

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 12/12/2020

(Đề thi có 08 câu, gồm 01 trang)

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. (3,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - (2m - 1)x^2 + (1 - m)x$ (m là tham số thực) có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B và C sao cho tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B và C nhỏ hơn 9.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau trên tập số thực $5x^2 - 10x = 4(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

b) Cho 3 số thực $x > 1, y > 1$ và $z > 1$ thỏa mãn

$$\log_{(xy+yz+zx)}(5x^2 + 16y^2 + 27z^2) + \log_{12}\sqrt[4]{xy + yz + zx} = 2. \text{ Tính } M = x + y + z.$$

Câu 3. (2,0 điểm) Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển

$$\left(\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x\sqrt{x+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x} \right)^n, \text{ với } x > 0 \text{ và } n \in \mathbb{N}^* \text{ thỏa mãn } A_n^2 - nC_n^2 + 55n = 0.$$

Câu 4. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC thỏa mãn

$$2019 \sin A + 2020 \sin B + 2021 \sin C = 2022 \cos \left(\frac{A}{2} \right) + 2020 \cos \left(\frac{B}{2} \right) + 2018 \cos \left(\frac{C}{2} \right).$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 2021$ và $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

đặt $v_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$. Tính $\lim v_n$.

Câu 6. (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung

điểm của đoạn BC , K là hình chiếu vuông góc của H lên AC . Biết $M\left(\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn

HK , đường thẳng BK có phương trình $x + 7y - 13 = 0$. Gọi N là giao điểm của BK và AM . Tìm tọa

độ điểm A , biết $I\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn AB .

Câu 7. (2,0 điểm) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) và O là trung điểm của đoạn AH . Gọi (α) là mặt phẳng qua O và không đi qua các điểm A, B, C và D . Mặt phẳng (α) cắt các đoạn AB, AC và AD lần lượt tại M, N và P . Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM \cdot AN \cdot AP$ theo a .

Câu 8. (2,0 điểm) Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2021x$, a, b và c là ba số thực dương sao cho phương trình $f[(a + b + c)x] + f(2020 - 3x) = 0$ vô nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{ab + bc + ca}.$$

----- HẾT -----

Câu 1: (4 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (1-m)x$ (m là tham số thực) có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B và C sao cho tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B và C nhỏ hơn 9.

Câu 2: (4 điểm) a/ Giải phương trình sau trên tập số thực: $5x^2 - 10x = 4(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

b/ Cho 3 số thực $x > 1, y > 1, z > 1$ thỏa mãn:

$$\log_{(xy+yz+zx)}(5x^2 + 16y^2 + 27z^2) + \log_{12} \sqrt[4]{xy + yz + zx} = 2. \text{ Tính } M = x + y + z.$$

Câu 3: (2 điểm) Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển

$$\left[\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x\sqrt{x+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x} \right]^n, \text{ với } x > 0 \text{ và } n \in \mathbb{N}^* \text{ thỏa mãn } A_n^2 - nC_n^2 + 55n = 0.$$

Câu 4: (2,0 điểm) Cho tam giác ABC thỏa mãn

$$2019 \sin A + 2020 \sin B + 2021 \sin C = 2022 \cos\left(\frac{A}{2}\right) + 2020 \cos\left(\frac{B}{2}\right) + 2018 \cos\left(\frac{C}{2}\right) \quad (1).$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Câu 5: (3 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 2021$ và $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$v_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}. \text{ Tính } \lim v_n.$$

Câu 6: (2 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung

điểm của đoạn BC , K là hình chiếu vuông góc của H lên AC . Biết $M\left(\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn HK , đường thẳng $BK: x + 7y - 13 = 0$. Gọi N là giao điểm của BK và AM . Tìm tọa độ điểm A , biết $I\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn AB .

Câu 7: (2 điểm) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) và O là trung điểm của đoạn AH . Gọi (α) là mặt phẳng qua O và không đi qua các điểm A, B, C và D . Mặt phẳng (α) cắt các đoạn AB, AC và AD lần lượt tại M, N và P . Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM \cdot AN \cdot AP$ theo a .

Câu 8: (2 điểm) Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2021x$, gọi a, b, c là các số thực dương sao cho phương trình $f[(a+b+c)x] + f(2020-3x) = 0$ vô nghiệm.

$$\text{Tìm GTNN của biểu thức } M = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{ab + bc + ac}.$$

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (4 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (1-m)x$ (m là tham số thực) có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B và C sao cho tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B và C nhỏ hơn 9.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\begin{aligned} x^3 - (2m-1)x^2 + (1-m)x &= x - m \Leftrightarrow x^3 - (2m-1)x^2 - mx + m = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2mx + m) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Theo yêu cầu bài toán: (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 1 + 2m + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0, m > 1 \\ m \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ta có $A(-1; -1-m)$; $B(x_1; x_1 - m)$; $C(x_2; x_2 - m)$

$$y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + 1 - m$$

$$y'(-1) = 3(-1)^2 - 2(2m-1)(-1) + 1 - m = 2 + 3m$$

$$y'(x_1) = 3x_1^2 - 2(2m-1)x_1 + 1 - m$$

$$y'(x_2) = 3x_2^2 - 2(2m-1)x_2 + 1 - m$$

$$\text{Áp dụng định lý Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$$

Theo yêu cầu bài toán ta có

$$\begin{aligned} y'(-1) + y'(x_1) + y'(x_2) &< 9 \Leftrightarrow 2 + 3m + 3x_1^2 - 2(2m-1)x_1 + 1 - m + 3x_2^2 - 2(2m-1)x_2 + 1 - m > 9 \\ \Leftrightarrow 3(x_1^2 + x_2^2) - 2(2m-1)(x_1 + x_2) - 5 - m &> 0 \\ \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1 x_2 - 2(2m-1)(x_1 + x_2) - 5 - m &> 0 \\ \Leftrightarrow 3(2m)^2 - 6m - 2(2m-1) \cdot 2m - 5 - m &> 0 \\ \Leftrightarrow 12m^2 - 6m - 8m^2 + 4m - 5 - m &> 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3m - 5 > 0 \\ \Leftrightarrow m < \frac{3 - \sqrt{89}}{8}, m > \frac{3 + \sqrt{89}}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Giao với điều kiện ta được: } m < \frac{3 - \sqrt{89}}{8}, m > \frac{3 + \sqrt{89}}{8}.$$

Câu 2: (4 điểm)

a/ Giải phương trình sau trên tập số thực: $5x^2 - 10x = 4(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

b/ Cho 3 số thực $x > 1, y > 1, z > 1$ thỏa mãn:

$$\log_{(xy+yz+zx)}(5x^2 + 16y^2 + 27z^2) + \log_{12} \sqrt[4]{xy + yz + zx} = 2. \text{ Tính } M = x + y + z.$$

Lời giải

a) Giải phương trình: $5x^2 - 10x = 4(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ (1)

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } (1) &\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 2x + 1) - 9 = 4(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} \\
&\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x-1)\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x-1) = 3 \\ 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} - (x-1) = -3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x+2 \\ 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4(x^2 - 2x + 2) = x^2 + 4x + 4 \\ x \geq 4 \\ 4(x^2 - 2x + 2) = x^2 - 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 3x^2 - 12x + 4 = 0 \\ x \geq 4 \\ 3x^2 - 8 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{3} \\ x \geq 4 \\ x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{3}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có 2 nghiệm là $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.

b/ Tính $M = x + y + z$.

- Theo giả thiết ta có: $xy + yz + zx > 1$ nên $\begin{cases} \log_{(xy+yz+zx)} 12 > 0 \\ \log_{12} (xy + yz + zx) > 0 \end{cases}$.

- Áp dụng BĐT *Cauchy* ta có:

$$\begin{aligned}
5x^2 + 16y^2 + 27z^2 &= (3x^2 + 12y^2) + (4y^2 + 9z^2) + (18z^2 + 2x^2) \\
&\geq 2\sqrt{3x^2 \cdot 12y^2} + 2\sqrt{4y^2 \cdot 9z^2} + 2\sqrt{18z^2 \cdot 2x^2} = 12(xy + yz + zx)
\end{aligned}$$

Hay $5x^2 + 16y^2 + 27z^2 \geq 12(xy + yz + zx)$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 2y = 3z$.

Khi đó: $\log_{(xy+yz+zx)} (5x^2 + 16y^2 + 27z^2) \geq \log_{(xy+yz+zx)} (12(xy + yz + zx)) = 1 + \log_{(xy+yz+zx)} 12$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
&\log_{(xy+yz+zx)} (5x^2 + 16y^2 + 27z^2) + \log_{12} \sqrt[4]{xy + yz + zx} \geq 1 + \log_{(xy+yz+zx)} 12 + \frac{1}{4} \log_{12} (xy + yz + zx) \\
&\geq 1 + 2\sqrt{\left(\log_{(xy+yz+zx)} 12\right) \cdot \frac{1}{4} \log_{12} (xy + yz + zx)} = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = 2y = 3z \\ \log_{(xy+yz+zx)} 12 = \log_{12} (xy + yz + zx) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y = 3z \\ xy + yz + zx = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \\ z = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Vậy $M = z + y + z = \frac{11\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left[\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x\sqrt{x+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x} \right]^n$, với $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $A_n^2 - nC_n^2 + 55n = 0$.

Lời giải

Xét phương $A_n^2 - nC_n^2 + 55n = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - n \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} + 55n = 0 \Leftrightarrow n(n-1) - \frac{1}{2}n^2(n-1) + 55n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=12 \\ n=-9 \end{cases}$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên ta nhận $n = 12$.

Ta biến đổi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x\sqrt{x+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[4]{x} \end{aligned}$$

Xét khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[4]{x} \right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{12-k} (-1)^k \left(\sqrt[4]{x} \right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (-1)^k x^{\frac{3}{4}k-6}$.

Số hạng không chứa x thỏa $\frac{3}{4}k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy hệ số của số hạng không chứa x là $C_{12}^8 (-1)^8 = 495$.

Câu 4. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC thỏa mãn

$$2019 \sin A + 2020 \sin B + 2021 \sin C = 2022 \cos\left(\frac{A}{2}\right) + 2020 \cos\left(\frac{B}{2}\right) + 2018 \cos\left(\frac{C}{2}\right) \quad (1) .$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải

Ta có: $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \leq \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = \frac{1}{2}(\sin B + \sin C)$

$$\Rightarrow 2022 \cos \frac{A}{2} \leq 1011(\sin B + \sin C)$$

Tương tự: $\cos \frac{B}{2} \leq \frac{1}{2}(\sin A + \sin C) \Rightarrow 2020 \cos \frac{B}{2} \leq 1010(\sin A + \sin C)$

$$\cos \frac{C}{2} \leq \frac{1}{2}(\sin A + \sin B) \Rightarrow 2018 \cos \frac{C}{2} \leq 1009(\sin A + \sin B)$$

$$\Rightarrow VP(1) \leq (1010 + 1009) \sin A + (1011 + 1009) \sin B + (1010 + 1011) \sin C = VP(1)$$

$$\text{Do đó (1) xảy ra} \Leftrightarrow VT(1) = VP(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = 1 \\ \cos\left(\frac{C-A}{2}\right) = 1 \text{ Hay } A = B = C \\ \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Hay tam giác ABC đều.

Câu 5: (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 2021$ và $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$.

Tính $\lim v_n$.

Lời giải

Ta chứng minh dãy số tăng, thật vậy $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử dãy số bị chặn trên, suy ra dãy số có giới hạn, đặt $\lim u_n = x$.

Do dãy số tăng nên $2021 = u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq x \Rightarrow x \geq 2021$.

Ta có $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \Rightarrow x = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x = 1$ vô lí.

Vậy dãy số tăng và không bị chặn trên hay $\lim u_n = +\infty$.

Ta có $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1)$, do $u_n \geq 2021$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n} \Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}.$$

$$\text{Suy ra } \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} \right) = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

$$\text{Hay } v_n = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \Rightarrow \lim v_n = \lim \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = \frac{1}{2020}.$$

Câu 6: (2 điểm)

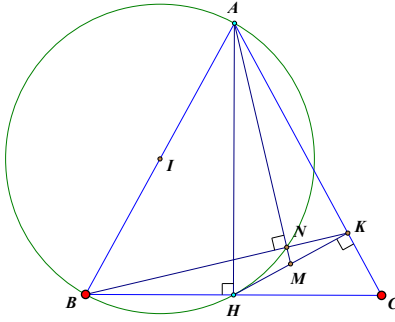
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của

đoạn BC , K là hình chiếu vuông góc của H lên AC . Biết $M\left(\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn

HK , đường thẳng $BK: x + 7y - 13 = 0$. Gọi N là giao điểm của BK và AM . Tìm tọa độ điểm

A , biết $I\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn AB .

Lời giải



có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK}$
 Xét tích vô hướng: $2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BK} = (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AK})$
 $= \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK}$; (do BH vuông góc AK , HK vuông góc AH)
 $= \overrightarrow{CH} \cdot (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CK}) - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HK}$
 $= \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HK} = CH \cdot CA \cdot \cos \widehat{HCA} - CH \cdot CK \cdot \cos \widehat{HCK} - HA \cdot HD \cdot \cos \widehat{AHD}$
 $= CH \cdot CA \cdot \frac{CH}{CA} - CH \cdot CK \cdot \frac{CK}{CH} - HA \cdot HK \cdot \frac{HK}{HA}$
 $= CH^2 - CK^2 - HK^2 = 0$. Nên AM vuông góc BK tại điểm N .

Ta có $AM : 7x - y = 11 \Rightarrow N = AM \cap BK = \left(\frac{9}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

Ta có B là giao điểm của đường thẳng BK và đường tròn tâm I bán kính IN :

$$\Rightarrow B(13 - 7b; b) : IB = IN = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{25}{2} - 7b\right)^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{8}{5} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \left(\frac{9}{5}; \frac{8}{5}\right) \\ B = (-1; 2) \end{cases} (l)$$

Suy ra điểm $A = (2; 3)$.

Câu 7: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) và O là trung điểm của đoạn AH . Gọi (α) là mặt phẳng qua O và không đi qua các điểm A, B, C và D . Mặt phẳng (α) cắt các đoạn AB, AC và AD lần lượt tại M, N và P . Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM \cdot AN \cdot AP$ theo a .

Lời giải

Ta có H là trọng tâm tam giác BCD nên

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AH}$$

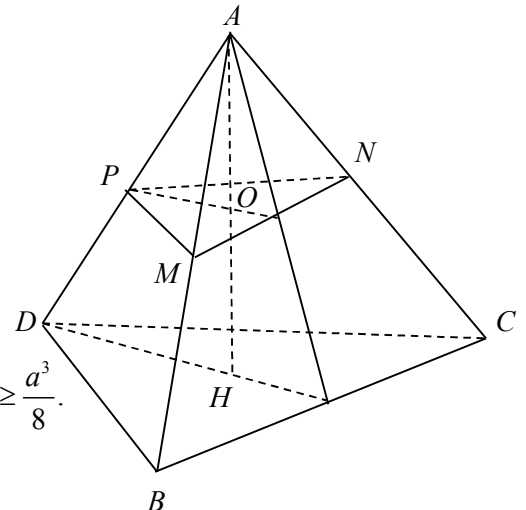
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AO}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{AM} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{a}{AN} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{a}{AP} \cdot \overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AO}$$

Do O, M, N, P đồng phẳng nên

$$\Rightarrow \frac{a}{AM} + \frac{a}{AN} + \frac{a}{AP} = 6 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^3}{AM \cdot AN \cdot AP}} \Rightarrow AM \cdot AN \cdot AP \geq \frac{a^3}{8}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM \cdot AN \cdot AP = \frac{a^3}{8}$.



Câu 8: (2 điểm)

Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2021x$, gọi a, b, c là các số thực dương sao cho phương trình $f[(a+b+c)x] + f(2020-3x) = 0$ vô nghiệm.

Tìm GTNN của biểu thức $M = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{ab + bc + ac}$.

Lời giải

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} + 2021 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + 2021 > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Hay hàm số đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Xét

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) - 2021x = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) - 2021x = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - 2021x = -f(x)$$

, hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Do đó phương trình

$$f[(a+b+c)x] + f(2020-3x) = 0 \Leftrightarrow f[(a+b+c)x] = f(3x-2020)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)x = 3x-2020$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-3)x = -2020. \text{ Phương trình vô nghiệm } \Leftrightarrow a+b+c-3=0 \Leftrightarrow a+b+c=3.$$

$$\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca) = 9 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số:

$$\begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{a} + a^2 \geq 3a \\ \sqrt{b} + \sqrt{b} + b^2 \geq 3b \\ \sqrt{c} + \sqrt{c} + c^2 \geq 3c \end{cases} \Rightarrow 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a+b+c) = 9$$

$$\text{Hay } 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 9 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab+bc+ca)$$

$$\text{Vậy } M = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{ab + bc + ac} \geq 1, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a = b = c = 1.$$