

A. NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ

① **Nhận dạng đồ thị hàm số bậc ba** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$).

- Hình dáng: (nhận dạng được dấu của a): $N: \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases} \cdot \mathbb{I}: \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.
- Hoành độ điểm uốn là trung điểm của cực đại và cực tiểu (nhận dạng được dấu của b).

$$x = -\frac{b}{3a} \text{ xem dương hay âm (hoặc sử dụng } S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{)}$$

- Nhận dạng dấu của c :

+ Nếu 2 cực trị nằm hai bên trục $Oy \Leftrightarrow ac < 0$.

+ Nếu 2 cực trị nằm cùng bên so $Oy \Leftrightarrow P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$.

- Nhận dạng dấu của hệ số d : Đồ thị $(C) \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = d$ xem dương hay âm.
- Điểm đặc biệt trên đồ thị.

② **Nhận dạng đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương** $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$).

- Hình dáng: (nhận dạng được dấu của a và b):

$$+ M: \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \cdot + W: \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

$$+ U: \begin{cases} ab \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \cdot + \cap: \begin{cases} ab \geq 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

- Tương giao (nhận dạng được dấu của c) Cắt $Oy: x = 0 \Rightarrow y = c$ xem dương hay âm?

Tương giao Ox , có $ax^4 + bx^2 + c = 0$ và đặt $t = x^2 \geq 0$ thì $pt \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$ (*)

Nếu (C) cắt Ox tại 4 điểm thì (*) có 4 nghiệm, tức (*) có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0 \text{ và } S > 0, P > 0.$$

- Điểm đặc biệt trên đồ thị.

③ **Nhận dạng đồ thị hàm số nhất biến** $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

- Tiệm cận:

+ Tiệm cận đứng $cx + d = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{d}{c}$ xem dương hay âm?

+ Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ dương hay âm?

- Đơn điệu: $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$. Xem đồ thị (C) từ trái sang phải:

+ Nếu đi lên $\Rightarrow$ HS đồng biến $\Rightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$.

+ Nếu đi xuống $\Rightarrow$ HS nghịch biến $\Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - bc < 0$.

- Tương giao với hai trục tọa độ:

+ Cắt trục $Ox: y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ xem dương hay âm?

+ cắt trục $Oy: x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$ xem dương hay âm?

- Điểm đặc biệt trên đồ thị.

④ Nhận dạng đồ thị hàm số mũ $y = a^x$.

- Vì $y = a^x > 0$ có tập giá trị $T = (0; +\infty)$ nên đồ thị (C) nằm phía trên Ox và tiệm cận ngang là hoành Ox .

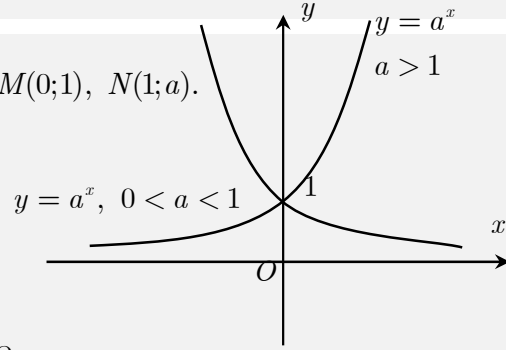
- Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = a \end{cases}$ nên (C) luôn đi qua 2 điểm $M(0;1)$, $N(1;a)$.

- Từ trái sang phải nếu đồ thị (C)

Đi lên $\Rightarrow$ Đồng biến $\Rightarrow a > 1$.

Đi xuống $\Rightarrow$ Nghịch biến $\Rightarrow 0 < a < 1$.

- Đồ thị $y = a^x$ và $y = \frac{1}{a^x}$ đối xứng nhau qua trục Oy .



⑤ Nhận dạng đồ thị hàm số lôgarit $y = \log_a x$.

- Vì điều kiện $x > 0$ và tập giá trị là $T = \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số lôga luôn nằm bên phải trục Oy và tiệm cận đứng là Oy .

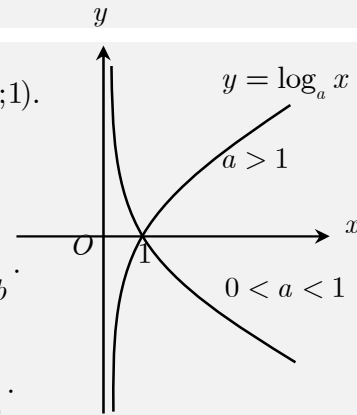
- Khi $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = a \Rightarrow y = 1 \end{cases}$ nên (C) luôn qua 2 điểm $M(1;0)$, $N(a;1)$.

- Từ trái sang phải nếu đồ thị (C)

Đi lên $\Rightarrow$ ĐB $\Rightarrow a > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a < b \\ 0 < x < 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a > b \end{cases}$.

Đi xuống $\Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a > b \\ 0 < x < 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a < b \end{cases}$.

- Đối xứng: Đồ thị $y = \log_a x$ và $y = a^x$ đối xứng qua $d : y = x$.

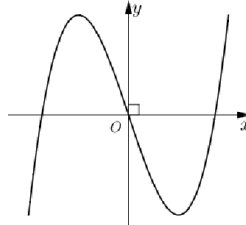


CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong dưới đây?

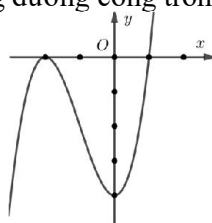
- A.** $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2$. **C.** $y = x^3 - 3x^2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2$.

Câu 2. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



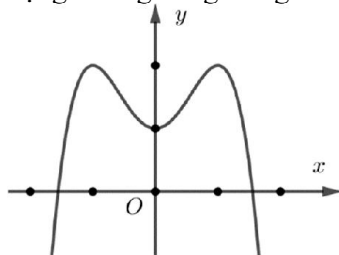
- A.** $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = x^4 - 2x^2$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 3. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ bên?



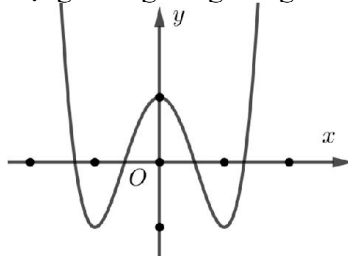
- A.** $y = x^3 + 3x^2 - 4$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 4$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 - 4$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ bên?



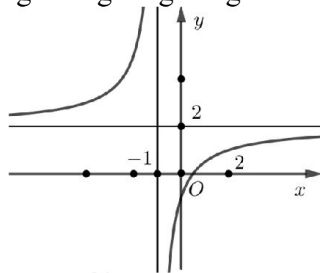
- A.** $y = x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 5. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ bên?



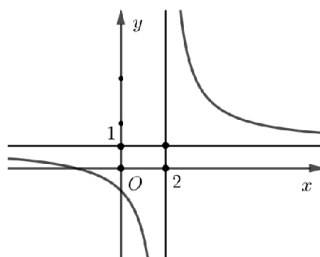
- A.** $y = x^3 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$. **C.** $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. **D.** $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ bên?



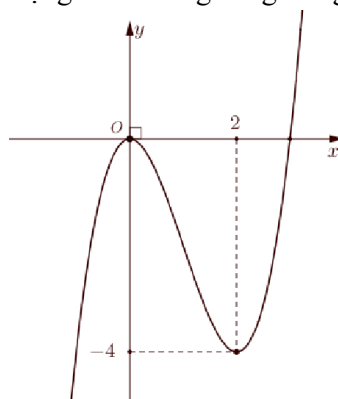
- A.** $y = \frac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y = x^3 - 3x - 1$. **C.** $y = x^4 + 2x^2 - 1$. **D.** $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ dưới đây?



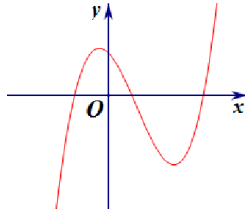
- A.** $y = \frac{-x+1}{x-2}$. **B.** $y = \frac{x+2}{x-2}$. **C.** $y = \frac{-x+2}{x+2}$. **D.** $y = \frac{x-2}{x+2}$.

Câu 8. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



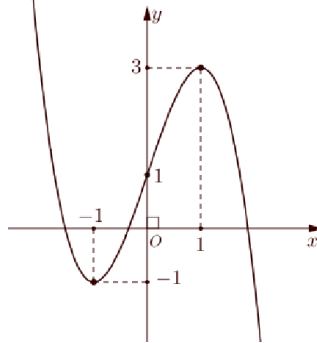
- A.** $y = x^3 - 3x^2$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2$. **C.** $y = x^4 - 2x^2$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 9. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



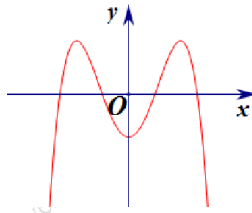
- A. $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$. B. $y = x^4 + x + 1$. C. $y = -2x^3 + x + 1$. D. $y = x^3 + 2x^2 - 1$.

Câu 10. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



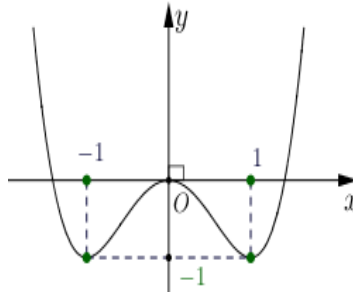
- A. $y = x^3 - 3x + 1$. B. $y = -x^3 + 3x + 1$. C. $y = x^2 - 2x + 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 11. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



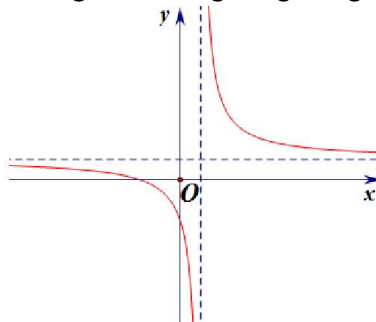
- A. $y = -x^2 + 2x - 1$. B. $y = -x^4 + 3x - 1$. C. $y = x^4 + x - 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 12. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



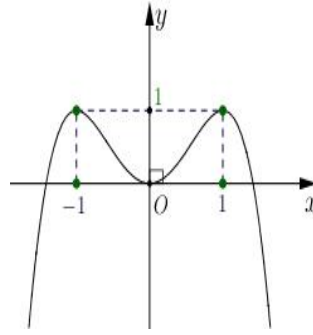
- A. $y = x^4 - 2x^2$. B. $y = -x^3 + 3x^2$. C. $y = -x^4 + 2x^2$. D. $y = -x^3 + 3x$.

Câu 13. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



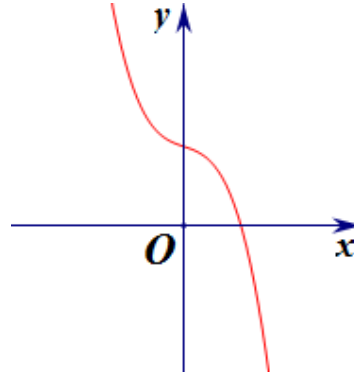
- A. $y = \frac{x-2}{x+1}$. B. $y = \frac{x-2}{x-1}$. C. $y = \frac{x+2}{x-1}$. D. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

Câu 14. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



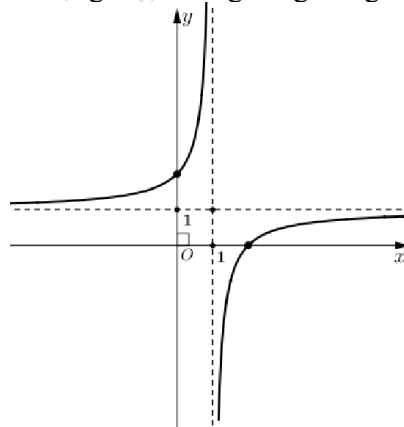
- A. $y = x^4 - 2x^2$. B. $y = -x^3 + 3x$. C. $y = x^2 - 2x$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 15. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



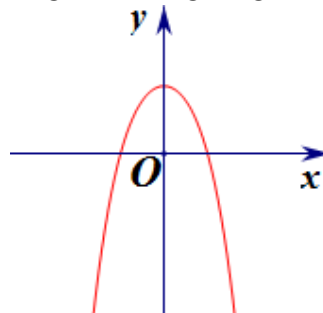
- A. $y = -x^3 + 3x + 1$. B. $y = -2x^3 - \frac{1}{3}x + 1$. C. $y = x^3 - x^2 + 1$. D. $y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Câu 16. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



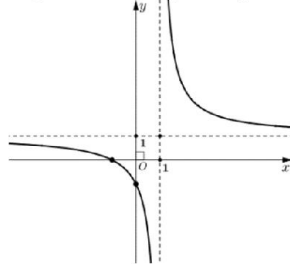
- A. $y = \frac{x-2}{x-1}$. B. $y = \frac{x-2}{x+1}$. C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$. D. $y = -x^3 + 3x + 2$.

Câu 17. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



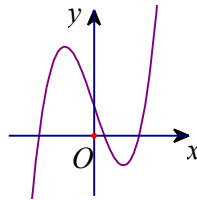
- A. $y = -2x^2 - 1$. B. $y = x^4 + 3x + 1$. C. $y = -x^4 + 3x^2 + 1$. D. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 18. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



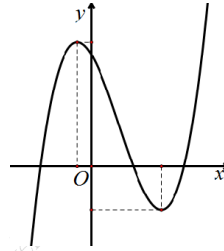
- A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$. B. $y = \frac{x+1}{x-2}$. C. $y = 3x^2 + 2x - 1$. D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Câu 19. Đồ thị nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



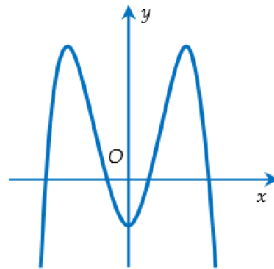
- A. $y = x^3 - 3x + 1$. B. $y = -x^3 + 3x + 1$. C. $x^4 + 2x^2 + 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 20. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d ?



- A. $a > 0, b > 0, d > 0, c > 0$ B. $a > 0, c > 0 > b, d < 0$
C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

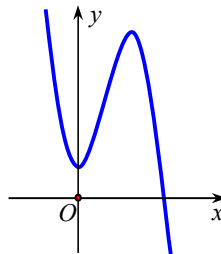
Câu 21. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0$. B. $a < 0, b < 0, c > 0$. C. $a < 0, b > 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

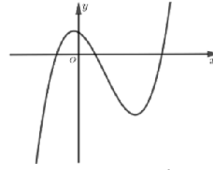
Câu 22. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$
C. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$ D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

Câu 23. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?



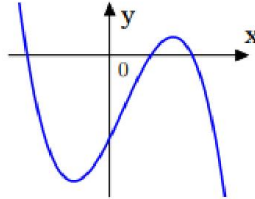
A. $ab < 0, bc > 0, cd < 0$

B. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$

C. $ab > 0, bc > 0, cd < 0$

D. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$

Câu 24. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



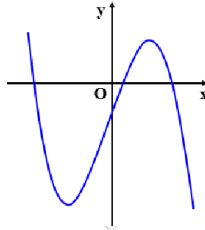
A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$

B. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

Câu 25. Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, d > 0$.

B. $a < 0, d > 0$.

C. $a > 0, d < 0$.

D. $a < 0, d < 0$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1
		$-\infty$	

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	2	$+\infty$	2
		$-\infty$	

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

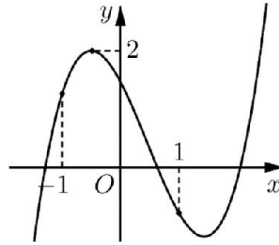
Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+3}{2x-b}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-		-	
y	2		$+\infty$		2

Giá trị $a-2b$ bằng?

- A. 8 B. -6 C. 0 D. 10

Câu 29. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$. B. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. D. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

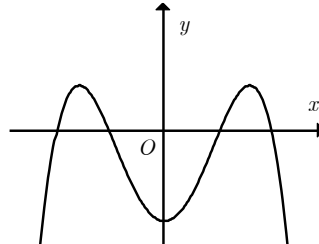
Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+3}{bx+c}$ ($b \in \mathbb{Z}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
$f(x)$	-2		$+\infty$		-2

Tính tổng $S = a + b + c$.

- A. -2. B. 2. C. 0. D. -1.

Câu 31. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. $a < 0, b > 0, c > 0$. B. $a < 0, b > 0, c < 0$. C. $a < 0, b < 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

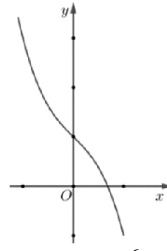
Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-b}{cx+b+1}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	1		$+\infty$		1

Biết tập hợp tất cả các giá trị b thỏa mãn là khoảng $(m; n)$. Tính tổng $S = m + 2n$.

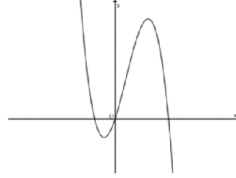
- A. $S = \frac{5}{2}$. B. $S = -\frac{3}{2}$. C. $S = -\frac{5}{2}$. D. $S = -2$.

Câu 33. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



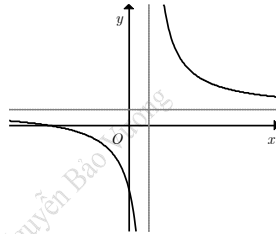
- A. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Câu 34. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



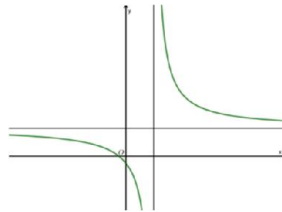
- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d = 0$. B. $a < 0, b < 0, c > 0, d = 0$.
C. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$. D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Câu 35. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



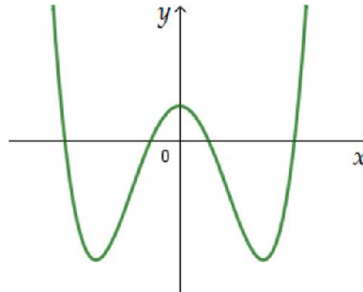
- A. $b > 0, c > 0, d < 0$. B. $b > 0, c < 0, d < 0$. C. $b < 0, c < 0, d < 0$. D. $b < 0, c > 0, d < 0$.

Câu 36. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $ab > 0, ad < 0$. B. $ab < 0, ad > 0$. C. $bd > 0, ad < 0$. D. $ab > 0, ad > 0$.

Câu 37. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = x^4 + mx^2 + n$, với $m, n \in \mathbb{R}$. Biết phương trình $x^4 + mx^2 + n = 0$ có k nghiệm thực phân biệt, $k \in \mathbb{N}^*$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $k = 4$ và $mn > 0$. B. $k = 4$ và $mn < 0$. C. $k = 2$ và $mn < 0$. D. $k = 2$ và $mn > 0$.

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		—		—	
y		2	$-\infty$	$+\infty$	2

Trong các số a , b và c có bao nhiêu số âm?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

B. TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

Cho hai đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Tọa độ giao điểm (nếu có) của (C) và

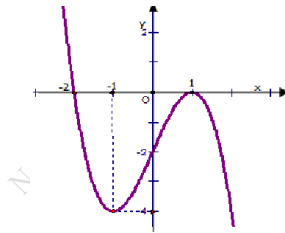
$$(C') \text{ là nghiệm của hệ phương trình: } \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (*)$$

— Phương trình $(*)$ được gọi là phương trình hoành độ điểm chung của (C) và (C') .

— Số nghiệm của $(*)$ chính là số điểm chung của hai đồ thị.

— Nếu $(*)$ vô nghiệm thì hai đồ thị không có điểm chung.

Câu 1. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) = -4$ là



A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			1		0	

Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

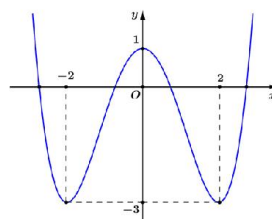
A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Câu 3. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ là



A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

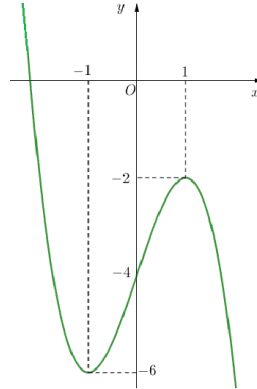
Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			0		0			
	$-\infty$			-1			$-\infty$	

Số nghiệm của phương trình $4f(x) + 3 = 0$ là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 4.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f^2(x) = 4$ có số nghiệm là



- A. 0. B. 3. C. 4. D. 2.

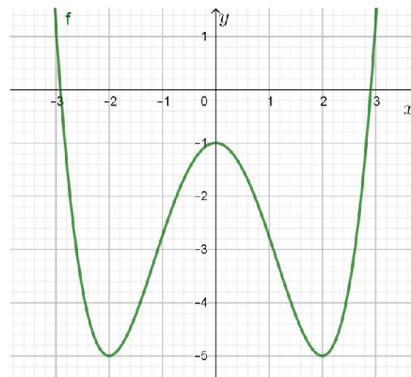
Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{3}{2}$		$-\infty$
			-5			

Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 7f(x) + 5 = 0$ là

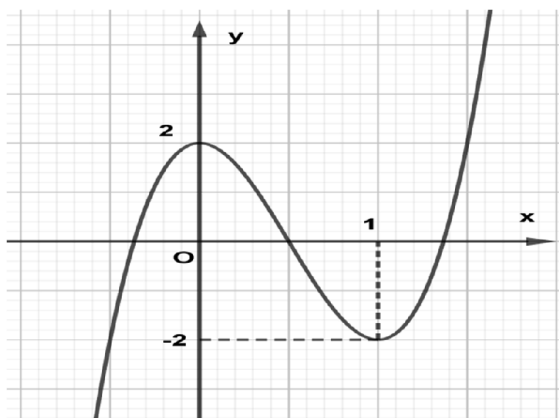
- A. 6. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 7. Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = -5$ là



- A. 0. B. 3. C. 4. D. 2.

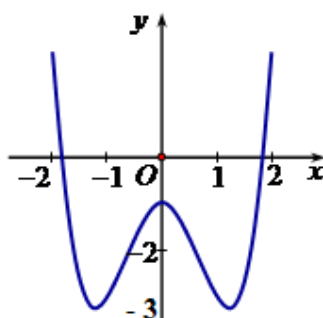
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm thực của phương trình $6f(x) + 5 = 0$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 1 = 0$ là



- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-4		-3		-4		$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 10 = 0$ là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		1		-2		$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là:

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

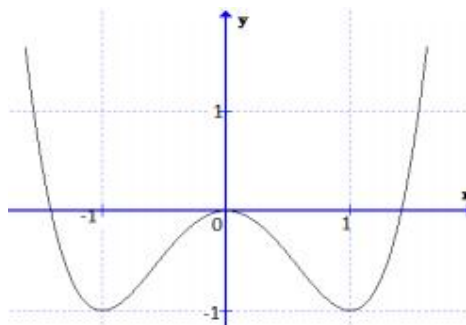
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	-3	2	$-\infty$	$+\infty$	-4	3

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là:

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau:



Số nghiệm của phương trình $\frac{1-f(x)}{1+f(x)} = 2$ là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ và trục hoành là

- A. 0. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 15. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 + 4$ và trục hoành là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 16. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 17. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ và trục hoành là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 18. Đồ thị của hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu

- A. -3. B. 0. C. 1. D. -1.

Câu 19. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ là

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 20. đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = -2x^2 + 7$ có bao nhiêu điểm chung?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 21. Cho hàm số $y = -2x^3 + 5x$ có đồ thị (C) Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 22. Cho hàm số $y = (x-3)(x^2+2)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

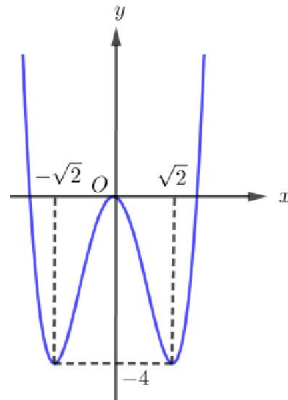
- A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.
C. (C) không cắt trục hoành. D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Câu 23. Biết rằng đường thẳng $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = 1$. B. $y_0 = 3$. C. $y_0 = -2$. D. $y_0 = 4$.

Câu 24. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$
A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

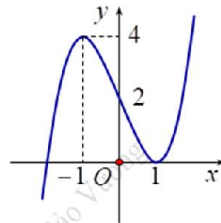
Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm của phương trình $f(1-x) + 3 = 0$ là

A. 4. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Phương trình $|f(x-2) - 2| = \pi$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	0	-1	$-\frac{2}{3}$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{3}\right]$ của phương trình $3f(\cos x) + 1 = 0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	$2 + \infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					
	$-\infty$	1	0	2	$+\infty$

Số nghiệm nhiều nhất thuộc $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin^2 x + 1) = 1$ là của phương trình

$f(\sin^2 x + 1) = 1$ là

- A. 2. B. 5. C. 10. D. 9.

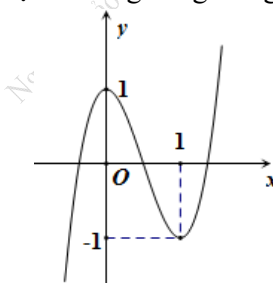
Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	0	2	$+\infty$		

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

- A. 7. B. 4. C. 5. D. 6.

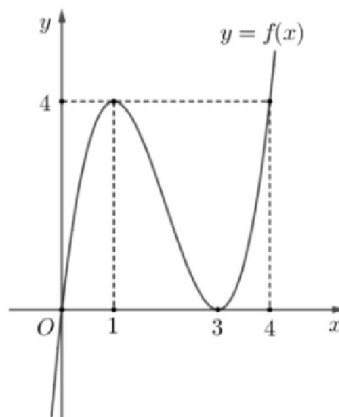
Câu 31. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây.



Khi đó phương trình $4(4x^3 - 6x^2 + 1)^3 - 6(4x^3 - 6x^2 + 1)^2 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực.

- A. 9. B. 6. C. 7. D. 3.

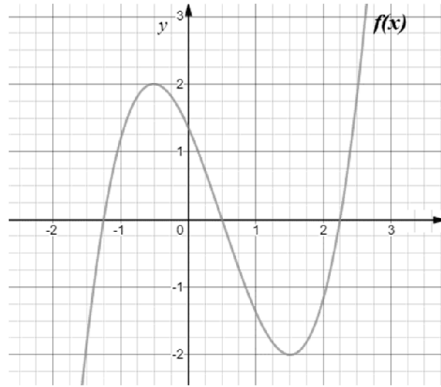
Câu 32. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Phương trình $f(f(f(f(x)))) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 12. B. 40. C. 41. D. 16.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $|f(|f(x)|)| - |f(x)| = 0$ là

- A. 20. B. 24. C. 10. D. 4.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	2	-1	2	$-\infty$

Số nghiệm thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $|f(\cos 2x)| = 1$ là

- A. 9. B. 4. C. 7. D. 10.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Phương trình $2f(\cos(x)) + e = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0; 3\pi]$.

- A. 6. B. 3. C. 0. D. 4.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f^2(\tan x) - 3 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ là

- A. 10. B. 15. C. 18. D. 24.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	2	$-\infty$

Số nghiệm thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $|f(\cos 2x)| = 1$ là

- A. 9. B. 4. C. 7. D. 10.

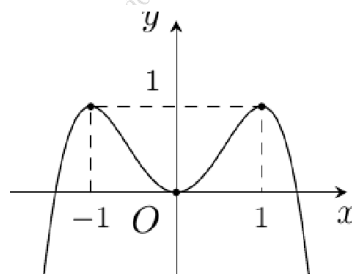
Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 2$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 6.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

- A. 5. B. 10. C. 4. D. 7.

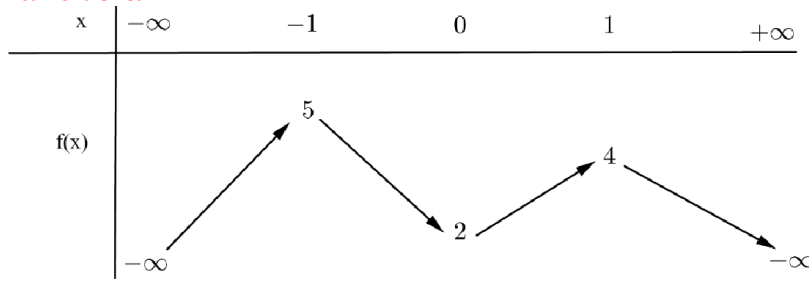
Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			0		-2		0	

Số nghiệm phương trình $f(\cos x) = -1$ thuộc đoạn $\left[\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ là:

- A. 2. B. 6. C. 7. D. 4.

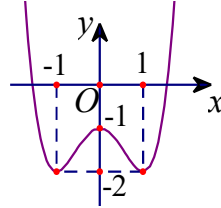
Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm của phương trình $f(x^4 - 2x^2) - 3 = 0$ là

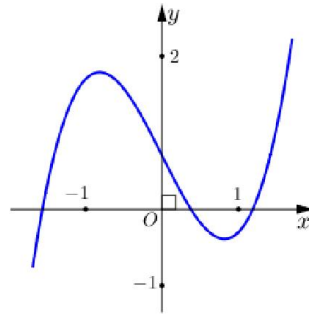
- A. 12. B. 8. C. 3. D. 4.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Phương trình $|f(x+1)| = \frac{3}{2}$ có bao nhiêu nghiệm âm phân biệt?



- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 43. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(-x^2 + 2x)| = 1$ là



- A. 6. B. 4. C. 3. D. 7.

C. BIỆN LUẬN NGHIỆM THÔNG QUA ĐỒ THỊ

- Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x) = A(m)$.
- Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng nằm ngang $y = A(m)$.

Lưu ý: Có thể đề bài cho bảng biến thiên và cần nắm vững biến đổi đồ thị hàm trị tuyệt đối.

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

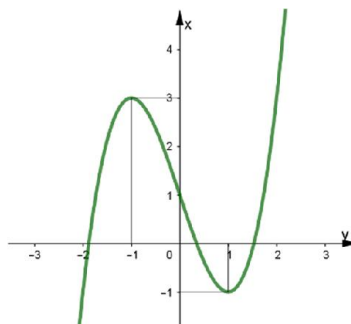
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
y'		$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	3	$-\infty$	5	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) + 4 = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

- A. $(1; 9)$. B. $[1; 9)$. C. $(1; 9]$. D. $(-3; 5)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $f(x) = \log_3 m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt?



- A. 3. B. 25. C. 26. D. 27.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

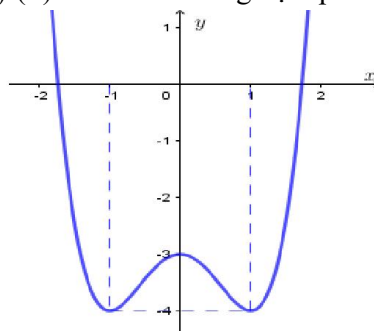
x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$	
y'		+		-	0	+
y				$+\infty$		$+\infty$

Diagram showing the behavior of the function $y = f(x)$ near the vertical asymptote $x = -1$. As $x \rightarrow -1^-$, $y \rightarrow 2$. As $x \rightarrow -1^+$, $y \rightarrow -4$. The function is increasing on $(-\infty, -2)$ and $(3, +\infty)$, and decreasing on $(-2, 3)$.

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa: $x_1 \leq -2 < x_2 < 3 < x_3$.

- A. $(-4; 1)$. B. $[1; 2)$. C. $(-4; 1]$. D. $(1; 2)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt:



- A. $-4 < m < -3$. B. $m > -3$. C. $-3 < m < -2$. D. $-5 < m < -4$.

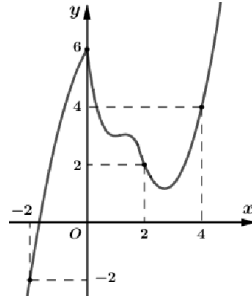
Câu 5. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$			3		0	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

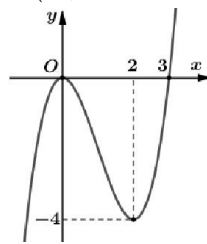
- A. $m = 3$. B. $0 \leq m \leq 3$. C. $0 < m < 3$. D. $m > 0$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2\log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$.



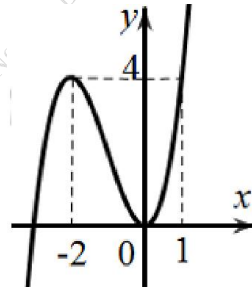
- A. 9. B. 6. C. 5. D. 4

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1) = m$ có nghiệm.



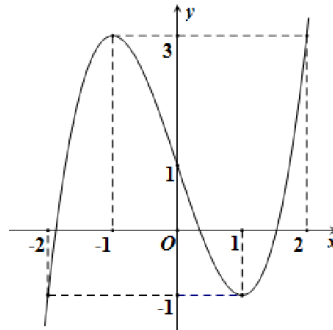
- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $[0; 1]$.



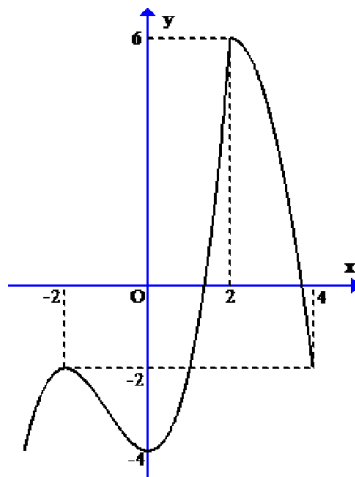
- A. $[0; 4]$. B. $[-1; 0]$. C. $[0; 1]$. D. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(3 - \sqrt{4 - x^2}) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$. Tìm tập S .



- A. $S = (-1; f(3 - \sqrt{2})]$. B. $S = (f(3 - \sqrt{2}); 3]$. C. $S = \emptyset$. D. $S = [-1; 3]$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$?

A. 11.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	3	-2	5	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f(\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x) = m$ (1) có đúng sáu nghiệm phân biệt trên nửa khoảng $\left(0; \frac{17\pi}{12}\right]$?

?

A. 4.

B. 5.

C. 8.

D. 2.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	0 -	
$f(x)$	$+\infty$	-3	10	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2020]$ để phương trình $\left|f(e^{x^2} + 4)\right| = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

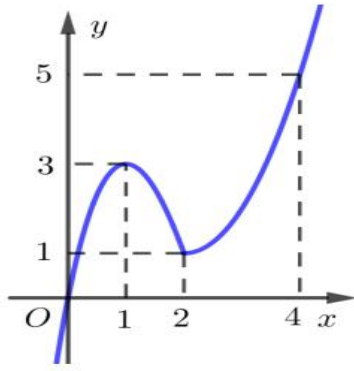
A. 2010.

B. 10.

C. 2011.

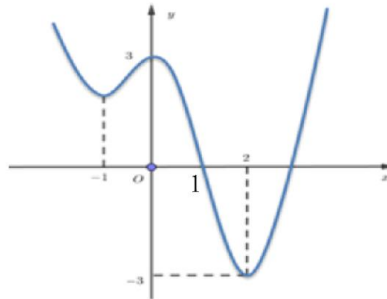
D. 2020.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\frac{6x^2}{x^4 + x^2 + 1}\right) + 1 = m$ có nghiệm?



- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 2)$.



- A. $(-3; 0)$. B. $(-3; 3)$. C. $(0; 3)$. D. $[-3; 0]$

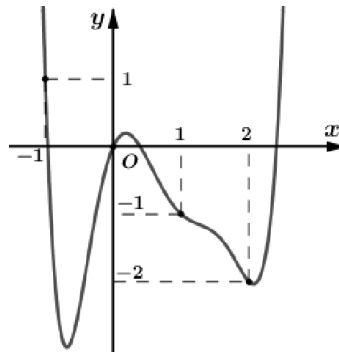
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	10	$-\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Bất phương trình $e^{\sqrt{x}} \geq m - f(x)$ có nghiệm thuộc $[4; 9]$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(2) + e^2$. B. $m \leq f(2) + e^2$. C. $m \geq f(9) + e^3$. D. $m \leq f(9) + e^3$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới

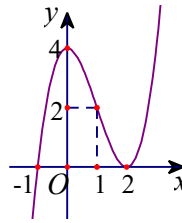


Tìm m để bất phương trình $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

- A. $m \geq 2f(0) - 1$. B. $m \leq 2f(0) - 1$. C. $m \leq 2f(-1)$. D. $m \geq 2f(-1)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Bất phương trình

$$f(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x + m \text{ có nghiệm } x \in [-1; +\infty) \text{ khi và chỉ khi}$$



- A. $m \geq f(-1) - \frac{1}{2}$. B. $m \leq f(-1) - 2$. C. $m \geq f(-1) - 2$. D. $m \geq f(-1) + 2$.

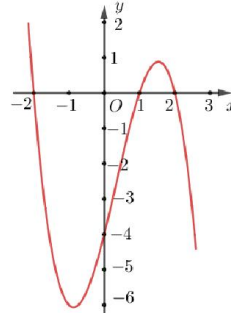
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	1	$+\infty$

Bất phương trình $2f(x) < e^{\cos x} + m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1$. B. $m > 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1$. C. $m \geq 2f(0) - e$. D. $m > 2f(0) - e$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Bất phương trình $f(x) + x^2 > m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 0)$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq f(0)$. B. $m < f(0)$. C. $m < f(-1) + 1$. D. $m \leq f(-1) + 1$.

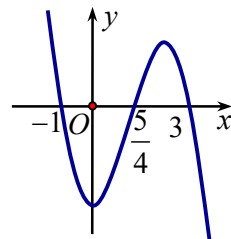
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Bất phương trình $f(x) + e^x - 2m > 0$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (2; 3)$ khi và chỉ khi

- A. $m < \frac{1}{2}[f(2) + e^2]$. B. $m \leq \frac{1}{2}[f(2) + e^2]$. C. $m \geq \frac{1}{2}[f(3) + e^3]$. D. $m < \frac{1}{2}[f(3) + e^3]$.

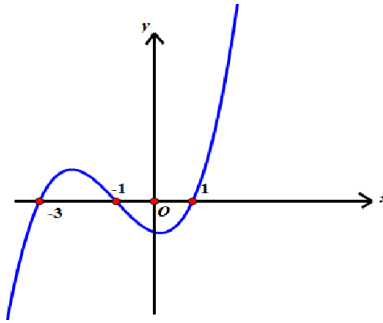
Câu 21. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq r$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

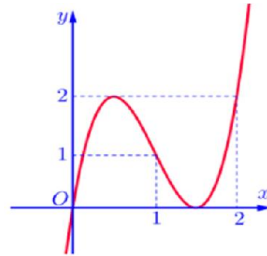
Câu 22. Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = m + n + p + q + r$ có số phần tử là

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

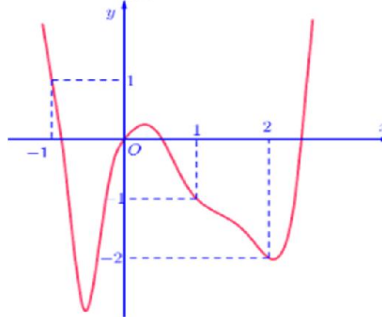
Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm m để bất phương trình $f(2 \sin x) - 2 \sin^2 x < m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; \pi)$.

- A. $m > f(1) - \frac{1}{2}$. B. $m \geq f(1) - \frac{1}{2}$. C. $m \geq f(0) - \frac{1}{2}$. D. $m > f(0) - \frac{1}{2}$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm m để bất phương trình $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

- A. $m \geq 2f(0) + 1$. B. $m \leq 2f(0) - 1$. C. $m \leq 2f(-1)$. D. $m \geq 2f(-1)$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(-2) = m + 1, f(1) = m - 2$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

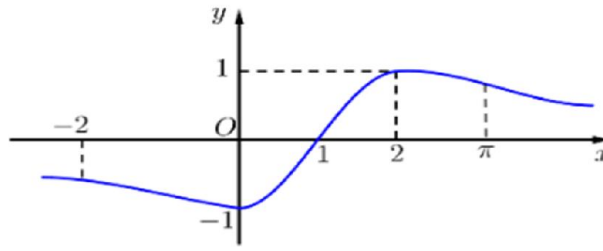
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	-2	$+\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3} \leq m$ có nghiệm

$x \in [-2; 1]$ là:

- A. $\left(-5; -\frac{7}{2}\right)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-2; 7)$. D. $\left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$ khi và chỉ khi:

- A. $m < f(0)$. B. $m < f(1) - 1$. C. $m < f(-1) + 1$. D. $m < f(2)$.

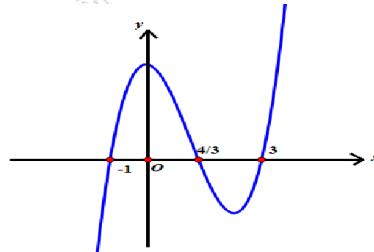
Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây:

x	-1	1	3
$f'(x)$	1	3	2

Tìm m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

- A. $m < f(0)$. B. $m \leq f(0)$. C. $m \leq f(3)$. D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

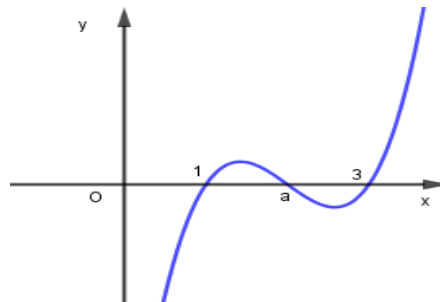
Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

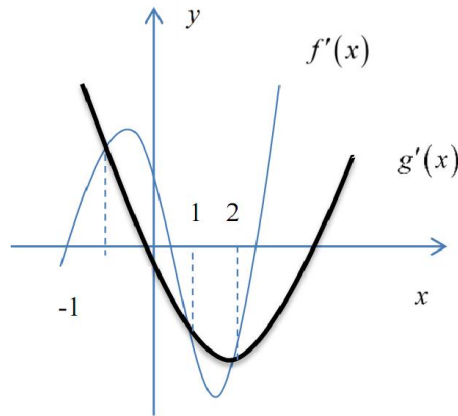
Câu 29. Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$) và $1 < a < 3$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập hợp các giá trị của a để phương trình $f(x) + 3mx - r = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là một khoảng $(b; c)$. Tính $b + c$.

- A. 4. B. 3. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(m, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R})$ và $f(0) = g(0)$. Hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có số phần tử là?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

D. MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO THƯỜNG GẶP

BÀI TOÁN 1. BIỆN LUẬN TƯƠNG GIAO HÀM BẬC BA VỚI ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán tổng quát: Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K ? (dạng có điều kiện)

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$

Đưa về phương trình bậc ba và nhẩm nghiệm đặc biệt $x = x_0$ để chia Hoocner được:

$$(x - x_0) \cdot (ax^2 + b'x + c') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases}$. Giải hệ này, tìm được giá trị $m \in D_1$.

Bước 3. Gọi $A(x_0; px_0 + q)$, $B(x_1; px_1 + q)$, $C(x_2; px_2 + q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b'}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c'}{a}$ (1)

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của x_1, x_2 (2)

Thế (1) vào (2) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m . Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

Một số công thức tính nhanh “thường gặp” liên quan đến cấp số

Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = -\frac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\frac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

À Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$

Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

- Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) cắt đường thẳng $d: y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 .
- A. $m > -2$. B. $m = -2$. C. $m > -3$. D. $m = -3$.
- Câu 2.** Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?
- A. $x_B + y_B = -5$ B. $x_B + y_B = -2$ C. $x_B + y_B = 4$ D. $x_B + y_B = 7$
- Câu 3.** Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là **đúng** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?
- A. $m_1 + m_2 = 0$. B. $m_1^2 + 2m_2 > 4$. C. $m_2^2 + 2m_1 > 4$. D. $m_1 - m_2 = 0$.
- Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.
- A. $m \in (-\infty; -4)$. B. $m \in (-4; 0)$. C. $m \in (0; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.
- Câu 5.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$
- A. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$ B. $m \in (-2; +\infty)$ C. $m \in \mathbb{R}$ D. $m \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$
- Câu 6.** Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + (m^2 - 2)x + 2m^2 + 4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là
- A. $m = \pm 2$. B. $m = \pm 1$. C. $m = \pm\sqrt{3}$. D. $m = \pm\sqrt{2}$.

- Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.
- A. $m \in (-\infty; -1)$ B. $m \in (-\infty; +\infty)$ C. $m \in (1; +\infty)$ D. $m \in (-\infty; 3)$
- Câu 8.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có ba nghiệm phân biệt.
- A. $m \in (2; +\infty]$. B. $m \in (-\infty; -2]$. C. $m \in (-2; 2)$. D. $m \in [-2; 2]$.
- Câu 9.** Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?
- A. $x_B + y_B = -5$ B. $x_B + y_B = -2$ C. $x_B + y_B = 4$ D. $x_B + y_B = 7$

BÀI TOÁN 2. TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ NHẤT BIẾN (CHỨA THAM SỐ)

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) . Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = \alpha x + \beta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn điều kiện K?

Phương pháp giải

□ **Bước 1.** (Bước này giống nhau ở các bài toán tương giao của hàm nhất biến)

Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C) : $\frac{ax+b}{cx+d} = \alpha x + \beta$

$$\Leftrightarrow g(x) = \alpha cx^2 + (\beta c + \alpha d - a)x + \beta d - b = 0, \forall x \neq -\frac{d}{c}.$$

- Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có nghiệm nghiệm phân biệt

$$\neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} c\alpha \neq 0; \Delta > 0 \\ g\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0 \end{cases}. \text{ Giải hệ này, ta sẽ tìm được } m \in D_1 \text{ (i)}$$

- Gọi $A(x_1; \alpha x_1 + \beta), B(x_2; \alpha x_2 + \beta)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $g(x) = 0$ Theo Viét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta c + \alpha d - a}{c\alpha}; P = x_1 x_2 = \frac{\beta d - b}{\alpha c} \text{ (ii)}$$

□ **Bước 2.**

- Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của x_1, x_2 (iii)

- Thế (ii) vào (iii) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m . Giải nó sẽ tìm được $m \in D_2$ (*)

- Từ (i), (*) $\Rightarrow m \in (D_1 \cap D_2)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Một số công thức tính nhanh “thường gặp” liên quan đến tương giao giữa đường thẳng

$$y = kx + p \text{ và đồ thị hàm số } y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Giả sử $d: y = kx + p$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tại 2 điểm phân biệt M, N .

Với $kx + p = \frac{ax+b}{cx+d}$ cho ta phương trình có dạng: $Ax^2 + Bx + C = 0$ thỏa điều kiện $cx + d \neq 0$, có

$\Delta = B^2 - 4AC$. Khi đó:

$$1). M(x_1; kx_1 + p), N(x_2; kx_2 + p) \Rightarrow \overline{MN} = (x_2 - x_1; k(x_2 - x_1)) \Rightarrow MN = \sqrt{(k^2 + 1)} \frac{\Delta}{A^2}$$

Chú ý: khi $\min MN$ thì tồn tại $\min \Delta, k = \text{const}$

$$2). OM^2 + ON^2 = (k^2 + 1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)2kp + 2p^2$$

$$3). \overline{OM} \cdot \overline{ON} = (x_1 \cdot x_2)(1 + k^2) + (x_1 + x_2)kp + p^2$$

$$4). OM = ON \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(1 + k^2) + 2kp = 0$$

Câu 10. Đường thẳng $y = x + 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $-3 < m < 1$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

- A. $m \in (-\infty; +\infty)$. B. $m \in (-1; +\infty)$. C. $m \in (-2; 4)$. D. $m \in (-\infty; -2)$.

Câu 12. A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

- A. $4\sqrt{2}$. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 4. B. 3. C. 0. D. 8.

Câu 14. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$ (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

- A. $m > -1$. B. $-5 < m < -1$. C. $m < -5$. D. $m < -5$ hoặc $m > -1$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc tọa độ). Giá trị của m bằng

- A. 6. B. 3. C. -9. D. 5.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m \neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

- A. $-\frac{4}{9}$. B. -4. C. -1. D. 0.

BÀI TOÁN 3. TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG (CHỨA THAM SỐ)

Bài toán tổng quát: Tìm m để đường thẳng $d: y = \alpha$ cắt đồ thị $(C): y = f(x; m) = ax^4 + bx^2 + c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước?

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4 + bx^2 + c - \alpha = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow at^2 + bt + c - \alpha = 0$ (2)

Tùy vào số giao điểm n mà ta biện luận để tìm giá trị $m \in D_1$. Cụ thể:

• Để $d \cap (C) = n = 4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa điều kiện: $0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$

• Để $d \cap (C) = n = 3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa điều kiện: $0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$

• Để $d \cap (C) = n = 2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương $\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow m \in D_1 \\ S > 0 \end{cases}$

• Để $d \cap (C) = n = 1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép $= 0$ hoặc $\begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ c - \alpha = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$

Bước 2. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của t_1, t_2 (3)

Thế biểu thức tổng, tích vào (3) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m . Giải chúng ta sẽ tìm được $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

À Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Ta có: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1), đặt $t = x^2 \geq 0$, thì có: $at^2 + bt + c = 0$ (2)

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương, tức là: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases}$

Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt lần lượt là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ

khi: $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$. Theo định lý Vi - et $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a}$ suy ra

$t_1 = -\frac{b}{10a}; t_2 = -\frac{9b}{10a}$, kết hợp $t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a}$ nên có: $9ab^2 = 100a^2c$

Tóm lại: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp

$$\text{số cộng, thì điều kiện cần và đủ là: } \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ 9ab^2 = 100a^2c \end{cases}$$

Câu 17. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + (2m-1) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

- A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$. B. $(1; +\infty)$. C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O , trong đó O là gốc tọa độ.

- A. $m = 2$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Câu 19. Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là $0, 1, m, n$. Tính $S = m^2 + n^2$.

- A. $S = 1$. B. $S = 0$. C. $S = 3$. D. $S = 2$.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + (m-2)x^2 + 8x + 4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

- A. 8. B. 7. C. 5. D. 3.

BÀI TOÁN 4. BIỆN LUẬN m ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN K (HÀM SỐ KHÁC)

Câu 21. Cho hai hàm số $y = \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15; 20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.

- A. 210. B. 85. C. 119. D. 105.

Câu 22. Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1}$ và $y = e^x + 2020 + 3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019; 2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

- A. 2692. B. 2691. C. 2690. D. 2693.

Câu 23. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y = (2x^2 + 1)\sqrt{x-1}$ và $y = \frac{11}{3x-4} - \frac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $(-\infty; 2]$.

Câu 24. Cho hai hàm số $y = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ và $y = 2^{1-x} + 2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt là

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2]$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(-\infty; 4)$.

- Câu 25.** Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y = x - |x+1| + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20; 20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là
A. 22. **B.** 39. **C.** 21. **D.** 20.
- Câu 26.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là
A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.
- Câu 27.** Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$
A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.
- Câu 28.** Trong số các cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng
A. $-\frac{1}{4}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.
- Câu 29.** Cho 2 hàm số $y = x^7 + x^5 + x^3 + 3m - 1$ và $y = |x-2| - x - 2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là
A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \in (2; +\infty)$. **C.** $m \in (-\infty; 2)$. **D.** $m \in [2; +\infty)$.
- Câu 30.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}(2\sqrt{3+x}-m) + \sqrt{1-x}(5\sqrt{1-x}+2m) = 4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?
A. 2019. **B.** 4032. **C.** 4039. **D.** 4033.

E. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

I- Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp

① Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước

- ☐ Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $y' \Rightarrow y'(x_0)$.
- ☐ Do phương trình tiếp tuyến Δ có hệ số góc $k \Rightarrow y'(x_0) = k$ (i)
- ☐ Giải (i) tìm được $x_0 \longrightarrow y_0 = f(x_0) \longrightarrow \Delta: y = k(x - x_0) + y_0$.
- Lưu ý.** Hệ số góc $k = y'(x_0)$ của tiếp tuyến Δ thường cho gián tiếp như sau:
 - ☐ Phương trình tiếp tuyến $\Delta // d: y = ax + b \Rightarrow k = a$.
 - ☐ Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y = ax + b \Rightarrow k = -\frac{1}{a}$.
 - ☐ Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k| = \tan \alpha$.
 - ☐ Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với $d: y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left| \frac{k-a}{1+k.a} \right| = \tan \alpha$

② Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua (kể từ) điểm $A(x_A; y_A)$

- ☐ Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $y_0 = f(x_0)$ và $k = y'(x_0)$ theo x_0 .
- ☐ Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_0; y_0)$ là $\Delta: y = k(x - x_0) + y_0$.
- ☐ Do $A(x_A; y_A) \in \Delta \Rightarrow y_A = k(x_A - x_0) + y_0$ (i)
- ☐ Giải phương trình (i) $\longrightarrow x_0 \longrightarrow y_0$ và $k \longrightarrow$ phương trình Δ .

③ Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước

- Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_o)$ theo x_o .
- Đề cho $\begin{cases} \Delta OAB \\ S_{\Delta OAB} = S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \text{vuông cân} \\ (ii) OA.OB = 2S \end{cases} \Leftrightarrow \Delta$ tạo với Ox một góc 45° và $O \notin \Delta$
- Giải (i) hoặc (ii) $\longrightarrow x_o \longrightarrow y_o; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ .
- ④ Tìm những điểm trên đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ mà từ đó vẽ được 1, 2, 3, ..., n tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$**
- Gọi $M(x_M; y_M) \in d: ax + by + c = 0$ (sao cho có một biến x_M trong M)
- PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.
- Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$
- Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x) = f'(x) \cdot (x - x_M) + y_M$ (iii)
- Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = số nghiệm x của (iii).
- ⑤ Tìm những điểm $M(x_M; y_M)$ mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau**
- PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.
- Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$
- Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x) = f'(x) \cdot (x - x_M) + y_M$ (iii)
- Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ (iii) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2) = -1$.
- Lưu ý.**
- Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì
- $\begin{cases} (iii): & \text{có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2. \\ f(x_1).f(x_2) < 0. \end{cases}$
- Đối với bài toán tìm điểm $M \in (C): y = f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng d cho trước, ta chỉ cần gọi $M(x_o; y_o)$ và Δ là tiếp tuyến với $k = f'(x_o)$. Rồi áp dụng $k = f'(x_o) = k_d$ nếu cho song song và $f'(x_o).k_d = -1$ nếu cho vuông góc $\Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow M(x_o; y_o)$.

- Câu 1.** Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_o = 1$ là
A. $y = 9x + 7$. **B.** $y = -9x - 7$. **C.** $y = -9x + 7$. **D.** $y = 9x - 7$.
- Câu 2.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là
A. $y = 3x + 8$. **B.** $y = -3x + 2$. **C.** $y = -3x + 8$. **D.** $y = 3x + 2$.
- Câu 3.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -3 cắt các đường tiệm cận của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng
A. $4 + 2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 4.

- Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$.
A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2
- Câu 5.** Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tổng tất cả các giá trị các phân tử của S là
A. 1 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$
- Câu 6.** Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ khác A thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$
A. 0 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2
- Câu 7.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?
A. 0 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2
- Câu 8.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ cắt hai đường tiệm cận của (C) tại A và B . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) . Diện tích tam giác IAB bằng:
A. $4(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2}{2}$.
- Câu 9.** Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận của (C) . Biết rằng tồn tại hai điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với đường tiệm cận của một tam giác có chu vi nhỏ nhất. Tổng hoành độ của hai điểm M là:
A. 4. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

----- HẾT -----

A. NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ

① **Nhận dạng đồ thị hàm số bậc ba** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$).

- Hình dáng: (nhận dạng được dấu của a): $N: \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$ · $M: \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.
- Hoành độ điểm uốn là trung điểm của cực đại và cực tiểu (nhận dạng được dấu của b).
 $x = -\frac{b}{3a}$ xem dương hay âm (hoặc sử dụng $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$).
- Nhận dạng dấu của c :
 + Nếu 2 cực trị nằm hai bên trục $Oy \Leftrightarrow ac < 0$.
 + Nếu 2 cực trị nằm cùng bên so $Oy \Leftrightarrow P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$.
- Nhận dạng dấu của hệ số d : Đồ thị $(C) \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = d$ xem dương hay âm.
- Điểm đặc biệt trên đồ thị.

② **Nhận dạng đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương** $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$).

- Hình dáng: (nhận dạng được dấu của a và b):
 + $M: \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$ · $W: \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
 + $U: \begin{cases} ab \geq 0 \\ a > 0 \end{cases}$ · $\cap: \begin{cases} ab \geq 0 \\ a < 0 \end{cases}$.
- Tương giao (nhận dạng được dấu của c) Cắt $Oy: x = 0 \Rightarrow y = c$ xem dương hay âm?
 Tương giao Ox , có $ax^4 + bx^2 + c = 0$ và đặt $t = x^2 \geq 0$ thì $pt \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$ (*)
 Nếu (C) cắt Ox tại 4 điểm thì (*) có 4 nghiệm, tức (*) có 2 nghiệm phân biệt dương
 $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0$ và $S > 0, P > 0$.
- Điểm đặc biệt trên đồ thị.

③ **Nhận dạng đồ thị hàm số nhất biến** $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

- Tiệm cận:
 + Tiệm cận đứng $cx + d = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{d}{c}$ xem dương hay âm?
 + Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ dương hay âm?
- Đơn điệu: $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$. Xem đồ thị (C) từ trái sang phải:
 + Nếu đi lên $\Rightarrow HS$ đồng biến $\Rightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$.
 + Nếu đi xuống $\Rightarrow HS$ nghịch biến $\Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - bc < 0$.
- Tương giao với hai trục tọa độ:
 + Cắt trục $Ox: y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ xem dương hay âm?
 + cắt trục $Oy: x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$ xem dương hay âm?
- Điểm đặc biệt trên đồ thị.

④ Nhận dạng đồ thị hàm số mũ $y = a^x$.

- Vì $y = a^x > 0$ có tập giá trị $T = (0; +\infty)$ nên đồ thị (C) nằm phía trên Ox và tiệm cận ngang là hoành Ox .

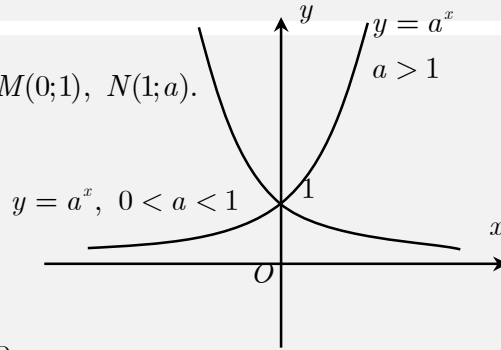
- Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = a \end{cases}$ nên (C) luôn đi qua 2 điểm $M(0;1)$, $N(1;a)$.

- Từ trái sang phải nếu đồ thị (C)

Đi lên $\Rightarrow$ Đồng biến $\Rightarrow a > 1$.

Đi xuống $\Rightarrow$ Nghịch biến $\Rightarrow 0 < a < 1$.

- Đồ thị $y = a^x$ và $y = \frac{1}{a^x}$ đối xứng nhau qua trục Oy .



⑤ Nhận dạng đồ thị hàm số lôgarit $y = \log_a x$.

- Vì điều kiện $x > 0$ và tập giá trị là $T = \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số lôga luôn nằm bên phải trục Oy và tiệm cận đứng là Oy .

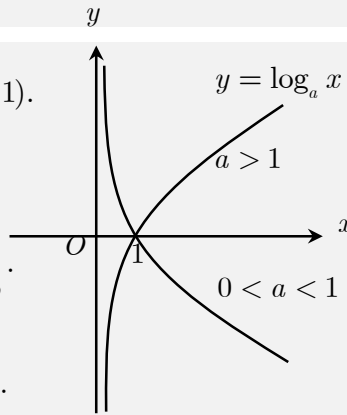
- Khi $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = a \Rightarrow y = 1 \end{cases}$ nên (C) luôn qua 2 điểm $M(1;0)$, $N(a;1)$.

- Từ trái sang phải nếu đồ thị (C)

Đi lên $\Rightarrow$ ĐB $\Rightarrow a > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a < b \\ 0 < x < 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a > b \end{cases}$.

Đi xuống $\Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a > b \\ 0 < x < 1 : \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow a < b \end{cases}$.

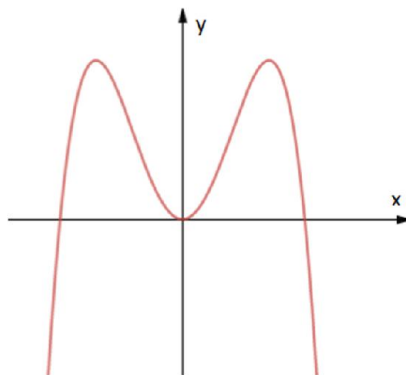
- Đối xứng: Đồ thị $y = \log_a x$ và $y = a^x$ đối xứng qua $d : y = x$.



CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong dưới đây?

- A.** $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2$. **C.** $y = x^3 - 3x^2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2$.



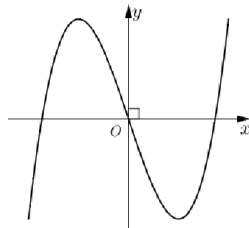
Lời giải

Chọn A

Từ hình dạng của đồ thị ta loại phương án C và **D**.

Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ suy ra hệ số của x^4 âm nên chọn phương án **A**.

Câu 2. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = x^3 - 3x$.

B. $y = -x^3 + 3x$.

C. $y = x^4 - 2x^2$.

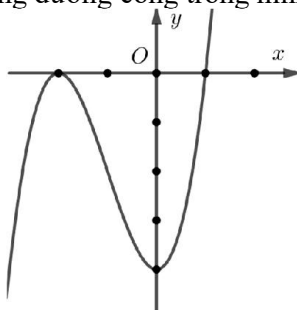
D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Chọn A

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 4$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

D. $y = -x^4 + 2x^2 - 4$.

Lời giải

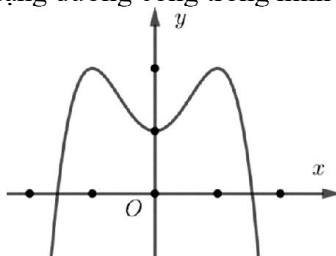
Chọn A

+) Vì đồ thị của hàm số trong hình vẽ có hai điểm cực trị nên phương án hàm bậc bốn trùng phương loại.

+) Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow$ hệ số $a > 0$ nên loại phương án $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Vậy phương án đúng là $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y = x^3 - 3x + 1$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C. $y = -x^3 + 3x + 1$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải

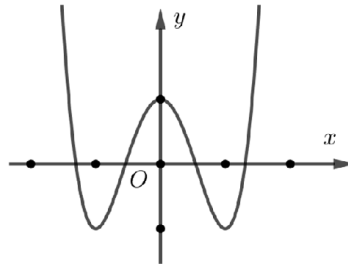
Chọn B

+) Ta có đồ thị của hàm số đa thức bậc 4 trùng phương nên phương án hàm số bậc ba loại.

+) Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow$ hệ số $a < 0$.

Nên phương án đúng là $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 5. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ bên?



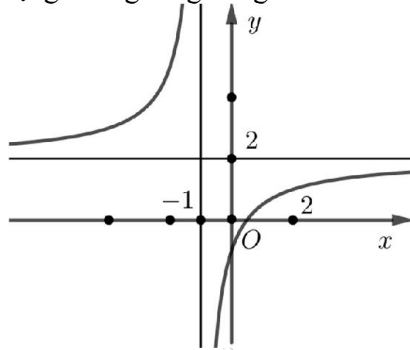
- A. $y = x^3 + 3x^2 + 1$. B. $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$. C. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. D. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn C

- +) Ta có đồ thị của hàm số đa thức bậc 4 trùng phương nên phương án hàm số bậc ba bị loại.
+) Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow$ hệ số $a > 0$ nên đáp án là $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ bên?



- A. $y = \frac{2x-3}{x-1}$. B. $y = x^3 - 3x - 1$. C. $y = x^4 + 2x^2 - 1$. D. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

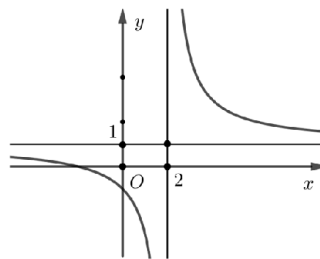
Lời giải

Chọn D

- +) Ta có đồ thị của hàm số phân thức hữu tỷ nên phương án hàm đa thức loại.
+) Nhận thấy đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1 \Rightarrow$ mẫu số phải chứa nhân tử $x+1$ nên loại phương án **A**.

Vậy phương án đúng là $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ dưới đây?



- A. $y = \frac{-x+1}{x-2}$. B. $y = \frac{x+2}{x-2}$. C. $y = \frac{-x+2}{x+2}$. D. $y = \frac{x-2}{x+2}$.

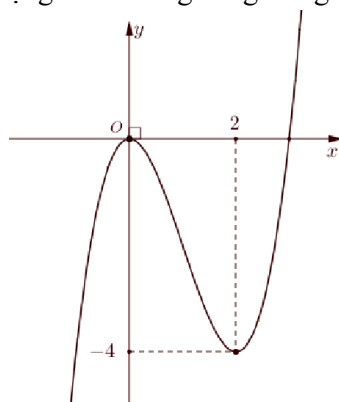
Lời giải

Chọn B

- +) Nhận thấy đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2 \Rightarrow$ mẫu số phải chứa nhân tử $x-2$
+) Nhận thấy đồ thị có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$

Vậy phương án đúng là $y = \frac{x+2}{x-2}$

Câu 8. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = x^3 - 3x^2$.

B. $y = -x^3 + 3x^2$.

C. $y = x^4 - 2x^2$.

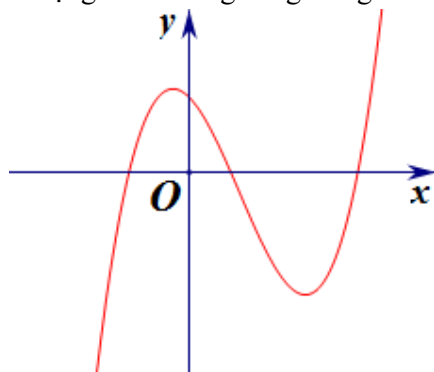
D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Chọn A

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x^2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 9. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



A. $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$.

B. $y = x^4 + x + 1$.

C. $y = -2x^3 + x + 1$.

D. $y = x^3 + 2x^2 - 1$.

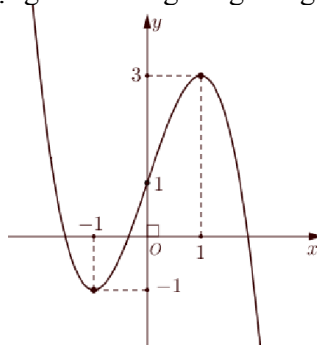
Lời giải

Chọn A

Đồ thị trong hình là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$. Ngoài ra, tung độ giao điểm của đồ thị với trục tung dương nên $d > 0$.

Vậy chỉ có phương án A là phù hợp.

Câu 10. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = x^3 - 3x + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = x^2 - 2x + 1$.

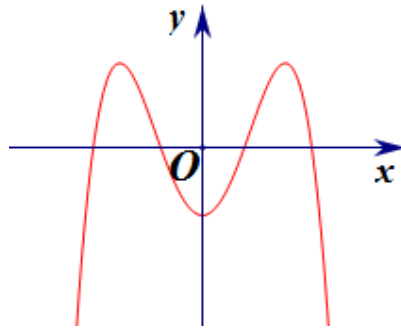
D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Chọn B

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a < 0$ nên chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 11. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



- A. $y = -x^2 + 2x - 1$. B. $y = -x^4 + 3x - 1$. C. $y = x^4 + x - 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

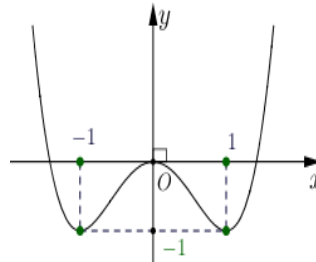
Lời giải

Chọn B

Đồ thị trong hình là đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a < 0$. Ngoài ra, tung độ giao điểm của đồ thị với trục tung âm nên $c < 0$.

Vậy chỉ có phương án B là phù hợp.

Câu 12. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



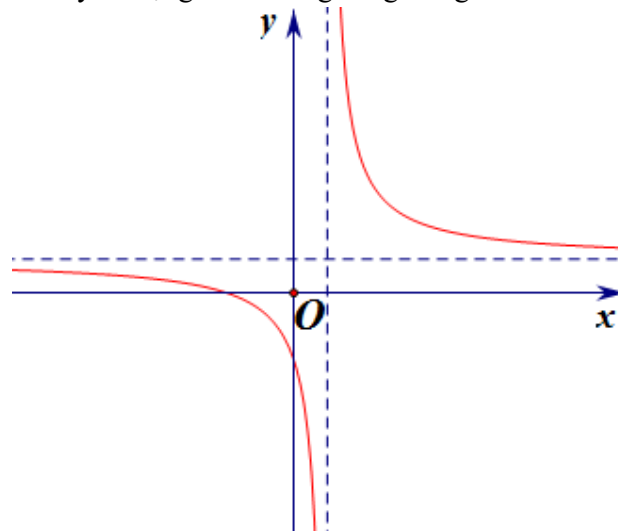
- A. $y = x^4 - 2x^2$. B. $y = -x^3 + 3x^2$. C. $y = -x^4 + 2x^2$. D. $y = -x^3 + 3x$.

Lời giải

Chọn A

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương với hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^4 - 2x^2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



A. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

B. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

C. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

D. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn C

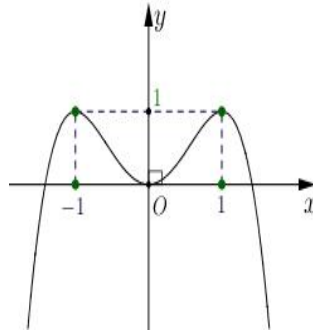
Tất cả các hàm số trong đề bài đều có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, do đó đều có thể có đồ thị như hình vẽ.

Dựa vào vị trí giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ, ta được $x = \frac{-b}{a} < 0$ và $y = \frac{b}{d} < 0$. Vì

$a = 1 > 0$ nên ta suy ra $b > 0$ và $d < 0$.

Vậy chỉ có phương án C là phù hợp.

Câu 14. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = x^4 - 2x^2$.

B. $y = -x^3 + 3x$.

C. $y = x^2 - 2x$.

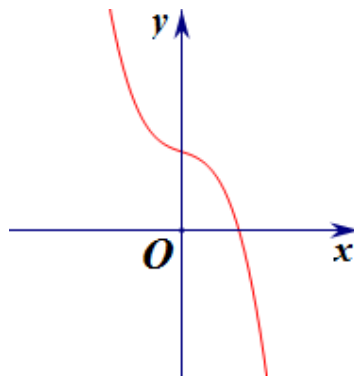
D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Chọn D

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương với hệ số $a < 0$ nên chỉ có hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



A. $y = -x^3 + 3x + 1$.

B. $y = -2x^3 - \frac{1}{3}x + 1$.

C. $y = x^3 - x^2 + 1$.

D. $y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Lời giải

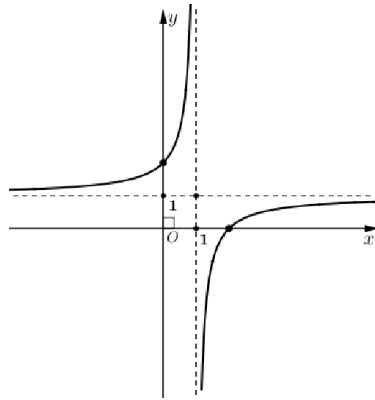
Chọn B

+) Đồ thị trong hình là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a < 0$ (vì hàm số nghịch biến). Do đó loại được các phương án C và D.

+) Vì đồ thị hàm số không có cực trị nên phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, loại được phương án A.

Vậy chỉ có phương án B là phù hợp.

Câu 16. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

B. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

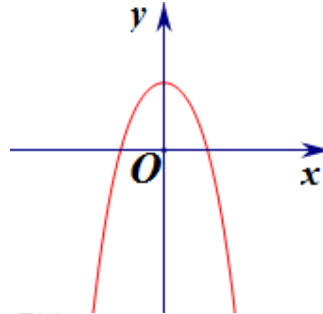
D. $y = -x^3 + 3x + 2$.

Lời giải

Chọn A

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số hữu tỉ bậc 1 trên bậc 1, đồ thị có các đường tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên chỉ có hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 17. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới?



A. $y = -2x^2 - 1$.

B. $y = x^4 + 3x + 1$.

C. $y = -x^4 + 3x^2 + 1$.

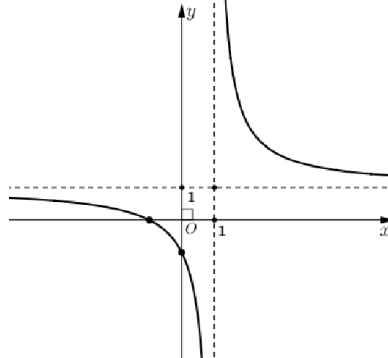
D. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn D

- +) Dựa vào hình dáng đồ thị, ta có thể loại ngay phương án B.
- +) Hàm số chỉ có một cực trị nên ta loại phương án C, vì với hàm số ở phương án C, phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
- +) Dựa vào tung độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung, ta loại phương án A.
- +) Hàm số ở phương án D thỏa mãn đầy đủ các tiêu chuẩn trên nên là D đáp án.

Câu 18. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

C. $y = 3x^2 + 2x - 1$.

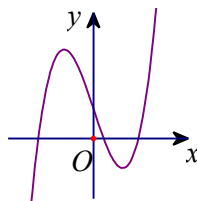
D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn D

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số hữu tỉ bậc 1 trên bậc 1, đồ thị có các đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 1$ nên chỉ có hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19. Đồ thị nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y = x^3 - 3x + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $x^4 + 2x^2 + 1$.

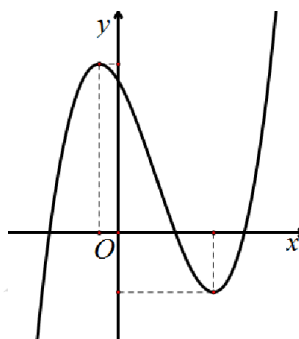
D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào hình dáng của đồ thị loại ngay đáp án B, C và D vì đồ thị trên là của hàm số bậc 3 có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$).

Câu 20. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d ?



A. $a > 0, b > 0, d > 0, c > 0$

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $a > 0, c > 0 > b, d < 0$

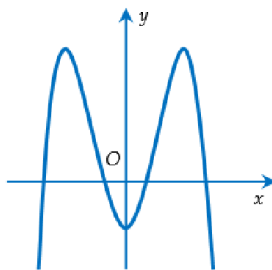
D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $a > 0$, đồ thị cắt Oy tại 1 điểm có tung độ dương nên $d > 0$, đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$. Vậy đáp án D

Câu 21. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0$.

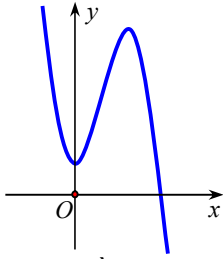
D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; c)$, từ đồ thị suy ra $c < 0$

Mặt khác đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, hay $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b) = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Suy ra a, b trái dấu.
Mà $a < 0 \Rightarrow b > 0$

Câu 22. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$

C. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$

B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

Lời giải

Chọn B

Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Từ hình dáng đồ thị suy ra:

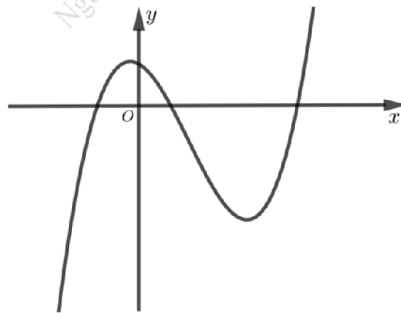
Hệ số $a < 0$

$y' = 0$ có một nghiệm bằng $x_1 = 0$ và một nghiệm $x_2 > 0$.

$y' = 0$ có một nghiệm bằng $x_1 = 0 \Rightarrow c = 0$.

$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \Rightarrow x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0$ mà $a < 0$ nên $-b > 0 \Leftrightarrow b < 0$

Câu 23. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?



A. $ab < 0, bc > 0, cd < 0$

B. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$

C. $ab > 0, bc > 0, cd < 0$

D. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$

Lời giải

Chọn A

Từ dáng điệu của đồ thị ta có ngay được:

⊕ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0$.

⊕ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

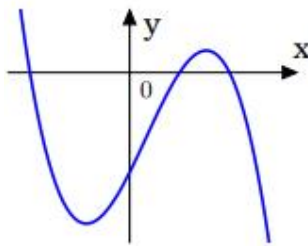
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm này

luôn dương nên $\begin{cases} ac < 0 \\ -\frac{2b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ (do $a > 0$)

Do đó: $ab < 0, bc > 0, cd < 0$.

Câu 24. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng ?



A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$

B. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

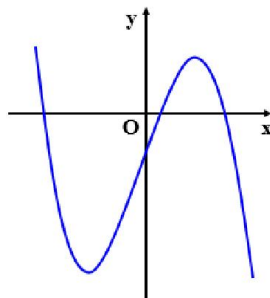
Lời giải

Chọn D

- Dựa vào hình dáng của đồ thị suy ra hệ số $a < 0$.
- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.
- Ta thấy đồ thị như hình vẽ có hai điểm cực trị, hoành độ các điểm cực trị trái dấu suy ra phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu kéo theo $3a \cdot c < 0 \Rightarrow c > 0$.

- Mặt khác $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 25. Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a; d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, d > 0$.

B. $a < 0, d > 0$.

C. $a > 0, d < 0$.

D. $a < 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a < 0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x = 0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$			$+\infty$		1
	1				$-\infty$

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có:
$$\begin{cases} -\frac{c}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -\frac{c}{2} \quad (1)$$

Mặt khác: $f'(x) = \frac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên

$$f'(x) = \frac{ac-b}{(bx+c)^2} > 0 \Leftrightarrow ac-b > 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được: $-\frac{c^2}{2} + \frac{c}{2} > 0 \Leftrightarrow -c^2 + c > 0 \Leftrightarrow 0 < c < 1$.

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	2		2

$\nearrow$ $-\infty$ $\nwarrow$ $+\infty$

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên có:

Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow a = 2b$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng $x = -1 \Leftrightarrow -\frac{c}{b} = -1 \Leftrightarrow c = b$.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng xác định nên $ac+b < 0$.

Từ ba điều kiện trên ta có $2b.b+b < 0 \Leftrightarrow 2b^2+b < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < b < 0$.

Suy ra $b < 0, c < 0, a < 0$.

Vậy cả ba số a, b, c đều âm.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+3}{2x-b}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-			-
y	2			$+\infty$	2

Giá trị $a - 2b$ bằng?

A. 8

B. -6

C. 0

D. 10

Lời giải

Chọn C

Đk: $-a.b - 6 \neq 0 \Leftrightarrow a.b \neq -6$

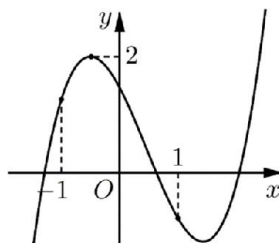
Từ BBT ta dễ dàng nhận thấy ĐTHS có TCN là: $y = 2$

và tiệm cận đứng là: $x = 1$

Suy ra $\frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow a = 4$ và $\frac{b}{2} = 1 \Leftrightarrow b = 2$ (TMĐK)

Vậy $a - 2b = 4 - 2.2 = 0$.

Câu 29. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị hàm số thể hiện $a > 0$; cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $\begin{cases} x_{CT} > 1 \\ -1 < x_{CD} < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_{CD} + x_{CT} > 0 \\ x_{CD} \cdot x_{CT} < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \longrightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \longrightarrow \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} c < 0 \end{cases}$. Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+3}{bx+c}$ ($b \in \mathbb{Z}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-			-
$f(x)$	-2			$+\infty$	-2

Tính tổng $S = a + b + c$.

A. -2.

B. 2.

C. 0.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên có:

Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang $y = -2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -2 \Leftrightarrow a = -2b$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 1 \Leftrightarrow -\frac{c}{b} = 1 \Leftrightarrow c = -b$.

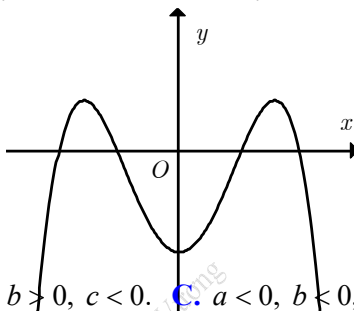
Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng xác định nên $ac - 3b < 0$.

Từ ba điều kiện trên ta có $-2b \cdot (-b) - 3b < 0 \Leftrightarrow 2b^2 - 3b < 0 \Leftrightarrow 0 < b < \frac{3}{2}$.

Mà $b \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $b = 1 \Rightarrow c = -1, a = -2$.

Vậy $S = a + b + c = -2 + 1 + (-1) = -2$.

Câu 31. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số thể hiện $a < 0$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \rightarrow b > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-b}{cx+b+1}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$

Biết tập hợp tất cả các giá trị b thỏa mãn là khoảng $(m; n)$. Tính tổng $S = m + 2n$.

A. $S = \frac{5}{2}$.

B. $S = -\frac{3}{2}$.

C. $S = -\frac{5}{2}$.

D. $S = -2$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên có:

Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{c} = 1 \Leftrightarrow a = c$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 2 \Leftrightarrow -\frac{b+1}{c} = 2 \Leftrightarrow c = -\frac{b+1}{2}$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng xác định nên $a(b+1) + bc > 0$.

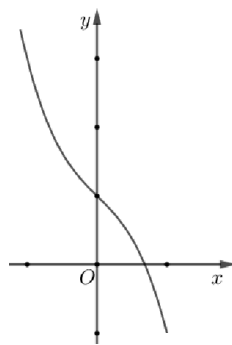
Từ ba điều kiện trên ta có:

$$c(b+1) + bc > 0 \Leftrightarrow c(2b+1) > 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{b+1}{2}\right)(2b+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (b+1)(2b+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < b < -\frac{1}{2} \Rightarrow b \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Suy ra } m = -1 \text{ và } n = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } S = m + 2n = -1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Câu 33. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Lời giải

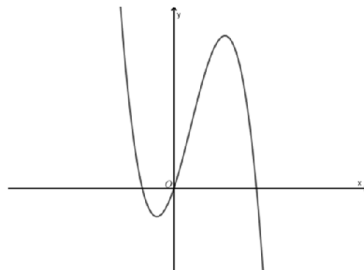
Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$.

Từ đồ thị ta suy ra $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac < 0$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$$

Câu 34. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0, b > 0, c > 0, d = 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d = 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$. Suy ra $a < 0$.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O nên $d = 0$.

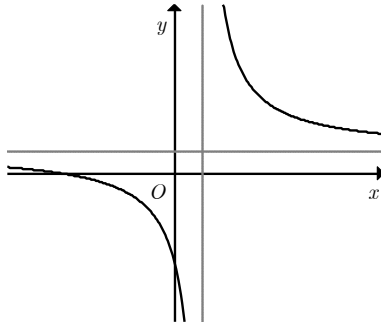
Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số đã cho ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b > 0.$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c > 0.$$

Vậy $a < 0, b > 0, c > 0, d = 0$.

Câu 35. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $b > 0, c > 0, d < 0$. **B.** $b > 0, c < 0, d < 0$. **C.** $b < 0, c < 0, d < 0$. **D.** $b < 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số, ta thấy

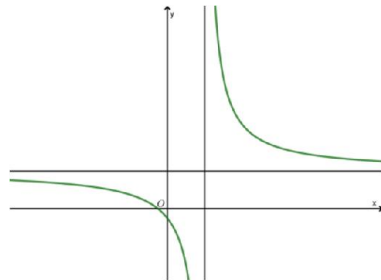
• Khi $y = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$.

• Khi $x = 0 \rightarrow y = \frac{b}{d} < 0 \xrightarrow{b > 0} d < 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} > 0 \xrightarrow{d < 0} c > 0$.

Vậy $b > 0, c > 0, d < 0$.

Câu 36. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $ab > 0, ad < 0$. **B.** $ab < 0, ad > 0$. **C.** $bd > 0, ad < 0$. **D.** $ab > 0, ad > 0$.

Lời giải

Chọn A

Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow cd < 0$ (1)

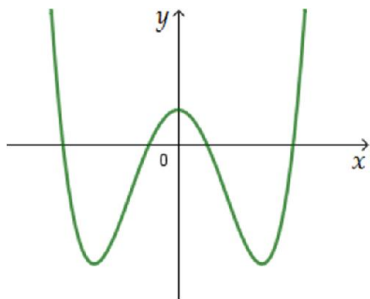
Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$ (2)

Khi $x = 0$ thì $y = \frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$ (3)

Từ (1) và (2) suy ra: $ad < 0$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $ab > 0$

Câu 37. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = x^4 + mx^2 + n$, với $m, n \in \mathbb{R}$. Biết phương trình $x^4 + mx^2 + n = 0$ có k nghiệm thực phân biệt, $k \in \mathbb{N}^*$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $k = 4$ và $mn > 0$. **B.** $k = 4$ và $mn < 0$. **C.** $k = 2$ và $mn < 0$. **D.** $k = 2$ và $mn > 0$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = x^4 + mx^2 + n$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $x^4 + mx^2 + n = 0$ có 4 nghiệm phân biệt, suy ra $k = 4$.

Hàm số có 3 cực trị nên $m < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $n > 0$ (cho $x = 0 \Rightarrow y = n > 0$).

Do đó $mn < 0$.

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		—		—	
y	2				2

Arrows indicate the function decreases from $y=2$ at $x=-\infty$ to a minimum at $x=-1$ and then increases back to $y=2$ at $x=+\infty$.

Trong các số a , b và c có bao nhiêu số âm?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Tiệm cận đứng: $x = -1 < 0 \Rightarrow -\frac{c}{b} < 0 \Rightarrow bc > 0$

Tiệm cận ngang: $y = 2 > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow ab > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có $x < -1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow c < 0$

B. TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

Cho hai đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Tọa độ giao điểm (nếu có) của (C) và (C')

là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (*)$

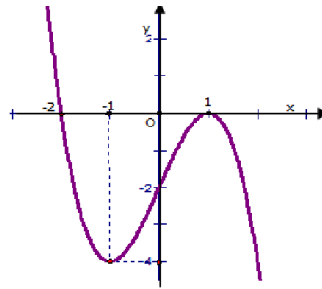
— Phương trình $(*)$ được gọi là phương trình hoành độ điểm chung của (C) và (C') .

— Số nghiệm của $(*)$ chính là số điểm chung của hai đồ thị.

— Nếu $(*)$ vô nghiệm thì hai đồ thị không có điểm chung.

B1. THÔNG QUA BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ

Câu 1. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) = -4$ là



A. 2.

B. 1.

C. 0.

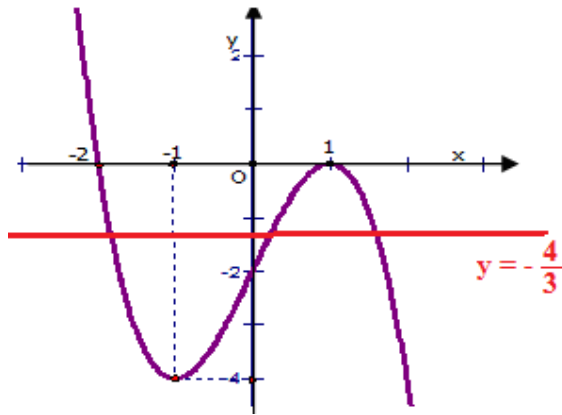
D. 3.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $3f(x) = -4 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{4}{3}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$ (như hình vẽ).



Dựa vào đồ thị ta thấy có 3 giao điểm.

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						
	$-\infty$			1	0	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

A. 2.

B. 0.

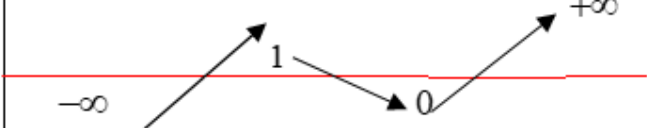
C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

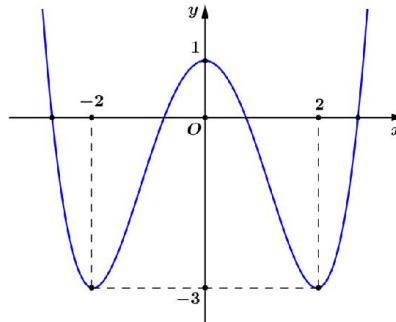
Ta có $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$	2		3		$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

$y = \frac{2}{3}$

Căn cứ vào bảng biến thiên thì phương trình $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 3. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ là



A. 3.

B. 2.

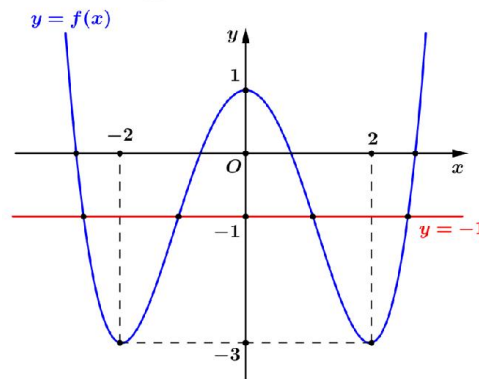
C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -1$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$ (hình vẽ).



Dựa vào đồ thị ta thấy có 4 giao điểm.
Vậy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			0		0			
	$-\infty$		-1		$-\infty$			

Số nghiệm của phương trình $4f(x) + 3 = 0$ là

A. 2 .

B. 0 .

C. 3 .

D. 4 .

Lời giải

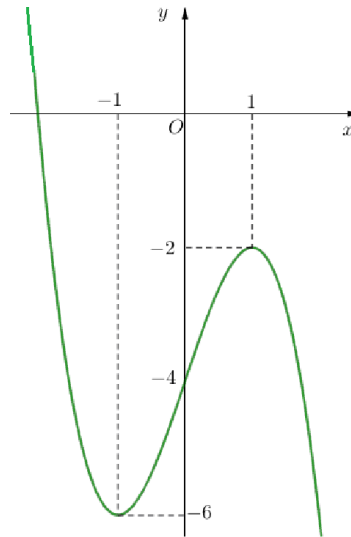
Chọn D

Số nghiệm của phương trình $4f(x) + 3 = 0$ cũng chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{3}{4}$.

Dựa vào BBT, ta thấy đường thẳng $y = -\frac{3}{4}$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình $4f(x) + 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f^2(x) = 4$ có số nghiệm là



A. 0.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

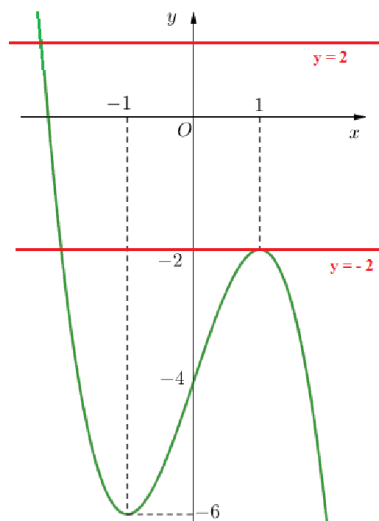
Lời giải

Chọn B

Phương trình $f^2(x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{cases}$.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$ (như hình vẽ).

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -2$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -2$ (như hình vẽ).



Vậy phương trình $f^2(x) = 4$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 7f(x) + 5 = 0$ là

A. 6.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

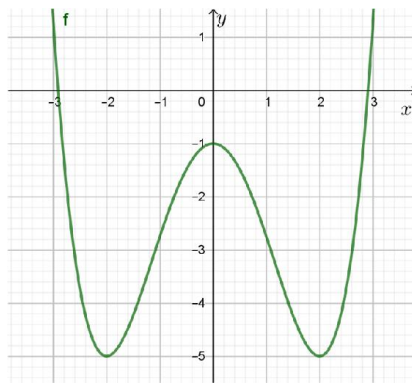
$$2[f(x)]^2 - 7f(x) + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Dựa vào BBT, ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt,

đường thẳng $y = \frac{5}{2}$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 1 điểm.

Các điểm này không trùng nhau. Vậy phương trình $2[f(x)]^2 - 7f(x) + 5 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 7. Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = -5$ là



A. 0.

B. 3.

C. 4.

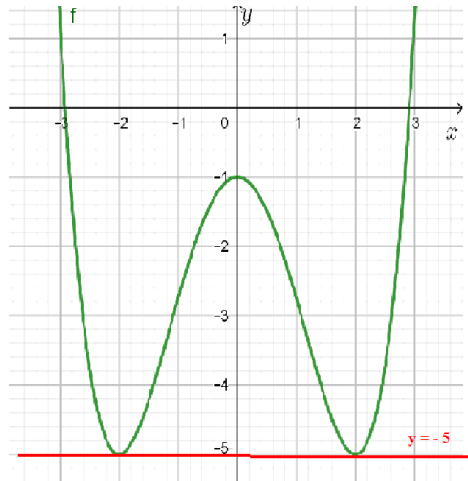
D. 2.

Lời giải

Chọn D

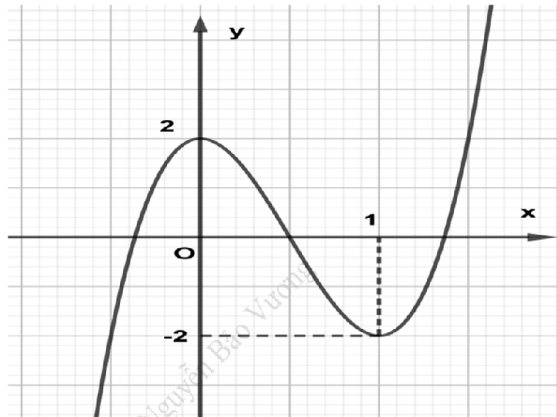
Phương trình $f(x) = -5$.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -5$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -5$ (như hình vẽ).



Dựa vào đồ thị ta thấy có 2 giao điểm.
Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm thực của phương trình $6f(x) + 5 = 0$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

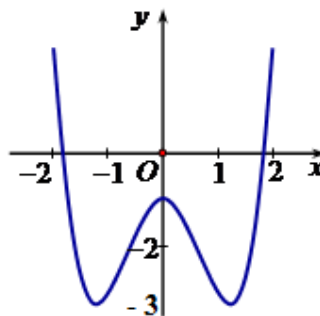
Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho tương đương với $f(x) = -\frac{5}{6}$.

Ta thấy đường thẳng $y = -\frac{5}{6}$ có ba điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 1 = 0$ là



A. 0.

B. 1.

C. 3.

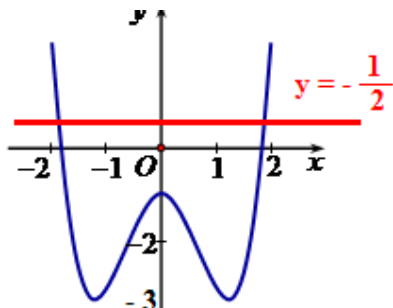
D. 2.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ (như hình vẽ).



Dựa vào đồ thị ta thấy có 2 giao điểm.

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-4		-3		-4	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 10 = 0$ là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương với $f(x) = -\frac{10}{3}$.

Ta thấy đường thẳng $y = -\frac{10}{3}$ có bốn điểm chung phân biệt với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		1		-2		$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$ (1)

Ta có: số nghiệm thực của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị của đường thẳng $y = \frac{2}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		1		-2		$+\infty$

$y = \frac{2}{3}$

Vậy phương trình $3f(x) - 2 = 0$ có 4 nghiệm thực.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	-3	2	$+\infty$	-4	3	

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$ (1)

Ta có: số nghiệm thực của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị của đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y						

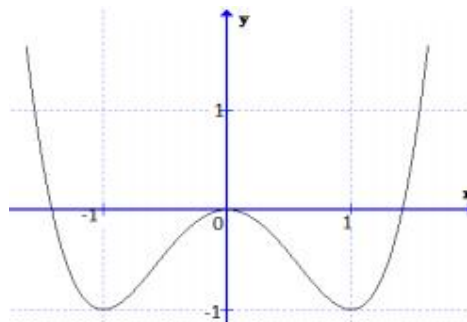
$y = -3/2$

Diagram illustrating the mapping of the x-axis to the y-axis for the function $y = -3/2$. The x-axis is divided into intervals by critical points x_1 and x_2 . The y-axis is divided into intervals by the values -3 and -4 . Arrows indicate the mapping of intervals from the x-axis to the y-axis.

- Interval $(-\infty, x_1)$ maps to $(-\infty, -3)$.
- Interval $(x_1, 0)$ maps to $(-3, -4)$.
- Interval $(0, x_2)$ maps to $(-4, +\infty)$.
- Interval $(x_2, +\infty)$ maps to $(+\infty, 3)$.

Vậy phương trình $2f(x) + 3 = 0$ có 4 nghiệm thực.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau:



Số nghiệm của phương trình $\frac{1-f(x)}{1+f(x)} = 2$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = 2 \Rightarrow 1-f(x) = 2+2f(x) \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{3}$$

Như vậy, số nghiệm thực của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị của đường thẳng $y = -\frac{1}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta có đường thẳng $y = -\frac{1}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

B2. GIỮA HAI HÀM SỐ

Câu 14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ và trục hoành là

A. 0.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 4x(x^2 - 1) \rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				-3				$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Câu 15. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 + 4$ và trục hoành là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$+ \text{ Ta có } y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			5		4		$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 16. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 17. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ và trục hoành là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 18. Đồ thị của hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu

A. -3.

B. 0.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Trục tung có phương trình: $x = 0$. Thay $x = 0$ vào $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ được: $y = 1$.

Câu 19. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 20. đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = -2x^2 + 7$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Pthdgd:

$$x^4 - 3x^2 + 1 = -2x^2 + 7 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Do pt có 2 nghiệm nên đồ thị hai hàm số có 2 điểm chung.

Câu 21. Cho hàm số $y = -2x^3 + 5x$ có đồ thị (C) Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải**Chọn B.**Pthd của (C) và trục hoành là:

$$-2x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \text{ có 3 giao điểm.}$$

Chú ý: Ở bài toán này hoàn toàn có thể giải trực tiếp bằng Casio với phương trình $-2x^3 + 5x = 0$, nhưng chắc chắn thao tác bấm máy sẽ chậm hơn việc tính tay (thậm chí bài này không cần nháp khi mà kết quả đã hiện ra luôn khi ta đọc đề xong). Vì vậy, Casio là điều không cần thiết với câu hỏi này.

Câu 22. Cho hàm số $y = (x-3)(x^2+2)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.C. (C) không cắt trục hoành.D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.**Lời giải****Chọn B.**Pthd của (C) và trục hoành là:

$$(x-3)(x^2+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ nghĩa là } (C) \text{ cắt trục hoành tại một điểm}$$

Câu 23. Biết rằng đường thẳng $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

A. $y_0 = 1$.B. $y_0 = 3$.C. $y_0 = -2$.D. $y_0 = 4$.**Lời giải****Chọn A.**

Pthdgd:

$$x + 2 = x^3 - x^2 + x + 4 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y_0 = 1.$$

Câu 24. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải**Cách 1:** Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 4} = x - 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^4 - 4 = (x - 5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^4 - x^2 + 10x - 29 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Do $x \geq 5$ nên $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) > 0$ và $10x - 29 > 0$. Vì vậy $(*)$ vô nghiệm

Như vậy phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

Cách 2:

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } \sqrt{x^4 - 4} + 5 = x. \text{ Ta có điều kiện xác định } \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Với điều kiện trên ta có } \sqrt{x^4 - 4} + 5 = x \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x = 0$$

Xét hàm số $h(x) = \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x$. Ta có $h'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 - 4}} - 1$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = \sqrt{x^4 - 4}$

Với $x \geq \sqrt{2}$ ta có $2x^3 > \sqrt{x^4 - 4}$. Với $x \leq -\sqrt{2}$ ta có $2x^3 < \sqrt{x^4 - 4}$

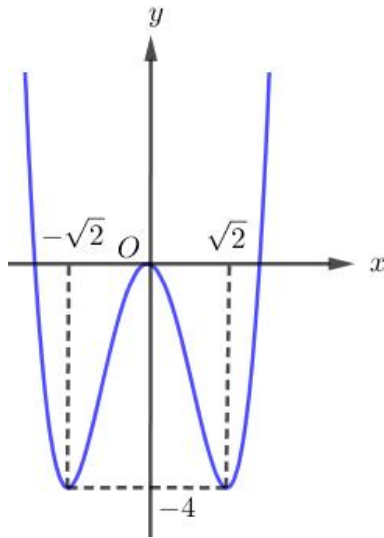
Ta có Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$h'(x)$		-		+
$h(x)$	$+\infty$	$5 + \sqrt{2}$	$5 - \sqrt{2}$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ là số giao điểm của đồ thị $y = h(x) = \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x$ và trục hoành $y = 0$. Dựa vào BBT ta thấy phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

B3. HÀM HỢP, HÀM ẨN (LUÔN GẶP NĂM GẦN ĐÂY)

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm của phương trình $f(1-x) + 3 = 0$ là

A. 4.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

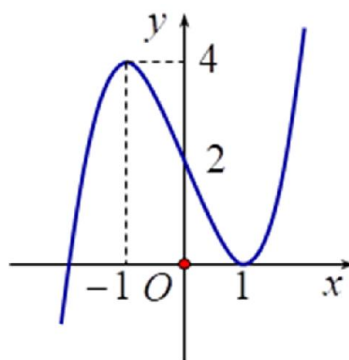
Xét phương trình $f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3$.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đường thẳng $y = -3$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 .

$$\text{Khi đó phương trình } f(1-x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(1-x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = x_1 \\ 1-x = x_2 \\ 1-x = x_3 \\ 1-x = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-x_1 \\ x = 1-x_2 \\ x = 1-x_3 \\ x = 1-x_4 \end{cases}.$$

Vậy phương trình $f(1-x) + 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Phương trình $|f(x-2)-2| = \pi$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = k$ và số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x+p)$ với đường thẳng $y = k$ luôn như nhau.

Do đó số nghiệm của phương trình $|f(x-2)-2| = \pi$ cũng chính là số nghiệm của phương trình $|f(x)-2| = \pi$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-2 = \pi \\ f(x)-2 = -\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2+\pi \quad (1) \\ f(x) = 2-\pi \quad (2) \end{cases}$$

Xét (1): Vì $2+\pi > 4$ nên pt có 1 nghiệm

Xét (2): Vì $2-\pi < 0$ nên pt có 1 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $t \in [-1; 1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = -\frac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t = a \in (-1; 0)$ và $t = b \in (0; 1)$.

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $-\pi < x_1 < x_2 < 0 < \pi < x_3 < x_4 < 2\pi$.

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình có 4 nghiệm $0 < x_5 < x_6 < \pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				0			$-\frac{2}{3}$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{3}\right]$ của phương trình $3f(\cos x) + 1 = 0$ là

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$

Khi đó phương trình $3f(\cos x) + 1 = 0$ trở thành $f(t) = -\frac{1}{3}, \forall t \in [-1; 1]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên, trên $[-1; 1]$ ta có $f(t) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = a_1 \in (-1; 0) \\ t = a_2 \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{3}\right]$ có BBT:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	π	2π	$\frac{7\pi}{3}$
$y = \cos x$	0	1	-1	1	$\frac{1}{2}$

TH1: $t = a_1 \in (-1; 0)$

Phương trình $\cos x = a_1$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$.

TH2: $t = a_2 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Phương trình $\cos x = a_2$ có 3 nghiệm x_3, x_4, x_5 thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} < x_3 < x_4 < \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} < x_5 < 2\pi$.

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	$2 + \infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		1	0	2	$+\infty$

The diagram illustrates the relationship between the function $f(x)$ and its derivative $f'(x)$ across different intervals of x .

- Intervals of x :** $-\infty$, -1 , 0 , $2 + \infty$.
- Signs of $f'(x)$:** $+$, 0 , $-$, 0 , $+$.
- Values of $f(x)$:** $-\infty$, 1 , 0 , 2 , $+\infty$.

Arrows indicate the mapping from $f(x)$ values to the corresponding x values:

- $-\infty \rightarrow -1$
- $1 \rightarrow 0$
- $0 \rightarrow 2$

Số nghiệm nhiều nhất thuộc $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin^2 x + 1) = 1$ là của phương trình

$f(\sin^2 x + 1) = 1$ là

A. 2.

B. 5.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	0	2	$+\infty$

The graph shows a piecewise linear function $f(x)$ defined on the interval $[-1, 2]$. The function has vertices at $(-1, 1)$, $(0, 0)$, and $(2, 2)$. The derivative $f'(x)$ is positive on $(-1, 0)$, zero at $x = -1$ and $x = 2$, and negative on $(0, 2)$. The function is concave down on $(-1, 0)$ and concave up on $(0, 2)$.

Dựa vào bảng biến của hàm số $f(x)$, ta có $f(\sin^2 x + 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + 1 = -1 \\ \sin^2 x + 1 = b \in (0; 2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = -2 \\ \sin^2 x = b - 1 \in (-1; 1) \end{cases}$$

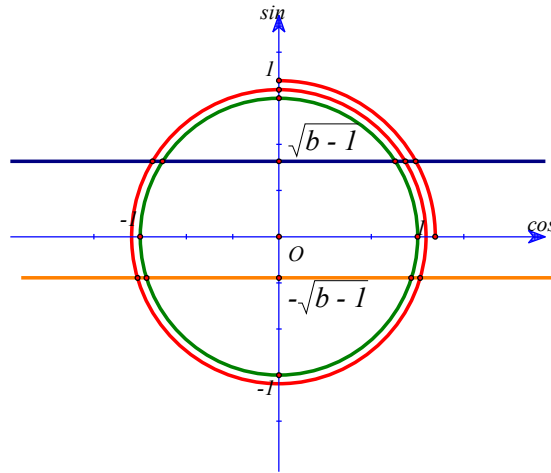
Do $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ nên phương trình $\sin^2 x = -2$ vô nghiệm.

Xét phương trình $\sin^2 x = b - 1 \in (-1; 1) (*)$

Để phương trình $(*)$ có nhiều nghiệm nhất thì $b - 1 \in (0; 1)$ khi đó

$$\sin^2 x = b - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sqrt{b - 1} \in (0; 1) \\ \sin x = -\sqrt{b - 1} \in (-1; 0) \end{cases}$$

Xét đường tròn lượng giác



Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình $\sin x = \sqrt{b-1}$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$,

phương trình $\sin x = -\sqrt{b-1}$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Vậy số nghiệm nhiều nhất thuộc $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin^2 x + 1) = 1$ là 9 nghiệm.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	0	2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$

Khi đó phương trình $f(\sin x) = 1$ trở thành $f(t) = 1, \forall t \in [-1; 1]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t) = 1 \Rightarrow \begin{cases} t = a \in (-1; 0) \\ t = b \in (0; 1) \end{cases}$.

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình $\sin x = t$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\pi < x_1 < x_2 < 2\pi$.

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

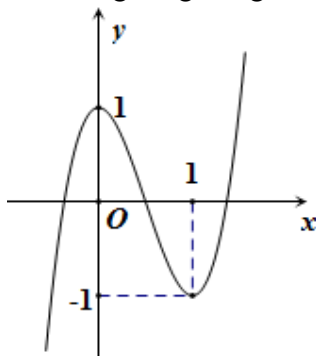
Ứng với mỗi giá trị $t \in (0;1)$ thì phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$$0 < x_3 < x_4 < \pi; 2\pi < x_5 < \frac{5\pi}{2};$$

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 31. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây.



Khi đó phương trình $4(4x^3 - 6x^2 + 1)^3 - 6(4x^3 - 6x^2 + 1)^2 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực.

A. 9.

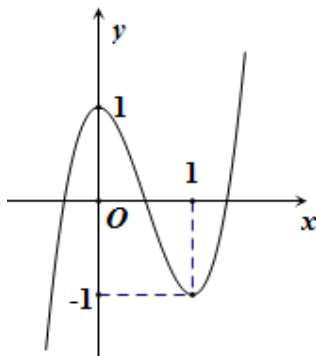
B. 6.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn C



Từ đồ thị ta có

$$4(4x^3 - 6x^2 + 1)^3 - 6(4x^3 - 6x^2 + 1)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + 1 = a \in (-1; 0) & (1) \\ 4x^3 - 6x^2 + 1 = b \in (0; 1) & (2) \\ 4x^3 - 6x^2 + 1 = c \in (1; 2) & (3) \end{cases}$$

Ta thấy số nghiệm của phương trình $4x^3 - 6x^2 + 1 = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ và đường thẳng $y = m$.

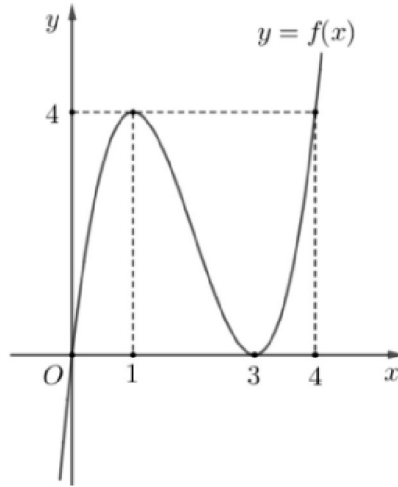
Từ đó ta có: (1) có 3 nghiệm phân biệt

(2) có 3 nghiệm phân biệt

(3) có 1 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm thực.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Phương trình $f(f(f(f(x)))) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 12.

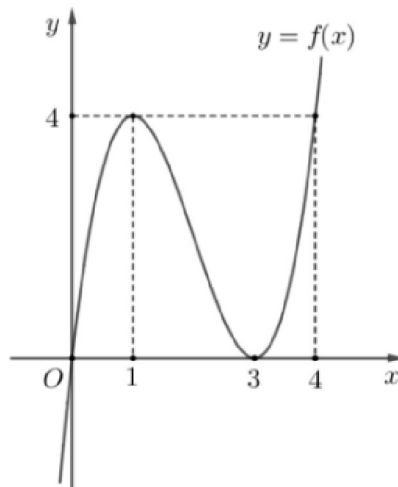
B. 40.

C. 41.

D. 16.

Lời giải

Chọn C



Đặt $f_k(x) = f(\dots(f(x)))$; (k hàm f ; $k = \overline{1;4}$)

Ta có $f_4(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_3(x) = 0 & (1) \\ f_3(x) = 3 & (2) \end{cases}$

Xét (1): $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_2(x) = 0 & (3) \\ f_2(x) = 3 & (4) \end{cases}$

Xét (3): $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (5) \\ f(x) = 3 & (6) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị thấy ngay (5) có 2 nghiệm, (6) có 3 nghiệm.

Xét (4): $f_2(x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a_1 \in (0;1) & (7) \\ f(x) = a_2 \in (1;3) & (8) \\ f(x) = a_3 \in (3;4) & (9) \end{cases}$

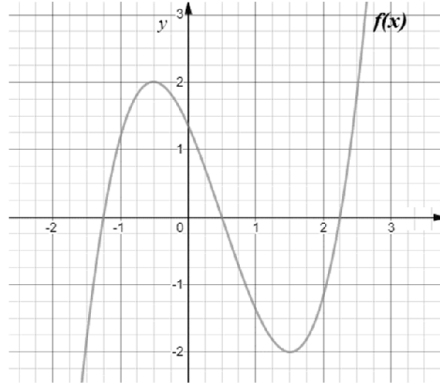
Theo đồ thị, mỗi phương trình (7),(8),(9) đều có 3 nghiệm phân biệt và (7),(8),(9) không có 2 phương trình nào có chung nghiệm.

Xét (2): $f_3(x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f_2(x) = a_1 \in (0;1) & (10) \\ f_2(x) = a_2 \in (1;3) & (11) \\ f_2(x) = a_3 \in (3;4) & (12) \end{cases}$

Lập luận tương tự như trên, mỗi phương trình (10),(11),(12) đều có 9 nghiệm phân biệt và (10),(11),(12) không có 2 phương trình nào có nghiệm chung.

Vậy có $2+3+3.3+9.3=41$ nghiệm.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $|f(|f(x)|)| - |f(x)| = 0$ là

A. 20.

B. 24.

C. 10.

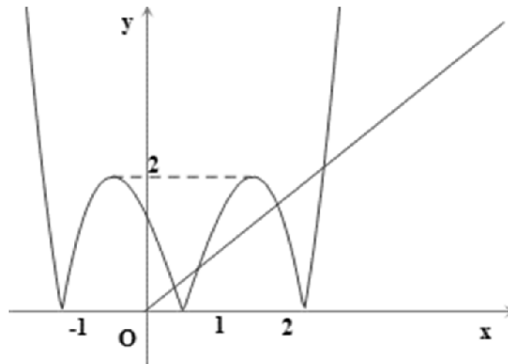
D. 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $|f(x)| = t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$|f(t)| = t, (1).$$



Từ đồ thị hàm số ta có

$$\text{Phương trình (1) có 4 nghiệm} \begin{cases} t = a, (0 < a < 1) \\ t = b, (a < b < 1) \\ t = c, (1 < c < 2) \\ t = d, (2 < d) \end{cases}$$

Khi đó các phương trình $|f(x)| = a, |f(x)| = b, |f(x)| = c$ mỗi phương trình có 6 nghiệm phân biệt không trùng nhau. Phương trình $|f(x)| = d$ có 2 nghiệm phân biệt không trùng với nghiệm của 3 phương trình trên.

Vậy phương trình đã cho có 20 nghiệm phân biệt.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	2	$-\infty$

Số nghiệm thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $|f(\cos 2x)| = 1$ là

A. 9.

B. 4.

C. 7.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $|f(x)|$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$ f(x) $	$+\infty$	0	2	1	2	0	$+\infty$

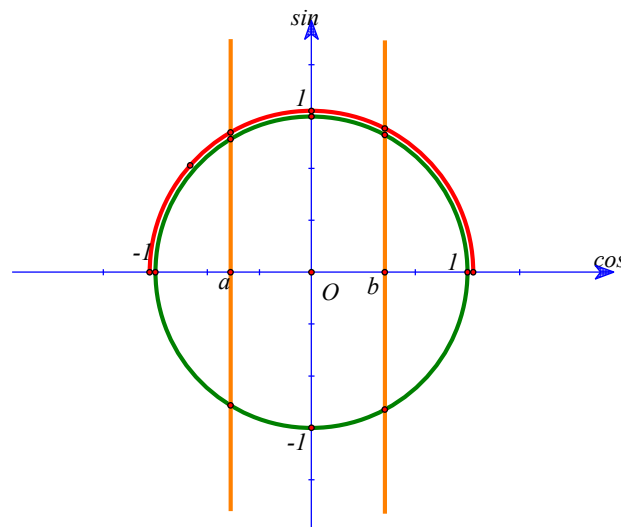
Đặt $t = \cos 2x \in [-1; 1]$.

Dựa vào bảng biến thiên trên, phương trình $|f(t)| = 1$ chỉ có 3 nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

Ta có $|f(t)| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (-1; 0) \\ t = 0 \\ t = b \in (0; 1) \end{cases}$.

Do $x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 2x \in [0; 3\pi]$.

Xét đường tròn lượng giác



Phương trình $\cos 2x = a, a \in (-1; 0)$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Phương trình $\cos 2x = b, a \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Phương trình $\cos 2x = 0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Vậy số nghiệm thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $|f(\cos 2x)| = 1$ là 9 nghiệm.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-2	-1	-2		$+\infty$	

Phương trình $2f(\cos(x)) + e = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0; 3\pi]$.

A. 6.

B. 3.

C. 0.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$2f(\cos x) + e = 0 \text{ với } x \in [0; 3\pi]. \Leftrightarrow f(\cos x) = -\frac{e}{2} \text{ với } x \in [0; 3\pi].$$

Đặt $t = \cos x$ suy ra $f(t) = -\frac{e}{2}$ với $t \in [-1; 1]$

Từ bảng biến thiên suy ra $\begin{cases} t = a \in (-1; 0) \\ t = b \in (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a \in (-1; 0) \\ \cos x = b \in (0; 1) \end{cases}, (x \in [0; 3\pi]).$

Xét hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0; 3\pi]$ ta có bảng biến

x	0	π	2π	3π				
y'	0	−	0	+	0	−	0	
y	1							−1

thiên

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $\cos x = a$ có 3 nghiệm phân biệt trên $[-\pi; 2\pi]$

Phương trình $\cos x = b$ có 3 nghiệm phân biệt trên $[-\pi; 2\pi]$.

Vậy phương trình $2f(\cos(x)) + e = 0$ có 6 nghiệm trên $[0; 3\pi]$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y							

Số nghiệm của phương trình $f^2(\tan x) - 3 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ là

A. 10.

B. 15.

C. 18.

D. 24.

Lời giải

Chọn B

$$f^2(\tan x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(\tan x) = \pm\sqrt{3}.$$

Đặt $t = \tan x$ suy ra $f(t) = \pm\sqrt{3}$.

Từ bảng biến thiên suy ra

$t = a \in (-\infty; -2)$ $t = b \in (-2; 0)$ $t = c \in (0; 2)$ $t = d \in (2; +\infty)$ $t = e \in (-\infty; -2)$ $t = f \in (2; +\infty)$	$\Leftrightarrow$	$\tan x = a \in (-\infty; -2)$ $\tan x = b \in (-2; 0)$ $\tan x = c \in (0; 2)$ $\tan x = d \in (2; +\infty)$ $\tan x = e \in (-\infty; -2)$ $\tan x = f \in (2; +\infty)$	với a, b, c, d, e, f đôi một khác
---	-------------------	---	-------------------------------------

nhau.

Ta xét hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y'	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$ $
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $\tan x = a \in (-\infty; -2)$ có 3 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

$\tan x = b \in (-2; 0)$ có 3 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

$\tan x = c \in (0; 2)$ có 2 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

$\tan x = d \in (2; +\infty)$ có 2 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

$\tan x = e \in (-\infty; -2)$ có 3 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

$\tan x = f \in (2; +\infty)$ có 2 nghiệm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

Vậy số nghiệm của phương trình $f^2(\tan x) - 3 = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ là 15 nghiệm.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	2	$-\infty$

Số nghiệm thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $|f(\cos 2x)| = 1$ là

A. 9.

B. 4.

C. 7.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $|f(x)|$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	2	1	2	$+\infty$

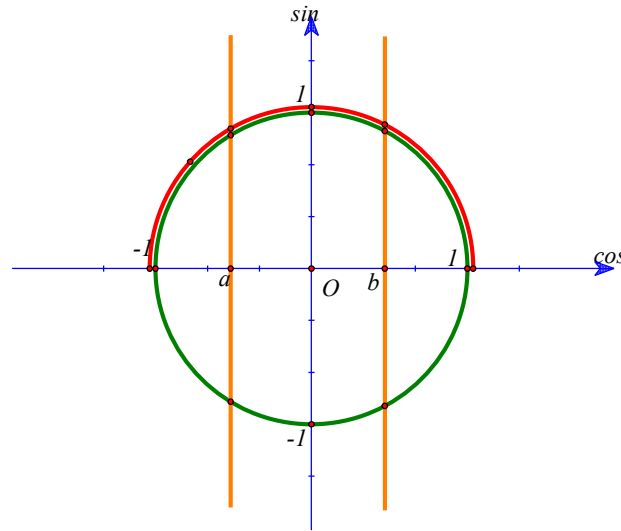
Đặt $t = \cos 2x \in [-1; 1]$.

Dựa vào bảng biến thiên trên, phương trình $|f(t)| = 1$ chỉ có 3 nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

Ta có $|f(t)| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (-1; 0) \\ t = 0 \\ t = b \in (0; 1) \end{cases}$.

Do $x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 2x \in [0; 3\pi]$.

Xét đường tròn lượng giác



Phương trình $\cos 2x = a$, $a \in (-1; 0)$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Phương trình $\cos 2x = b$, $a \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Phương trình $\cos 2x = 0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Vậy số nghiệm thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $|f(\cos 2x)| = 1$ là 9 nghiệm.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2 \sin x + 1) = 2$ là

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có

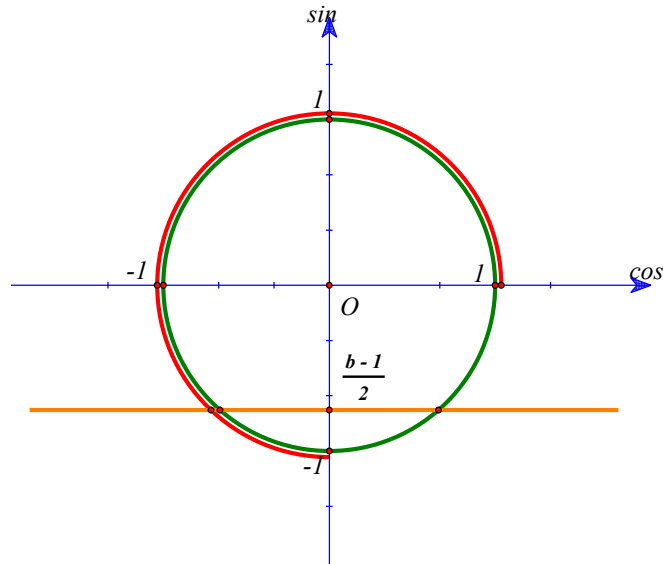
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến của hàm số $f(x)$, ta có $f(2 \sin x + 1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x + 1 = a < -1 \\ 2 \sin x + 1 = b \in (-1; 0) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{a-1}{2} < -1 \\ \sin x = \frac{b-1}{2} \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

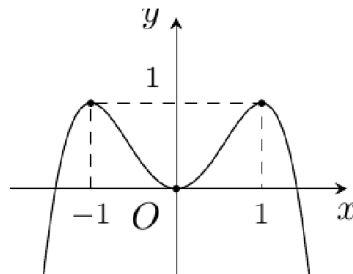
Do $|\sin x| \leq 1$ nên phương trình $\sin x = \frac{a-1}{2}$ vô nghiệm.

Xét đường tròn lượng giác



Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình $\sin x = \frac{b-1}{2} \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(f(x))$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

A. 5.

B. 10.

C. 4.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

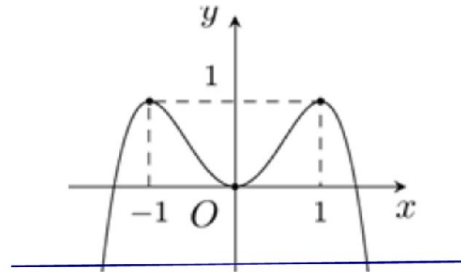
Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)) \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)) = 0 & (2) \end{cases}$

+ Xét phương trình (1) $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

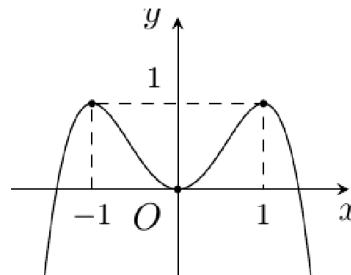
+ Xét phương trình (2) $\Leftrightarrow f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$

+ Trường hợp 1: Dựa vào đồ thị:



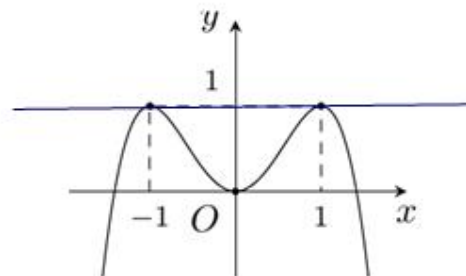
Phương trình $f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \ (a < -1) \\ x = b \ (b > 1) \end{cases}$

+ Trường hợp 2: Dựa vào đồ thị:



Phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = c \ (c < -1) \\ x = 0 \\ x = d \ (d > 1) \end{cases}$

+ Trường hợp 3: Dựa vào đồ thị:



Phương trình $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	-2	0	$-\infty$

Số nghiệm phương trình $f(\cos x) = -1$ thuộc đoạn $\left[\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ là:

A. 2.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = x_1 \in (-\infty; -1) & (1) \\ \cos x = x_2 \in (-1; 0) & (2) \\ \cos x = x_3 \in (0; 1) & (3) \\ \cos x = x_4 \in (1; +\infty) & (4) \end{cases}$$

Phương trình (1) và (4) vô nghiệm.

Xét trên đường tròn lượng giác dễ thấy:

Trên đoạn $\left[\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ phương trình (2) có 3 nghiệm và phương trình (3) có 4 nghiệm nên số nghiệm phương trình $f(\cos x) = -1$ là 7 nghiệm.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	5	2	4	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x^4 - 2x^2) - 3 = 0$ là

A. 12.

B. 8.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $y = x^4 - 2x^2$.

Ta có:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Từ BBT của $y = x^4 - 2x^2$ suy ra $y \in [-1; +\infty)$

$t \in (-1; 0)$ cho ta 4 nghiệm x .

$t \in (0; +\infty)$ cho ta 2 nghiệm x .

Xét phương trình $f(t) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = 3$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(t) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \alpha_1 \in (-1; 0) \\ t = \alpha_2 \in (0; 1) \\ t = \alpha_3 \in (1; +\infty) \end{cases}$.

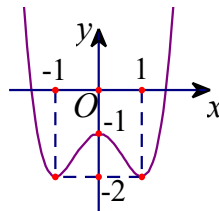
$t = \alpha_1 \in (-1; 0)$ cho ta 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 .

$t = \alpha_2 \in (0; 1)$ cho ta 2 nghiệm x_5, x_6 .

$t = \alpha_3 \in (1; +\infty)$ cho ta 2 nghiệm x_7, x_8 .

Vậy PT có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Phương trình $|f(x+1)| = \frac{3}{2}$ có bao nhiêu nghiệm âm phân biệt?



A. 3.

B. 4.

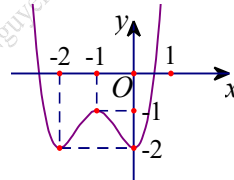
C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị (C_1) của hàm số $y = f(x+1)$ vẽ được bằng cách tịnh tuyến đồ thị (C) sang trái 1 đơn vị ta được đồ thị như hình vẽ bên dưới

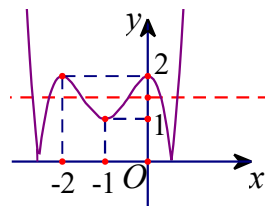


Đồ thị (C_2) của hàm số $y = |f(x+1)|$ vẽ được bằng cách

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) nằm phía trên trục hoành và những điểm trên trục hoành ta được đồ thị (C_3) .

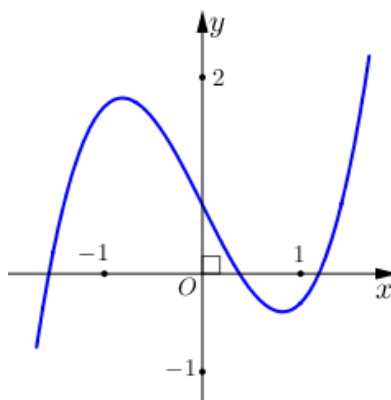
+ Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị (C_1) nằm phía dưới trục hoành ta được đồ thị (C_4) .

+ Khi đó $(C_2) = (C_3) \cup (C_4)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C_2) dễ thấy phương trình $|f(x+1)| = \frac{3}{2}$ có 4 nghiệm âm phân biệt.

Câu 43. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(-x^2 + 2x)| = 1$ là



A. 6.

B. 4.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = g(x) = -x^2 + 2x$ (1). Ta có $g'(x) = -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

Phương trình $|f(-x^2 + 2x)| = 1$ (2) trở thành: $|f(t)| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 1 \\ f(t) = -1 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị ta có:

+ Phương trình $f(t) = 1$ có 3 nghiệm $t_1; t_2; t_3$ thỏa mãn $t_1 < -1 < t_2 < 1 < t_3$.

+ Phương trình $f(t) = -1$ có 1 nghiệm t_4 thỏa mãn $t_4 < -1$.

Dựa vào bảng biến thiên $t = g(x)$ ta có với $t < 1$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1); $t = 1$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1); $t > 1$ thì không có giá trị x thỏa mãn (1).

Từ đó suy ra phương trình $f(-x^2 + 2x) = 1$ có 4 nghiệm phân biệt; phương trình $f(-x^2 + 2x) = -1$ có 2 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình (2) có 6 nghiệm.

C. BIỆN LUẬN NGHIỆM THÔNG QUA ĐỒ THỊ

- Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x) = A(m)$.
- Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng nằm ngang $y = A(m)$.

Lưu ý: Có thể đề bài cho bảng biến thiên và cần nắm vững biến đổi đồ thị hàm trị tuyệt đối.

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA

C1. BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN HÀM F(X)

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
y'	$-$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$	3	$-\infty$	5	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) + 4 = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

- A.** $(1;9)$. **B.** $[1;9)$. **C.** $(1;9]$. **D.** $(-3;5)$.

Lời giải

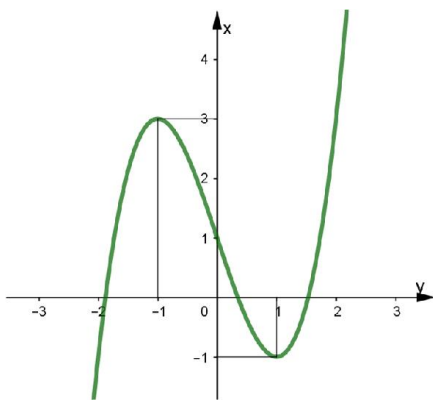
Chọn A

$$f(x) + 4 = m \Leftrightarrow f(x) = m - 4$$

Dựa vào BBT, ta thấy đường thẳng $y = m - 4$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-3 < m - 4 < 5 \Leftrightarrow 1 < m < 9$.

Vậy phương trình $f(x) + 4 = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $1 < m < 9$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $f(x) = \log_3 m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt?



- A.** 3. **B.** 25. **C.** 26. **D.** 27.

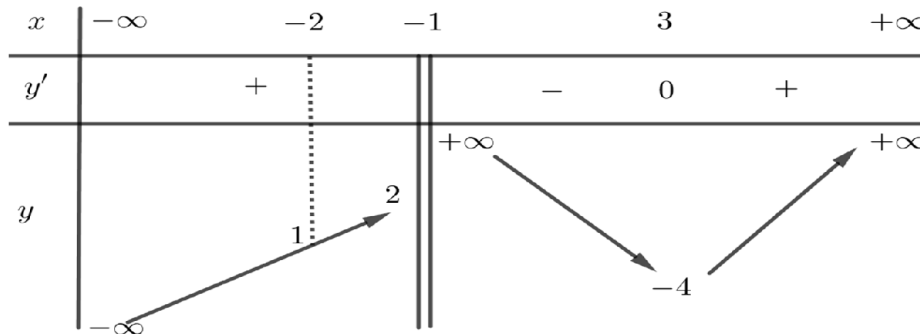
Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, phương trình $f(x) = \log_3 m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m > 0 \\ -1 < \log_3 m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{1}{3} < m < 27 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m < 27.$$

Do m là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots; 26\}$. Vậy có 26 giá trị của m .

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau



Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa: $x_1 \leq -2 < x_2 < 3 < x_3$.

A. $(-4; 1)$.

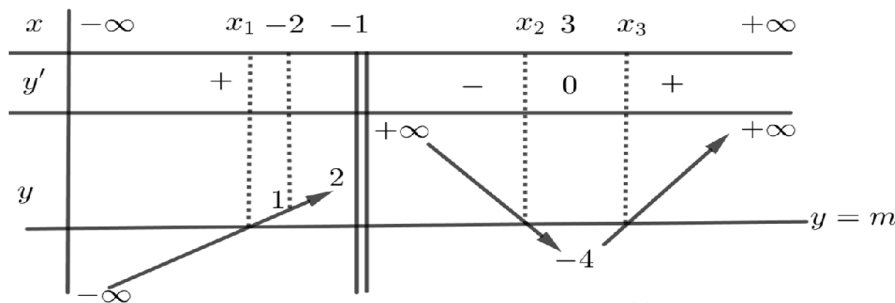
B. $[1; 2)$.

C. $(-4; 1]$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

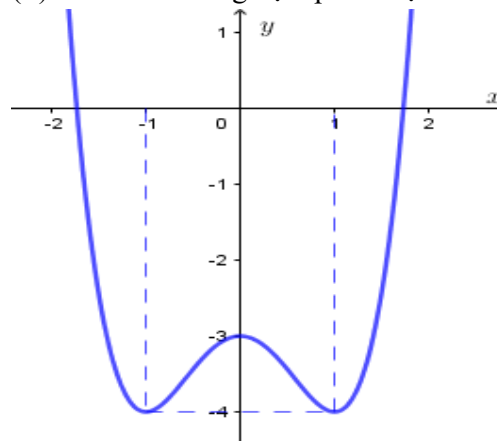
Chọn C



Dựa vào BBT, ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa: $x_1 \leq -2 < x_2 < 3 < x_3$ khi và chỉ khi $-4 < m \leq 1$.

Vậy $-4 < m \leq 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt:



A. $-4 < m < -3$.

B. $m > -3$.

C. $-3 < m < -2$.

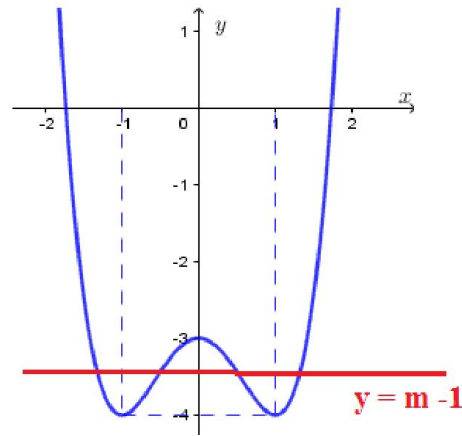
D. $-5 < m < -4$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $f(x) + 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m - 1$

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m - 1$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m - 1$ (như hình vẽ).



Nhìn vào đồ thị ta có để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $-4 < m - 1 < -3 \Leftrightarrow -3 < m < -2$.

Câu 5. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $m = 3$.

B. $0 \leq m \leq 3$.

C. $0 < m < 3$.

D. $m > 0$.

Lời giải

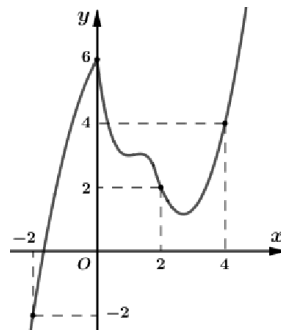
Chọn C

Ta có số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Do đó, dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 3$.

C2. HÀM HỢP HÀM ẨN BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN HÀM $F(x)$, $F'(x)$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2 \log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$.



A. 9.

B. 6.

C. 5.

D. 4

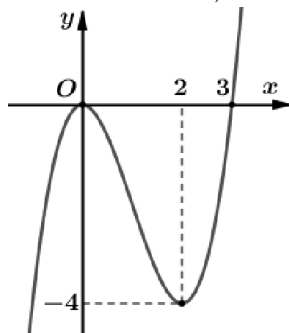
Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2 \log_2 x$, $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow t \in [-2; 2)$

Phương trình $f(2\log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất thuộc nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; 2\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm duy nhất thuộc $[-2; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m = 6 \end{cases}$
 $\Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1) = m$ có nghiệm.



A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

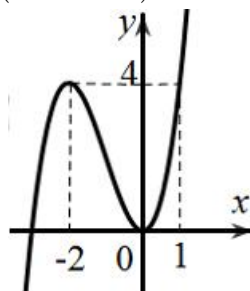
Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1 = 4\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - 1 = 3 - 3\sin^2 2x \Rightarrow t \in [0; 3]$$

Phương trình $f(4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc $[0; 3] \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0 \Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $[0; 1]$.

A. $[0; 4]$.B. $[-1; 0]$.C. $[0; 1]$.D. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

Lời giải

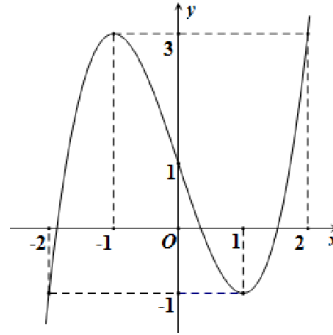
Chọn D

$$\text{Đặt } t = x^2 + 2x - 2. \text{ Với } x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [-2; 1]$$

Phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ khi và chỉ khi phương trình

$$f(t) = 3m + 1 \text{ có nghiệm thuộc } [-2; 1] \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(3 - \sqrt{4 - x^2}) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$. Tìm tập S .



- A.** $S = (-1; f(3 - \sqrt{2})]$. **B.** $S = (f(3 - \sqrt{2}); 3]$. **C.** $S = \emptyset$. **D.** $S = [-1; 3]$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $f(3 - \sqrt{4 - x^2}) = m$. Điều kiện $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = 3 - \sqrt{4 - x^2}$ với $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$. Ta có $t' = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ và $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $t = 3 - \sqrt{4 - x^2}$ trên đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$

x	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{3}$
t'	-	0	+
t	$3 - \sqrt{2}$	1	2

Nhận xét:

- +) Mỗi $t \in (1; 3 - \sqrt{2}]$ cho ta 2 giá trị $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$
- +) Mỗi $t \in (3 - \sqrt{2}; 2]$ cho ta một giá trị $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$.
- +) $t = 1$ cho ta 1 nghiệm duy nhất $x = 0$.

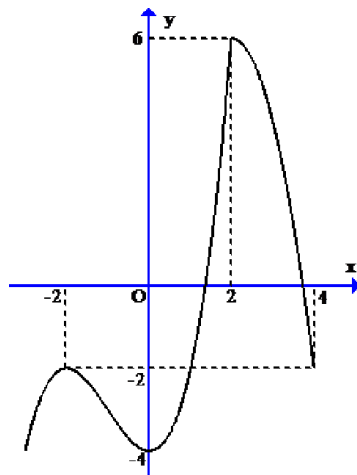
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đường thẳng $y = m$ chỉ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ nhiều nhất tại một điểm trên $[1; 2]$.

Do đó, để phương trình $f(3 - \sqrt{4 - x^2}) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ thì

$$m \in (f(1); f(3 - \sqrt{2})] \Leftrightarrow m \in (-1; f(3 - \sqrt{2})]$$

Vậy, các giá trị của m cần tìm là $m \in (-1; f(3 - \sqrt{2})]$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$?

A. 11.

B. 9.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}+1\right)+6\left(\frac{x}{2}+1\right)=3m+6 \Leftrightarrow f(t)+6t=3m+6$$

Với $t = \frac{x}{2}+1$ và $x \in [-2; 2]$ nên ta có $t \in [0; 2]$.

Xét hàm số $y = f(t) + 6t$ trên $[0; 2]$.

Ta có $y' = f'(t) + 6 > 0, \forall t \in [0; 2]$.

Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \min_{[0;2]} (f(t) + 6t) \leq 3m + 6 \leq \max_{[0;2]} (f(t) + 6t) \Leftrightarrow f(0) \leq 3m + 6 \leq f(2) + 12$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq 3m + 6 \leq 6 + 12$$

$$\Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq 4.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	3	-2	5	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f(\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x) = m$ (1) có đúng sáu nghiệm phân biệt trên nửa khoảng $\left(0; \frac{17\pi}{12}\right]$

?

A. 4.

B. 5.

C. 8.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$.

Phương trình (1) trở thành $f(t) = m(2)$.

Với $x \in \left(0; \frac{17\pi}{12} \right] \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{2} \right] \Rightarrow 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \in [-2; 2]$

Với mỗi giá trị $\begin{cases} 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \in [-2; -\sqrt{3}] \\ 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \end{cases}$ cho ta hai nghiệm phân biệt thuộc nửa khoảng $\left(0; \frac{17\pi}{12} \right]$

Với mỗi giá trị $2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \in (-\sqrt{3}; 2)$ cho ta ba nghiệm phân biệt thuộc nửa khoảng $\left(0; \frac{17\pi}{12} \right]$

Từ đó, phương trình (1) có đúng 6 nghiệm phân biệt trên nửa khoảng $\left(0; \frac{17\pi}{12} \right]$

khi và chỉ khi phương trình (2) có đúng 2 nghiệm $t \in (-\sqrt{3}; 2)$, các nghiệm khác (nếu có) nằm ngoài $(-\sqrt{3}; 2)$.

Dựa vào BBT, có $m \in (-2; 3)$, vậy có 4 giá trị m nguyên thỏa mãn đề.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	1			5			$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-				
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$\nearrow$			10	$\searrow$	$-\infty$
					-3					

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2020]$ để phương trình $|f(e^{x^2} + 4)| = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. 2010.

B. 10.

C. 2011.

D. 2020.

Lời giải

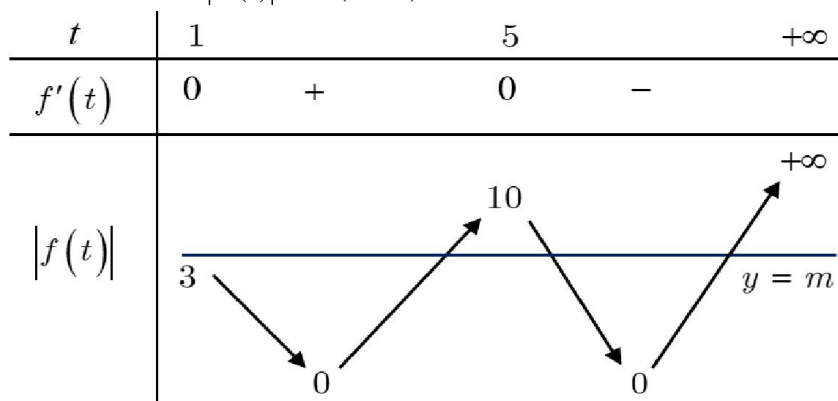
Chọn C

Đặt $t = e^{x^2} + 4$, điều kiện $t > 5$, từ đó phương trình trở thành $|f(t)| = m, t > 5$.

Do $t > 5$ nên ta xét bảng biến thiên của hàm $y = f(t)$ trên $(5; +\infty)$ như sau:

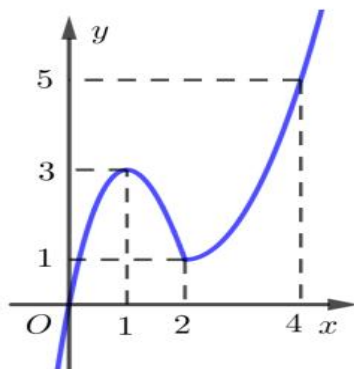
t	1	5	$+\infty$		
$f'(t)$	0	+	0	-	
$f(t)$			10		$-\infty$
		-3			

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(t)|$ trên $(1; +\infty)$ là



Cứ mỗi nghiệm $t > 5$ cho được hai nghiệm x , do vậy để phương trình $|f(e^{x^2} + 4)| = m$ có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình $|f(t)| = m$ cần có 1 nghiệm $t > 5$. Dựa bảng biến thiên của hàm $y = |f(t)|$ ở trên ta có điều kiện $m \geq 10$, mặt khác m nguyên nên $m \in \{10; 11; \dots; 2020\}$. Vậy có 2011 số thỏa mãn.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\frac{6x^2}{x^4 + x^2 + 1} + 2\right) + 1 = m$ có nghiệm?



A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f\left(\frac{6x^2}{x^4 + x^2 + 1} + 2\right) + 1 = m \Leftrightarrow f\left(\frac{6x^2}{x^4 + x^2 + 1} + 2\right) = m - 1.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{6x^2}{x^4 + x^2 + 1} + 2$$

$$t' = \frac{12x(x^4 + x^2 + 1) - 6x^2(4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 1)^2} = \frac{12x(1 - x^4)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

BBT

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
			4		4		4		4
	2			2		2		2	

$$\Rightarrow 2 \leq t \leq 4$$

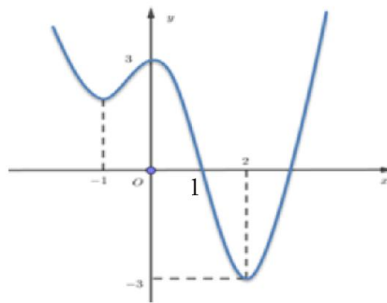
Ta được phương trình $f(t) = m - 1$, với $t \in [2; 4]$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m - 1$ có nghiệm $t \in [2; 4]$.

Dựa vào đồ thị, ta có $1 \leq m - 1 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 6$.

Vậy có 5 giá trị m nguyên.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 2)$.



A. $(-3; 0)$.

B. $(-3; 3)$.

C. $(0; 3)$.

D. $[-3; 0]$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = e^x$. Với $x \in (0; \ln 2) \Rightarrow t \in (1; 2)$

Phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 2)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1; 2) \Leftrightarrow -3 < m < 0$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	10	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Bất phương trình $e^{\sqrt{x}} \geq m - f(x)$ có nghiệm thuộc $[4; 9]$ khi và chỉ khi

A. $m < f(2) + e^2$.

B. $m \leq f(2) + e^2$.

C. $m \geq f(9) + e^3$.

D. $m \leq f(9) + e^3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $m < e^{\sqrt{x}} + f(x)$.

Xét hàm số $g(x) = e^{\sqrt{x}} + f(x)$ trên $[4; 9]$.

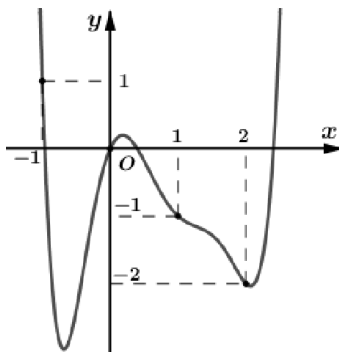
$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} + f'(x) > 0, \forall x \in [4; 9].$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	4	9
$g(x)$	+	
$g'(x)$	$g(4) \rightarrow g(9)$	

Vậy $m \leq \max_{[4;9]} g(x) \Leftrightarrow m \leq e^3 + f(9)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới



Tìm m để bất phương trình $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

- A.** $m \geq 2f(0) - 1$. **B.** $m \leq 2f(0) - 1$. **C.** $m \leq 2f(-1)$. **D.** $m \geq 2f(-1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3 \Leftrightarrow m \leq 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$.

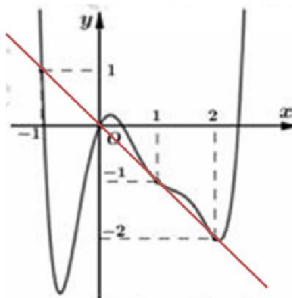
Đặt $g(x) = 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$. Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$.

$$g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2).$$

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$ (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(t)$ và đường thẳng $d: y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$ ta có

$$\text{ta có } f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

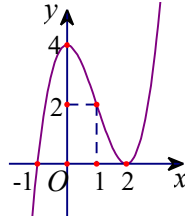
x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$						

Bất phương trình $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow m \leq g(-2) \Leftrightarrow m \leq 2f(0) - 1.$$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Bất phương trình

$$f(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x + m \text{ có nghiệm } x \in [-1; +\infty) \text{ khi và chỉ khi}$$



A. $m \geq f(-1) - \frac{1}{2}.$

B. $m \leq f(-1) - 2.$

C. $m \geq f(-1) - 2.$

D. $m \geq f(-1) + 2.$

Lời giải

Chọn B

$$f(x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x + m \Leftrightarrow m \geq f(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Xét $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ trên $[-1; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{2} > 0, \forall x \in [-1; +\infty)$

$\Rightarrow g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là hàm số đồng biến trên $[-1; +\infty)$.

Để bất phương trình $f(x) - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq m$ có nghiệm $x \in [-1; +\infty)$ thì:

$$m \geq \min_{x \in [-1; +\infty)} g(x) = f(-1) - 2 \Rightarrow m \geq f(-1) - 2.$$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	1	$+\infty$

Bất phương trình $2f(x) < e^{\cos x} + m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1.$

B. $m > 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1.$

C. $m \geq 2f(0) - e.$

D. $m > 2f(0) - e.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $m > 2f(x) - e^{\cos x}.$

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - e^{\cos x}$

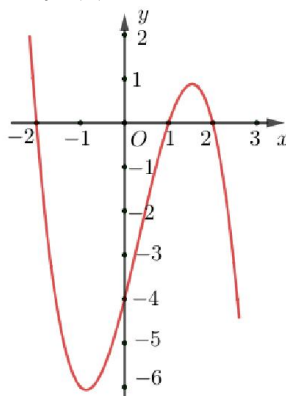
$$g'(x) = 2f'(x) + \sin x \cdot e^{\cos x} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$		+	
$g'(x)$	$g(0)$	→ $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$	

$$\text{Vậy } m \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m \geq 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1.$$

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Bất phương trình $f(x) + x^2 > m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 0)$ khi và chỉ khi

A. $m \leq f(0)$.

B. $m < f(0)$.

C. $m < f(-1) + 1$.

D. $m \leq f(-1) + 1$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x^2$. Ta có $g'(x) = f'(x) + 2x < 0, \forall x \in (-1; 0)$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	-1		0
$g(x)$		-	
$g'(x)$	$g(-1)$	→ $g(0)$	

Ta có: $m \leq g(0) \Leftrightarrow m \leq f(0)$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	4	$-\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Bất phương trình $f(x) + e^x - 2m > 0$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (2; 3)$ khi và chỉ khi

A. $m < \frac{1}{2}[f(2) + e^2]$.

B. $m \leq \frac{1}{2}[f(2) + e^2]$.

C. $m \geq \frac{1}{2}[f(3) + e^3]$.

D. $m < \frac{1}{2}[f(3) + e^3]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2m < f(x) + e^x$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + e^x, \forall x \in (2; 3)$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) + e^x > 0, \forall x \in (2; 3)$.

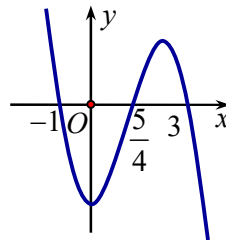
Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	2	3
$g(x)$		+
$g'(x)$		

$g(2) \rightarrow g(3)$

$$\text{Vậy } 2m \leq g(2) \Leftrightarrow 2m \leq f(2) + e^2 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}[f(2) + e^2].$$

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq r$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$ (1).

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là $-1, \frac{5}{4}, 3$.

Do đó $f'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m < 0$. Hay $f'(x) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n = -\frac{13}{3}m$, $p = -m$ và $q = 15m$.

Khi đó bất phương trình $f(x) \geq r \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx \geq 0$

$$\Leftrightarrow m\left(x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x\right) \geq 0 \quad (3).$$

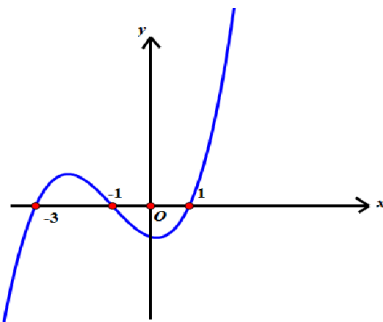
Do $m < 0$ nên (3) $\Leftrightarrow 3x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 45x \leq 0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{5}{3}; 0\right] \text{ hoặc } x = 3.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) \geq r$ là $S = \left[-\frac{5}{3}; 0\right] \cup \{3\}$.

Do đó S có ba giá trị nguyên là $-1; 0; 3$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = m + n + p + q + r$ có số phần tử là

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là $-3, -1, 1$.

Do đó $f'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x+3)$ và $m > 0(1)$.

Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x)$ trục Ox đường thẳng $x = -3, x = -1$.

$$\text{Suy ra } S_1 = \int_{-3}^{-1} |f'(x)| dx = f(-1) - f(-3) = \int_{-3}^{-1} |4m(x+1)(x+3)(x-1)| dx = 16m(2).$$

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x)$ trục Ox đường thẳng $x = -1, x = 1$.

$$\text{Suy ra } S_2 = \int_{-1}^1 |f'(x)| dx = f(1) - f(-1) = \int_{-1}^1 |4m(x+1)(x+3)(x-1)| dx = 16m(3).$$

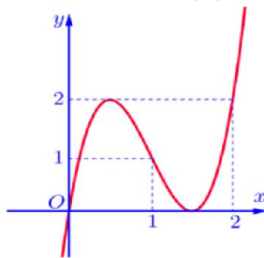
Từ (1), (2), (3) ta có $S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow f(-3) - f(1) = 0$ hay $f(-3) = f(1)$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			$f(-1)$			$f(1)$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = m + n + p + q + r \Leftrightarrow f(x) = f(1)$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm m để bất phương trình $f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; \pi)$.

A. $m > f(1) - \frac{1}{2}$.

B. $m \geq f(1) - \frac{1}{2}$.

C. $m \geq f(0) - \frac{1}{2}$.

D. $m > f(0) - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Với $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x \in (0; 1]$. Đặt $2\sin x = t \in (0; 2]$ ta được bất phương trình:

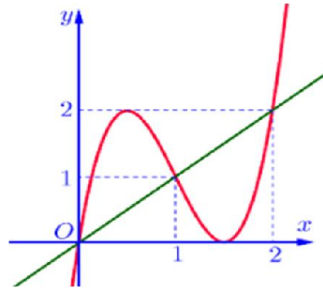
$$f(t) - \frac{1}{2}t^2 < m \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán (*) nghiệm đúng với $t \in (0; 2] \Leftrightarrow m > \max_{(0;2]} g(t)$ với $g(t) = f(t) - \frac{1}{2}t^2$.

Xét hàm số $g(t) = f(t) - \frac{1}{2}t^2$ với $t \in (0; 2]$.

Ta có $g'(t) = f'(t) - t$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t$ (1).

Nghiệm của phương trình (1) chính là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = t$ và đồ thị hàm số $f'(t)$.



Ta có $g'(t) > 0$ khi đồ thị $f'(t)$ nằm trên đường thẳng $y = t$; $g'(t) < 0$ khi đồ thị $f'(t)$ nằm dưới đường thẳng $y = t$.

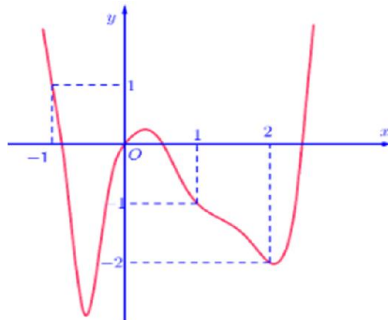
Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

t	0	1	2
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	$g(1)$		

Suy ra $\max_{(0;2]} g(t) = g(1) = f(1) - \frac{1}{2}$.

Vậy $m > f(1) - \frac{1}{2}$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm m để bất phương trình $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.

A. $m \geq 2f(0) + 1$. **B.** $m \leq 2f(0) - 1$. **C.** $m \leq 2f(-1)$. **D.** $m \geq 2f(-1)$.

Lời giải

Chọn B

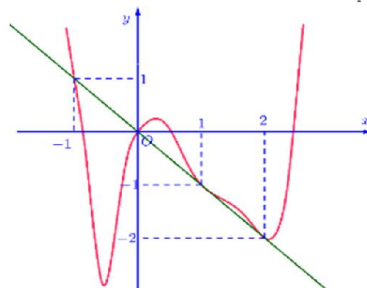
Ta có: $m - x^2 \leq 2f(x+2) + 4x + 3 \Leftrightarrow m \leq 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq \min_{(-3;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$.

Ta có $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4 = 2[f'(t) + t]$ với $t = x+2$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t$ (1).

Nghiệm của phương trình (1) chính là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -t$ và đồ thị hàm số $f'(t)$.



Ta có $g'(x) > 0$ khi đồ thị $f'(t)$ nằm trên đường thẳng $y = -t$; $g'(x) < 0$ khi đồ thị $f'(t)$ nằm dưới đường thẳng $y = -t$.

$$\Rightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(t) > -t \Rightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 < -1 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > -2 \end{cases}.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên (nghiệm bội chẵn tức điểm tiếp xúc không tham gia vào quá trình xét dấu) của hàm $g(x)$ như sau:

x	-3	-2	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$			$+\infty$

$g(-2)$

$$\text{Suy ra } \min_{(-3;+\infty)} g(x) = g(-2) = 2f(0) - 1 \Rightarrow m \leq 2f(0) - 1, \forall x \in (-3;+\infty).$$

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(-2) = m+1, f(1) = m-2$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	-2	$+\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3} \leq m$ có nghiệm

$x \in [-2; 1]$ là:

- A. $\left(-5; -\frac{7}{2}\right)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-2; 7)$. D. $\left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $g(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3} \leq m$ có nghiệm $x \in [-2; 1] \Leftrightarrow \min_{[-2;1]} g(x) \leq m$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3}$. Ta có $g'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{5}{(x+3)^2}$.

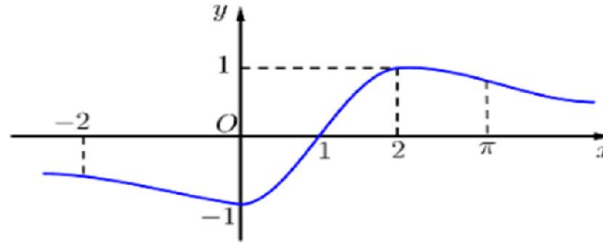
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) \leq 0, \forall x \in (-2; 1)$ và

$$-\frac{5}{(x+3)^2} < 0, \forall x \in (-2; 1). \text{ Do đó } g'(x) < 0, \forall x \in (-2; 1).$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-2;1) \Rightarrow \min_{[-2;1]} g(x) = g(1)$.

$$\text{Vậy } g(1) \leq m \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(1) - \frac{3}{4} \leq m \Leftrightarrow \frac{m-2}{2} - \frac{3}{4} \leq m \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq m.$$

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;3]$ khi và chỉ khi:

- A.** $m < f(0)$. **B.** $m < f(1) - 1$. **C.** $m < f(-1) + 1$. **D.** $m < f(2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) > \sin \frac{\pi x}{2} + m \Leftrightarrow m < f(x) - \sin \frac{\pi x}{2} = g(x).$$

$$(Ycbt) \Leftrightarrow m < \min_{[-1;3]} g(x).$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = f(x) - \sin \frac{\pi x}{2}, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}.$$

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua $x = 1$ gợi ý cho ta xét dấu của hàm $g'(x)$ trên 2 khoảng $(-1;1)$ và $(1;3)$.

□ Với $x \in (-1;1)$

$$\forall x \in (-1;1) \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ (đồ thị } f'(x) \text{ nằm dưới trục hoành)}.$$

$$x \in (-1;1) \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} < 0, \forall x \in (-1;1).$$

$$\text{Vậy } g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} < 0, \forall x \in (-1;1).$$

□ Với $x = 1$

$$g'(1) = f'(1) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi \cdot 1}{2} = 0.$$

□ Với $x \in (1;3)$

$$\forall x \in (1;3) \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ (đồ thị } f'(x) \text{ nằm trên trục hoành)}.$$

$$x \in (1;3) \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} > 0, \forall x \in (1;3).$$

$$\text{Vậy } g'(x) = f'(x) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} > 0, \forall x \in (1;3).$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	-1	1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$f(-1) + 1$	$f(1) - 1$	$f(3) + 1$

Suy ra $\min_{[-1;3]} g(x) = f(1) - 1$.

Vậy $m < f(1) - 1$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây:

x	-1	1	3
$f'(x)$	1	3	2

Tìm m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

- A.** $m < f(0)$. **B.** $m \leq f(0)$. **C.** $m \leq f(3)$. **D.** $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ycbt $\Leftrightarrow m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0;3]} g(x)$ với $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ với $x \in (0; 3)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 2x$.

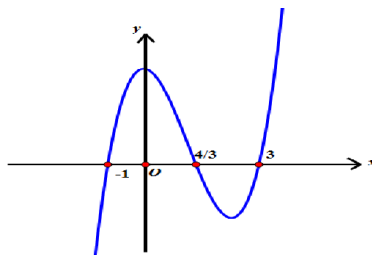
Từ bảng biến thiên ta có $f'(x) > 1$ với $x \in (0; 3)$ và $-x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2 \leq 1, \forall x \in (0; 3)$

$\Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (0; 3)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; 3) \Rightarrow \min_{[0;3]} g(x) = g(0)$.

Vậy $m \leq g(0) = f(0) - \frac{1}{3} \cdot 0^2 - 0^2 = f(0)$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là $-1, \frac{4}{3}, 3$.

Do đó $f'(x) = \frac{4}{3}m(x+1)(3x-4)(x-3)$ và $m > 0(1)$.

Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x)$ trục Ox đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$.

Suy ra

$$S_1 = \int_0^{\frac{4}{3}} |f'(x)| dx = f\left(\frac{4}{3}\right) - f(0) = \int_0^{\frac{4}{3}} \left| \frac{4}{3} m(x+1)(3x-4)(x-3) \right| dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{776}{81} m = \frac{3104}{243} m(2).$$

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x)$ trục Ox đường thẳng $x = \frac{4}{3}$, $x = 3$.

Suy ra:

$$S_2 = \int_{\frac{4}{3}}^3 |f'(x)| dx = f(3) - f\left(\frac{4}{3}\right) = \int_{\frac{4}{3}}^3 \left| \frac{4}{3} m(x+1)(3x-4)(x-3) \right| dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{2375}{324} m = \frac{2375}{243} m(3).$$

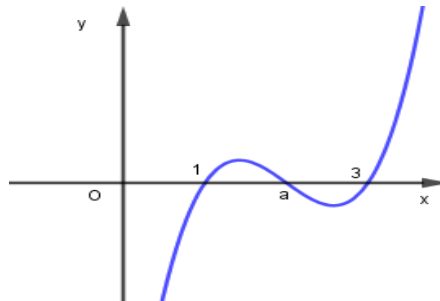
Từ (1), (2), (3) ta có $S_1 - S_2 > 0 \Leftrightarrow f(3) - f(0) > 0$ hay $f(3) > f(0)$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{4}{3}$	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			-5		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = r$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, (với $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$) và $1 < a < 3$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập hợp các giá trị của a để phương trình $f(x) + 3mx - r = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là một khoảng $(b; c)$. Tính $b + c$.

- A. 4. B. 3. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q.$$

$$f'(x) \text{ có 3 nghiệm } 1; a; 3 \Rightarrow f'(x) = 4m \left[x^3 - (a+4)x^2 + (4a+3)x - 3a \right]$$

$$\Rightarrow f(x) = m \left[x^4 - \frac{4a+16}{3} x^3 + (8a+6)x^2 - 12ax \right] + r$$

$$\text{Phương trình } f(x) + 3mx - r = 0 \Leftrightarrow x^4 - \frac{4a+16}{3} x^3 + (8a+6)x^2 - 12ax + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)(3x^2 - (4a+7)x + 12a-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ 3x^2 - (4a+7)x + 12a-3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình $f(x) + 3mx - r = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và 3.

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow 3x^2 - 7x - 3 = 4a(x-3)$.

Do $x=3$ không phải là nghiệm nên (1) $\Leftrightarrow 4a = \frac{3x^2 - 7x - 3}{x-3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		5		$+\infty$	
				17		

Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases} 4a < 5 \\ 4a > 17 \\ 4a \neq f(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{5}{4} \\ a > \frac{17}{4} \\ a \neq \frac{1}{4} \end{cases}$

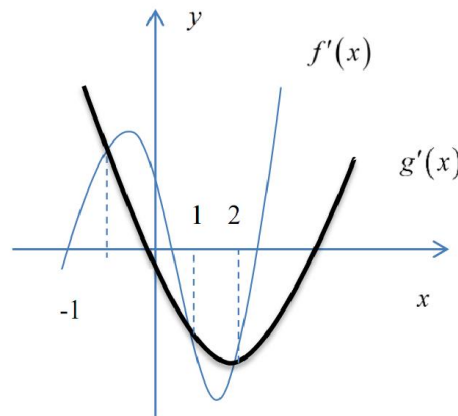
Kết hợp với $1 < a < 3 \Rightarrow 1 < a < \frac{5}{4}$.

Cách 2:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (4a+7)^2 - 12(12a-3) \\ 3 \cdot 0^2 - (4a+7) \cdot 0 + 12a-3 \neq 0 \\ 3 \cdot 3^2 - (4a+7) \cdot 3 + 12a-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 - 88a + 85 > 0 \\ a \neq \frac{1}{4} \\ \forall a \end{cases} \Leftrightarrow a < \frac{5}{4} \vee a > \frac{17}{4}, a \neq \frac{1}{4}.$$

Kết hợp với $1 < a < 3 \Rightarrow 1 < a < \frac{5}{4} \Rightarrow b=1, c=\frac{5}{4} \Rightarrow b+c=\frac{9}{4}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($m, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R}$) và $f(0) = g(0)$. Hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có số phần tử là?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $m \neq 0$.

Ta có $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ và $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$

Lại có $f'(x)$ và $g'(x)$ giao nhau tại 3 điểm nên ta có phương trình $f'(x) = g'(x)$ có 3 nghiệm

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) - g'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-2) = 4m(x^3 - 2x^2 - x + 2)$

Mà ta lại có $f'(x) - g'(x) = 4mx^3 + 3(n-a)x^2 + 2(p-b)x + q - c$

Đồng nhất hệ số ta có $n-a = \frac{-8}{3}m$, $p-b = -2m$, $q-c = 8m$

$f(0) = g(0) \Leftrightarrow r = d$

Vậy $f(x) = g(x) \Leftrightarrow mx^4 + (n-a)x^3 + (p-b)x^2 + (q-c)x + r - d = 0$

$\Leftrightarrow mx^4 - \frac{8}{3}mx^3 - 2mx^2 + 8mx = 0 \Leftrightarrow x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x = 0$. Phương trình có 2 nghiệm.

D. MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO THƯỜNG GẶP

BÀI TOÁN 1. BIỆN LUẬN TƯƠNG GIAO HÀM BẬC BA VỚI ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán tổng quát: Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K ? (dạng có điều kiện)

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$

Đưa về phương trình bậc ba và nhằm nghiệm đặc biệt $x = x_0$ để chia Hoochner được:

$$(x - x_0) \cdot (ax^2 + b'x + c') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác

$$x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \cdot \text{Giải hệ này, tìm được giá trị } m \in D_1.$$

Bước 3. Gọi $A(x_0; px_0 + q)$, $B(x_1; px_1 + q)$, $C(x_2; px_2 + q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b'}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c'}{a}$ (1)

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của x_1, x_2 (2)

Thế (1) vào (2) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m . Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

Một số công thức tính nhanh “thường gặp” liên quan đến cấp số

Ả Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = -\frac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\frac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ả Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$

Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) cắt đường thẳng $d: y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

A. $m > -2$.

B. $m = -2$.

C. $m > -3$.

D. $m = -3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$x^3 - 3x^2 + 2 = m(x - 1) \quad (1)$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx + 2 + m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ f(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x = 1$, vậy để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + 2 > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

Vậy $m > -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?

A. $x_B + y_B = -5$

B. $x_B + y_B = -2$

C. $x_B + y_B = 4$

D. $x_B + y_B = 7$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và $y = x^3 - x + 3$:

$$x^3 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A(1; 3); B(-2; -3) \Rightarrow x_B + y_B = -5$$

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là **đúng** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?

- A.** $m_1 + m_2 = 0$. **B.** $m_1^2 + 2m_2 > 4$. **C.** $m_2^2 + 2m_1 > 4$. **D.** $m_1 - m_2 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m)

$$\begin{aligned} x^3 + 3mx^2 - m^3 &= m^2x + 2m^3 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^3 - m^2x) + (3mx^2 - 3m^3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 - m^2) + 3m(x^2 - m^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 3m)(x^2 - m^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3m \\ x = m \\ x = -m \end{cases} \end{aligned}$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$$\text{Khi đó, } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + (-m)^4 + (-3m)^4 = 83$$

$$\Leftrightarrow 83m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m_1 = 1, m_2 = -1$ hay $m_1 + m_2 = 0$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

- A.** $m \in (-\infty; -4)$. **B.** $m \in (-4; 0)$.
C. $m \in (0; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			0				$+\infty$
	$-\infty$				-4		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt khi $-4 < m < 0$

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$

- A.** $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$ **B.** $m \in (-2; +\infty)$

C. $m \in \mathbb{R}$ D. $m \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - mx + m + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 \end{cases} \text{ Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm}$$

phân biệt thì phương trình $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Hay

$$\begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ 1 - 2 - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2. \text{ Với } m > -2 \text{ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là}$$

 $1, x_1, x_2$ (x_1, x_2 là nghiệm của $x^2 - 2x - m - 1 = 0$). Mà $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$ suy ra điểm có hoành độ $x=1$
luôn là trung điểm của hai điểm còn lại. Nên luôn có 3 điểm A, B, C thỏa mãn $AB = BC$ Vậy $m > -2$.

Câu 6. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + (m^2 - 2)x + 2m^2 + 4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

A. $m = \pm 2$.B. $m = \pm 1$.C. $m = \pm \sqrt{3}$.**D. $m = \pm \sqrt{2}$.**

Lời giải

Chọn DGiao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là $B(0; 2m^2 + 4)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là:

$$x^3 + (m^2 - 2)x + 2m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + m^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ (x-1)^2 + m^2 + 1 = 0 \quad (vn) \end{cases}$$

Giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là $A(-2; 0)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2m^2 + 4) = 8 \Rightarrow m = \pm \sqrt{2}$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. $m \in (-\infty; -1)$ B. $m \in (-\infty; +\infty)$ C. $m \in (1; +\infty)$ **D. $m \in (-\infty; 3)$**

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \end{cases}$$

Đặt nghiệm $x_2 = 1$. Từ giả thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Khi đó phương trình $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Viet rõ ràng $x_1 + x_3 = 2 = 2x_2$)

Vậy ta chỉ cần $\Delta' = 1 - (m - 2) > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m \in (2; +\infty]$.B. $m \in (-\infty; -2]$.**C. $m \in (-2; 2)$.**D. $m \in [-2; 2]$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$, $y' = 3x^2 + 6x$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		0	0	
		$+$	$-$	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số

$y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra PT (*) có 3 nghiệm phân biệt khi $-2 < m < 2$.

Câu 9. Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?

A. $x_B + y_B = -5$

B. $x_B + y_B = -2$

C. $x_B + y_B = 4$

D. $x_B + y_B = 7$

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $x^3 - x + 3 = 2x + 1$

Giải phương trình ta được $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Vì $x_B < x_A$ Vậy $x_B = 1; y_B = 3 \Rightarrow x_B + y_B = 4$

BÀI TOÁN 2. TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ NHẤT BIẾN (CHỨA THAM SỐ)

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) . Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = \alpha x + \beta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn điều kiện K?

Phương pháp giải

□ **Bước 1.** (Bước này giống nhau ở các bài toán tương giao của hàm nhất biến)

Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C) : $\frac{ax+b}{cx+d} = \alpha x + \beta$

$$\Leftrightarrow g(x) = \alpha cx^2 + (\beta c + \alpha d - a)x + \beta d - b = 0, \forall x \neq -\frac{d}{c}.$$

- Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có nghiệm nghiệm phân biệt

$$\neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} c\alpha \neq 0; \Delta > 0 \\ g\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0 \end{cases}. \text{ Giải hệ này, ta sẽ tìm được } m \in D_1 \text{ (i)}$$

-Gọi $A(x_1; \alpha x_1 + \beta)$, $B(x_2; \alpha x_2 + \beta)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $g(x) = 0$ Theo Viét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta c + \alpha d - a}{c\alpha}; P = x_1 x_2 = \frac{\beta d - b}{\alpha c} \text{ (ii)}$$

□ **Bước 2.**

-Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của x_1, x_2 (iii)

-Thế (ii) vào (iii) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải nó sẽ tìm được $m \in D_2$ (*)

-Từ (i), (*) $\Rightarrow m \in (D_1 \cap D_2)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Một số công thức tính nhanh “thường gặp” liên quan đến tương giao giữa đường thẳng

$$y = kx + p \text{ và đồ thị hàm số } y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Giả sử $d: y = kx + p$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tại 2 điểm phân biệt M, N .

Với $kx + p = \frac{ax+b}{cx+d}$ cho ta phương trình có dạng: $Ax^2 + Bx + C = 0$ thỏa điều kiện $cx + d \neq 0$, có $\Delta = B^2 - 4AC$. Khi đó:

$$1). M(x_1; kx_1 + p), N(x_2; kx_2 + p) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; k(x_2 - x_1)) \Rightarrow MN = \sqrt{(k^2 + 1)} \frac{\Delta}{A^2}$$

Chú ý: khi $\min MN$ thì tồn tại $\min \Delta, k = \text{const}$

$$2). OM^2 + ON^2 = (k^2 + 1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)2kp + 2p^2$$

$$3). \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = (x_1 \cdot x_2)(1 + k^2) + (x_1 + x_2)kp + p^2$$

$$4). OM = ON \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(1 + k^2) + 2kp = 0$$

Câu 10. Đường thẳng $y = x + 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$

D. $-3 < m < 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho

$$\frac{x-3}{x+1} = x + 2m \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2m)(x+1) = x-3 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m + 3 = 0 \quad (*) \quad (\text{vì khi } x = -1 \text{ thì phương trình trở thành } 0 = -4 \text{ vô lý}).$$

Để đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt. Khi đó m phải thỏa mãn $\Delta'_{(*)} > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m là $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m \in (-\infty; +\infty)$.

B. $m \in (-1; +\infty)$.

C. $m \in (-2; 4)$.

D. $m \in (-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x+3}{x+1} = 2x + m \quad (*)$, với điều kiện xác định $x \neq -1$.

Biến đổi (*) về thành: $2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0$ (**).

Theo yêu cầu đề bài, phương trình (**) cần có hai nghiệm phân biệt khác -1 , tức là:

$$\begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4.2.(m-3) > 0 \\ 2.(-1)^2 + (m+1).(-1) + m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 25 > 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; +\infty).$$

Câu 12. A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$.

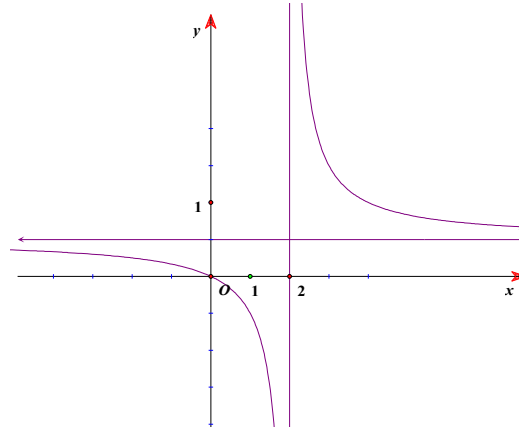
B. 4.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Gọi $A\left(a; \frac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b; \frac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) ($a < 2 < b$).

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = \left(b-a; \frac{b}{b-2} - \frac{a}{a-2}\right) = \left(b-a; \frac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right).$$

$$\text{Áp dụng BĐT Côsi ta có: } (b-2)(2-a) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } AB^2 = (b-a)^2 + \frac{(b-a)^2}{[(b-2)(2-a)]^2} \geq (b-a)^2 + \frac{64}{(b-a)^2} \geq 16$$

$$\Rightarrow AB \geq 4. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = 2 - \sqrt{2} \text{ và } b = 2 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } AB_{\min} = 4.$$

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4.

B. 3.

C. 0.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét phương trình } \frac{x}{x-1} = -x + m, \text{ (điều kiện } x \neq 1).$$

$$\text{Phương trình tương đương } x^2 - mx + m = 0 \quad (1).$$

Đồ thị (C) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ điều kiện cần và đủ là $m < 0 \vee m > 4$.

Khi đó hai giao điểm là $A(x_1; -x_1 + m)$; $B(x_2; -x_2 + m)$.

Ta có $OA = \sqrt{m^2 - 2m}$; $OB = \sqrt{m^2 - 2m}$; $AB = \sqrt{2(m^2 - 4m)}$; $d(O, d) = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$.

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(O, d) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2(m^2 - 4m)} = \frac{OA \cdot OB \cdot AB}{4R}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{2}} \sqrt{2(m^2 - 4m)} = \frac{(m^2 - 2m) \cdot \sqrt{2(m^2 - 4m)}}{4 \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m = 4|m| \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (l)} \\ m = 6 \text{ (n)} \\ m = -2 \text{ (n)} \end{cases}$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

Câu 14. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$ (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

A. $m > -1$.

B. $-5 < m < -1$.

C. $m < -5$.

D. $m < -5$ hoặc $m > -1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{1-x} = x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = x+m-x^2-mx \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m+1)x - (m+1) = 0 \text{ (*)} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m+1) - (m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 > 0 \\ 1 \neq 0 \text{ (t/m)} \end{cases} \Leftrightarrow m < -5 \text{ hoặc } m > -1.$$

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc tọa độ). Giá trị của m bằng

A. 6.

B. 3.

C. -9.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có $y' = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in D$ và đường thẳng $d: y = x - m$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên

d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ với mọi giá trị của tham số m .

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\frac{x+3}{x+1} = x - m$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - m - 3 = 0 \quad (x \neq -1).$$

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - mx - m - 3 = 0$.

Theo định lý Viet, ta có $x_A + x_B = m$.

Mặt khác, $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A + x_B + x_O = 3x_G$

$$\Leftrightarrow x_A + x_B = 6$$

$$\Leftrightarrow m = 6.$$

Vậy $m = 6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m \neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

A. $-\frac{4}{9}$.

B. -4 .

C. -1 .

D. 0 .

Lời giải

Chọn A.

Với $m \neq 0$, xét phương trình $\frac{3x-2m}{mx+1} = 3x-3m \Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0$. (*)

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là: $A(x_1; 3x_1 - 3m), B(x_2; 3x_2 - 3m)$.

Tọa độ các điểm C, D là $C(m; 0)$ và $D(0; -3m)$.

Gọi $h = d_{(O,d)}$ thì h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD .

Theo giả thiết: $S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.h = 2 \cdot \frac{1}{2}CD.h \Leftrightarrow AB = 2CD \Leftrightarrow AB^2 = 4CD^2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + [3(x_1 - x_2)]^2 = 4[m^2 + (-3m)^2]$$

$$\Leftrightarrow 10(x_1 - x_2)^2 = 40m^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 + \frac{4}{3} = 4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}.$$

Vậy tích các giá trị của m là $-\frac{4}{9}$.

BÀI TOÁN 3. TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG (CHỨA THAM SỐ)

. Bài toán tổng quát: Tìm m để đường thẳng $d: y = \alpha$ cắt đồ thị $(C): y = f(x; m) = ax^4 + bx^2 + c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước?

☞ Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4 + bx^2 + c - \alpha = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow at^2 + bt + c - \alpha = 0$ (2)

Tùy vào số giao điểm n mà ta biện luận để tìm giá trị $m \in D_1$. Cụ thể:

• Để $d \cap (C) = n = 4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa điều kiện: } 0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

• Để $d \cap (C) = n = 3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa điều kiện: } 0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

• Để $d \cap (C) = n = 2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương} \Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow m \in D_1. \\ S > 0 \end{cases}$$

• Để $d \cap (C) = n = 1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có đúng 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm kép } = 0 \text{ hoặc } \begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ c - \alpha = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

Bước 2. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của t_1, t_2 (3)

Thế biểu thức tổng, tích vào (3) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m . Giải chúng ta sẽ tìm được $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

Ã Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Ta có: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1), đặt $t = x^2 \geq 0$, thì có: $at^2 + bt + c = 0$ (2)

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương, tức là: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases}$

Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt lần lượt là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi: $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$. Theo định lý Vi - et $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a}$ suy ra

$$t_1 = -\frac{b}{10a}; t_2 = -\frac{9b}{10a}, \text{ kết hợp } t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} \text{ nên có: } 9ab^2 = 100a^2c$$

Tóm lại: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng, thì điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ 9ab^2 = 100a^2c \end{cases}$$

Câu 17. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + (2m - 1) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x^4 - 2mx^2 + (2m - 1) = 0$.

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + (2m - 1) = 0$ (*).

Để phương trình ban đầu có bốn nghiệm thực phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \neq 1 \\ m > 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \text{ hay } m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}.$$

Câu 18. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O , trong đó O là gốc tọa độ.

- A.** $m = 2$. **B.** $m = \frac{3}{2}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$x^4 - 3x^2 - 2 = m \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 - m = 0 \quad (1).$$

Vì $m > 0 \Leftrightarrow -2 - m < 0$ hay phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$$x^2 = \frac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2}} \text{ và } x_2 = -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2}}.$$

Khi đó: $A(x_1; m), B(x_2; m)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O , trong đó O là gốc tọa độ $\Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + m^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2} = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 3 \geq 0 \\ 4m^4 - 12m^2 - 4m - 8 = 0 \end{cases} \xleftarrow[2m^2 - 3 \geq 0]{m > 0} m = 2.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 19. Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là $0, 1, m, n$. Tính $S = m^2 + n^2$.

- A.** $S = 1$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 2$.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ các giao điểm lần lượt là $A(0; 0), B(1; -1), C(m; m^4 - 2m^2), D(n; n^4 - 2n^2)$.

Đường thẳng qua các điểm A, B, C, D có phương trình: $y = -x$.

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm: } x^4 - 2x^2 = -x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Vậy m, n là các nghiệm của phương trình (*).

$$\text{Khi đó: } S = m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = 3.$$

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + (m - 2)x^2 + 8x + 4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

- A.** 8. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } x^4 - 4x^3 + (m - 2)x^2 + 8x + 4 = 0$$

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + (m-2)x^2 + 8x + 4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 $\Leftrightarrow$ có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

$$(*) \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 8x + 4 = (2-m)x^2$$

$$\Leftrightarrow 2-m = x^2 - 4x + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2}$$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của $(C): y = x^2 - 4x + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} (x > 1)$ với đường thẳng $y = 2-m$ song song với trục hoành.

Xét hàm số $y = x^2 - 4x + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} (x > 1)$.

$$y' = 2x - 4 - \frac{8}{x^2} - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 4x^3 - 8x - 8}{x^2}$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \text{ (loại)} \\ x = 1 + \sqrt{3} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	1	$1 + \sqrt{3}$		$+\infty$
y'		-	0	+
y	9			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, $y_{\text{cvt}} \Leftrightarrow 0 < 2-m < 9 \Leftrightarrow -7 < m < 2$.

Vì m nguyên nên $m \in \{-6, -5, \dots, 1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

BÀI TOÁN 4. BIỆN LUẬN m ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN K (HÀM SỐ KHÁC)

Câu 21. Cho hai hàm số $y = \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15; 20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.

A. 210.

B. 85.

C. 119.

D. 105.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3} = |x+2| - x + m$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3} - |x+2| + x = m \quad (1).$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3} - |x-2| + x.$$

Ta có $g'(x) = 4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{|x-2| - (x-2)}{|x-2|} > 0$ với mọi x thuộc các khoảng sau

$(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$ và $(3; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	+	+	+	+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại năm điểm phân biệt nên (C_1) và (C_2) luôn cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt với mọi giá trị của m . Kết hợp điều kiện m nguyên thuộc $(-15; 20)$ nên $m \in \{-14; -13; \dots; 18; 19\}$. Khi đó tổng tất cả các giá trị m là $S = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 85$.

Câu 22. Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1}$ và $y = e^x + 2020 + 3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019; 2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

A. 2692.

B. 2691.

C. 2690.

D. 2693.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} = e^x + 2020 + 3m$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} - e^x - 2020 = 3m \quad (1).$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} - e^x - 2020.$$

Ta có $g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - e^x < 0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$,

$(0; 1)$ và $(1; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2017$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	+	+	+
$g(x)$	-2017	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = 3m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $3m \geq -2017 \Leftrightarrow m \geq -\frac{2017}{3} \approx -672,3$.

Do m nguyên thuộc $(-2019; 2020)$ nên $m \in \{-672; -671; \dots; 2019\}$. Vậy có tất cả 2692 giá trị m thỏa mãn.

Câu 23. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y = (2x^2 + 1)\sqrt{x-1}$ và $y = \frac{11}{3x-4} - \frac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(-\infty; 1]$.

D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $(2x^2 + 1)\sqrt{x-1} = \frac{11}{3x-4} - \frac{1}{2-x} + 11 + m$ (*)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \neq \frac{4}{3} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq \frac{4}{3} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11 = m$$

Xét hàm số $f(x) = (2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11$ trên $[1; +\infty) \setminus \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $\left[1; \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}; 2\right)$, $(2; +\infty)$

$$\text{Ta có, } f'(x) = \left((2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11 \right)'$$

$$= 4x\sqrt{x-1} + (2x^2 + 1) \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{33}{(3x-4)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{10x^2 - 8x + 1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{33}{(3x-4)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} > 0 \text{ với}$$

$$\forall x \in [1; +\infty) \setminus \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$$

Suy ra, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty) \setminus \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$.

Bảng biến thiên

x	1	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	+
$f(x)$	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y = (2x^2 + 1)\sqrt{x-1}$ và $y = \frac{11}{3x-4} - \frac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m \in (-\infty; 1]$.

Câu 24. Cho hai hàm số $y = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ và $y = 2^{1-x} + 2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt là

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2]$.

C. $(-\infty; 2)$.

D. $(-\infty; 4)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = 2^{1-x} + 2m$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4} - 2^{1-x} = 2m.$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4} - 2^{1-x}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + 2^{1-x} \ln 2 > 0$$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ và $(0; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	+	+	+	+
$g(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	4

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 5 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại 5 điểm phân biệt khi và chỉ khi $2m < 4 \Leftrightarrow m < 2$

Câu 25. Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y = x - |x+1| + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20; 20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là

A. 22.

B. 39.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} = x - |x+1| + m$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} - x + |x+1| = m \quad (1).$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} - x + |x+1|.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} + \frac{-x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2} + \frac{-x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2} - 1 + \frac{x+1}{|x+1|}$$

$$= \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} + \frac{-(x-1)^2-1}{(x^2-2x)^2} + \frac{-(x-2)^2-1}{(x^2-4x+3)^2} + \frac{x+1-|x+1|}{|x+1|} < 0$$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$ và $(3; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	-	-	-	-	-
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có năm nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại năm điểm phân biệt khi $m \leq 1$, do m nguyên thuộc $(-20; 20)$ nên $m \in \{-19; -18; \dots; 0; 1\}$. Vậy có tất cả 21 giá trị m thỏa mãn.

Câu 26. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$

Ta có $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x = x[m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1)]$. Giả sử $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1) = 0$ thì hàm số

$f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x = 0$, nghĩa là

$m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là

$g(x) = m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1) = 0$ phải có nghiệm $x = 0$, suy ra $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Điều kiện đủ:

Với $m = 1$, $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 3x + 1)$ khi đó $f(1) = -1 < 0$ không thỏa mãn điều kiện

$m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. (loại)

Với $m = -1$, $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Vậy $S = \{-1\}$.

Câu 27. Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2)$

Giả sử $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = (x+2)(ax^2 + bx + 2) = 0$ thì hàm số

$f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x = 1$, nghĩa là

$(x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2) \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = (x+2)(ax^2 + bx + 2) = 0$ có nghiệm $x = 1$ suy ra $a + b + 2 = 0$ (1)

Lí luận tương tự có $h(x) = (x-1)(ax^2 + bx + 2) = 0$ cũng phải nhận $x = -2$ là nghiệm, suy ra

$4a - 2b + 2 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} a+b+2=0 \\ 4a-2b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$ có $f(x) = (x-1)(x+2)(-x^2-x+2) = -(x-1)^2(x+2)^2 \leq 0, x \in \mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a; b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28. Trong số các cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

- A. $-\frac{1}{4}$. B. -1 . C. $\frac{1}{4}$. D. 1 .

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = (x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ và $g(x) = (x-a)(x^2+x+b)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = (x-a)(x^2+x+b) = 0$ thì hàm số

$f(x) = (x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa $(x-1)(x-a)(x^2+x+b) \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = (x-a)(x^2+x+b) = 0$ có

nghiệm $x=1$ suy ra hoặc $\begin{cases} a=1 \\ x^2+x+b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ hoặc là phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a=1 \\ x^2+x+b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 1 > 0 \\ \Delta = 1-4b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b \geq \frac{1}{4} \end{cases}$

Trường hợp 2: phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Ta thay $x=1$ vào phương trình $x^2+x+b=0$ có $1^2+1+b=0 \Rightarrow b=-2$. Với $b=-2$ có phương trình

$x^2+x+b=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

Vì $x=a$ cũng là nghiệm của phương trình nên $a=-2$.

Trong trường hợp 1: $\begin{cases} a=1 \\ b \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow ab \geq \frac{1}{4}$ suy ra tích ab nhỏ nhất khi $ab = \frac{1}{4}$

Và với $a=1, b=\frac{1}{4}$, tích $ab = \frac{1}{4}$ thì bất phương trình đã cho tương đương với

$(x-1)(x-1)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$ (nhận)

Trong trường hợp 2: Tích $ab = 4 > \frac{1}{4}$

Vậy tích ab nhỏ nhất khi $ab = \frac{1}{4}$.

Câu 29. Cho 2 hàm số $y = x^7 + x^5 + x^3 + 3m - 1$ và $y = |x-2| - x - 2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (2; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 2)$. D. $m \in [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^7 + x^5 + x^3 + 3m - 1 = |x - 2| - x - 2m \Leftrightarrow x^7 + x^5 + x^3 - |x - 2| + x = -5m + 1 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 - |x - 2| + x$.

$$\text{Ta có } f(x) = \begin{cases} x^7 + x^5 + x^3 + 2 & \text{khi } x \in [2; +\infty) \\ x^7 + x^5 + x^3 + 2x - 2 & \text{khi } x \in (-\infty; 2) \end{cases}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 > 0 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \\ 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0 & \text{khi } x \in (-\infty; 2) \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. Vậy để (C_1) cắt (C_2) thì $m \in \mathbb{R}$.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình

$$\sqrt{3+x}(2\sqrt{3+x}-m) + \sqrt{1-x}(5\sqrt{1-x}+2m) = 4\sqrt{-x^2-2x+3} \text{ có nghiệm thực?}$$

A. 2019.

B. 4032.

C. 4039.

D. 4033.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x \in [-3; 1]$.

$$\text{Phương trình đã cho} \Leftrightarrow 11 - 3x - 4\sqrt{(3+x)(1-x)} + m(2\sqrt{1-x} - \sqrt{3+x}) = 0. (*)$$

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{1-x} - \sqrt{3+x} = g(x), \text{ với } x \in [-3; 1] \Rightarrow 11 - 3x - 4\sqrt{(3+x)(1-x)} = t^2 + 4.$$

$$\text{Có } g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{3+x}} < 0, \forall x \in (-3; 1). \text{ Suy ra } g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (-3; 1).$$

$$\Rightarrow \min_{[-3; 1]} g(x) = g(1) = -2; \quad \max_{[-3; 1]} g(x) = g(-3) = 4 \Rightarrow t \in [-2; 4].$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow t^2 + mt + 4 = 0.$$

$$\text{Nếu } t = 0 \Rightarrow 0 + 4 = 0 \text{ (vô lý)}.$$

$$\text{Nếu } t \in [-2; 4] \setminus \{0\}, \text{ ta có } m = \frac{-t^2 - 4}{t} = -t - \frac{4}{t} = f(t).$$

$$\text{Có } f'(t) = \frac{4-t^2}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

Bảng biến thiên

t	-2		0		2		4
$f'(t)$	0	+		+	0	-	
$f(t)$	4		$+\infty$	$-\infty$	-4		-5

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi $\begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} m \in [-2019; 2019] \\ m \geq 4 \\ m \leq -4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \dots; -4; 4; \dots; 2018; 2019\}.$$

Vậy có $(2019 - 4 + 1) \cdot 2 = 4032$ giá trị nguyên của tham số thực m .

E. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

I- Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp

① Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước

- ☐ Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y' \Rightarrow y'(x_o)$.
- ☐ Do phương trình tiếp tuyến Δ có hệ số góc $k \Rightarrow y'(x_o) = k$ (i)
- ☐ Giải (i) tìm được $x_o \longrightarrow y_o = f(x_o) \longrightarrow \Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.
- ☒ **Lưu ý.** Hệ số góc $k = y'(x_o)$ của tiếp tuyến Δ thường cho gián tiếp như sau:
 - ☐ Phương trình tiếp tuyến $\Delta // d: y = ax + b \Rightarrow k = a$.
 - ☐ Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y = ax + b \Rightarrow k = -\frac{1}{a}$.
 - ☐ Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k| = \tan \alpha$.
 - ☐ Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với $d: y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left| \frac{k - a}{1 + k \cdot a} \right| = \tan \alpha$

② Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua (kể từ) điểm $A(x_A; y_A)$

- ☐ Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y_o = f(x_o)$ và $k = y'(x_o)$ theo x_o .
- ☐ Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_o; y_o)$ là $\Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.
- ☐ Do $A(x_A; y_A) \in \Delta \Rightarrow y_A = k(x_A - x_o) + y_o$ (i)
- ☐ Giải phương trình (i) $\longrightarrow x_o \longrightarrow y_o$ và $k \longrightarrow$ phương trình Δ .

③ Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước

- ☐ Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_o)$ theo x_o .
- ☐ Đề cho $\begin{cases} \Delta OAB \\ S_{\Delta OAB} = S \end{cases} \begin{matrix} (i) \text{ vuông cân} \\ (ii) \end{matrix} \Leftrightarrow \Delta \text{ tạo với Ox một góc } 45^\circ \text{ và } O \notin \Delta$
- ☐ Giải (i) hoặc (ii) $\longrightarrow x_o \longrightarrow y_o; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ .

④ Tìm những điểm trên đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ mà từ đó vẽ được 1, 2, 3, ..., n tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$

- ☐ Gọi $M(x_M; y_M) \in d: ax + by + c = 0$ (sao cho có một biến x_M trong M)

□ PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

□ Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$

□ Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x) = f'(x) \cdot (x - x_M) + y_M$ (iii)

□ Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ $M =$ số nghiệm x của (iii).

⑤ **Tìm những điểm $M(x_M; y_M)$ mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau**

□ PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

□ Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$

□ Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x) = f'(x) \cdot (x - x_M) + y_M$ (iii)

□ Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ (iii) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

□ Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$.

🔪 **Lưu ý.**

□ Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì

$\begin{cases} (iii): & \text{có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2. \\ f(x_1) \cdot f(x_2) < 0. \end{cases}$

□ Đối với bài toán tìm điểm $M \in (C): y = f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng d cho trước, ta chỉ cần gọi $M(x_o; y_o)$ và Δ là tiếp tuyến với $k = f'(x_o)$. Rồi áp dụng $k = f'(x_o) = k_d$ nếu cho song song và $f'(x_o) \cdot k_d = -1$ nếu cho vuông góc $\Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow M(x_o; y_o)$.

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là
A. $y = 9x + 7$. **B.** $y = -9x - 7$. **C.** $y = -9x + 7$. **D.** $y = 9x - 7$.

Lời giải

Xét hàm $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(1) = 9$.

Ta có $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M_0(1; 2)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(1; 2)$ có dạng:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 2 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 7.$$

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là
A. $y = 3x + 8$. **B.** $y = -3x + 2$. **C.** $y = -3x + 8$. **D.** $y = 3x + 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 6$.

Gọi tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến là $M(x_0; y_0)$, hệ số góc của tiếp tuyến là

$$y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 6 = 3(x_0 - 1)^2 + 3 \geq 3, \forall x_0.$$

Như vậy, hệ số góc của tiếp tuyến nhỏ nhất bằng 3, khi $x_0 = 1$, khi đó $y_0 = 5$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y = 3(x - 1) + 5 \Leftrightarrow y = 3x + 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -3 cắt các đường tiệm cận của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng

A. $4 + 2\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x = -3 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow M\left(-3; \frac{5}{2}\right)$.

$$y' = \frac{1}{(x+1)^2}; y'(-3) = \frac{1}{4}$$

Tiếp tuyến tại $M\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ có phương trình: $y = \frac{1}{4}(x + 3) + \frac{5}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

Giao của hai đường tiệm cận: $I(-1; 2)$.

Tiếp tuyến giao với hai đường tiệm cận tại hai giao điểm: $A(-1; 3), B(-5; 2)$

Hai đường tiệm cận vuông góc với nhau nên tam giác IAB vuông tại I .

Vậy: $S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2}IA \cdot IB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 3(x_1 - x_2)$.

A. 3

B. 1

C. 0

D. 2

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường thẳng MN có dạng $\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} \Rightarrow$ hệ số góc của đường thẳng MN là

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 3.$$

Vậy tiếp tuyến tại $A\left(x_0; \frac{1}{8}x_0^4 - \frac{7}{4}x_0^2\right)$ có hệ số góc

$$k = 3 \Leftrightarrow f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^3 - \frac{7}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^3 - \frac{7}{2}x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

+) Với $x_0 = -1 \Rightarrow A\left(-1; -\frac{13}{8}\right) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3x + \frac{11}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x + \frac{11}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3x - \frac{11}{8} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-1; -\frac{13}{8}\right) \text{ thỏa mãn đề bài.}$$

+) Với $x_0 = 3 \Rightarrow A\left(3; -\frac{171}{8}\right) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = 3x - \frac{195}{8}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x - \frac{195}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3x + \frac{195}{8} = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x^2 + 6x + 13) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \text{Tiếp}$$

tuyến cắt đồ thị tại một điểm $\Rightarrow A\left(3; -\frac{171}{8}\right)$ Không thỏa mãn.

+) Với $x_0 = -2 \Rightarrow A(-2; -5) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y = 3x + 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 = 3x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{4}x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2 - 4x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 + \sqrt{6} \\ x = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

$A(-2; -5)$ Thỏa mãn đề bài.

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng tất cả các giá trị các phần tử của S là

A. 1

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x \neq 1$; $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$

Đường thẳng d qua A có hệ số góc k là $y = k(x-a) + 1$

$$d \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow \begin{cases} k(x-a) + 1 = \frac{-x+2}{x-1} (1) \\ k = \frac{-1}{(x-1)^2} (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Thế (2) vào (1) ta có: $\frac{-1}{(x-1)^2}(x-a) + 1 = \frac{-x+2}{x-1} \Leftrightarrow -x + a + x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 3x - 2, x \neq 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 (3)$$

Để đồ thị hàm số có một tiếp tuyến qua A thì hệ là số nghiệm của hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 (3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 1 - 6 + a + 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

Cách 2: TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$

Giả sử tiếp tuyến đi qua $A(a;1)$ là tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp

$$\text{tuyến có dạng : } y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1}(d)$$

Vì $A \in d$ nên thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng d ta có :

$$1 = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(a-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 6x_0 + 3 + a = 0(1) \\ x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Để chỉ có một tiếp tuyến duy nhất đi qua A thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 1 - 6 + a + 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ khác A thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$

A. 0

B. 3

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } A \in (C) \Rightarrow A\left(t; \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{2}t^2\right)$$

$$y' = x^3 - 7x \Rightarrow y'(t) = t^3 - 7t$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là

$$y = (t^3 - 7t)(x - t) + \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{2}t^2 \Leftrightarrow y = (t^3 - 7t)x - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 = (t^3 - 7t)x - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 14x^2 - 4(t^3 - 7t)x + 3t^4 - 14t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - t)^2(x^2 + 2tx + 3t^2 - 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 + 2tx + 3t^2 - 14 = 0(1) \end{cases}$$

Tiếp tuyến cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1); N(x_2; y_2)$ khác A khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác t

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - (3t^2 - 14) > 0 \\ t^2 + 2t^2 + 3t^2 - 14 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{7} < t < \sqrt{7} \\ t \neq \pm \frac{\sqrt{21}}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Khi đó

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2t \\ x_1 x_2 = 3t^2 - 14 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_1 = (t^3 - 7t)x_1 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2 \\ y_2 = (t^3 - 7t)x_2 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{7}{2}t^2 \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = (t^3 - 7t)(x_1 - x_2)$$

$$\text{Ta có } y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2) \Leftrightarrow (t^3 - 7t)(x_1 - x_2) = 6(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 7t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 - t - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t+1=0 \\ t^2 - t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \quad (n) \\ t = -2 \quad (n) \text{ (do (2))} \\ t = 3 \quad (l) \end{cases}$$

$$\square \text{ Với } t = -1 \text{ ta có } A\left(-1; -\frac{13}{4}\right)$$

$$\square \text{ Với } t = -2 \text{ ta có } A(-2; -10)$$

$\Rightarrow$ có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?

A. 0

B. 3

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại A .

$$y' = \frac{4}{3}x^3 - \frac{28}{3}x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{7} \end{cases}.$$

Do tiếp tuyến tại A cắt (C) tại $M, N \Rightarrow x_A \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7})$.

$$\text{Ta có: } y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 8 \Rightarrow k_d = 8. \text{ Suy ra } \frac{4}{3}x_A^3 - \frac{28}{3}x_A = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_A = -1 \\ x_A = -2 \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện: $\begin{cases} x_A = -1 \\ x_A = -2 \end{cases}$. Vậy có 2 điểm A thỏa ycbt.

Cách 2:

Gọi $A\left(a; \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } A \text{ là } d: y = \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x - a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{1}{3}x^4 - \frac{28}{3}x^2 = \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x - a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 14) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x^2 + 2ax + 3a^2 - 14 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 6a^2 - 14 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7}) \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \right\}.$$

$$\text{Theo đề bài: } y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x_1 - x_2) = 8(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện: $\begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases}$. Vậy có 2 điểm A thỏa đề bài.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ cắt hai đường tiệm cận của (C) tại A và B . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của của (C) . Diện tích tam giác IAB bằng:

- A. $4(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. B. 4. C. 5. D. $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$y'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Đường tiệm cận đứng $x = 1$.

Đường tiệm cận ngang $y = 1$.

Giao điểm của hai tiệm cận $I(1;1)$.

$$x_o = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow y_o = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

$$y'(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = \frac{-2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_o = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là

$$\Delta: y = \frac{-2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} \left(x - (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \right) + \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

$$\Delta \cap \text{TCW} = A \left(1; \frac{4 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right).$$

$$\Delta \cap \text{TCN} = B(1 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}; 1).$$

$$IA = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

$$IB = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$$

Tam giác IAB vuông tại I nên $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = 4$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận của (C) . Biết rằng tồn tại hai điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với đường tiệm cận của một tam giác có chu vi nhỏ nhất. Tổng hoành độ của hai điểm M là:

- A. 4. B. 0. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) là: $x = 2; y = 2 \Rightarrow I(2;2)$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ là

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = -\frac{1}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}$$

(d) giao với hai đường tiệm cận của (C) tại 2 điểm $A\left(2; \frac{2x_0 - 2}{x_0 - 2}\right), B(2x_0 - 2; 2)$

$$C_{\Delta LAB} = IA + IB + AB = IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2}$$

$$\geq IA + IB + \frac{IA + IB}{\sqrt{2}} = (IA + IB)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \left(\left|\frac{2}{x_0 - 2}\right| + |2(x_0 - 2)|\right)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geq 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \min C_{\Delta LAB} = 4 + 2\sqrt{2} \text{ tại } x_0 = 3; x_0 = 1.$$

Vậy tổng hoành độ của hai điểm M là: 4.

----- HẾT -----

Nguyễn Bảo Vương