y = \sin 2x - \cos 2x$ c) $y = 3\sin x + 4\cos x$

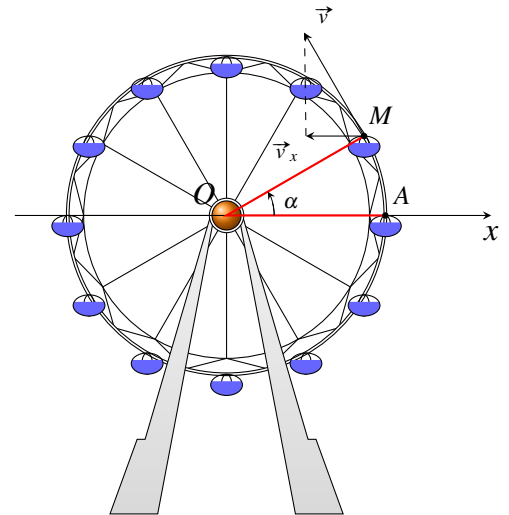
≡ **Ví dụ 12.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

- a) $y = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$ b) $y = 2\cos^2 x + 3\cos x - 2$ c) $y = \cos 2x - \sin x + 3$

≡ **Ví dụ 13.**

Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3\sin \alpha$ (m/s) (Hình bên).

- a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x
 b) Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

- a) $y = \cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$. b) $y = \frac{\sin x}{\cos 2x - 1}$.
 c) $y = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{1 - \cos x}}$. d) $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

💬 **Lời giải.**

- a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- b) Hàm số xác định khi và chỉ khi:

$$\cos 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Hàm số xác định khi $\begin{cases} \frac{2 + \sin x}{1 - \cos x} \geq 0 \\ 1 - \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}.$

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

□

2 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 3 - 2\sin 2x$

b) $y = 5 - 3\cos 4x.$

c) $y = 3 - 2|\sin 2x|.$

d) $y = 3\sin^2 2x - 4$

Lời giải.

a) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin 2x \leq 1 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq -2\sin 2x \leq 2 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 3 - 2\sin 2x \leq 5 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq y \leq 5. \end{aligned}$$

- $\max y = 5$ khi $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

- $\min y = 1$ khi $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

b) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos 4x \leq 1 \\ \Leftrightarrow 3 &\geq -3\cos 4x \geq -3 \\ \Leftrightarrow 5 + 3 &\geq 5 - 3\cos 4x \geq 5 - 3 \\ \Leftrightarrow 2 &\leq y \leq 8. \end{aligned}$$

- $\max y = 8$ khi $\cos 4x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$

- $\min y = 2$ khi $\cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

c) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\sin 2x| \leq 1 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq -2|\sin 2x| \leq 0 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 3 - 2|\sin 2x| \leq 3. \end{aligned}$$

- $\max y = 3$ khi $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}.$

- $\min y = 1$ khi $\sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pm\pi}{4} + k\pi.$

- d) Do $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$ nên $-4 \leq y = 3 \sin^2 2x - 4 \leq -1$.
 ○ $y = -4$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
 ○ $y = -1$ khi $\sin^2 2x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{\pi}{4}$.
 Vậy $\min y = -4$ và $\max y = -1$.

□

- 3 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Lời giải.

Ta có $y = 2 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2 - \sin^2 2x$.

Vì $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ nên $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 2 - 0 \geq 2 - \sin^2 2x \geq 2 - 1 \Leftrightarrow 2 \geq y \geq 1$.

Vậy $\min y = 1$ khi $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

$\max y = 2$ khi $\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

□

- 4 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Biến đổi $y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 3 = (2 \sin x + 1)^2 + 2$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq 1 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq 2 \sin x + 1 \leq 3 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (2 \sin x + 1)^2 \leq 9 \\ \Leftrightarrow 2 &\leq (2 \sin x + 1)^2 + 2 \leq 11. \end{aligned}$$

Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 11$ khi $x = \frac{\pi}{2}$ và $\min_{x \in \mathbb{R}} y = 2$ khi $\sin x = -\frac{1}{2}$.

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty]$. D. $[-1; 1]$.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 2. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

- A. $[-2; 2]$. B. $[0; 2]$. C. $[-1; 1]$. D. $[0; 1]$.

Lời giải.

Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là $[-1; 1]$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn. B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
 C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn. D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Lời giải.

Theo định nghĩa thì trong bốn hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 4. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

- A. $y = \sin^2 x$. B. $y = x \cos 2x$. C. $y = x \sin x$. D. $y = \cos x$.

Lời giải.

Tất cả các hàm ở 4 đáp án đều có tập xác định là $\mathbb{R}$, nên để kiểm tra tính lẻ, ta chỉ cần kiểm tra tính chất $f(-x)$ có bằng với $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và hàm đó là $y = x \cos 2x$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π . B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
C. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π . D. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Lời giải.

Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π , các hàm số $y = \tan x, y = \cot x, y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 6. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

- A. $T = 2\pi$. B. $T = \frac{\pi}{2}$. C. $T = \pi$. D. $T = 4\pi$.

Lời giải.

Chú ý với k là số nguyên dương hàm số $y = \sin kx$ có chu kỳ $T = \frac{2\pi}{k}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 7. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y = \sin 2x$. D. $y = \tan x - \sin 2x$.

Lời giải.

Xét $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Mặt khác $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ nên là hàm chẵn.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 9. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x}$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 10. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

- A. $x \neq k2\pi$. B. $x \neq k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy điều kiện xác định của hàm số đã cho là $x \neq k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án **A**

Câu 11. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$. B. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy điều kiện xác định của hàm số đã cho là $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án **D**

Câu 12. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

- A. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **C**

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos 3x - 1}{\cos x + 1}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

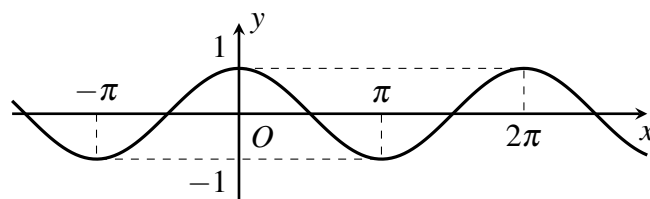
Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 14. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = 1 + \sin x$. B. $y = 1 - \sin x$. C. $y = \sin x$. D. $y = \cos x$.

Lời giải.

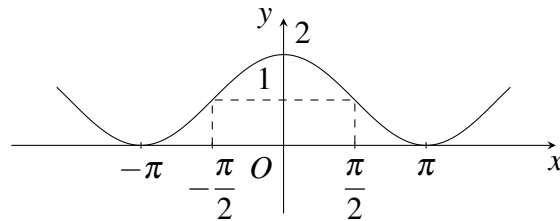
Ta thấy $y(0) = 1$, do đó loại đáp án C.

Hàm số không đạt giá trị bằng 2 tại $x = \frac{\pi}{2}$ hay $x = -\frac{\pi}{2}$, loại đáp án A và B.

Do đó, hàm số cần tìm phải là $y = \cos x$.

Chọn đáp án **D**

Câu 15. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = \cos x + 1$.

B. $y = 2 - \sin x$.

C. $y = 2 \cos x$.

D. $y = \cos^2 x + 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(0, \pi)$. Trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = \cos x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **A**

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\min y = -2, \max y = 4$.

B. $\min y = 2, \max y = 4$.

C. $\min y = -2, \max y = 3$.

D. $\min y = -1, \max y = 4$.

Lời giải.

Ta có: $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq y \leq 4$.

• $y = -2 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \Rightarrow \min y = -2$.

• $y = 4 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \Rightarrow \max y = 4$.

Chọn đáp án **A**

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2 \cos^2 3x$.

A. $\min y = 1, \max y = 2$.

B. $\min y = 1, \max y = 3$.

C. $\min y = 2, \max y = 3$.

D. $\min y = -1, \max y = 3$.

Lời giải.

Ta có: $0 \leq \cos^2 3x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq y \leq 3$.

• $y = 1 \Leftrightarrow \cos^2 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \min y = 1$.

• $y = 3 \Leftrightarrow \cos^2 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \max y = 3$.

Chọn đáp án **B**

Câu 18. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2 \sin x + 3}$.

A. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 1$.

B. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}$.

C. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 2$.

D. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 3$.

🗨️ Lời giải.

Ta có $1 \leq 2 \sin x + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq \sqrt{5}$.Vậy $\max y = \sqrt{5}$ khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ và $\min y = 1$ khi $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.Chọn đáp án (A) □**Câu 19.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2\sin^2 x}$.

A. $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 4$.

B. $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 3$.

C. $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 2$.

D. $\min y = \frac{1}{2}$, $\max y = 4$.

🗨️ Lời giải.

Ta có: $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq y \leq 4$.

• $y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \min y = \frac{4}{3}$.

• $y = 4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \Rightarrow \max y = 4$.

Chọn đáp án (A) □**Câu 20.** Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC .

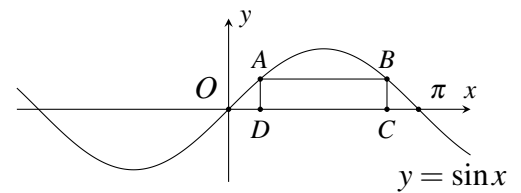
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

🗨️ Lời giải.

Theo hình vẽ thì $OD = CK \Rightarrow 2OD = \pi - CD = \frac{\pi}{3} \Rightarrow OD = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_D = \frac{\pi}{6}$.Tung độ điểm D là $y_D = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = AD = BC$.Chọn đáp án (B) □

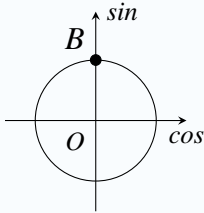
—HẾT—

§4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

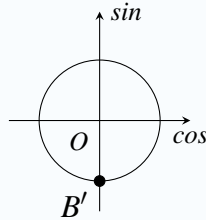
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình $\sin x = a$.

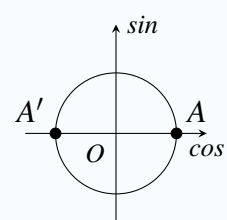
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

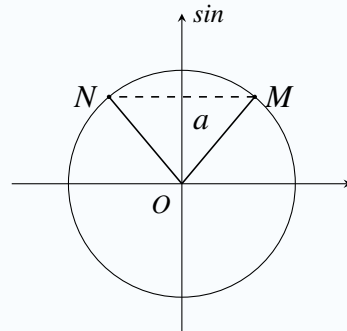
☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **sin** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

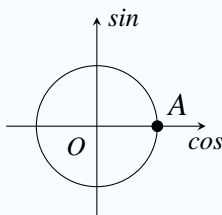
$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

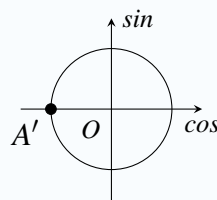
$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Phương trình $\cos x = a$.

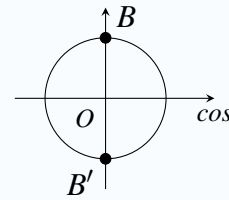
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$



$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

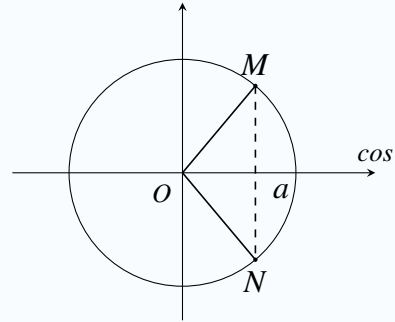
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **cos** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- ☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

3. Phương trình $\tan x = a$.

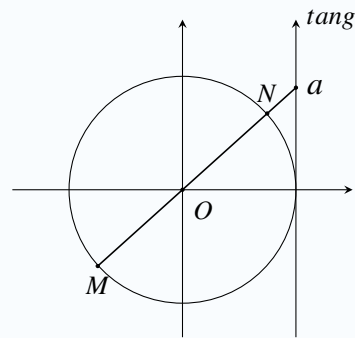
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ 0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\cot x = a$.

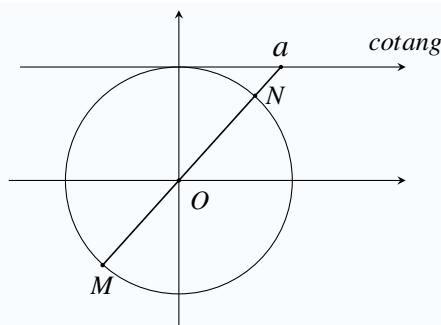
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **[1/a]** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng. Riêng $a = 0$ thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Giải các phương trình lượng giác cơ bản

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số a quy đổi về góc "đẹp" hay xấu;
- Chọn và ráp công thức nghiệm.

≡ Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 \sin \left(\frac{\pi}{5} - x \right) = 1$

c) $2 \sin (x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = 1$

e) $\sqrt{2} \cos 2x - 1 = 0$

f) $3 \cos x - 1 = 0.$

≡ Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{3} \tan \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 1$

c) $\tan (x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

e) $\sqrt{3} \cot x - 1 = 0$

f) $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x.$

≡ Ví dụ 3. Tìm nghiệm của các phương trình lượng giác sau trên khoảng cho trước

a) $\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$ trên $(0, 3\pi).$

b) $\sqrt{2} \sin(x - 1) = -1$ trên $\left(-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

c) $2 \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0$ trên $(-\pi, \pi).$

d) $\tan(3x + 2) - \sqrt{3} = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

DT

2

Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng

- Biến đổi về một trong các cấu trúc sau

① $\sin u = \sin v$

② $\cos u = \cos v$

③ $\tan u = \tan v$

④ $\cot u = \cot v$

- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác sau:

① $-\sin x = \sin(-x).$

② $-\cos x = \cos(\pi - x).$

③ $\sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$

④ $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin 3x = \sin 2x$ b) $\sin 2x - \sin x = 0$ c) $\sin 5x + \sin x = 0$
 d) $\cos 2x - \cos x = 0$ e) $\cos 8x + \cos x = 0$ f) $\cos 4x - \sin x = 0$

Ví dụ 5. (B.2013). Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} \sin 5x + 2\cos^2 x - 1 &= 0 \Leftrightarrow \sin 5x + \cos 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos 2x = -\sin 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 5x + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} - 5x + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} - k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

DT

3

Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 6. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

- a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
 b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?
 c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải.

a) Ta có phương trình

$$\begin{aligned} 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 &= 12 \\ \Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t - 80) &= k\pi \Leftrightarrow t = 80 + 182k \end{aligned}$$

Với $k, t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$, ta tìm được $k = 0$ và $k = 1$ thỏa.

Suy ra thành phố A có 12 giờ ánh sáng vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 của năm.

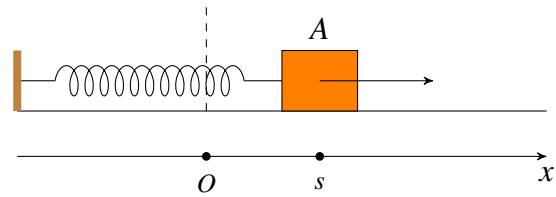
- b) Thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất đồng nghĩa với $d(t)$ nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi $\sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] = -1$. Giải phương trình này, ta tìm được $t = 353$.

- c) Thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất đồng nghĩa với $d(t)$ lớn nhất. Điều này xảy ra khi $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1$. Giải phương trình này, ta tìm được $t = 171$.

□

≡ Ví dụ 7.

Trong Hình bên, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$.



Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?

💬 **Lời giải.**

Theo yêu cầu bài toán

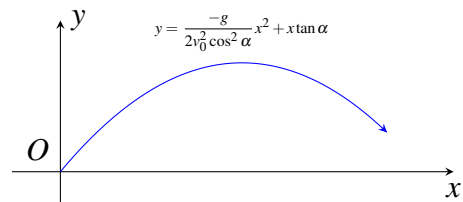
$$\begin{aligned} s = -5\sqrt{3} &\Leftrightarrow 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -5\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Giải phương trình này ta được $t = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

□

≡ Ví dụ 8.

Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 9,8$ m/s² là gia tốc trọng trường.



- Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m.

💬 **Lời giải.**

Thay các dữ kiện đã cho vào công thức, ta được phương trình quỹ đạo

$$y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

- a) Quả đạn chạm đất khi $y = 0$, khi đó

$$\frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = \frac{2500000 \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{49} \Leftrightarrow x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} \end{cases}$$

Vậy tầm xa mà quả đạn đạt tới là $x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49}$ m.

- b) Giải phương trình $\frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} = 22000 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{539}{625}$.

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Giải phương trình $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ với $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7\pi}{12} < \frac{k\pi}{2} < \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow -\frac{7}{6} < k < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-1; 0\}$.

- Với $k = -1$ thì $x = \frac{-\pi}{6}$;
- Với $k = 0$ thì $x = \frac{\pi}{3}$.

Vậy $x = \frac{-\pi}{6}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

- 2 Giải phương trình $\tan(x + 30^\circ) + 1 = 0$ với $-90^\circ < x < 360^\circ$.

Lời giải.

Ta có: $\tan(x + 30^\circ) + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan(x + 30^\circ) = -1 = \tan(-45^\circ) \Leftrightarrow x = -75^\circ + k180^\circ$.

Do $-90^\circ < x < 360^\circ$ nên tập nghiệm của phương trình là $S = \{-75^\circ, 105^\circ, 285^\circ\}$. □

- 3 Giải các phương trình sau:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\cos 3x = \sin 2x$ | b) $\cos 3x - 2\cos \frac{\pi}{4} = 0$ | c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ |
| d) $\cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$ | e) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ | f) $2\cos(2x - 60^\circ) - 1 = 0$ |
| g) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$ | h) $\cos\left(\frac{x}{3} - 30^\circ\right) = 1$ | i) $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$ |

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos 3x = \sin 2x &\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\ &(k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{b) } \cos 3x - 2\cos \frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \sqrt{2} \text{ (Phương trình vô nghiệm)}$$

$$\text{c) } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$d) \cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 30^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ 2x + 30^\circ = -60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k180^\circ \\ x = -45^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$e) 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$f) 2\cos(2x - 60^\circ) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(2x - 60^\circ) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 60^\circ = 120^\circ + k360^\circ \\ 2x - 60^\circ = -120^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + k180^\circ \\ x = -30^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$g) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -2 \text{ (Phương trình vô nghiệm)}$$

$$h) \cos\left(\frac{x}{3} - 30^\circ\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{3} - 30^\circ = k360^\circ \Leftrightarrow x = 90^\circ + k1080^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$i) \sin^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

□

4 Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \sqrt{3}$.

b) $\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

c) $\tan(x + 48^\circ) = \tan 25^\circ$.

d) $\tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{7}$.

Lời giải.

a) $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

c) $\tan(x + 48^\circ) = \tan 25^\circ \Leftrightarrow x + 48^\circ = 25^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 25^\circ - 48^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = -23^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-23^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) $\tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{7} \Leftrightarrow x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} - \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{17\pi}{28} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{17\pi}{28} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

□

5 Giải phương trình $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{3} - x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{6} - m\pi \end{cases}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện ta suy ra phương trình có một họ nghiệm $x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\square$

6 Giải phương trình $\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin \frac{x}{3} \neq 0 \\ \sin \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} \neq k\pi \\ \frac{x}{2} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k3\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} - 1 = 0 \\ \cot \frac{x}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} = 1 \\ \cot \frac{x}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện các nghiệm này thỏa.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. $\square$

7 Giải phương trình $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\sqrt{3} + \tan x} = 0$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} \tan x \neq -\sqrt{3} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}.$$

Khi đó, phương trình tương đương với $\sin 2x + 2\cos x - (\sin x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x \cos x + 2\cos x) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \text{ (loại, do } \cos x \neq 0) \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}.$$

Thử lại với điều kiện, ta loại nghiệm $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, do không thỏa $\tan x \neq -\sqrt{3}$.

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. $\square$

8 Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right]$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?

Lời giải.

Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 26° , xảy ra khi

$$\sin \left[\frac{\pi}{12}(t-9) \right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(t-9) = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 3 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

Do t là thời gian trong ngày tính bằng giờ nên $0 \leq t \leq 24$. Suy ra: $t = 3$ □

- 9** Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.

Lời giải.

Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó

$g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường.

Áp dụng công thức này:

- Cho $y = 0$ ta được $\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0$, suy ra $x = 0$ hoặc $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

- Quả đạn tiếp đất khi $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Ta có $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \leq \frac{v_0^2}{g}$, dấu bằng xảy ra khi $\sin 2\alpha = 1$.

Giải phương trình $\sin 2\alpha = 1$, ta được $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hay $\alpha = 45^\circ$.

Vậy quả đạn pháo sẽ bay xa nhất khi góc bắn bằng 45° . □

- 10** Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8 \cos 0,5t + 4$.

- Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?
- Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải.

a) Tại thời điểm $t = 2$. Ta có: $h(2) = 0,8 \cdot \cos(0,5 \cdot 2) + 4 = 4,43 \text{ m}$.

b) Tàu không thể di chuyển ra vào cảng khi

$$h(t) < 3,6 \Leftrightarrow \cos 0,5t < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < 0,5t < \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} < t < \frac{8\pi}{3}.$$

Với điều kiện $t \in [0; 12]$, ta chọn được thời gian tàu có thể di chuyển ra vào cảng là

$$0 \leq t \leq \frac{4\pi}{3} \text{ hoặc } \frac{8\pi}{3} \leq t \leq 12.$$

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\sin x = \frac{1}{2}$. B. $\tan x = \sqrt{3}$. C. $\sin x = 3$. D. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 3. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Lời giải.

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

Câu 4. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-7\pi}{6} + k2\pi$.
C. $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Lời giải.

$$2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ và } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

Chọn đáp án **D**

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

- A. $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. C. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 6. Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án **A**

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = -1$ là

- A. $-k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $\left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 D. $\{90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 8. Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ trong khoảng $(0; \pi)$ là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Chọn đáp án **C**

Câu 10. Phương trình $\sin x - \cos x = 1$ có một nghiệm là

- A. $-\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. π .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x = 1 &\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = \pi$.

Chọn đáp án **D**

Câu 11. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

- A. $x = \pi + k2\pi$. B. $x = k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sin^4 x - \cos^4 x = 0 &\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0 \\ \Leftrightarrow -\cos 2x = 0 &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

Câu 12. Xét trên $(-\pi; \pi)$, phương trình $\sin x = \frac{2}{3}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải.

$$\sin x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi \text{ và } x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi.$$

Xét trên $(-\pi; \pi)$ thì ta được hai nghiệm là $x = \arcsin \frac{2}{3}$ và $x = \pi - \arcsin \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 13. Cho phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi n là số các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; 3\pi]$ thì giá trị của n là

A. $n = 8$.

B. $n = 5$.

C. $n = 6$.

D. $n = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét trên đoạn $[0; 3\pi]$ có tất cả 6 nghiệm là $x = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \right\}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 14. Tính tổng các nghiệm $x \in [0; 2018\pi]$ của phương trình $\sin 2x = 1$.

A. $S = \frac{4071315\pi}{2}$.

B. $S = \frac{4071315\pi}{4}$.

C. $S = \frac{8141621\pi}{2}$.

D. $S = \frac{8141621\pi}{4}$.

Lời giải.

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $x \in [0; 2018\pi]$ nên $0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2018\pi \Leftrightarrow -0,25 \leq k \leq 2017,75$.

Các nghiệm của phương trình lượng giác lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu ứng với $k = 0$ và số hạng cuối ứng với $k = 2017$.

Bấm máy: $\sum_{x=0}^{2017} \left(\frac{\pi}{4} + x\pi \right)$, ta được kết quả $\frac{4071315\pi}{2}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 15. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $\cos x + \sin 2x = 0$

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\cos x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin(-2x) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in (-\pi; \pi)$ nên ta có các nghiệm $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 16. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

A. 16145.

B. 20181.

C. 20179.

D. 16144.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin 5x - \sin x &= 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + m\pi & (m \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{6} + n\pi & (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{Vì } x \in [-2018\pi; 2018\pi] \text{ nên } \begin{cases} -2018\pi \leq k\frac{\pi}{2} \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{5\pi}{6} + m\pi \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + n\pi \leq 2018\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4036 \leq k \leq 4036 \\ -\frac{12113}{6} \leq m \leq \frac{12103}{6} \\ -\frac{12109}{6} \leq n \leq \frac{12107}{6} \end{cases}.$$

Do đó có 8073 giá trị k , 4036 giá trị m , 4036 giá trị n , suy ra số nghiệm cần tìm là 16145 nghiệm.

Chọn đáp án **A** □

Câu 17. Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 7.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Với

$$-2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -2\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -\frac{9}{4} \leq k \leq \frac{9}{4}.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Có 5 giá trị thỏa yêu cầu, suy ra hai đồ thị cắt nhau tại 5 điểm.

Chọn đáp án **A** □

Câu 18. Với giá trị của tham số m thì phương trình $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2m = 0$ vô nghiệm?

A. $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}.$

B. $\begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$

C. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}.$

D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2m = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2m.$$

Để phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} 2m < -1 \\ 2m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^2 \pi x = m^2 - 9$ có nghiệm.

A. 5.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Do $0 \leq \cos^2 \pi x \leq 1$ nên $0 \leq m^2 - 9 \leq 1$. Chọn được $m = \pm 3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 20. Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}.$

B. $t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}.$

C. $t = \frac{8\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}.$

D. $t = \frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

Vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -1.$

Giải phương trình này, ta được nghiệm $t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$

Chọn đáp án **(B)** □

—HẾT—

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM CÁC CHỦ ĐỀ

A // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1

1. Đề số 1

1. C	2. B	3. A	4. B	5. D	6. B	7. A	8. D	9. C	10. D
11. C	12. A	13. C	14. B	15. C	16. C	17. D	18. C	19. B	20. B

2. Đề số 2

1. A	2. C	3. A	4. B	5. D	6. B	7. B	8. B	9. C	10. B
11. C	12. D	13. B	14. D	15. B	16. C	17. D	18. D	19. D	20. D

B // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2

1. B	2. B	3. A	4. C	5. B	6. C	7. D	8. B	9. C	10. C
11. C	12. A	13. D	14. C	15. D	16. B	17. B	18. A	19. B	20. C

C // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3

1. D	2. C	3. B	4. B	5. B	6. C	7. A	8. B	9. D	10. A
11. D	12. C	13. D	14. D	15. A	16. A	17. B	18. A	19. A	20. B

D // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 4

1. C	2. D	3. A	4. D	5. B	6. A	7. D	8. D	9. C	10. D
11. D	12. C	13. C	14. A	15. B	16. A	17. A	18. A	19. B	20. B