

Chương 2

DÃY SỐ-CẤP SỐ CỘNG-CẤP SỐ NHÂN

Bài số 1

DÃY SỐ

A – KHÁI NIỆM

🔗 **Định nghĩa 1.1.** Ta có khái niệm về dãy số hữu hạn như sau:

- ✔ Mọi hàm số $u: \{1; 2; 3; \dots; m\} \mapsto \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{N}^*$) được gọi là một dãy số hữu hạn. Do mỗi số nguyên dương k ($1 \leq k \leq m$) tương ứng đúng một số u_k nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển: $u_1; u_2; \dots; u_m$.
- ✔ Số u_1 được gọi là số hạng đầu, số u_m được gọi là số hạng cuối của dãy số đó.

🔗 **Định nghĩa 1.2.** Ta có khái niệm về dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số) như sau:

- ✔ Mọi hàm số $u: \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{R}$ được gọi là một dãy số vô hạn. Do mỗi số nguyên dương n tương ứng với đúng một số u_n nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$
- ✔ Dãy số đó còn được viết tắt là (u_n) .
- ✔ Số u_1 gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu), số u_2 gọi là số hạng thứ hai, $\dots$, số u_n được gọi là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số đó.

⚠ Dãy số không đổi là dãy số có tất cả các số hạng đều bằng nhau.

B – CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

🔗 **Định nghĩa 1.3.** Ta có thể cho dãy số bằng một trong những cách sau:

- ✔ Liệt kê các số hạng của dãy số đó (với những dãy số hữu hạn và có ít số hạng).
- ✔ Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số đó.
- ✔ Cho công thức của số hạng tổng quát của dãy số đó.
- ✔ Cho bằng phương pháp truy hồi.

C – DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

🔗 **Định nghĩa 1.4.** Ta có định nghĩa:

- ✔ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- ✔ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

⚠ Không phải mọi dãy số đều là dãy số tăng hay dãy số giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$ có dạng khai triển là $-1, 1, -1, \dots$ không là dãy số tăng, cũng không là dãy số giảm.

D – DÃY SỐ BỊ CHẶN

⇒ **Định nghĩa 1.5.** Ta có định nghĩa:

- ☑ Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- ☑ Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- ☑ Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; tức là tồn tại các số M và m sao cho $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

E – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

 Dạng 1. Tìm số hạng thứ k của dãy số

Để tìm số hạng cụ thể của dãy số ta làm như sau

- ☑ Với trường hợp dãy số đã cho biết công thức tổng quát của dãy số thì ta chỉ cần thay giá trị tương ứng của số hạng đó vào công thức tổng quát.
- ☑ Với trường hợp dãy số cho bởi công thức truy hồi hoặc dưới dạng thì ta phải tìm lần lượt từ những số hạng đầu tiên cho đến số đứng trước số cần tìm trong dãy.

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số:

$$\begin{aligned} v : \{1; 2; 3; 4; 5\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto v(n) = 2n. \end{aligned}$$

Tính $v(1), v(2), v(3), v(4), v(5)$.

 **Lời giải.**

- ☑ $v(1) = 2 \cdot 1 = 2$.
- ☑ $v(2) = 2 \cdot 2 = 4$.
- ☑ $v(3) = 2 \cdot 3 = 6$.
- ☑ $v(4) = 2 \cdot 4 = 8$.
- ☑ $v(5) = 2 \cdot 5 = 10$.

□

Ví dụ 2. Dãy gồm 10 số tự nhiên lẻ đầu tiên $1; 3; 5; \dots; 19$ có phải là dãy số hữu hạn không? Nếu có, tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số.

 **Lời giải.**

Đây là một dãy số hữu hạn. Ta có số hạng đầu $u_1 = 1$ và số hạng cuối $u_{10} = 19$.

□

Ví dụ 3. Cho các dãy số $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ được xác định như sau.

- a) $a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 2; a_4 = 3; a_5 = 4$.
- b) $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_n = c_{n-1} + 1 \end{cases} \quad (n \geq 2)$.
- c) $b_n = 2n$.
- d) d_n là chu vi của đường tròn có bán kính n .

Tìm bốn số hạng đầu tiên của các dãy số trên.

 **Lời giải.**

Số hạng đầu của các dãy số trên là

a) $a_1 = 0$.

b) $c_1 = 1$.

c) $b_1 = 2 \cdot 1 = 2$.

d) $d_1 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$.



Ví dụ 4 (NB). Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 3n - 2$.

Lời giải.

Năm số hạng đầu của dãy số là 1, 4, 7, 10, 13.

Số hạng thứ 100 của dãy là $u_{100} = 3 \cdot 100 - 2 = 298$.



Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$.

a) Tìm ba số hạng đầu tiên.

b) Tính u_{50} và u_{99} .

Lời giải.

a) Ba số hạng đầu tiên là: $u_1 = 0$; $u_2 = \frac{1}{7}$; $u_3 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

b) Ta có $u_{50} = \frac{50-1}{3 \cdot 50 + 1} = \frac{49}{151}$; $u_{99} = \frac{99-1}{3 \cdot 99 + 1} = \frac{98}{298} = \frac{49}{149}$.



Ví dụ 6. Dãy số Fibonacci là dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ và $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$. Viết mười số hạng đầu của dãy số (u_n) .

Lời giải.

Ta có $u_1 = u_2 = 1$.

Thay $n = 3$ vào công thức truy hồi của dãy số ta được $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$.

Thay $n = 4$ vào công thức truy hồi của dãy số ta được $u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$.

Cứ như thế ta tìm được 10 số hạng đầu của dãy số (u_n) là 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.



2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi

a) $u_n = 3n - 2$; b) $u_n = 3 \cdot 2^n$; c) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Lời giải.

a) $u_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$; $u_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$; $u_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$; $u_4 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$; $u_5 = 3 \cdot 5 - 2 = 13$;
 $u_{100} = 3 \cdot 100 - 2 = 298$.

b) $u_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$; $u_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$; $u_3 = 3 \cdot 2^3 = 24$; $u_4 = 3 \cdot 2^4 = 48$; $u_5 = 3 \cdot 2^5 = 96$; $u_{100} = 3 \cdot 2^{100}$.

c) $u_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$; $u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$; $u_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$; $u_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}$; $u_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1296}{625}$; $u_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$.



Bài 2. Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức sau:

a) $u_n = 2n^2 + 1$.

b) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

c) $u_n = \frac{2^n}{n}$.

d) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Lời giải.

a) Năm số hạng đầu của dãy số là

$$u_1 = 3; u_2 = 9; u_3 = 19; u_4 = 33; u_5 = 51.$$

b) Năm số hạng đầu của dãy số là

$$u_1 = -1; u_2 = \frac{1}{3}; u_3 = -\frac{1}{5}; u_4 = \frac{1}{7}; u_5 = -\frac{1}{9}.$$

c) Năm số hạng đầu của dãy số là

$$u_1 = 2; u_2 = 2; u_3 = \frac{8}{3}; u_4 = 4; u_5 = \frac{32}{5}.$$

d) Năm số hạng đầu của dãy số là

$$u_1 = 2; u_2 = \frac{9}{4}; u_3 = \frac{64}{27}; u_4 = \frac{625}{256}; u_5 = \frac{7776}{3125}.$$

Bài 3. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

(A) $u_3 = -\frac{8}{3}$.

(B) $u_3 = 2$.

(C) $u_3 = -2$.

(D) $u_3 = \frac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$u_3 = (-1)^3 \cdot \frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)**

Bài 4. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5 .

(A) $u_5 = \frac{1}{4}$.

(B) $u_5 = \frac{7}{4}$.

(C) $u_5 = \frac{17}{12}$.

(D) $u_5 = \frac{71}{39}$.

Lời giải.

Ta có $u_5 = \frac{2 \cdot 5^2 - 1}{5^2 + 3} = \frac{49}{28} = \frac{7}{4}$.

Chọn đáp án **(B)**

Bài 5. Cho dãy số u_n bao gồm các số nguyên tố. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

Lời giải.

Ta có $u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 5, u_4 = 7, u_5 = 11$.

Vậy số hạng thứ 5 của dãy số là 11.

Bài 6. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

(A) 11.

(B) 15.

(C) 16.

(D) 12.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + 1 = 6, u_3 = u_2 + 2 = 8, u_4 = u_3 + 3 = 11, u_5 = u_4 + 4 = 15$.

Chọn đáp án **(B)**

Bài 7. Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi

$$u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2 \text{ với } n \geq 2$$

Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

Lời giải.

Ta có: $u_1 = 1, u_2 = 3u_1 + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5, u_3 = 3u_2 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$.

Bài 8. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

Lời giải.

Ta có $u_1 = 5, u_2 = 6, u_3 = 8, u_4 = 11, u_5 = 16, u_6 = 20$.

Vậy số 20 là số hạng thứ 6.

Bài 9. Cho dãy số $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$. Tìm số hạng u_4 .

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} + 1 = \frac{1}{3}.$$

□

Bài 10. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2 + 4}$. Tìm số hạng thứ 6 của dãy số.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_6 = 12 + 2\sqrt{10}.$$

□

Bài 11. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1; u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

Lời giải.

Ta có

$$u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 21; u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 87; u_5 = 309; u_6 = 1023; u_7 = 3261$$

Vậy số hạng thứ 7 của dãy là 3261.

□

Bài 12. Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3). \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5.$$

□

Bài 13. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn ecoli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn ecoli sẽ nhân đôi 1 lần. Tính số lượng vi khuẩn thu được sau 1, 2, 3 lần nhân đôi.

Lời giải.

Đặt $u_1 = 5$, gọi số vi khuẩn sau n lần phân chia là u_{n+1} , khi đó ta có dãy số (u_n) thỏa mãn

$$u_1 = 5, u_{n+1} = 2u_n$$

$$\text{Ta có } u_2 = 10, u_3 = 20, u_4 = 40.$$

□

Bài 14. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy.

b) Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

$$\text{a) Ta có năm số hạng đầu của dãy } u_1 = \frac{1^2 + 3 \cdot 1 + 7}{1 + 1} = \frac{11}{2}; u_2 = \frac{17}{3}; u_3 = \frac{25}{4}; u_4 = 7; u_5 = \frac{47}{6}.$$

$$\text{b) Ta có: } u_n = n + 2 + \frac{5}{n + 1}, \text{ do đó } u_n \text{ nguyên khi và chỉ khi } \frac{5}{n + 1} \text{ nguyên hay } n + 1 \text{ là ước của 5. Điều đó xảy ra khi } n + 1 = 5 \Leftrightarrow n = 4. \text{ Vậy dãy số có duy nhất một số hạng nguyên là } u_4 = 7.$$

□

Bài 15. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 1, x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, 3, \dots$. Số hạng x_{2023} bằng

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &\Leftrightarrow x_n - x_1 = 1 - \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow x_n = \frac{2n-1}{n}. \end{aligned}$$

□

Bài 16. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 99 \\ u_{n+1} = u_n - 2n - 1, n \geq 1 \end{cases}$. Hỏi số -861 là số hạng thứ mấy?

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} - 2n + 1 \\ u_{n-1} &= u_{n-2} - 2n + 3 \\ &\vdots \\ u_3 &= u_2 - 2n + 2n - 5 \\ u_2 &= u_1 - 2n + 2n - 3 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 - 2n \cdot (n-1) + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3) \\ u_n &= 99 - 2n^2 + 2n + \frac{n-1}{2} \cdot [2 \cdot 1 + (n-2) \cdot 2] = 100 - n^2 \end{aligned}$$

Giả sử $u_n = -861 \Rightarrow n^2 = 961 \Rightarrow n = 31$ (vì $n \in \mathbb{N}$). Vậy số -861 là số hạng thứ 31. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$.

B $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

C $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$.

D $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{2}{3^2 - 1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{3}{3^3 - 1} = \frac{3}{26}$.

Chọn đáp án **C**. □

Câu 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $u_3 = -6$.

B $u_2 = 4$.

C $u_4 = -8$.

D $u_1 = -2$.

Lời giải.

Ta có

$u_1 = -2 \cdot 1 = -2$; $u_2 = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 2 = 4$; $u_3 = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 = -6$; $u_4 = (-1)^4 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.

Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án $u_4 = -8$ sai.

Chọn đáp án **C**. □

Câu 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .

A $u_4 = \frac{2}{3}$.

B $u_4 = 1$.

C $u_4 = \frac{14}{27}$.

D $u_4 = \frac{5}{9}$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = \frac{1}{3}(u_1 + 1) = \frac{1}{3}(2 + 1) = 1$; $u_3 = \frac{1}{3}(u_2 + 1) = \frac{2}{3}$; $u_4 = \frac{1}{3}(u_3 + 1) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{5}{9}$.

Chọn đáp án **D**. □

Câu 4. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A $-1; 2; 5$.

B $-1; 3; 7$.

C $1; 4; 7$.

D $4; 7; 10$.

Lời giải.

Ta có $u_1 = -1$; $u_2 = u_1 + 3 = 2$; $u_3 = u_2 + 3 = 5$.

Nhận xét. (i) Dùng chức năng “lặp” của MTCT để tính:

Nhập vào màn hình: $X = X + 3$

Bấm CALC và cho $X = -1$ (ứng với $u_1 = -1$)

Để tính u_n cần bấm “=” ra kết quả liên tiếp $n - 1$ lần. Ví dụ để tính u_2 ta bấm “=” ra kết quả lần đầu tiên, bấm

“=” ra kết quả thứ hai chính là $u_3, \dots$

(ii) Vì $u_1 = -1$ nên loại các đáp án $u_1 = 1, u_1 = 4$.

Còn lại các đáp án có $u_1 = -1$; để biết đáp án nào ta chỉ cần kiểm tra u_2 (vì u_2 ở hai đáp án là khác nhau):

$$u_2 = u_1 + 3 = 2.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

(A) 9.

(B) 6.

(C) 10.

(D) 8.

Lời giải.

Ta có

$$u_n = \frac{2n+5}{5n-4} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow 24n+60 = 35n-28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $u_2 = \frac{5}{2}$.

(B) $u_4 = \frac{31}{8}$.

(C) $u_3 = \frac{15}{4}$.

(D) $u_5 = \frac{63}{16}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 = \frac{u_1}{2} + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}; & u_3 = \frac{u_2}{2} + 2 = \frac{7}{4} + 2 = \frac{15}{4}. \\ u_4 = \frac{u_3}{2} + 2 = \frac{15}{8} + 2 = \frac{31}{8}; & u_5 = \frac{u_4}{2} + 2 = \frac{31}{16} + 2 = \frac{63}{16}. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

(A) $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

(B) $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$.

(C) $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

(D) $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.

Lời giải.

$$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho dãy số (a_n) , được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}$.

(B) $a_{10} = \frac{3}{512}$.

(C) $a_n = \frac{3}{2^n}$.

(D) $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } a_1 = 3; a_2 = \frac{u_1}{2}; a_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{u_1}{2^2}; a_4 = \frac{u_3}{2} = \frac{u_1}{2^3}, \dots$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{u_1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}} \text{ nên suy ra đáp án } a_n = \frac{3}{2^n} \text{ sai.}$$

Xét đáp án

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \right) = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{93}{16} \Rightarrow \text{đúng.}$$

$$\text{Xét đáp án } a_{10} = \frac{3}{2^9} = \frac{3}{512} \Rightarrow \text{đúng.}$$

$$\text{Xét đáp án } a_{n+1} + a_n = \frac{3}{2^n} + \frac{3}{2^{n-1}} = \frac{3+3 \cdot 2}{2^n} = \frac{9}{2^n} \Rightarrow \text{đúng.}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị $u_{101} - u_{100}$ là

(A) $3 \cdot 2^{102}$. (B) $3 \cdot 2^{101}$. (C) $3 \cdot 2^{100}$. (D) $3 \cdot 2^{99}$.

Lời giải.

Theo bài ta có

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ \Leftrightarrow u_{n+2} &= u_{n+1} + 2(u_{n+1} - u_n) \\ \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} &= 2(u_{n+1} - u_n). \end{aligned}$$

Với $n = 99$ ta có

$$\begin{aligned} u_{101} - u_{100} &= 2(u_{100} - u_{99}) \\ &= 2 \cdot 2(u_{99} - u_{98}) \\ &= \dots \\ &= 2^{99} \cdot (u_2 - u_1) = 3 \cdot 2^{99}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm u_{2023} .

(A) $u_{2023} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2^{2022}}$. (B) $u_{2023} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2^{2024}}$. (C) $u_{2023} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2^{2023}}$. (D) $u_{2023} = 2$.

Lời giải.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp số hạng tổng quát của dãy là $u_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Để thấy, với $n = 1$ ta có $u_1 = \sqrt{2}$ (đúng).

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k, \forall k \in \mathbb{N}^*$ nghĩa là $u_k = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$ ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$ nghĩa là $u_{k+1} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Thật vậy, $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Áp dụng công thức tổng quát trên ta có $u_{2023} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2^{2024}}$.

Chọn đáp án (B) □

Dạng 2. Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số

Để tìm số hạng tổng quát của một dãy bất kỳ khi biết một vài số hạng đầu của dãy số ta làm như sau

- ✓ Phân tích các số hạng sau theo các số hạng đã biết theo một quy luật nào đó.
- ✓ Dự đoán số hạng tổng quát
- ✓ Kiểm tra bằng cách thay lần lượt các giá trị $n \in \mathbb{N}^*$ vào công thức tổng quát (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp).

Để biểu diễn một dãy số khi biết công thức tổng quát ta lần lượt thay $n \in \mathbb{N}^*$ vào công thức tổng quát để tìm các số hạng thứ nhất, thứ hai, ...

Ví dụ mẫu

Ví dụ 7. Cho (u_n) là dãy các số tự nhiên chẵn viết theo thứ tự tăng dần và $u_1 = 0$.

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy (u_n) .
- b) Dự đoán số hạng tổng quát và viết dạng khai triển của dãy số (u_n) .

Lời giải.

a) Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là

$$u_1 = 0; u_2 = 2; u_3 = 4; u_4 = 6; u_5 = 8.$$

b) Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được dự đoán là $u_n = 2(n-1)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là $0, 2, 4, \dots, 2n-2, \dots$

□

Ví dụ 8 (NB). Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ $1, 3, 5, 7, \dots$

☞ **Lời giải.**

Dãy (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và số hạng tổng quát $u_n = 2n - 1$.

□

Ví dụ 9 (NB). Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho 5: $5, 10, 15, 20, \dots$

☞ **Lời giải.**

Dãy (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 5$ và số hạng tổng quát $v_n = 5n$.

□

Ví dụ 10 (NB). Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi: $u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2$ với $n \geq 2$. Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

☞ **Lời giải.**

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 3u_1 + 2 = 5, u_3 = 3u_2 + 2 = 17$.

□

Ví dụ 11 (NB). Dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi: $u_1 = 1, u_n = n \cdot u_{n-1}$ với $n \geq 2$. Viết năm số hạng đầu của dãy số và dự đoán công thức tổng quát u_n .

☞ **Lời giải.**

Năm số hạng đầu của dãy là $u_1 = 1, u_2 = 2 \cdot u_1 = 2, u_3 = 3 \cdot u_2 = 6, u_4 = 4 \cdot u_3 = 24, u_5 = 5 \cdot u_4 = 124$.

Số hạng tổng quát

Ta có $u_2 = 2 \cdot 1, u_3 = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1, u_4 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, u_5 = 124 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Vậy số hạng tổng quát $u_n = n!$.

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 17. Dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi $u_1 = 1, u_n = n \cdot u_{n-1}$, với $n \geq 2$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n .

☞ **Lời giải.**

a) Năm số hạng đầu của dãy số là

$$u_2 = 2 \cdot u_1 = 2 \cdot 1 = 2;$$

$$u_3 = 3 \cdot u_2 = 3 \cdot 2 = 6;$$

$$u_4 = 4 \cdot u_3 = 4 \cdot 6 = 24;$$

$$u_5 = 5 \cdot u_4 = 5 \cdot 24 = 120;$$

$$u_6 = 6 \cdot u_5 = 6 \cdot 120 = 720.$$

b) Số hạng tổng quát của dãy là $u_n = n!$.

□

Bài 18. Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức sau

a) $u_n = 2n^2 + 1.$

b) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}.$

c) $u_n = \frac{2^n}{n}.$

d) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$

☞ **Lời giải.**

$$u_1 = 2; \ u_2 = \frac{9}{4}; \ u_3 = \frac{64}{27}; \ u_4 = \frac{625}{256}; \ u_5 = \frac{7776}{3125}.$$


Bài 22. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$. Tìm u_1, u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n .

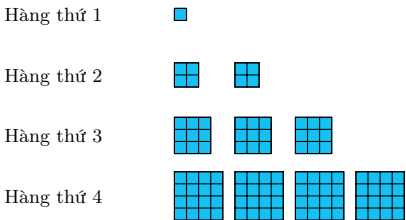
Lời giải.

Ta có $u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{3}{4}$.

Dự đoán công thức số hạng tổng quát là $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. □

Bài 23.

Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong hình bên (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n) .



Lời giải.

Ta thấy

- ☑ Hàng 1 có 1 hình vuông cạnh 1 đơn vị nên $v_1 = 1 \times 1 = 1^3$.
- ☑ Hàng 2 có 2 hình vuông cạnh 2 đơn vị nên $v_2 = 2 \times 2^2 = 2^3$.
- ☑ Hàng 3 có 3 hình vuông cạnh 3 đơn vị nên $v_3 = 3 \times 3^2 = 3^3$.
- ☑ Hàng 4 có 4 hình vuông cạnh 4 đơn vị nên $v_4 = 4 \times 4^2 = 4^3$.

Vậy ta dự đoán công thức tổng quát của dãy số (v_n) là $v_n = n^3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. □

Bài 24. Xác định số hạng đầu là số hạng tổng quát của dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ $1, 3, 5, 7, \dots$

Lời giải.

Dãy (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và số hạng tổng quát $u_n = 2n - 1$. □

Bài 25. Xác định số hạng đầu là số hạng tổng quát của dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho 5: $5, 10, 15, 20, \dots$

Lời giải.

Dãy (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 5$ và số hạng tổng quát $v_n = 5n$. □

Bài 26. Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 3n - 2$.

Lời giải.

Năm số hạng đầu của dãy số là $1, 4, 7, 10, 13$.

Số hạng thứ 100 của dãy là $u_{100} = 3 \cdot 100 - 2 = 298$. □

Bài 27. Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi: $u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2$ với $n \geq 2$. Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

Lời giải.

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 3u_1 + 2 = 5, u_3 = 3u_2 + 2 = 17$. □

Bài 28. Dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi: $u_1 = 1, u_n = n \cdot u_{n-1}$ với $n \geq 2$. Viết năm số hạng đầu của dãy số và dự đoán công thức tổng quát u_n .

Lời giải.

Năm số hạng đầu của dãy là $u_1 = 1, u_2 = 2 \cdot u_1 = 2, u_3 = 3 \cdot u_2 = 6, u_4 = 4 \cdot u_3 = 24, u_5 = 5 \cdot u_4 = 124$.

Số hạng tổng quát

Ta có $u_2 = 2 \cdot 1, u_3 = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1, u_4 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, u_5 = 124 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Vậy số hạng tổng quát $u_n = n!$. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 11. Cho dãy số có các số hạng đầu là $5, 10, 15, 20, 25, \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là

- (A) $u_n = 5(n - 1)$. (B) $u_n = 5n$. (C) $u_n = 5 + n$. (D) $u_n = 5n + 1$.

Lời giải.

Ta có $5 = 5 \cdot 1, 10 = 5 \cdot 2, 15 = 5 \cdot 3, 20 = 5 \cdot 4, 25 = 5 \cdot 5, \dots$

Vậy dãy trên có số hạng tổng quát là $u_n = 5n$.

Chọn đáp án (B)

Câu 12. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an^2}{n+1}$, a là hằng số. u_{n+1} là số hạng nào trong các số hạng sau

- (A) $u_{n+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+2}$. (B) $u_{n+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+1}$. (C) $u_{n+1} = \frac{an^2+1}{n+1}$. (D) $u_{n+1} = \frac{an^2}{n+2}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $u_{n+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+1+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+2}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 13. Cho dãy số có các số hạng đầu là $8, 15, 22, 29, 36, \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là

- (A) $u_n = 7n + 7$. (B) $u_n = 7n$.
(C) $u_n = 7n + 1$. (D) u_n không viết được dưới dạng công thức.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $8 = 7 \cdot 1 + 1, 15 = 7 \cdot 2 + 1, 22 = 7 \cdot 3 + 1, 29 = 7 \cdot 4 + 1, 36 = 7 \cdot 5 + 1, \dots$

Vậy dãy trên có số hạng tổng quát là $u_n = 7n + 1$.

Chọn đáp án (C)

Câu 14. Cho dãy số có các số hạng đầu là $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là

- (A) $u_n = \frac{n+1}{n}$. (B) $u_n = \frac{n}{n+1}$. (C) $u_n = \frac{n-1}{n}$. (D) $u_n = \frac{n^2-n}{n+1}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $0 = \frac{0}{0+1}, \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}, \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}, \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}, \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1}, \dots$

Vậy dãy trên có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 15. Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n+1}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- (A) $u_n = 2 - n$. (B) u_n không xác định. (C) $u_n = 1 - n$. (D) $u_n = -n$, với mọi n .

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = -1, u_4 = -2, \dots$

Để dàng dự đoán được số hạng tổng quát là $u_n = 2 - n$.

Chọn đáp án (A)

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu tiên của dãy số là

- (A) $u_1 = -\frac{1}{3}$. (B) $u_1 = \frac{2}{3}$. (C) $u_1 = \frac{1}{3}$. (D) $u_1 = \frac{1}{4}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $u_1 = \frac{2 \cdot 1^2 - 1}{1^2 + 3} = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n + 3$ với $n \geq 1$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là

- (A) $-1, 2, 5$. (B) $1, 4, 7$. (C) $4, 7, 10$. (D) $-1, 3, 7$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $u_1 = -1, u_2 = -1 + 3 = 2, u_3 = 2 + 3 = 5$.

Chọn đáp án (A)

Câu 18. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1} .

- (A) $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$. (B) $u_{n+1} = 2^n + 1$. (C) $u_{n+1} = 2(n+1)$. (D) $u_{n+1} = 2^n + 2$.

🗨️ **Lời giải.**

Thay n bằng $n+1$ trong công thức u_n ta được: $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$.

Chọn đáp án (A)

Câu 19. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1} .

- (A) $u_{2n-1} = 3^2 \cdot 3^n - 1$. (B) $u_{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$. (C) $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$. (D) $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = 3^n \Rightarrow u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1} .

- (A) $u_{n-1} = 5^{n-1}$. (B) $u_{n-1} = 5^n$. (C) $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$. (D) $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.

Lời giải.

$u_n = 5^{n+1} \Rightarrow u_{n-1} = 5^{(n-1)+1} = 5^n$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

- (A) $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$. (B) $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.
(C) $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. (D) $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Lời giải.

$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

- (A) $u_n = \frac{n+1}{n}$. (B) $u_n = \frac{n}{n+1}$. (C) $u_n = \frac{n-1}{n}$. (D) $u_n = \frac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải.

Vì $u_1 = 0$ nên loại các đáp án $u_n = \frac{n+1}{n}$ và $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Ta kiểm tra $u_2 = \frac{1}{2}$ Xét đáp án: $u_n = \frac{n-1}{n} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ chọn.

Xét đáp án: $u_n = \frac{n^2-n}{n+1} \Rightarrow u_2 = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ loại.

Nhận xét: $u_1 = 0 = \frac{1-1}{1}$; $u_2 = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2}$; $u_3 = \frac{2}{3} = \frac{3-1}{3}$, nên đoán $u_n = \frac{n-1}{n}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Dãy số có các số hạng cho bởi: $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

- (A) $u_n = 1$. (B) $u_n = -1$. (C) $u_n = (-1)^n$. (D) $u_n = (-1)^{n+1}$.

Lời giải.

Vì dãy số đã cho không phải là dãy hằng nên loại các đáp án $u_n = 1$ và $u_n = -1$.

Ta kiểm tra $u_1 = -1$ ở các đáp án $u_n = (-1)^n$ và $u_n = (-1)^{n+1}$.

Xét đáp án $u_n = (-1)^n \Rightarrow u_1 = -1$.

Xét đáp án $u_n = (-1)^{n+1} \Rightarrow u_1 = (-1)^2 = 1 \neq -1 \Rightarrow$ loại.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

- (A) $u_n = -2n$. (B) $u_n = n - 2$. (C) $u_n = -2(n+1)$. (D) $u_n = 2n - 4$.

Lời giải.

Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án $u_n = n - 2$, $u_n = -2(n+1)$. Ta kiểm tra $u_2 = 0$

Xét đáp án $u_n = -2n$ $u_n = n - 2$: $u_n = 2n \Rightarrow u_2 = 4 \neq 0 \Rightarrow u_n = n - 2$ loại.

Xét đáp án $u_n = 2n - 4$: $u_n = 2n - 4 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$ nhận.

Nhận xét: Dãy $2; 4; 6$ có công thức là $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) nên dãy $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$ có được bằng cách “tính tiến” $2n$ sang trái 4 đơn vị, tức là $2n - 4$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- (A) $u_n = n^{n-1}$. (B) $u_n = 2^n$. (C) $u_n = 2^{n+1}$. (D) $u_n = 2$.

Lời giải.

Từ công thức $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 = 2 \cdot 2 = 4 \\ u_3 = 2u_2 = 2 \cdot 4 = 8 \end{cases}$

Xét đáp án $u_n = n^{n-1}$ với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1^{1-1} = 1^0 = 1$ loại.

Xét đáp án $u_n = 2^n$, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án $u_n = 2^{n+1}$ với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4$ loại.

Để thấy đáp án $u_n = 2$ không thỏa mãn

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- (A) $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$. (B) $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$. (C) $u_n = \frac{1}{2} - 2n$. (D) $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Lời giải.

Từ công thức $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ u_3 = u_2 - 2 = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \end{cases}$

Xét đáp án $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$ với $n = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2} + 2(2-1) = \frac{5}{2} \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án $u_n = \frac{1}{2} - 2n$ với $n = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2} - 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2} \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $u_n = \frac{1}{2} + 2n$ với $n = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow$ loại.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- (A) $u_n = 2 + (n-1)^2$. (B) $u_n = 2 + n^2$. (C) $u_n = 2 + (n+1)^2$. (D) $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Lời giải.

Kiểm tra $u_1 = 2$ ta loại các đáp án $u_n = 2 + n^2$ và $u_n = 2 + (n+1)^2$.

Ta có $u_2 = u_1 + 2 \cdot 1 - 1 = 3$.

Xét đáp án $u_n = 2 + (n-1)^2 \Rightarrow u_2 = 3$.

Hoặc kiểm tra $u_{n+1} - u_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$.

Xét đáp án $u_n = 2 - (n-1)^2 \Rightarrow u_2 = 1 \Rightarrow$ loại.

Hoặc kiểm tra $u_{n+1} - u_n = (n-1)^2 - n^2 = -2n + 1 \neq 2n - 1$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 3. Xét tính tăng giảm của dãy số

a) Phương pháp 1. Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

(a) Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

b) Phương pháp 2. Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

(a) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

(a) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

c) Phương pháp 3. Nếu dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$).

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 12. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = 3n - 2$ là một dãy số tăng.

Lời giải.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 1 > 3n - 2 = u_n$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng. □

Ví dụ 13. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \frac{1}{n}$;

b) (b_n) với $b_n = n^2$;

c) (c_n) với $c_n = (-2)^n$.

Lời giải.

a) Ta có $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (a_n) là dãy số giảm.

b) Ta có $b_{n+1} = (n+1)^2 > n^2 = b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (b_n) là dãy số tăng.

c) Ta có $c_1 = -2; c_2 = 4; c_3 = -8$, suy ra $c_1 < c_2; c_2 > c_3$.
 Vậy (c_n) không là dãy số tăng, cũng không là dãy số giảm. □

Ví dụ 14. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \frac{n}{n+1}$;

b) (b_n) với $b_n = n - n^2$.

Lời giải.

a) Ta nhận thấy các số hạng của dãy (a_n) đều là số dương. Ta lập tỉ số hai số hạng liên tiếp của dãy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = 1 + \frac{1}{n^2 + 2n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (a_n) là dãy số tăng.

b) Ta có $b_{n+1} - b_n = [n+1 - (n+1)^2] - (n - n^2) = -n^2 - n - n + n^2 = -2n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $b_{n+1} < b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (b_n) là dãy số giảm. □

⚠ Không phải mọi dãy số đều là dãy số tăng hay dãy số giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$ có dạng khai triển là $-1, 1, -1, \dots$ không là dãy số tăng, cũng không là dãy số giảm.

2. Bài tập tự luyện

Bài 29. Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n) , biết

a) $u_n = \frac{n-3}{n+2}$;

b) $u_n = \frac{3^n}{2^n \cdot n!}$;

c) $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n-2}{n+3} - \frac{n-3}{n+2} = \frac{5}{(n+2)(n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

hay $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.

b) Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} - \frac{3^n}{2^n \cdot n!} = \frac{3^n}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} [3 - 2(n+1)] = \frac{3^n(1-2n)}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

hay $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra dãy số (u_n) là dãy số giảm.

c) Ta có dạng khai triển của dãy số u_n là $-3, 5, -9, 17, \dots$ nên dãy số (u_n) không là dãy số tăng, không là dãy số giảm.

□

Bài 30 (NB). Xét sự tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

💬 **Lời giải.**

Ta có:

$$u_1 = (-1)^1 = -1, u_2 = (-1)^2 = 1, u_3 = (-1)^3 = -1.$$

Vậy (u_n) là dãy không tăng không giảm.

□

Bài 31 (NB). Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có: } u_n = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(2 - \frac{1}{n+1+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

□

Bài 32 (TH). Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2} = \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}.$$

Xét hiệu

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}} - \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

□

Bài 33. Cho dãy số thực dương (u_n) . Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số tăng khi và chỉ khi $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

💬 **Lời giải.**

Do dãy số (u_n) là dãy số thực dương nên $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng khi và chỉ khi $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Bài 34 (TH). Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \frac{n}{3^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét thương $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3 \cdot n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

□

Bài 35 (VD). Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Lời giải.

Giả sử $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (*)

Ta chứng minh (*) bằng phương pháp quy nạp.

☑ Với $n = 1, u_2 = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2 + 1} = \frac{6}{3} = \frac{7}{3} > u_1 = 2$.

☑ Giả sử (*) đúng khi $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, tức là $u_{k+1} > u_k$.

Ta sẽ chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$, tức là $u_{k+2} > u_{k+1}$.

Thật vậy

$$u_{k+2} - u_{k+1} = \left(3 - \frac{2}{u_{k+1} + 1}\right) - \left(3 - \frac{2}{u_k + 1}\right) = \frac{2}{u_k + 1} - \frac{2}{u_{k+1} + 1}.$$

Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$u_{k+1} > u_k \Rightarrow u_{k+1} + 1 > u_k + 1 \Rightarrow \frac{2}{u_k + 1} > \frac{2}{u_{k+1} + 1}.$$

Vậy $u_{k+2} - u_{k+1} > 0$.

Do đó, (*) đúng với mọi số nguyên dương n .

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 28. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

(A) 1; 1; 1; 1; 1; 1; ...

(B) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$

(C) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$

(D) 1; 3; 5; 7; 9; ...

Lời giải.

Xét đáp án 1; 1; 1; 1; 1; 1; ... đây là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Xét đáp án $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots \Rightarrow u_1 > u_2 < u_3 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án 1; 3; 5; 7; 9; ... $\Rightarrow u_n < u_{n+1}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ chọn.

Xét đáp án $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots \Rightarrow u_1 > u_2 > u_3 \dots > u_n > \dots \Rightarrow$ loại.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 29. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an - 1}{n + 2}, \forall n \geq 1$ là dãy số tăng?

(A) $a > 2$.

(B) $a < -2$.

(C) $a > -\frac{1}{2}$.

(D) $a < -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = a - \frac{1 + 2a}{n + 2}$.

$$u_{n+1} - u_n = (1 + 2a) \left(\frac{1}{n + 2} - \frac{1}{n + 3} \right).$$

Suy ra dãy số đã cho tăng khi $a > -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 30. Trong các dãy (u_n) sau đây dãy nào là dãy số giảm ?

(A) $u_n = (-1)^n$.

(B) $u_n = 2^n$.

(C) $u_n = 3n + 1$.

(D) $u_n = \frac{1}{3^n}$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) có $u_n = \frac{1}{3^n}$, ta thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$ nên dãy số (u_n) này là dãy số giảm.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 31. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

(A) $u_n = \frac{1}{n}$.

(B) $u_n = \frac{1}{2^n}$.

(C) $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$.

(D) $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải.

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án $u_n = \frac{1}{2^n}$ và $u_n = \frac{1}{n}$.

Xét đáp án $u_n = \frac{n+5}{3n+1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = \frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow u_1 > u_2 \Rightarrow \text{loại}.$

Xét đáp án $u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) > 0 \Rightarrow \text{nhận}.$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 32. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

(A) $u_n = n^2$.

(B) $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$.

(C) $u_n = \sqrt{n+2}$.

(D) $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Lời giải.

Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}$ là dãy giảm.

Xét $u_n = \frac{3n-1}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2, \text{ loại}.$

Hoặc $u_{n+1} - u_n = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{3n-1}{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0$ nên (u_n) là dãy tăng.

Xét $u_n = n^2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0, \text{ loại}.$

Xét $u_n = \sqrt{n+2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} > 0, \text{ loại}.$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 33. Trong các dãy số (u_n) sau, hãy chọn dãy số tăng.

(A) $u_n = (-1)^{2n}(5^n + 1), n \in \mathbb{N}^*.$

(B) $u_n = \frac{n}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^*.$

(C) $u_n = (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$

(D) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+n}, n \in \mathbb{N}^*.$

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^{2n}(5^n + 1)$, ta có

$$u_{n+1} - u_n = (-1)^{2n+2}(5^{n+1} + 1) - (-1)^{2n}(5^n + 1) = 5^{n+1} + 1 - 5^n - 1 = 4 \cdot 5^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy trên là dãy số tăng.

Xét các dãy số còn lại

☑ Với $u_n = (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n}$ ta có $u_1 = 0, u_2 = -1$ hay $u_1 > u_2$. Vậy dãy số này không là dãy số tăng.

☑ Với $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+n}$ ta có $u_1 = \sqrt{2} - 1, u_2 = 2 - \sqrt{3}$ hay $u_1 > u_2$. Vậy dãy số này không là dãy số tăng.

☑ Với $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ ta có $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{5}$ hay $u_1 > u_2$. Vậy dãy số này không là dãy số tăng.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 34. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

(A) $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$.

(B) $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

(C) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

(D) $u_n = \sin n$.

Lời giải.

Xét $u_n = \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2 \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án sai. Hoặc dễ thấy $\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy $\sin n$ không tăng, không giảm.

Xét $u_n = \frac{n^2 + 1}{n} = n + \frac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n^2 + n - 1}{n(n+1)} > 0$ nên dãy đã cho tăng nên đáp án sai.

Xét $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, dãy $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm.

Xét $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm, nên đáp án đúng.

Cách trắc nghiệm

Xét $u_n = \sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy này không tăng không giảm.

Xét $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$, ta có $\begin{cases} n=1 \rightarrow u_1=2 \\ n=2 \rightarrow u_2=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2 \Rightarrow u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ không giảm.

Xét $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, ta có $\begin{cases} n=1 \rightarrow u_1=1 \\ n=2 \rightarrow u_2=\sqrt{2}-1 \end{cases} \Rightarrow u_1 > u_2$ nên dự đoán dãy này giảm.

Xét $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách CASIO.

Các dãy $\sin n$; $(-1)^n(2^n + 1)$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án này.

Xét hai đáp án còn lại, ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng *TABLE*.

Chẳng hạn kiểm tra đáp án $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$, ta vào chức năng *TABLE* nhập $F(X) = \frac{X^2 + 1}{X}$ với thiết lập Start = 1, End = 10, Step = 1.

Nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị tăng thì loại $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ nếu ngược lại nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị giảm dần thì chọn $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.

(B) Dãy số $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n}$ là dãy tăng.

(C) Dãy số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

(D) Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy giảm.

Lời giải.

Xét đáp án $u_n = \frac{1}{n} - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại.

Xét đáp án $u_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) > 0 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(2 - \cos \frac{1}{n+1}\right) + \cos \frac{1}{n+2} > 0$ chọn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) Dãy số $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.

(B) Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

(C) Dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.

(D) Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

Lời giải.

Xét đáp án

$u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0$ nên dãy (u_n) là dãy giảm nên đúng.

Xét đáp án $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên đúng.

Hoặc $u_{n+1} - u_n = 2(2n+1) > 0$ nên (u_n) là dãy tăng.

Xét đáp án $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^n > 1 \Rightarrow (u_n)$ là dãy tăng nên sai.

Xét đáp án $u_n = n + \sin^2 n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (1 - \sin^2(n+1)) + \sin^2 n > 0$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 37. Cho dãy (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$. Nhận xét nào sau đây đúng

(A) Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

(B) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

(C) Dãy số (u_n) là dãy số không tăng, không giảm.

(D) Tất cả các đáp án còn lại đều sai.

Lời giải.

Ta chứng minh quy nạp $u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ khi đó có:

$$u_{k+1} = \frac{k}{2(k+1)}u_k + \frac{3(k+2)}{2(k+1)} < \frac{3k}{2(k+2)} + \frac{3(k+2)}{2(k+1)} = 3.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$. Từ đó ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)(n+2)}{n+1} > 0.$$

Vậy dãy (u_n) tăng

Chọn đáp án **(A)**

Dạng 4. Xét tính bị chặn của dãy số

-  Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M , ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
-  Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m , ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
-  Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
 - Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1 .
 - Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

Ví dụ mẫu

Ví dụ 15. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) bị chặn trên.

$u_n = \frac{1}{2^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) bị chặn dưới.

Ta thấy dãy số (u_n) bị chặn trên và bị chặn dưới, suy ra dãy số (u_n) bị chặn.

Ví dụ 16. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \cos \frac{\pi}{n}$;

b) (b_n) với $b_n = \frac{n}{n+1}$.

Lời giải.

a) Ta có $a_n = \cos \frac{\pi}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (a_n) bị chặn trên bởi 1.

$a_n = \cos \frac{\pi}{n} \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (a_n) bị chặn dưới bởi -1.

Ta thấy dãy số (a_n) bị chặn trên và bị chặn dưới, suy ra dãy số (a_n) bị chặn.

b) Ta có $b_n = \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (b_n) bị chặn dưới bởi $\frac{1}{2}$.
 $b_n = \frac{n}{n+1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (b_n) bị chặn trên bởi 1.

Ta thấy dãy số (b_n) bị chặn trên và bị chặn dưới, suy ra dãy số (b_n) bị chặn.

□

Ví dụ 17 (NB). Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{8n+3}{3n+5}$ là một dãy số bị chặn.

Lời giải.

Ta có $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số bị chặn dưới.

Mặt khác $u_n = \frac{8n+3}{3n+5} < \frac{8n+3}{3n} = \frac{8}{3} + \frac{1}{n} < \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$. Do đó dãy số bị chặn trên bởi $\frac{11}{3}$.

Vậy dãy số đã cho bị chặn.

□

Ví dụ 18 (TH). Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n+1}{n+3}$.

Lời giải.

Với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n = \frac{3n+1}{n+3} > 0$.

Nên dãy (u_n) bị chặn dưới bởi 0.

Mặt khác $u_n = \frac{3n+1}{n+3} = \frac{3n+9-8}{n+3} = 3 - \frac{8}{n+3} < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 3.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

□

Ví dụ 19 (VD). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\frac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

Lời giải.

Ta chứng minh $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}, \forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp.

☑ Với $n = 1$ ta có $1 \leq u_1 \leq \frac{3}{2}$.

☑ Giả sử $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ với mọi $n = k \geq 1$, tức là $1 \leq u_k \leq \frac{3}{2}$. Ta cần chứng minh $1 \leq u_{k+1} \leq \frac{3}{2}$.

Thật vậy $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{u_k+1}$.

Vì $u_k + 1 > 0$ nên $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{u_k+1} > 1$.

Vì $u_k + 1 \geq 2$ nên $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{u_k+1} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Vậy $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}, \forall n \geq 1$ hay dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\frac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 36. Trong các dãy số (u_n) được xác định như sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n = n^2 + 2$;

b) $u_n = -2n + 1$;

c) $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$.

Lời giải.

a) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = n^2 + 2 \geq 1^2 + 2 > 2$.
 Vậy dãy số (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = -2n + 1 \leq -2 \cdot 1 + 1 < 0$.
 Vậy dãy số (u_n) là dãy số bị chặn trên.

c) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $n^2 + n \geq 1^2 + 1 > 1 > 0$ nên $0 < \frac{1}{n^2 + n} < 1$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

□

Bài 37 (NB). Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n}{n^2 + 9}$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

Với mọi $n \geq 1$, ta có $\frac{3n}{n^2 + 9} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2 + 9 \leq 6n \Leftrightarrow (n - 3)^2 \leq 0$ (đúng).

Vậy dãy số đã cho bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

□

Bài 38 (NB). Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{8n + 3}{3n + 5}$ là một dãy số bị chặn.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số bị chặn dưới.

Mặt khác $u_n = \frac{8n + 3}{3n + 5} < \frac{8n + 3}{3n} = \frac{8}{3} + \frac{1}{n} < \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$. Do đó dãy số bị chặn trên bởi $\frac{11}{3}$.

Vậy dãy số đã cho bị chặn.

□

Bài 39 (TH). Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n + 1}{n + 3}$.

🗨️ **Lời giải.**

Với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n = \frac{3n + 1}{n + 3} > 0$.

Nên dãy (u_n) bị chặn dưới bởi 0.

Mặt khác $u_n = \frac{3n + 1}{n + 3} = \frac{3n + 9 - 8}{n + 3} = 3 - \frac{8}{n + 3} < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 3.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

□

Bài 40 (VD). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\frac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

🗨️ **Lời giải.**

Ta chứng minh $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}, \forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp.

🕒 Với $n = 1$ ta có $1 \leq u_1 \leq \frac{3}{2}$.

🕒 Giả sử $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ với mọi $n = k \geq 1$, tức là $1 \leq u_k \leq \frac{3}{2}$. Ta cần chứng minh $1 \leq u_{k+1} \leq \frac{3}{2}$.

Thật vậy $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{u_k + 1}$.

Vì $u_k + 1 > 0$ nên $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{u_k + 1} > 1$.

Vì $u_k + 1 \geq 2$ nên $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{u_k + 1} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Vậy $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}, \forall n \geq 1$ hay dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\frac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

□

Bài 41 (VD). Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \sin n + \cos n$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\sin n + \cos n$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin n + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos n \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin n \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos n \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(n + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } -1 &\leq \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \\ \Rightarrow -\sqrt{2} &\leq \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \\ \Rightarrow -\sqrt{2} &\leq \sin n + \cos n \leq \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \Rightarrow -\sqrt{2} &\leq u_n \leq \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số bị chặn. □

Bài 42 (VD). Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn trên, bị chặn dưới và bị chặn?

$$\begin{aligned} \text{a) } u_n &= n^2 + 5. & \text{b) } u_n &= \frac{3n+1}{2n+5}. & \text{c) } u_n &= (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}. \\ \text{d) } u_n &= \frac{n^2+2n}{n^2+n+1}. & \text{e) } u_n &= \frac{n}{\sqrt{n^2+2n+n}}. \end{aligned}$$

Lời giải.

- a) Dãy số bị chặn dưới bởi 6, không bị chặn trên.
 b) Dãy (u_n) bị chặn dưới bởi 0. Vì $u_n < \frac{3n+1}{2n} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2n} < \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ nên dãy số bị chặn trên bởi $\frac{5}{2}$. Vậy dãy số bị chặn.
 c) Ta có $|u_n| \leq 1$ nên dãy số bị chặn trên bởi 1, bị chặn dưới bởi -1.
 d) Dãy số bị chặn dưới bởi 0. Vì $u_n < \frac{n^2+2n}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} \leq 3$ nên dãy số bị chặn trên. Vậy dãy số bị chặn.
 e) Ta có $0 < u_n \leq 1$ vậy dãy số bị chặn. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 38. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}, \forall n \geq 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) Dãy số bị chặn. (B) Dãy số bị chặn trên. (C) Dãy số bị chặn dưới. (D) Dãy số không bị chặn.

Lời giải.

Ta chứng minh $u_n > 1, \forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp.

Suy ra dãy số bị chặn dưới bởi 1.

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n}{2} < 0, \forall n \geq 1.$$

Do đó dãy số này là dãy số giảm nên nó bị chặn trên bởi $u_1 = 3$.

Vậy dãy số đã cho là dãy số bị chặn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, \forall n \geq 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) Dãy số bị chặn trên. (B) Dãy số bị chặn dưới. (C) Dãy số bị chặn. (D) Dãy số không bị chặn.

Lời giải.

Vì $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới bởi 0.

Ta chứng minh $u_n \geq 2, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số bị chặn trên bởi 2.

Vậy dãy số đã cho là dãy số bị chặn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.

- (A) Không bị chặn. (B) Bị chặn trên. (C) Bị chặn dưới. (D) Bị chặn.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Do đó $0 \leq u_n \leq 1, \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số đã cho là dãy số bị chặn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+3)}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

(A) $m = 0, M = 1.$

(B) $m = 1, M = \frac{1}{2}.$

(C) $m = 1, M = \frac{10}{19}.$

(D) $m = 0, M = \frac{11}{18}.$

Lời giải.

Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Mặt khác $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right).$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } u_n &= \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) < \frac{11}{18}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Do đó (u_n) bị chặn trên.

Vậy $m = 0, M = \frac{11}{18}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M . Tính giá trị biểu thức $m + M$?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

(B) $\frac{1}{\sqrt{3}}.$

(C) $\frac{1}{\sqrt{5}}.$

(D) $\frac{1}{\sqrt{7}}.$

Lời giải.

Xét $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}} = \frac{\sqrt{(2k-1)^2}}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} = \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}, \forall k \geq 1.$

$$\Rightarrow u_n < \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \dots \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $m + M = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2; 3; 4; \dots$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Dãy số bị chặn.

(B) Dãy số bị chặn trên.

(C) Dãy số bị chặn dưới.

(D) Dãy số không bị chặn.

Lời giải.

Ta có $u_n > 0 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0.

Mặt khác $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, (k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2)$ nên suy ra

$$\begin{aligned} u_n &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1. \end{aligned}$$

Nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{4k^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $0 < u_n < 1.$

(B) $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}.$

(C) $0 < u_n < \frac{1}{2}.$

(D) $0 \leq u_n \leq 1.$

Lời giải.

☑ Ta có $a_k = \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1) - (2k-1)}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$.

☑ Mặt khác $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Do đó

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

☑ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_n > 0$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Ta lại có $u_n = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2}$.

Vậy dãy số bị chặn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+4)}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào sau đây?

(A) $m = 0, M = \frac{25}{48}$.

(B) $m = 0, M = \frac{25}{12}$.

(C) $m = 1, M = \frac{1}{4}$.

(D) $m = 1, M = \frac{1}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{k(k+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{k+4-k}{k(k+4)} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4} \right)$.

Mặt khác $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Do đó

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{25}{12} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right). \end{aligned}$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_n > 0$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Ta lại có $u_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{25}{12} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) < \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{12} = \frac{25}{48}$.

Vậy $m = 0, M = \frac{25}{48}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

(A) Bị chặn.

(B) Bị chặn dưới.

(C) Bị chặn trên.

(D) Không bị chặn..

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Do đó

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_n > 0$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Ta lại có $u_n = 1 - \frac{n}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên.

Vậy dãy số bị chặn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho dãy số (u_n) , xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $\sqrt{6} < u_n < 2\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{6} \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{6} < u_n \leq 2\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{6} \geq u_n < 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow u_n \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \geq \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow u_n \geq \sqrt{6}.$$

$$\text{Ta chứng minh quy nạp } \begin{cases} u_n \leq 2\sqrt{3} \\ u_1 \leq 2\sqrt{3} \\ u_k \leq 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{6 + u_{k+1}} \leq \sqrt{6 + 2\sqrt{3}} < \sqrt{6 + 6} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{6} \leq u_n \leq 2\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (B)

□

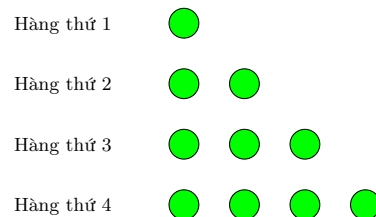
Dạng 5. Toán thực tế về dãy số

Áp dụng các kiến thức về dãy số vào thực tế.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 20.

Gọi u_n là số hình tròn ở hàng thứ n trong hình bên. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n) .



Lời giải.

Ta thấy

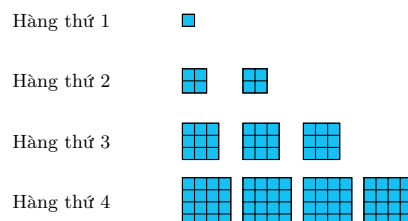
- ☑ Hàng 1 có 1 hình tròn.
- ☑ Hàng 2 có 2 hình tròn.
- ☑ Hàng 3 có 3 hình tròn.
- ☑ Hàng 4 có 4 hình tròn.

Vậy ta dự đoán công thức tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Ví dụ 21.

Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong hình bên (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n) .



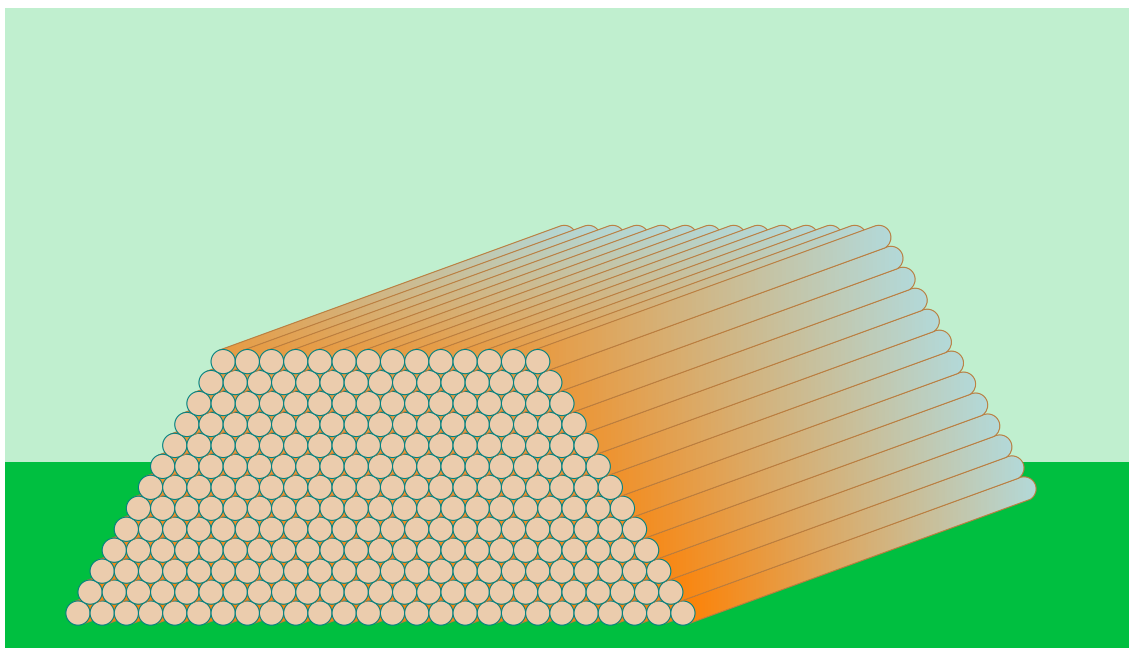
Lời giải.

Ta thấy

- ☑ Hàng 1 có 1 hình vuông cạnh 1 đơn vị nên $v_1 = 1 \times 1 = 1^3$.
- ☑ Hàng 2 có 2 hình vuông cạnh 2 đơn vị nên $v_2 = 2 \times 2^2 = 2^3$.
- ☑ Hàng 3 có 3 hình vuông cạnh 3 đơn vị nên $v_3 = 3 \times 3^2 = 3^3$.
- ☑ Hàng 4 có 4 hình vuông cạnh 4 đơn vị nên $v_4 = 4 \times 4^2 = 4^3$.

Vậy ta dự đoán công thức tổng quát của dãy số (v_n) là $v_n = n^3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. □

Ví dụ 22. Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau một cột gỗ.



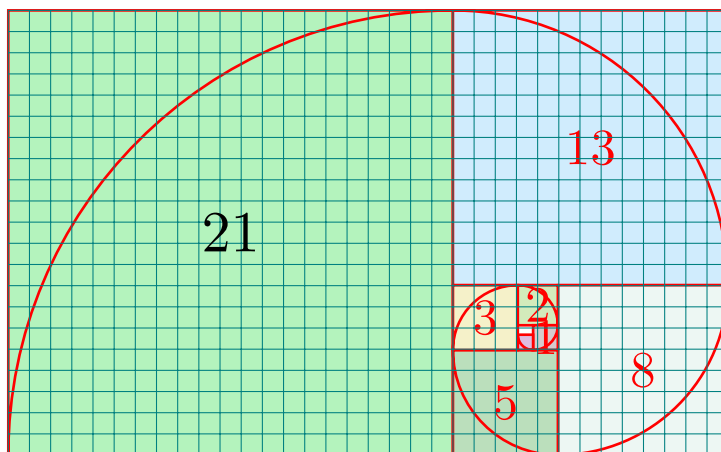
- Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.
- Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

Lời giải.

- Ta có $u_n = 26 - n > u_{n+1} = 26 - n - 1 = 25 - n$.
Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- Ta có $v_n = 13 + n < v_{n+1} = 13 + n + 1 = 14 + n$.
Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng

□

Ví dụ 23. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như hình vẽ. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Lời giải.

$$\textcircled{v} u_1 = 1.$$

$$\textcircled{v} u_3 = 2.$$

$$\textcircled{v} u_5 = 5.$$

$$\textcircled{v} u_7 = 13.$$

$$\textcircled{v} u_2 = 1.$$

$$\textcircled{v} u_4 = 3.$$

$$\textcircled{v} u_6 = 8.$$

$$\textcircled{v} u_8 = 21.$$

Ta có dãy số (u_n) :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - u_{n-2}. \end{cases}$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 43. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau. Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

- Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.
- Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.
- Dự đoán công thức của P_n tính theo n .

Lời giải.

- Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là $P_1 = +100 + 100 \cdot 0,5\% + 6 = 100,5 + 6$ (triệu đồng).
- Số tiền chị có trong ngân hàng sau 2 tháng là

$$\begin{aligned} P_2 &= 100,5 + 6 + (100,5 + 6) \cdot 0,5\% + 6 \\ &= (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 \\ &= 100,5(1 + 0,5\%) + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng là

$$\begin{aligned} P_3 &= (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 + [(100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6] \cdot 0,5\% + 6 \\ &= 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^2 + 6(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

- Số tiền chị có trong ngân hàng sau 4 tháng là

$$\begin{aligned} P_4 &= (100,5 + 6)(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 + [(100,5 + 6)(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6] \cdot 0,5\% + 6 \\ &= 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^3 + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^3 + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

Số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng là

$$P_n = 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-1} + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-1} + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-2} + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-3} + \dots + 6$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Bài 44. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25 \text{ với } n \geq 2.$$

- Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.
- Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}s_2 &= s_1 + 25 = 200 + 25 = 225 \\s_3 &= s_2 + 25 = 225 + 25 = 250 \\s_4 &= s_3 + 25 = 250 + 25 = 275 \\s_5 &= s_4 + 25 = 275 + 25 = 300.\end{aligned}$$

Vậy lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty là 300 triệu đồng.

b) Ta có $s_n = s_{n-1} + 25 \Leftrightarrow s_n - s_{n-1} = 25 > 0$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$.

Tức là $s_n > s_{n-1}$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (s_n) là dãy số tăng.

Điều này có nghĩa là mức lương hàng năm của anh Thanh tăng dần theo thời gian làm việc.

□

Bài 45. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Lời giải.

a) Số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất là

$$A_1 = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^1 = 100,5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền ông An nhận được sau tháng thứ hai là

$$A_2 = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^2 = 101,0025 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Số tiền ông An nhận được sau 1 năm (12 tháng) là

$$A_{12} = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} \approx 106,17 \text{ (triệu đồng)}.$$

□

Bài 46. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng. Gọi $A_n, (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

Lời giải.

a) Ta có $A_0 = 100$ (triệu đồng).

☑ Tiền lãi chị Hương phải trả sau 1 tháng là $100 \cdot 0,8\% = 0,8$ (triệu đồng).

Do đó, số tiền gốc chị Hương trả được sau 1 tháng là $2 - 0,8 = 1,2$ (triệu đồng).

Khi đó, số tiền còn nợ của chị Hương sau 1 tháng là $A_1 = 100 - 1,2 = 98,8$ (triệu đồng).

- ☑ Tiền lãi chị Hương phải trả sau 2 tháng là $98,8 \cdot 0,8\% = 0,7904$ (triệu đồng).
Do đó, số tiền gốc chị Hương trả được sau 2 tháng là $2 - 0,7904 = 1,2096$ (triệu đồng).
Khi đó, số tiền còn nợ của chị Hương sau 2 tháng là $A_2 = 98,8 - 1,2096 = 97,5904$ (triệu đồng).
- ☑ Tiền lãi chị Hương phải trả sau 3 tháng là $97,5904 \cdot 0,8\% = 0,7807232$ (triệu đồng).
Do đó, số tiền gốc chị Hương trả được sau 3 tháng là $2 - 0,7807232 = 1,2192768$ (triệu đồng).
Khi đó, số tiền còn nợ của chị Hương sau 3 tháng là $A_3 = 97,5904 - 1,2192768 = 96,3711232$ (triệu đồng).
- ☑ Tiền lãi chị Hương phải trả sau 4 tháng là $96,3711232 \cdot 0,8\% \approx 0,77097$ (triệu đồng).
Do đó, số tiền gốc chị Hương trả được sau 4 tháng là $2 - 0,77097 = 1,22903$ (triệu đồng).
Khi đó, số tiền còn nợ của chị Hương sau 4 tháng là $A_4 = 96,3711232 - 1,22903 = 95,1420932$ (triệu đồng).
- ☑ Tiền lãi chị Hương phải trả sau 5 tháng là $95,1420932 \cdot 0,8\% \approx 0,76114$ (triệu đồng).
Do đó, số tiền gốc chị Hương trả được sau 5 tháng là $2 - 0,76114 = 1,23886$ (triệu đồng).
Khi đó, số tiền còn nợ của chị Hương sau 5 tháng là $A_5 = 95,1420932 - 1,23886 = 93,9032332$ (triệu đồng).
- ☑ Tiền lãi chị Hương phải trả sau 6 tháng là $93,9032332 \cdot 0,8\% \approx 0,75123$ (triệu đồng).
Do đó, số tiền gốc chị Hương trả được sau 6 tháng là $2 - 0,75123 = 1,24877$ (triệu đồng).
Khi đó, số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng là $A_6 = 93,9032332 - 1,24877 = 92,6544632$ (triệu đồng).

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) là

$$A_0 = 100, A_n = A_{n-1} - (2 - A_{n-1} \cdot 0,8\%) = 1,008A_{n-1} - 2$$



Bài số 2

CẤP SỐ CỘNG

A – ĐỊNH NGHĨA

✎ **Định nghĩa 2.1.** Cấp số cộng là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d , tức là

$$u_n = u_{n-1} + d \text{ với } n \geq 2.$$

Số d được gọi là *công sai* của cấp số cộng.

⚠ *Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d thì với số tự nhiên $n \geq 2$, ta có $u_n - u_{n-1} = d$.*

⚠ *Khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.*

B – SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

✎ **Định nghĩa 2.2.** Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ với } n \geq 2.$$

🔴 **Nhận xét.** Từ công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$, ta có $n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1$ với $n \geq 2$, $d \neq 0$.

C – TỔNG N SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

✎ **Định nghĩa 2.3.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

🔴 **Nhận xét.** Do $u_n = u_1 + (n - 1)d$ nên $u_1 + u_n = 2u_1 + (n - 1)d$. Suy ra $S_n = \frac{[2u_1 + (n - 1)d]n}{2}$.

D – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

📁 Dạng 1. Nhận diện cấp số cộng, công sai d và số hạng đầu của CSC

Dựa theo định nghĩa của cấp số cộng, để nhận diện (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d$. Khi đó công sai $d = u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (Cánh Diều). Dãy các số tự nhiên lẻ liên tiếp $1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$ có là cấp số cộng hay không? Vì sao?

🗨 **Lời giải.**

Dãy các số tự nhiên lẻ liên tiếp $1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$ là cấp số cộng vì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với 2. Công sai của cấp số cộng này là 2. $\square$

Ví dụ 2 (CTST). Tìm cấp số cộng trong các dãy số sau:

a) 5, 10, 15, 20, 25, 30.

b) 1, 2, 4, 8.

4

4

7

4

4

7

 Toán 11 theo chương trình GDPT2018

Bài 8 (NB). Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

Lời giải.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n - 5) = 19$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu là $u_1 = 19 \cdot 1 - 5 = 14$ và công sai $d = 19$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$ phụ thuộc vào n . Vậy (u_n) không là một cấp số cộng.

□

Bài 9 (TH). Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$, $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \geq 2$ (số hạng đầu u_1 và công sai d)

Suy ra $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow 9 = 3 + d \Leftrightarrow d = 6$.

Vậy công sai của cấp số cộng đã cho là 6.

□

Bài 10 (TH). Tìm số hạng đầu tiên, công sai của cấp số cộng sau $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$ ta có $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 3$, công sai $d = 4$.

□

Bài 11 (VD). Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 + u_7 = 2u_4 \end{cases}$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 + u_7 = 2u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + (u_1 + 3d) - (u_1 + 5d) = -7 \\ u_1 + 7d - (u_1 + 6d) = 2(u_1 + 3d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2 \end{cases}$

□

Bài 12 (VD). Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ u_1 + 4d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$

□

Bài 13 (VDC). Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của một cấp số cộng biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 - d + u_2 + u_2 + d = 27 \\ ((u_2 - d)^2 + u_2^2 + (u_2 + d)^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 9 \\ 3u_2^2 + 2d^2 = 275 \end{cases}$

□

Thay $u_2 = 9$ vào $3u_2^2 + 2d^2 = 275$ ta được $d = 4$ hay $d = -4$. Vậy $u_1 = 5$, $d = 4$ hoặc $u_1 = 13$, $d = -4$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

(A) 1; -3; -7; -11; -15; ...

(B) 1; -3; -6; -9; -12; ...

(C) 1; -2; -4; -6; -8; ...

(D) 1; -3; -5; -7; -9; ...

Lời giải.

Ta lần lượt tính khoảng cách d các phần tử, ta thấy dãy số đáp án A có $d = -4$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 2. Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

(A) $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}$.

(B) $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}$.

(C) $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}$.

(D) $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta lần lượt tính khoảng cách d các phần tử, ta thấy dãy số trừ đáp án C có khoảng cách các phần tử không bằng nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

(A) 4.

(B) -4.

(C) 8.

(D) 3.

Lời giải.

Ta có $u_2 = 6 \Leftrightarrow 6 = u_1 + d \Leftrightarrow d = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -3$ và $u_6 = 27$. Công sai d của cấp số cộng đã cho là

(A) $d = 7$.

(B) $d = 5$.

(C) $d = 8$.

(D) $d = 6$.

Lời giải.

Ta có $u_6 = 27 \Leftrightarrow 27 = u_1 + 5d \Leftrightarrow d = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

(A) 1.

(B) 3.

(C) -2.

(D) 2.

Lời giải.

Gọi u_1, d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) .

Khi đó, ta có $u_{17} = u_1 + 16d, u_{33} = u_1 + 32d$

Suy ra $u_{33} - u_{17} = 65 - 33 \Leftrightarrow 16d = 32 \Leftrightarrow d = 2$

Vậy công sai bằng 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho cấp số cộng có $u_1 = -3$ và $d = 4$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $u_5 = 15$.

(B) $u_4 = 8$.

(C) $u_3 = 5$.

(D) $u_2 = 2$.

Lời giải.

Ta có $u_3 = u_1 + 2d = -3 + 2 \cdot 4 = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho cấp số cộng có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99} .

(A) 401.

(B) 403.

(C) 402.

(D) 404.

Lời giải.

Ta có $u_{99} = u_1 + 98d = 11 + 98 \cdot 4 = 403$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Một cấp số cộng (u_n) có $u_{13} = 8$ và $d = -3$. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng (u_n) .

(A) 50.

(B) 28.

(C) 38.

(D) 44.

Lời giải.

Ta có $u_{13} = u_1 + 12d \Leftrightarrow 8 = u_1 + 12 \cdot (-3) \Rightarrow u_1 = 44 \Rightarrow u_3 = u_1 + 2d = 44 - 6 = 38$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 4$. Hãy tính giá trị u_{2019} bằng

(A) 8074.

(B) 4074.

(C) 8078.

(D) 4078.

Lời giải.

Ta có $u_{2019} = u_1 + 2018d = 2 + 2018 \cdot 4 = 8074$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

(A) $d = 3$.

(B) $d = 2$.

(C) $d = -2$.

(D) $d = -3$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$. Suy ra công sai $d = 3$.

Chọn đáp án **(A)**



Dạng 2. Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Để xác định số hạng tổng quát của một cấp số cộng, ta sử dụng công thức

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ hoặc } u_n = u_{n-1} + d \text{ với } n \geq 2.$$

Tức là ta cần xác định số hạng đầu u_1 và công sai d .

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 7 (Cánh Diều). Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$, công sai $d = 5$.

- Viết công thức của số hạng tổng quát u_n .
- Số 492 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?
- Số 300 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

Lời giải.

- Với số hạng đầu $u_1 = -3$, công sai $d = 5$, ta có công thức của số hạng tổng quát u_n là

$$u_n = u_1 + (n-1)d = -3 + (n-1) \cdot 5 = -8 + 5n.$$

Vậy $u_n = -8 + 5n$.

- Ta có $492 = -8 + 5n \Leftrightarrow 5n = 500 \Leftrightarrow n = 100$. Vậy 492 là số hạng thứ 100 của cấp số cộng.
- Xét $300 = -8 + 5n \Leftrightarrow n = \frac{308}{5}$. Do $\frac{308}{5} \notin \mathbb{N}$ nên 300 không là số hạng nào của cấp số cộng trên.



Ví dụ 8 (KNTT). Cho dãy số (u_n) với $u_n = 4n - 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng này. Từ đó viết số hạng tổng quát u_n dưới dạng $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Lời giải.

Ta có $u_n - u_{n-1} = 4n - 3 - (4(n-1) - 3) = 4$, với mọi $n \geq 2$.

Do đó, (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 4 \cdot 1 - 3 = 1$ và công sai $d = 4$.

Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + (n-1) \cdot 4$.



Ví dụ 9 (CTST). Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 9$.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot 9 = 9n - 6$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = 9n - 6$.



Ví dụ 10 (TH). Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng

$$u_n = -4 + (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 6 \text{ với } n \geq 2.$$



Ví dụ 11 (TH). Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $u_1 = 16, d = -3$. □

Ví dụ 12 (TH). Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -9 \\ u_{n-1} = u_n - 5 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) .

Lời giải.

Từ công thức $u_{n-1} = u_n - 5 \Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + 5$, suy ra $d = 5$.

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = -9 + 5(n-1) = 5n - 14$. □

Ví dụ 13 (TH). Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20} = -52$ và $u_{51} = -145$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_{20} = -52 \\ u_{51} = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 19d = -52 \\ u_1 + 50d = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = -3. \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát cần tìm là $u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 8$. □

Ví dụ 14 (VD). Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4u_1 + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $u_1 = 3, d = 4$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $u_1 = 36, d = -13$. □

Ví dụ 15 (VD). Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a) $\begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2 u_7 = 75. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_5 = 4u_3 \\ u_2 u_6 = -11. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -(u_1 + 2d) + (u_1 + 6d) = 8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4d = 8 \\ u_1^2 + 7u_1d + 6d^2 = 75 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2. \end{cases}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} u_5 = 4u_3 \\ u_2 u_6 = -11 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 4(u_1 + 2d) \\ (u_1 + d)(u_1 + 5d) = -11 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 4d = 0 & (1) \\ u_1^2 + 6du_1 + 5d^2 = -11 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $3u_1 = -4d$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}
 9u_1^2 + 54du_1 + 45d^2 = -99 &\Leftrightarrow 16d^2 - 72d^2 + 45d^2 = -99 \\
 &\Leftrightarrow -11d^2 = -99 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ d = -3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Với $d = 3$, ta có $u_1 = -4$.Với $d = -3$, ta có $u_1 = 4$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = -3. \end{cases}$$

□

2. Bài tập tự luyện**Bài 14 (TH).** Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2. \end{cases}$ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng

$$u_n = -4 + (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 6 \text{ với } n \geq 2.$$

□

Bài 15 (TH). Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17. \end{cases}$ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $u_1 = 16, d = -3$. □

Bài 16 (TH). Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -9 \\ u_{n-1} = u_n - 5 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) .

Lời giải.

Từ công thức $u_{n-1} = u_n - 5 \Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + 5$, suy ra $d = 5$.

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = -9 + 5(n - 1) = 5n - 14$. □

Bài 17 (TH). Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20} = -52$ và $u_{51} = -145$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_{20} = -52 \\ u_{51} = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 19d = -52 \\ u_1 + 50d = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = -3. \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát cần tìm là $u_n = u_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 8$. □

Bài 18 (VD). Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4u_1 + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $u_1 = 3, d = 4$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $u_1 = 36, d = -13$. □

Bài 19 (VD). Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a) $\begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2 u_7 = 75. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_5 = 4u_3 \\ u_2 u_6 = -11. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -(u_1 + 2d) + (u_1 + 6d) = 8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4d = 8 \\ u_1^2 + 7u_1 d + 6d^2 = 75 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2. \end{cases}$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_5 = 4u_3 \\ u_2 u_6 = -11 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 4(u_1 + 2d) \\ (u_1 + d)(u_1 + 5d) = -11 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 4d = 0 & (1) \\ u_1^2 + 6du_1 + 5d^2 = -11 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $3u_1 = -4d$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} 9u_1^2 + 54du_1 + 45d^2 = -99 &\Leftrightarrow 16d^2 - 72d^2 + 45d^2 = -99 \\ &\Leftrightarrow -11d^2 = -99 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ d = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $d = 3$, ta có $u_1 = -4$.

Với $d = -3$, ta có $u_1 = 4$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 4 \\ d = -3. \end{cases}$

□

Bài 20 (TH). Xác định công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 10d = 5 \\ d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 65 \\ d = -6. \end{cases}$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng:

$$u_n = 65 + (n - 1).(-6) \Leftrightarrow u_n = -6n + 71 \text{ với } n \geq 2.$$

□

Bài 21 (TH). Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $u_1 = 1, d = 3$.

□

Bài 22 (TH). Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 4$.

b) Ta có $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5u_1 + 5d \\ u_1 + 12d = 2u_1 + 10d + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 4$.

c) Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - u_1 - 5d = -7 \\ u_1 + 7d - u_1 - 6d = 2u_1 + 6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = -5$, công sai là $d = 2$.

d) Ta có $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - u_1 - 6d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 = -17. \end{cases} \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = -17$, $d = 2$.

e) Ta có $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_6 + d = 60 \\ (u_6 - 2d)^2 + (u_6 + 6d)^2 = 1170. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$

Từ (1), suy ra $d = 60 - 2u_6$, thay vào (2), ta có

$$(5u_6 - 120)^2 + (360 - 11u_6)^2 = 1170 \Leftrightarrow 146u_6^2 - 9120u_6 + 142830 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy không tồn tại cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d . Công thức tìm số hạng tổng quát u_n là

(A) $u_n = u_1 + (n - 1)d$. (B) $u_n = u_1 + nd$. (C) $u_n = u_1 + (n + 1)d$. (D) $u_n = nu_1 + d$.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

Chọn đáp án (A)

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n + 1)$. (B) $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$. (C) $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n - 1)$. (D) $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n - 1)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 = -3 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n - 1)d = -3 + \frac{1}{2}(n - 1)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) xác định bởi $u_n = 2n + 1$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

(A) $u_1 = 3, d = 1$. (B) $u_1 = 1, d = 1$. (C) $u_1 = 3, d = 2$. (D) $u_1 = 1, d = 2$.

Lời giải.

Ta có $u_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ và $u_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, nên $d = u_2 - u_1 = 2$.

Chọn đáp án (C)

Câu 14. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) .

- (A) $u_1 = -20$, $d = -3$. (B) $u_1 = -22$, $d = 3$. (C) $u_1 = -21$, $d = 3$. (D) $u_1 = -21$, $d = -3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_4 = u_1 + (4-1)d \\ u_{14} = u_1 + (14-1)d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 = u_1 + 3d \\ 18 = u_1 + 13d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -12 \\ d = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_9 = 12 \\ u_4 - 3u_2 = 1. \end{cases}$

- (A) $u_1 = \frac{1}{2}$; $d = \frac{13}{8}$. (B) $u_1 = -1$; $d = \frac{13}{8}$. (C) $u_1 = -\frac{1}{2}$; $d = \frac{13}{8}$. (D) $u_1 = -1$; $d = 2$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} u_1 + u_9 = 12 \\ u_4 - 3u_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 8d) = 12 \\ (u_1 + 3d) - 3(u_1 + d) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 8d = 12 \\ -2u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{13}{8} \\ u_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Khi đó, số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) lần lượt là

- (A) $u_1 = -20$, $d = -3$. (B) $u_1 = -22$, $d = 3$. (C) $u_1 = -21$, $d = 3$. (D) $u_1 = -21$, $d = -3$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} u_4 = -12 \\ u_{14} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

- (A) $u_n = 5n + 1$. (B) $u_n = 5n - 1$. (C) $u_n = 4n + 1$. (D) $u_n = 4n - 1$.

Lời giải.

Các số 5; 9; 13; 17; ... theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) nên

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ d = u_2 - u_1 = 4 \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và $d = -2$. Tìm u_n

- (A) $u_n = -2n + 21$. (B) $u_n = -\frac{3}{2}n + 12$. (C) $u_n = -3n - 17$. (D) $u_n = \frac{3}{2}n^2 - 4$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 15 = u_3 = u_1 + 2d \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 19 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d = -2n + 21.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào **không** phải là cấp số cộng?

- (A) $u_n = -4n + 9$. (B) $u_n = -2n + 19$. (C) $u_n = -2n - 21$. (D) $u_n = -2^n + 15$.

Lời giải.

Dãy số $u_n = -2^n + 15$ không có dạng $an + b$ nên có không phải là cấp số cộng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

- (A) $u_1 = -21$; $d = 3$. (B) $u_1 = -20$; $d = -3$. (C) $u_1 = -22$; $d = 3$. (D) $u_1 = -21$; $d = -3$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 = -12 \\ u_{14} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng đó lần lượt là

(A) 1 và 3. (B) -3 và 4. (C) 4 và -3. (D) -4 và -3.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ (u_1 + 2d) + (u_1 + 3d) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d < 0$, $u_{31} + u_{34} = 11$ và $(u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101$. Số hạng tổng quát của (u_n) là

(A) $u_n = 86 - 3n$. (B) $u_n = 92 - 3n$. (C) $u_n = 95 - 3n$. (D) $u_n = 103 - 3n$.

Lời giải.

Gọi cấp số cộng (u_n) có công sai d .

$$(u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101 \Leftrightarrow (u_{31} + u_{34})^2 - 2u_{31} \cdot u_{34} = 101 \Rightarrow u_{31} \cdot u_{34} = 10.$$

$$\text{Do đó, ta có } \begin{cases} u_{31} + u_{34} = 11 \\ u_{31} \cdot u_{34} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{31} = 10 \\ u_{34} = 1 \end{cases} \text{ (vì } d < 0)$$

$$u_{31} + u_{34} = 11 \Rightarrow 2u_{31} + 3d = 11 \Rightarrow d = -3 \text{ và } u_1 = 100.$$

$$\text{Do đó: } u_n = 103 - 3n.$$

Chọn đáp án (D) □

Dạng 3. Tìm số hạng thứ k của cấp số cộng

Tìm số hạng thứ k ($k \in \mathbb{N}^*$) bằng công thức

$$u_k = u_1 + (k - 1)d.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 16 (Cánh Diều). Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$, công sai $d = -\frac{1}{2}$.

- a) Tính u_{20} .
b) Số -99 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n) ?

Lời giải.

- a) Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng, ta có

$$u_{20} = u_1 + (20 - 1)d = \frac{1}{2} + 19 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -9.$$

- b) Giả sử -99 là số hạng thứ n của cấp số cộng, ta có

$$n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1 = \frac{-99 - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} + 1 = 200.$$

Vậy số -99 là số hạng thứ 200 của cấp số cộng (u_n) . □

Ví dụ 17 (KNTT). Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n) : 10, 5, ...

Lời giải.

Cấp số cộng này có số hạng đầu là $u_1 = 10$ và công sai là $d = -5$. Do đó,

-  Năm số hạng đầu của cấp số cộng là 10, 5, 0, -5, -10.

☑ Số hạng thứ 100 là $u_{100} = u_1 + 99d = 10 + 99 \cdot (-5) = -485$.

□

Ví dụ 18 (NB). Cho cấp số cộng (u_n) , biết

$$\begin{cases} u_1 = -15 \\ d = 18. \end{cases}$$

a) Tìm $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$.

b) Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu ?

💬 **Lời giải.**

a) Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$ ta có

$$u_5 = u_1 + 4d = -15 + 4 \cdot 18 = 57.$$

$$u_{10} = u_1 + 9d = -15 + 9 \cdot 18 = 147.$$

$$u_{15} = u_1 + 14d = -15 + 14 \cdot 18 = 237.$$

$$u_{20} = u_1 + 19d = -15 + 19 \cdot 18 = 327.$$

$$u_{25} = u_1 + 24d = -15 + 24 \cdot 18 = 417.$$

b) Gọi u_k là số hạng của số 1209. Ta có

$$u_k = 1209 = u_1 + (k - 1)d = -15 + 18(k - 1) = 18k - 33 \Leftrightarrow k = 69.$$

Vậy 1209 là số hạng thứ 69.

□

Ví dụ 19 (TH). Tìm sáu số trong khoảng $(7; 35)$ để được một cấp số cộng gồm tám số hạng với $u_1 = 7, u_8 = 35$.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_8 = -35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_1 + 7d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy sáu số đặt giữa các số 7 và 35 để được một cấp số cộng là

$$11; 15; 19; 23; 27; 31.$$

□

Ví dụ 20 (TH). Một cấp số cộng có năm số hạng mà tổng số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 28, tổng của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng 40. Hãy tìm cấp số cộng đó.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 28 \\ u_3 + u_5 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 2d) = 28 \\ (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 28 \\ 2u_1 + 6d = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng cần tìm là

$$11; 14; 17; 20; 23.$$

□

Ví dụ 21 (TH). Xác định 4 góc của một tứ giác lồi, biết rằng 4 góc hợp thành cấp số cộng và góc lớn nhất bằng 5 lần góc nhỏ nhất.

💬 **Lời giải.**

Gọi số đo bốn góc cần tìm là u_1, u_2, u_3, u_4 . Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360 \\ u_5 = 5u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 360 \\ 4d = 4u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = 36. \end{cases}$$

Vậy số đo bốn góc cần tìm là

$$36^\circ; 72^\circ; 108^\circ; 144^\circ.$$

□

Ví dụ 22 (TH). Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_5 = -43 \\ u_{21} = -171. \end{cases}$

- Tìm d và u_1 .
- Tìm u_{29} .
- -16187 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng trên?
- -35 có thuộc cấp số cộng trên hay không?

Lời giải.

- Ta có

$$\begin{cases} u_5 = -43 \\ u_{21} = -171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -43 \\ u_1 + 20d = -171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -11 \\ d = -8. \end{cases}$$

- Ta có $u_{29} = u_1 + 28d = -11 + 28 \cdot (-8) = -235$.

- Giả sử $u_k = -16187$, với $k \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$u_1 + (k-1)d = -16187 \Leftrightarrow -11 + (k-1) \cdot (-8) = -16187 \Leftrightarrow k = 2023.$$

Vậy -16187 là số hạng thứ 2023 của cấp số cộng.

- Giả sử $u_m = -35$, với $m \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$u_1 + (m-1)d = -35 \Leftrightarrow -11 + (m-1) \cdot (-8) = -35 \Leftrightarrow m = 4. \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy -35 thuộc cấp số cộng đã cho.

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 23 (NB). Cho cấp số cộng (u_n) , biết

$$\begin{cases} u_1 = -15 \\ d = 18. \end{cases}$$

- Tìm $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$.
- Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu ?

Lời giải.

- Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$ ta có
 $u_5 = u_1 + 4d = -15 + 4.18 = 57.$
 $u_{10} = u_1 + 9d = -15 + 9.18 = 147.$
 $u_{15} = u_1 + 14d = -15 + 14.18 = 237.$
 $u_{20} = u_1 + 19d = -15 + 19.18 = 327.$
 $u_{25} = u_1 + 24d = -15 + 24.18 = 417.$

b) Gọi u_k là số hạng của số 1209. Ta có

$$u_k = 1209 = u_1 + (k-1)d = -15 + 18(k-1) = 18k - 33 \Leftrightarrow k = 69.$$

Vậy 1209 là số hạng thứ 69. □

Bài 24 (TH). Tìm sáu số trong khoảng $(7; 35)$ để được một cấp số cộng gồm tám số hạng với $u_1 = 7$, $u_8 = 35$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_8 = -35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_1 + 7d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy sáu số đặt giữa các số 7 và 35 để được một cấp số cộng là

$$11; 15; 19; 23; 27; 31. \quad \square$$

Bài 25 (TH). Một cấp số cộng có năm số hạng mà tổng số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 28, tổng của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng 40. Hãy tìm cấp số cộng đó.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 28 \\ u_3 + u_5 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 2d) = 28 \\ (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 28 \\ 2u_1 + 6d = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng cần tìm là

$$11; 14; 17; 20; 23. \quad \square$$

Bài 26 (TH). Xác định 4 góc của một tứ giác lồi, biết rằng 4 góc hợp thành cấp số cộng và góc lớn nhất bằng 5 lần góc nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi số đo bốn góc cần tìm là u_1, u_2, u_3, u_4 . Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360 \\ u_5 = 5u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 360 \\ 4d = 4u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = 36. \end{cases}$$

Vậy số đo bốn góc cần tìm là

$$36^\circ; 72^\circ; 108^\circ; 144^\circ. \quad \square$$

Bài 27 (TH). Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_5 = -43 \\ u_{21} = -171. \end{cases}$

- Tìm d và u_1 .
- Tìm u_{29} .
- -16187 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng trên?
- -35 có thuộc cấp số cộng trên hay không?

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} u_5 = -43 \\ u_{21} = -171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -43 \\ u_1 + 20d = -171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -11 \\ d = -8. \end{cases}$$

b) Ta có $u_{29} = u_1 + 28d = -11 + 28 \cdot (-8) = -235$.

c) Giả sử $u_k = -16187$, với $k \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$u_1 + (k-1)d = -16187 \Leftrightarrow -11 + (k-1) \cdot (-8) = -16187 \Leftrightarrow k = 2023.$$

Vậy -16187 là số hạng thứ 2023 của cấp số cộng.

d) Giả sử $u_m = -35$, với $m \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$u_1 + (m-1)d = -35 \Leftrightarrow -11 + (m-1) \cdot (-8) = -35 \Leftrightarrow m = 4. \quad (\text{thoả mãn})$$

Vậy -35 thuộc cấp số cộng đã cho.



Bài 28 (TH). Giữa các số 10 và 64 hãy đặt thêm 17 số nữa để được một cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{19} = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_1 + 18d = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy 17 số đặt thêm giữa các số 10 và 64 để được một cấp số cộng là

$$13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34; 37; 40; 43; 46; 49; 52; 55; 58; 61.$$



Bài 29 (TH). Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\frac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có hệ

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u_k + u_{k+1} + u_{k+2} = 2 \\ u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k + u_k + d + u_k + 2d = 2 \\ u_k^2 + (u_k + d)^2 + (u_k + 2d)^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_k + 3d = 2 \\ 3u_k^2 + 6u_kd + 5d^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k = 1 \\ d = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_k = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán:

$$1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \text{ ứng với } d = -\frac{1}{3} \text{ hoặc } \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1 \text{ ứng với } d = \frac{1}{3}.$$



Bài 30 (TH). Một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1 , công sai d . Vì số hạng thứ tư của cấp số cộng bằng 11 nên ta có $u_4 = 11$. Do d dương nên $u_5 > u_3$.

Vì hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6 nên ta có $u_5 - u_3 = 6$.

Ta có

$$\begin{cases} u_4 = 11 \\ u_5 - u_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ (u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3 \cdot 3 = 11 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy các số hạng còn lại của cấp số cộng là $u_1 = 2; u_2 = 5; u_4 = 11; u_6 = 17; u_7 = 20$.



Bài 31. Tính tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 0,3n + 5$, với mọi $n \geq 1$.

Lời giải.

Dãy số có $u_n = 0,3n + 5$ là cấp số cộng, khi đó $u_1 = 5,3$ và $u_{100} = 35$.

Do đó tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_{100} = \frac{100 \cdot (u_1 + u_{100})}{2} = 50 \cdot (5,3 + 35) = 2015$.



Bài 32 (VD). Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

- Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương bằng 70.
- Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66.
- Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504.
- Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng bằng 384.
- Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$ và các số này là những số nguyên.
- Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất.

Lời giải.

- a) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d$; $x - d$; $x + d$; $x + 3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 10 \\ (x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 10 \\ 4x^2 + 20d^2 = 70 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 20d^2 = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ d^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ d = \pm \frac{3}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là -2 ; 1 ; 4 ; 7 .

- b) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d$; $x - d$; $x + d$; $x + 3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 22 \\ (x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 22 \\ 4x^2 + 20d^2 = 66 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ 4 \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 20d^2 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ d^2 = \frac{-11}{4} \end{cases} \text{ (loại)}. \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

- c) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d$; $x - d$; $x + d$; $x + 3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 36 \\ (x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 504 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 36 \\ 4x^2 + 20d^2 = 504 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 4 \cdot 9^2 + 20d^2 = 504 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d = \pm 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 0 ; 6 ; 12 ; 18 .

- d) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d$; $x - d$; $x + d$; $x + 3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 20 \\ (x - 3d)(x - d)(x + d)(x + 3d) = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (x^2 - d^2)(x^2 - 9d^2) = 384 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (25 - d^2)(25 - 9d^2) = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 9d^4 - 250d^2 + 241 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d^2 = 1 \\ d^2 = \frac{241}{9} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d = \pm 1 \\ d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3} \end{cases} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 2 ; 4 ; 6 ; 8 hoặc $5 - \sqrt{241}$; $\frac{15 - \sqrt{241}}{3}$; $\frac{15 + \sqrt{241}}{3}$; $5 + \sqrt{241}$.

- e) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x - 3d$; $x - d$; $x + d$; $x + 3d$ trong đó $2d$ là công sai trong đó $2d \in \mathbb{Z}$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 20 \\ \frac{1}{x - 3d} + \frac{1}{x - d} + \frac{1}{x + d} + \frac{1}{x + 3d} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 20 \\ \frac{1}{5 - 3d} + \frac{1}{5 - d} + \frac{1}{5 + d} + \frac{1}{5 + 3d} = \frac{25}{24} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \frac{10}{25 - 9d^2} + \frac{10}{25 - d^2} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 9d^4 - 250d^2 + 241 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d^2 = 1 \\ d^2 = \frac{241}{9} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d = \pm 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3} \text{ (loại vì } 2d \in \mathbb{Z}). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng nguyên liên tiếp của cấp số cộng là 2; 4; 6; 8.

- f) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng xếp theo thứ tự tăng dần là $x - 3d$; $x - d$; $x + d$; $x + 3d$ trong đó $2d > 0$ là công sai.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 360^\circ \\ x + 3d = 5(x - 3d) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 360^\circ \\ 4x = 18d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ \\ 4 \cdot 90^\circ = 18d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ \\ d = 20^\circ. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn góc của tứ giác lồi lần lượt là 30° ; 70° ; 110° ; 150° .

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 23. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai $d = 3$. Tính u_{15} .

- (A) $u_{15} = 27$. (B) $u_{15} = 37$. (C) $u_{15} = 47$. (D) $u_{15} = 57$.

Lời giải.

$$u_{15} = u_1 + 14d = -5 + 14 \times 3 = 37.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 24. Cho cấp số cộng có các số hạng ban đầu là 1; 5; 9; 13; $\dots$. Số hạng thứ 6 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 21. (B) 19. (C) 22. (D) 20.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_1 = 1, d = 5 - 1 = 4 \text{ nên } u_6 = 1 + 5d = 1 + 20 = 21.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 25. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng lần lượt là -4 ; 1; 6; x . Tìm giá trị của x .

- (A) $x = 7$. (B) $x = 10$. (C) $x = 11$. (D) $x = 12$.

Lời giải.

$$\text{Để thấy } u_1 = -4, d = 5 \text{ nên } u_4 = -4 + 3 \cdot 5 = 11.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 26. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $u_{15} = 34$. (B) $u_{15} = 45$. (C) $u_{13} = 31$. (D) $u_{10} = 35$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow u_n = 3n - 8 \Rightarrow \begin{cases} u_{15} = 37 \\ u_{13} = 31 \\ u_{10} = 22. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 27. Cho cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$. Trong mỗi bộ gồm năm số hạng dưới đây, bộ năm số nào là các số hạng liên tiếp của dãy này?

(A) $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1$.

(B) $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{2}; 1; 2; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}$.

(D) $1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 3$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = 0; u_3 = \frac{1}{2}; u_4 = 1; u_5 = \frac{3}{2}; u_6 = 2; u_7 = \frac{5}{2}; u_8 = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_7 = \frac{19}{5}$ và công sai $d = \frac{2}{5}$. Tính u_{10} .

(A) $\frac{2}{5}$.

(B) $\frac{19}{5}$.

(C) 5.

(D) $\frac{27}{5}$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có: $u_7 = u_1 + 6d \Rightarrow u_1 = u_7 - 6d = \frac{19}{5} - 6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$.

Suy ra $u_{10} = u_1 + 9d = \frac{7}{5} + 9 \cdot \frac{2}{5} = 5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -1$ và công sai $d = -3$. Số hạng thứ 20 của cấp số cộng này là

(A) $u_{20} = -58$.

(B) $u_{20} = 60$.

(C) $u_{20} = -72$.

(D) $u_{20} = -61$.

🗨 **Lời giải.**

Số hạng thứ 20 là: $u_{20} = u_1 + 19d = -1 + 19 \cdot (-3) = -58$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

(A) Thứ 15.

(B) Thứ 20.

(C) Thứ 35.

(D) Thứ 36.

🗨 **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 3 \end{cases}$. Vì $u_n = 100 \Rightarrow 100 = u_n = u_1 + (n-1)d = 3n - 8 \Leftrightarrow n = 36$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng

(A) $u_{1001} = 4005$.

(B) $u_{1001} = 4003$.

(C) $u_{1001} = 3$.

(D) $u_{1001} = 1$.

🗨 **Lời giải.**

$\begin{cases} 2001 = u_2 = u_1 + d \\ 1995 = u_5 = u_1 + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2003 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow u_{1001} = u_1 + 1000d = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases} u_1 + u_3 = 7 \\ u_2 + u_4 = 12 \end{cases}$. Tính u_{21} .

(A) $u_{21} = 1$.

(B) $u_{21} = 51$.

(C) $u_{21} = 31$.

(D) $u_{21} = 21$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_3 = 7 \\ u_2 + u_4 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 2d = 7 \\ u_1 + d + u_1 + 3d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 7 \\ 2u_1 + 4d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Suy ra $u_{21} = u_1 + 20d = 1 + 20 \cdot \frac{5}{2} = 1 + 50 = 51$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Một cấp số cộng có 7 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 30, tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ sáu bằng 35. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số cộng đã cho.

(A) $u_7 = 25$.

(B) $u_7 = 30$.

(C) $u_7 = 35$.

(D) $u_7 = 40$.

🗨 **Lời giải.**

Theo đề ta có: $\begin{cases} u_1 + u_7 = 30 \\ u_3 + u_6 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 6d) = 30 \\ (u_1 + 2d) + (u_1 + 5d) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 30 \\ 2u_1 + 7d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 5. \end{cases}$

Do đó $u_7 = u_1 + 6d = 0 + 6 \cdot 5 = 30$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Cho dãy số (u_n) có xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2, \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n} \end{cases}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$) và dãy số (v_n) được xác định bởi

$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$. Số hạng thứ 2023 của dãy (v_n) là

(A) $-\frac{2023}{3}$.

(B) $-\frac{4046}{3}$.

(C) $-\frac{4043}{2}$.

(D) -2023 .

Lời giải.

Ta có $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1}} - \frac{u_n + 1}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{1 - u_n} + 1}{\frac{u_n}{1 - u_n}} - \frac{u_n + 1}{u_n} = \frac{1}{u_n} - \frac{u_n + 1}{u_n} = -1$. Vậy (v_n) là một CSC có công

sai $d = -1$.

Mặt khác, ta có $v_1 = \frac{u_1 + 1}{u_1} = \frac{1}{2}$, do đó số hạng tổng quát $v_n = \frac{1}{2} + (n - 1)(-1) = -n + \frac{3}{2}$.

Do đó $v_{2023} = -2023 + \frac{3}{2} = -\frac{4043}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Dạng 4. Tính tổng của dãy nhiều số hạng liên quan đến cấp số cộng, tổng các hạng tử của cấp số cộng

Định lý 2.1. Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 23 (Cánh Diều). Tính $S = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 97$.

Lời giải.

Ta thấy dãy số $1, 5, 9, \dots, 97$ là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, số hạng cuối $u_n = 97$, công sai $d = 4$. Vì thế, số các số hạng của cấp số cộng trên là

$$n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1 = \frac{97 - 1}{4} + 1 = 25.$$

Vậy $S = \frac{(1 + 97) \cdot 25}{2} = 1225$. □

Ví dụ 24 (KNTT). Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng $2, 5, 8, \dots$ để được kết quả bằng 345?

Lời giải.

Cấp số cộng này có số hạng đầu là $u_1 = 2$ và công sai là $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có

$$345 = S_n = \frac{n}{2} (2u_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2} (2 \cdot 2 + (n - 1) \cdot 3) = \frac{n}{2} (3n + 1).$$

Do đó $3n^2 + n - 690 = 0$. Giải phương trình bậc hai này ta được $n = -\frac{46}{3}$ (loại) và $n = 15$. Vậy phải lấy tổng của 15 số hạng đầu của cấp số cộng đã cho để được tổng bằng 345. □

Ví dụ 25 (CTST). Thực hiện các yêu cầu sau

a) Tính tổng của 100 số nguyên dương đầu tiên.

b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 + u_6 = 20$. Tính tổng 9 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_3 = -3$ và $S_5 = -15$. Tính S_{50} .

Lời giải.

a) Tính tổng của 100 số nguyên dương đầu tiên.

Ta có thể sắp xếp 100 số nguyên dương đầu tiên thành cấp số cộng có $u_1 = 1$, $u_{100} = 100$.

$$\text{Suy ra } S_{100} = \frac{100(1+100)}{2} = 5050.$$

b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 + u_6 = 20$. Tính tổng 9 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Ta có $u_4 + u_6 = (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 2u_1 + 8d = 20$.

$$\text{Suy ra } S_9 = \frac{9(2u_1 + 8d)}{2} = \frac{9 \cdot 20}{2} = 90.$$

c) Cho cấp số cộng (v_n) có $S_3 = -3$ và $S_5 = -15$. Tính S_{50} .

$$\text{Ta có } S_3 = \frac{3(2v_1 + 2d)}{2} = -3, \text{ suy ra } v_1 + d = -1.$$

$$\text{Lại có } S_5 = \frac{5(2v_1 + 4d)}{2} = -15, \text{ suy ra } v_1 + 2d = -3.$$

$$\text{Do đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} v_1 + d = -1 \\ v_1 + 2d = -3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $v_1 = 1$ và $d = -2$.

$$\text{Do đó } S_{50} = \frac{50(2v_1 + 49d)}{2} = \frac{50[2 \cdot 1 + 49(-2)]}{2} = -2400.$$

□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 33. Tính tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 0,3n + 5$, với mọi $n \geq 1$.

Lời giải.

Dãy số có $u_n = 0,3n + 5$ là cấp số cộng, khi đó $u_1 = 5,3$ và $u_{100} = 35$.

$$\text{Do đó tổng 100 số hạng đầu của dãy số } (u_n) \text{ là } S_{100} = \frac{100 \cdot (u_1 + u_{100})}{2} = 50 \cdot (5,3 + 35) = 2015.$$

□

Bài 34. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S_{30} = \frac{30(u_1 + u_{30})}{2} = \frac{30(u_1 + 2d + u_{30} - 2d)}{2} = \frac{30(u_3 + u_{28})}{2} = \frac{30 \cdot 100}{2} = 1500.$$

□

Bài 35. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công sai là d .

$$\text{Ta có } S_6 = 6u_1 + \frac{6 \cdot 5}{2}d \Leftrightarrow 6u_1 + 15d = 18. \quad (1)$$

$$S_{10} = 10u_1 + \frac{10 \cdot 9}{2}d \Leftrightarrow 10u_1 + 45d = 110. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình } \begin{cases} 6u_1 + 15d = 18 \\ 10u_1 + 45d = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7 \\ d = 4. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } S_{20} = 20u_1 + \frac{20 \cdot 19}{2}d = 20 \cdot (-7) + 190 \cdot 4 = 620.$$

□

Bài 36. Tính các tổng sau

$$\text{a) } S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1).$$

$$\text{b) } S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2.$$

Lời giải.

$$\text{a) } S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1).$$

Xét cấp số cộng (u_k) , $k \in \mathbb{N}^*$ với số hạng đầu là $u_1 = 1$ và công sai là $d = 2$.

$$\text{Ta có } u_k = u_1 + (k - 1)d \Leftrightarrow 2n + 1 = 1 + 2(k - 1) \Leftrightarrow k = n + 1.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{(n + 1)(1 + 2n + 1)}{2} = (n + 1)^2.$$

$$b) S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = 199 + 195 + \dots + 3.$$

Xét cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 199$ và công sai $d = u_2 - u_1 = 195 - 199 = -4$.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 3 = 199 - 4(n-1) \Leftrightarrow n = 50$.

$$\text{Khi đó } S = \frac{n(u_1 + u_{50})}{2} = \frac{50(199 + 3)}{2} = 5050.$$



Bài 37. Cho cấp số cộng $u_1, u_2, u_3, \dots$ có công sai d .

a) Biết $u_2 + u_{22} = 40$. Tính S_{23} .

b) Biết $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$. Tính $A = u_6 + u_{11}$ và $B = u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$.

c) Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính S_{19} .

d) Biết $u_{23} + u_{57} = 29$. Tính $C = u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$.

Lời giải.

a) Ta có $u_2 + u_{22} = 40 \Leftrightarrow u_1 + d + u_1 + 21d = 40 \Leftrightarrow 2u_1 + 22d = 40$.

$$\text{Khi đó } S_{23} = \frac{(2u_1 + 22d) \cdot 23}{2} = \frac{40 \cdot 23}{2} = 460.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} &= 147 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 3d + u_1 + 6d + u_1 + 9d + u_1 + 12d + u_1 + 15d = 147 \\ &\Leftrightarrow 6u_1 + 45d = 147 \\ &\Leftrightarrow 2u_1 + 15d = 49 \\ &\Leftrightarrow (u_1 + 5d) + (u_1 + 10d) = 49 \\ &\Leftrightarrow u_6 + u_{11} = 49. \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} 2u_1 + 15d &= 49 \Leftrightarrow 4u_1 + 30d = 98 \\ &\Leftrightarrow u_1 + (u_1 + 5d) + (u_1 + 10d) + (u_1 + 15d) = 98 \\ &\Leftrightarrow u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16} = 98. \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned} u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} &= 224 \Leftrightarrow u_1 + 3d + u_1 + 7d + u_1 + 11d + u_1 + 15d = 224 \\ &\Leftrightarrow 4u_1 + 36d = 224 \\ &\Leftrightarrow 2u_1 + 18d = 112 \\ &\Leftrightarrow \frac{(2u_1 + 18d) \cdot 19}{2} = 1064 \\ &\Leftrightarrow S_{19} = 1064. \end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned} u_{23} + u_{57} &= 29 \Leftrightarrow 2u_1 + 78d = 29 \\ &\Leftrightarrow 6u_1 + 234d = 87 \\ &\Leftrightarrow (u_1 + 9d) + (u_1 + 69d) + (u_1 + 156d) + 3u_1 = 87 \\ &\Leftrightarrow u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1 = 87. \end{aligned}$$



Bài 38. Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 5 và công sai bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để có tổng bằng 2700?

Lời giải.

Cấp số cộng này có số hạng đầu là $u_1 = 5$ và công sai là $d = 2$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có

$$2700 = S_n = \frac{n}{2} (2u_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 2) = \frac{n}{2} (2n + 8).$$

Do đó $2n^2 + 8n - 5400 = 0$. Giải phương trình bậc hai này ta được $n = -54$ (loại) và $n = 50$. Vậy phải lấy tổng của 50 số hạng đầu của cấp số cộng đã cho để được tổng bằng 2700. $\square$

Bài 39. Giải các phương trình sau

- $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970$.
- $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + x = 245$.
- $(x+1) + (x+4) + (x+7) + \dots + (x+28) = 155$.
- $(2x+1) + (2x+6) + (2x+11) + \dots + (2x+96) = 1010$.

Lời giải.

- a) Ta có $1, 6, 11, \dots, x$ là một cấp số cộng với $u_1 = 1, u_n = x$ và $d = 5$.

$$\text{Suy ra } u_n = u_1 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 4 \Leftrightarrow x = 5n - 4.$$

$$\text{Mà } 1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(1+x) = 970 \quad (1).$$

Thay $x = 5n - 4$ vào (1), ta được

$$5n^2 - 3n - 1940 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 20 & (\text{nhận}) \\ n = -\frac{97}{5} & (\text{loại}). \end{cases}$$

$$\text{Với } n = 20 \Rightarrow x = 96.$$

Vậy $x = 96$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- b) Ta có $2, 7, 12, \dots, x$ là một cấp số cộng với $u_1 = 2, u_n = x$ và $d = 5$.

$$\text{Suy ra } u_n = u_1 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 3 \Leftrightarrow x = 5n - 3.$$

$$\text{Mà } 2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + x = 245 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(2+x) = 245 \quad (2).$$

Thay $x = 5n - 3$ vào (2), ta được

$$5n^2 - n - 490 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 & (\text{nhận}) \\ n = -\frac{49}{5} & (\text{loại}). \end{cases}$$

$$\text{Với } n = 10 \Rightarrow x = 47.$$

Vậy $x = 47$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- c) Ta có $(x+1), (x+4), (x+7), \dots, (x+28)$ là một cấp số cộng với $u_1 = x+1, u_n = x+28$ và $d = 3$.

$$\text{Suy ra } u_n = u_1 + (n-1) \cdot 3 \Leftrightarrow x+28 = x+1 + (n-1) \cdot 3 \Leftrightarrow n = 10.$$

$$\text{Mà } (x+1) + (x+4) + (x+7) + \dots + (x+28) = 155 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(x+1+x+28) = 155 \quad (3).$$

Thay $n = 10$ vào (3), ta được $x = 1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- d) Ta có $(2x+1), (2x+6), (2x+11), \dots, (2x+96)$ là một cấp số cộng với $u_1 = 2x+1, u_n = 2x+96$ và $d = 5$.

$$\text{Suy ra } u_n = u_1 + (n-1) \cdot 5 \Leftrightarrow 2x+96 = 2x+1 + (n-1) \cdot 5 \Leftrightarrow n = 20.$$

$$\text{Mà } (2x+1) + (2x+6) + (2x+11) + \dots + (2x+96) = 1010 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(2x+1+2x+96) = 1010 \quad (4).$$

Thay $n = 20$ vào (4), ta được $x = 1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho. $\square$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 35. Dãy số (u_n) là cấp số cộng, công sai d . Tổng $S_{100} = u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$, $u_1 \neq 0$ là

(A) $S_{100} = 50u_{100}$.

(B) $S_{100} = 50(u_1 + u_{100})$.

(C) $S_{100} = 100(u_1 + u_{100})$.

(D) $S_{100} = 2u_1 + 99d$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S_{100} = u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = \frac{100(u_1 + u_{100})}{2} = 50(u_1 + u_{100}).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_3 = 6$, $u_8 = 16$. Tìm công sai d và tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy.

(A) $d = 2$; $S_{10} = 110$.

(B) $d = 1$; $S_{10} = 80$.

(C) $d = 2$; $S_{10} = 120$.

(D) $d = 2$; $S_{10} = 100$.

Lời giải.

Gọi u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số, khi đó

$$\begin{cases} u_1 + 2d = 6 \\ u_1 + 7d = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $S_{10} = u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + \dots + u_1 + 9d = 10u_1 + (1 + 2 + \dots + 9)d = 110$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = -2$. Tính $S_{2017} = u_1 + u_2 + \dots + u_{2017}$.

(A) $S_{2017} = -4060211$.

(B) $S_{2017} = -4060221$.

(C) $S_{2017} = 4072323$.

(D) $S_{2017} = 4073232$.

Lời giải.

$$S_n = u_1 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \Rightarrow S_{2017} = 3 \cdot 2017 + \frac{2017 \cdot 2016}{2} \cdot (-2) = -4060221.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho cấp số cộng có $u_1 = 0$ và công sai $d = 3$. Tổng của 26 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng bao nhiêu?

(A) 975.

(B) 775.

(C) 875.

(D) 675.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \Rightarrow S_{26} = 26 \cdot 0 + \frac{26 \cdot 25}{2} \cdot 3 = 975.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_9 = 12$ và tổng 9 số hạng đầu tiên là $S_9 = 504$. Khi đó u_1 bằng

(A) 55.

(B) 124.

(C) 50.

(D) 100.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S_9 = 504 \Rightarrow \frac{9}{2}(u_1 + 12) = 504 \Leftrightarrow u_1 = 100.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_{29} = 40$. Giá trị của $S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$ là

(A) 640.

(B) 600.

(C) 620.

(D) 500.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_2 + u_{29} = u_1 + d + u_1 + 28d = u_1 + u_1 + 29d = u_1 + u_{30} = 40.$$

$$S = \frac{n \cdot (u_1 + u_{30})}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Tính $S = u_1 + u_5 + u_9 + \dots + u_{2021}$.

(A) $S = 2023563$.

(B) $S = 6734134$.

(C) $S = 6730444$.

(D) $S = 1533686$.

Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n) .

Ta có

$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
 S &= u_1 + u_5 + u_9 + \cdots + u_{2021} = u_1 + (u_1 + 4d) + \cdots + (u_1 + 2020d) \\
 &= 506u_1 + 4d(1 + 2 + \cdots + 505) \\
 &= 506 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{505 \cdot (1 + 505)}{2} \\
 &= 1533686.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 42. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của cấp số cộng là $S_n = 253$. Tìm n .

(A) $n = 9$.

(B) $n = 12$.

(C) $n = 11$.

(D) $n = 10$.

Lời giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 S_n = 253 &\Leftrightarrow \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] = 253 \\
 &\Leftrightarrow \frac{n}{2} [6 + 4(n-1)] = 253 \\
 &\Leftrightarrow 4n^2 + 2n - 506 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = -\frac{23}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

So sánh điều kiện ta được $n = 11$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 43. Cho dãy (a_n) là một cấp số cộng, biết $a_3 + a_8 + a_{10} + a_{16} + a_{18} + a_{23} = 126$. Tính tổng của 25 số hạng đầu tiên của dãy (a_n) .

(A) 315.

(B) 550.

(C) 552.

(D) 525.

Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số cộng.

Ta có $(a_3 + a_{23}) + (a_8 + a_{18}) + (a_{10} + a_{16}) = 6a_{13} \Rightarrow a_{13} = 21$.

$$\text{Mặt khác } S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25 = \frac{2a_1 + 24d}{2} \cdot 25 = 25 \cdot (a_1 + 12d) = 25 \cdot a_{13} = 525.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 44. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -1$ và $d = 2$. Tìm chỉ số m sao cho $S_m = 483$.

(A) $m = 21$.

(B) $m = 22$.

(C) $m = 23$.

(D) $m = 24$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } S_m = 483 \Leftrightarrow mu_1 + \frac{m(m-1)d}{2} = 483 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 483 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 23 & (\text{nhận}) \\ m = -21 & (\text{loại}). \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 45. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_5 = 42$ và $u_3 + u_{10} = 66$. Tổng của 346 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

(A) 242000.

(B) 240643.

(C) 243238.

(D) 242546.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_2 + u_5 = 42 \\ u_3 + u_{10} = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d = 42 \\ u_1 + 2d + u_1 + 9d = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 42 \\ 2u_1 + 11d = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 \\ d = 4. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S_{346} = 346u_1 + \frac{346 \cdot 345 \cdot d}{2} = 346 \cdot 11 + \frac{346 \cdot 345 \cdot 4}{2} = 242546.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 46. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -15$, công sai $d = \frac{1}{3}$ và tổng của n số hạng đầu tiên bằng 0. Tìm n .

(A) $n = 0$.

(B) $\begin{cases} n = 0 \\ n = 91 \end{cases}$.

(C) $n = 91$.

(D) $n = 41$.

Lời giải.

Ta có

$$S_n = 0 \Leftrightarrow n \cdot \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} = 0 \Leftrightarrow n \cdot \frac{-30 + \frac{1}{3}(n-1)}{2} = 0 \Rightarrow -30 + \frac{1}{3}(n-1) = 0 \Rightarrow n = 91.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho cấp số cộng (u_n) xác định bởi $u_n = 5n - 2$. Biết tổng của n số hạng đầu tiên bằng 2576, tìm n .

(A) $n = 31$.

(B) $n = 32$.

(C) $n = 33$.

(D) $n = 34$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{n(u_1 + u_n)}{2} = 2576 \Leftrightarrow \frac{n(3 + 5n - 2)}{2} = 2576 \Leftrightarrow 5n^2 + n - 5152 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\frac{161}{5} \\ n = 32. \end{cases}$$

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n = 32$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Biết dãy số 2, 7, 12, ..., x là một cấp số cộng và tổng tất cả các phần tử của cấp số cộng này bằng 245.

Tìm x .

(A) $x = 47$.

(B) 90.

(C) 52.

(D) 42.

Lời giải.

Đặt $u_1 = 2$, $u_2 = 7$, $u_3 = 12$, ... và $u_n = x$. Khi đó, (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Ta có

$$\begin{cases} x = 2 + 5(n-1) \\ S_n = 245 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5n - 3 \\ (2+x)n = 490 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5n - 3 \\ \begin{cases} n = 10 \\ n = -\frac{49}{5} \end{cases} \end{cases}$$

Suy ra $n = 10$ và $x = 47$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. Cho dãy số (u_n) có $u_n = 10n - 9$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy số (v_l) với $v_l = u_{2l-1}$.

(A) 460.

(B) 910.

(C) 1000.

(D) 3520.

Lời giải.

Ta có

$$S_{10} = \sum_{l=1}^{l=10} v_l = (u_1 + u_3 + \dots + u_{19}) = 1 + 21 + 41 + \dots + 181 = 910.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Một cấp số cộng có $u_3 = -15$ và $u_{14} = 18$. Tổng 50 số hạng đầu của cấp số cộng này bằng bao nhiêu?

(A) 2025.

(B) 2225.

(C) 2425.

(D) 2625.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_3 = u_1 + 2d = -15 \\ u_{14} = u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow S_{50} = 2625.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Viết thêm năm số vào giữa số 2 và số 20 để được một cấp số cộng. Tổng của năm số đó là

(A) 77.

(B) 40.

(C) 55.

(D) 60.

Lời giải.

Ta có $u_1 = 2$ và $u_7 = 20$. Suy ra $u_1 + 6d = 20 \Rightarrow d = 3$.

Khi đó 5 số được viết thêm là 5, 8, 11, 14, 17.

Tổng của 5 số đó là $5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 55$

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Số tự nhiên n thỏa mãn đẳng thức $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = 590$ là

(A) 18.

(B) 20.

(C) 21.

(D) 19.

Lời giải.

Cấp số đã cho là cấp số cộng $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ và $d = 3$.

Khi đó $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3 = 590 \Rightarrow n = 20$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Cho cấp số cộng u_n có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Giá trị biểu thức $\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49} u_{50}}$ là

(A) $\frac{9}{246}$.(B) $\frac{4}{23}$.

(C) 123.

(D) $\frac{49}{246}$.

Lời giải.

Trước tiên, ta đi tìm công sai của cấp số cộng. Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ S_{100} = 24850 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ \frac{100(2u_1 + 99d)}{2} = 24850 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ 100(2 + 99d) = 49700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 5. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49} u_{50}} &= \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{241 \cdot 246} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{241} - \frac{1}{246} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{246} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{245}{246} = \frac{49}{246}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 54. Cấp số cộng 8, 12, 16, ... có tổng n số hạng đầu tiên là S . Cấp số cộng 17, 19, 21, ... có tổng n số hạng đầu tiên là T . Biết rằng $S = T$, tích các số hạng thứ n của hai cấp số trên là

(A) 1540.

(B) 1776.

(C) 1258.

(D) 1350.

Lời giải.

Cấp số cộng 8, 12, 16, ... có $u_1 = 8$ và công sai $d = 4$. Do đó $S = 8n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 = 2n^2 + 6n$.

Cấp số cộng 17, 19, 21, ... có $u'_1 = 17$ và $d' = 2$. Do đó $T = 17n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2 + 16n$.

Vì $S = T$ nên $2n^2 + 6n = n^2 + 16n \Leftrightarrow n^2 - 10n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ (loại)} \\ n = 10. \end{cases}$

Khi đó $u_{10} = 8 + 9 \cdot 4 = 44$ và $u'_{10} = 17 + 9 \cdot 2 = 35$. Suy ra $u_{10} \cdot u'_{10} = 1540$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 5. Các bài toán thực tế

Các bài toán thực tế về cấp số cộng có thể được giải bằng cách sử dụng công thức của cấp số cộng. Công thức của cấp số cộng là: $u_n = u_1 + (n-1)d$. Trong đó:

- ✔ u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng.
- ✔ u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
- ✔ d là công sai của cấp số cộng.
- ✔ Một số công thức thường gặp:

$$\textcircled{\bullet} u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = u_1 + (n-1)d.$$

$$\textcircled{\bullet} S_n = \frac{(u_1 + u_n) \cdot n}{2} = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 26 (Cánh Diều). Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế, ... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70 800 000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

🗨️ Lời giải.

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 20$, công sai $d = 1$. Cấp số cộng này có 20 số hạng. Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là

$$S_{20} = \frac{[2 \cdot 20 + (20 - 1) \cdot 1] \cdot 20}{2} = 590.$$

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên số vé bán ra là 590.

Vậy giá tiền của một vé là $\frac{70\,800\,000}{590} = 120\,000$ (đồng). □

Ví dụ 27 (KNTT). Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

🗨️ Lời giải.

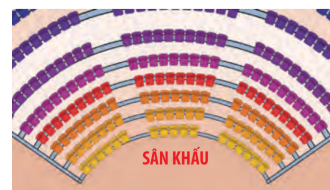
Số tiền lương của anh Nam qua các năm lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 100$ và công sai $d = 20$. Khi đó $u_{10} = u_1 + 9d = 100 + 9 \cdot 20 = 280$.

Vậy sau 10 năm làm việc cho công ty số tiền lương mà anh Nam sẽ nhận là 280 triệu đồng. □

Ví dụ 28 (CTST).

Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế, ... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng.

- Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.
- Tính tổng số ghế có ở trong rạp.



Hình 4

🗨️ Lời giải.

- Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.

Số ghế của hàng thứ nhất, thứ hai, thứ ba, được xếp thành cấp số cộng 17; 20; 23; ... có $u_1 = 17$ và công sai $d = 3$.

Số ghế có ở hàng thứ 20 là

$$u_{20} = u_1 + 19d = 17 + 19 \cdot 3 = 74 \text{ (ghế)}.$$

- Tính tổng số ghế có ở trong rạp.

Tổng số ghế có ở trong rạp là tổng số ghế của 20 hàng

$$S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(17 + 74)}{2} = 910 \text{ (ghế)}.$$

□

Ví dụ 29 (NB). Một người có một khoản tiền gửi ngân hàng với lãi suất 10% năm. Nếu sau 5 năm người đó nhận được tổng số tiền là 550 triệu đồng thì số tiền gửi ban đầu của người đó là bao nhiêu?

🗨️ Lời giải.

Gọi x là số tiền gửi ban đầu của người đó ($x > 0$).

Sau 5 năm, số tiền nhận được bằng số tiền gốc cộng với lãi suất:

$$x + 0,1x \times 5 = 1,5x.$$

Theo đề bài, tổng số tiền nhận được sau 5 năm là 550 triệu đồng, do đó ta có phương trình:

$$1,5x = 550.$$

Giải phương trình ta có:

$$x = \frac{550}{1,5} \approx 366,67.$$

Vậy số tiền gửi ban đầu của người đó là 366,67 triệu đồng. □

Ví dụ 30. Bạn An muốn mua một món quà tặng mẹ nhân ngày mừng 8/3. Bạn quyết định tiết kiệm từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017. Ngày đầu An có 5 000 đồng, kể từ ngày thứ hai số tiền An tiết kiệm được ngày sau cao hơn ngày trước mỗi ngày 1 000 đồng. Tính số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ.

Lời giải.

Tính số ngày mà An tiết kiệm được từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017:

Số ngày từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 28/2/2017 là 28 ngày.

Số ngày từ ngày 1/3/2017 đến hết ngày 6/3/2017 là 6 ngày.

Vậy An tiết kiệm được $28 + 6 = 34$ ngày.

Gọi x là số tiền An tiết kiệm được vào ngày đầu tiên, do ngày sau An tiết kiệm được nhiều hơn ngày trước mỗi ngày 1 000 đồng, nên số tiền An tiết kiệm được vào ngày thứ n là $x + 1\,000(n - 1)$.

Vậy An tiết kiệm được tổng số tiền là:

$$S = x + (x + 1\,000) + (x + 2\,000) + \cdots + (x + 33 \times 1\,000).$$

Ta có công thức của tổng số hạng cấp số cộng:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{2u_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$$

Áp dụng công thức này, ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2u_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n \\ &= \frac{2 \cdot 5\,000 + 33 \cdot 1\,000}{2} \cdot 34. \\ &= 731\,000. \end{aligned}$$

Vậy số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ là 731 000 đồng. □

Ví dụ 31 (TH). Một hội đồng quản trị quyết định tăng lương cho nhân viên hàng năm theo tỷ lệ cố định. Ví dụ, lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm trước. Hỏi nếu lương của một nhân viên là 10 triệu đồng/năm vào năm nay, thì lương của nhân viên đó sẽ là bao nhiêu vào năm thứ 5?

Lời giải.

Theo giả thiết, lương của nhân viên được tăng thêm 5 % so với năm trước đó.

- ☑ Vậy lương của nhân viên vào năm thứ 2 sẽ là $10 \cdot (1 + 0,05) = 10,5$ triệu đồng/năm.
- ☑ Tương tự, lương của nhân viên vào năm thứ 3 sẽ là $10,5 \cdot (1 + 0,05) = 11,025$ triệu đồng/năm.
- ☑ Lương của nhân viên vào năm thứ 4 sẽ là $11,025 \cdot (1 + 0,05) = 11,57625$ triệu đồng/năm.
- ☑ Cuối cùng, lương của nhân viên vào năm thứ 5 sẽ là $11,57625 \cdot (1 + 0,05) = 12,1550625$ triệu đồng/năm.

Vậy lương của nhân viên đó vào năm thứ 5 sẽ là 12,1550625 triệu đồng/năm.

Chú ý: Lương của nhân viên đó vào năm thứ 5 sẽ là $u_5 = u_1 + 4d = 10 + 4 \cdot 10 \cdot 0,05 = 12$ triệu đồng chỉ đúng trong trường hợp lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm đầu tiên. □

Ví dụ 32 (TH). Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

Lời giải.

Gọi n là số tuần anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình.

Số tiền anh ta tiết kiệm được sau n tuần đó là $S = 42 + 8n$.

Theo bài ra $S = 42 + 8n \geq 400 \Leftrightarrow n \geq 44,75 \Rightarrow n = 45$.

Vậy kể cả tuần đầu thì tuần thứ 46 anh ta có đủ tiền để mua cây guitar đó. □

Ví dụ 33. Hàng tháng ông An gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là 5 000 000 đồng (vào ngày đầu mỗi tháng) với lãi suất 0,5% một tháng, biết tiền lãi của tháng trước được nhập vào tiền gốc của tháng sau. Hỏi sau 36 tháng ông An nhận được số tiền vốn và lãi là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải.

Gọi a là số tiền ông An gửi vào hàng tháng, r là lãi suất trên một tháng và P_n là số tiền vốn và lãi ông An nhận được sau n tháng.

- ☑ Sau một tháng, ông An có số tiền là $P_1 = a + ar = a(1 + r)$.
- ☑ Đầu tháng thứ hai, ông An có số tiền là $P_1 + a = a(1 + r) + a$.
- ☑ Sau hai tháng, ông An có số tiền là $P_2 = a(1 + r) + a + [a(1 + r) + a]r = a[(1 + r)^2 + (1 + r)]$.
- ☑ Cuối tháng thứ 36, ông An có số tiền là

$$\begin{aligned} P_{36} &= a[(1 + r)^{36} + (1 + r)^{35} + \dots + (1 + r)] \\ &= a(1 + r) \frac{(1 + r)^{36} - 1}{r} \\ &= 5000000 \cdot (1 + 0,005) \cdot \frac{(1 + 0,005)^{36} - 1}{0,005} \\ &\approx 197\,663\,927 \quad (\text{đồng}). \end{aligned}$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 40. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức $x_n = 75 + 5 \cdot (n - 1)$. (Nguồn: <https://bibabo.vn>).

- a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?
- b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Lời giải.

- a) Ta có $x_3 = 75 + 5 \cdot (3 - 1) = 85$, do đó một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là 85 centimét.
- b) Ta có $x_n = 75 + 5(n - 1)$ nên $x_{n+1} = 75 + 5(n + 1 - 1) = 75 + 5n$, do đó $x_{n+1} - x_n = 5$ nên dãy số (x_n) có là một cấp số cộng. Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên 5 centimét.

□

Bài 41. Khi kí kết hợp đồng với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau
Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp, em sẽ chọn phương án nào khi

- a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?
- b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải.

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm.

Phương án 1: Ta có $u_1 = 120$ và $d = 18$.

Khi đó trong 3 năm sẽ nhận được $\frac{3 \cdot (2 \cdot 120 + 2 \cdot 18)}{2} = 414$ (triệu đồng).

Phương án 2: Ta có $u_1 = 24$ triệu và $d = 1,8$.

Khi đó trong 3 năm (tương ứng 12 quý) sẽ nhận được $\frac{12 \cdot (2 \cdot 24 + 11 \cdot 1,8)}{2} = 406,8$ (triệu đồng).

Vậy lựa chọn phương án 1.

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm.

Phương án 1: Ta có $u_1 = 120$ và $d = 18$.

Khi đó trong 10 năm sẽ nhận được $\frac{10 \cdot (2 \cdot 120 + 9 \cdot 18)}{2} = 2\,010$ (triệu đồng).

Phương án 2: Ta có $u_1 = 24$ triệu và $d = 1,8$.

Khi đó trong 10 năm (tương ứng 40 quý) sẽ nhận được $\frac{40 \cdot (2 \cdot 24 + 39 \cdot 1,8)}{2} = 2\,364$ (triệu đồng).

Vậy lựa chọn phương án 2.

□

Bài 42 (NB). Một người có một khoản tiền gửi ngân hàng với lãi suất 10% năm. Nếu sau 5 năm người đó nhận được tổng số tiền là 550 triệu đồng thì số tiền gửi ban đầu của người đó là bao nhiêu?

🗨️ **Lời giải.**

Gọi x là số tiền gửi ban đầu của người đó ($x > 0$).

Sau 5 năm, số tiền nhận được bằng số tiền gốc cộng với lãi suất:

$$x + 0,1x \times 5 = 1,5x.$$

Theo đề bài, tổng số tiền nhận được sau 5 năm là 550 triệu đồng, do đó ta có phương trình:

$$1,5x = 550.$$

Giải phương trình ta có:

$$x = \frac{550}{1,5} \approx 366,67.$$

Vậy số tiền gửi ban đầu của người đó là 366,67 triệu đồng.

□

Bài 43. Bạn An muốn mua một món quà tặng mẹ nhân ngày mừng 8/3. Bạn quyết định tiết kiệm từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017. Ngày đầu An có 5 000 đồng, kể từ ngày thứ hai số tiền An tiết kiệm được ngày sau cao hơn ngày trước mỗi ngày 1 000 đồng. Tính số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ.

🗨️ **Lời giải.**

Tính số ngày mà An tiết kiệm được từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017:

Số ngày từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 28/2/2017 là 28 ngày.

Số ngày từ ngày 1/3/2017 đến hết ngày 6/3/2017 là 6 ngày.

Vậy An tiết kiệm được $28 + 6 = 34$ ngày.

Gọi x là số tiền An tiết kiệm được vào ngày đầu tiên, do ngày sau An tiết kiệm được nhiều hơn ngày trước mỗi ngày 1 000 đồng, nên số tiền An tiết kiệm được vào ngày thứ n là $x + 1\,000(n - 1)$.

Vậy An tiết kiệm được tổng số tiền là:

$$S = x + (x + 1\,000) + (x + 2\,000) + \cdots + (x + 33 \times 1\,000).$$

Ta có công thức của tổng số hạng cấp số cộng:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{2u_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$$

Áp dụng công thức này, ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2u_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n \\ &= \frac{2 \cdot 5\,000 + 33 \cdot 1\,000}{2} \cdot 34. \\ &= 731\,000. \end{aligned}$$

Vậy số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ là 731 000 đồng.

□

Bài 44 (TH). Một hội đồng quản trị quyết định tăng lương cho nhân viên hàng năm theo tỷ lệ cố định. Ví dụ, lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm trước. Hỏi nếu lương của một nhân viên là 10 triệu đồng/năm vào năm nay, thì lương của nhân viên đó sẽ là bao nhiêu vào năm thứ 5?

Lời giải.

Theo giả thiết, lương của nhân viên được tăng thêm 5 % so với năm trước đó.

- ✔ Vậy lương của nhân viên vào năm thứ 2 sẽ là $10 \cdot (1 + 0,05) = 10,5$ triệu đồng/năm.
- ✔ Tương tự, lương của nhân viên vào năm thứ 3 sẽ là $10,5 \cdot (1 + 0,05) = 11,025$ triệu đồng/năm.
- ✔ Lương của nhân viên vào năm thứ 4 sẽ là $11,025 \cdot (1 + 0,05) = 11,57625$ triệu đồng/năm.
- ✔ Cuối cùng, lương của nhân viên vào năm thứ 5 sẽ là $11,57625 \cdot (1 + 0,05) = 12,1550625$ triệu đồng/năm.

Vậy lương của nhân viên đó vào năm thứ 5 sẽ là 12,1550625 triệu đồng/năm.

Chú ý: Lương của nhân viên đó vào năm thứ 5 sẽ là $u_5 = u_1 + 4d = 10 + 4 \cdot 10 \cdot 0,05 = 12$ triệu đồng chỉ đúng trong trường hợp lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm đầu tiên. $\square$

Bài 45 (TH). Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

Lời giải.

Gọi n là số tuần anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình.

Số tiền anh ta tiết kiệm được sau n tuần đó là $S = 42 + 8n$.

Theo bài ra $S = 42 + 8n \geq 400 \Leftrightarrow n \geq 44,75 \Rightarrow n = 45$.

Vậy kể cả tuần đầu thì tuần thứ 46 anh ta có đủ tiền để mua cây guitar đó. $\square$

Bài 46. Hàng tháng ông An gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là 5 000 000 đồng (vào ngày đầu mỗi tháng) với lãi suất 0,5% một tháng, biết tiền lãi của tháng trước được nhập vào tiền gốc của tháng sau. Hỏi sau 36 tháng ông An nhận được số tiền vốn và lãi là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải.

Gọi a là số tiền ông An gửi vào hàng tháng, r là lãi suất trên một tháng và P_n là số tiền vốn và lãi ông An nhận được sau n tháng.

- ✔ Sau một tháng, ông An có số tiền là $P_1 = a + ar = a(1 + r)$.
- ✔ Đầu tháng thứ hai, ông An có số tiền là $P_1 + a = a(1 + r) + a$.
- ✔ Sau hai tháng, ông An có số tiền là $P_2 = a(1 + r) + a + [a(1 + r) + a]r = a[(1 + r)^2 + (1 + r)]$.
- ✔ Cuối tháng thứ 36, ông An có số tiền là

$$\begin{aligned} P_{36} &= a[(1 + r)^{36} + (1 + r)^{35} + \dots + (1 + r)] \\ &= a(1 + r) \frac{(1 + r)^{36} - 1}{r} \\ &= 5000000 \cdot (1 + 0,005) \cdot \frac{(1 + 0,005)^{36} - 1}{0,005} \\ &\approx 197\,663\,927 \quad (\text{đồng}). \end{aligned}$$

$\square$

Bài 47 (VDT). Một xưởng có đăng tuyển công nhân với đãi ngộ về lương như sau: Trong quý đầu tiên thì xưởng trả là 6 triệu đồng/quý và kể từ quý thứ 2 sẽ tăng lên 0,5 triệu cho 1 quý. Hỏi với đãi ngộ trên thì sau 5 năm làm việc tại xưởng, tổng số lương của công nhân đó là bao nhiêu?

Lời giải.

Giả sử công nhân làm cho xưởng n quý thì mức lương khi đó kí hiệu (u_n) (triệu đồng).

Theo đề:

Quý đầu: $u_1 = 6$ triệu.

Các quý tiếp theo: $u_{n+1} = u_n + 0,5$ với $\forall n \geq 1$.

Mức lương của công nhân mỗi quý là 1 số hạng của dãy số u_n . Mặt khác, lương của quý sau hơn lương quý trước

là 0,5 triệu nên dãy số u_n là một cấp số cộng với công sai $d = 0,5$.

Ta biết 1 năm sẽ có 4 quý nên 5 năm sẽ có $5 \cdot 4 = 20$ quý. Theo yêu cầu của đề bài ta cần tính tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) .

Lương tháng quý 20 của công nhân: $u_{20} = 6 + (20 - 1) \cdot 0,5 = 15,5$ triệu đồng.

Tổng số lương của công nhân nhận được sau 5 năm làm việc tại xưởng: $S_{12} = 20 \cdot (6 + 15,5) : 2 = 215$ (triệu đồng).

□

Bài 48 (NB). Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng năm. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2016, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 04 năm 2016).

Lời giải.

Từ ngày 1 tháng 1 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016 có tổng cộng $31 + 29 + 31 + 30 = 121$ ngày.

Gọi S là số tiền An tích lũy được vào ngày sinh nhật của bạn.

Do An bỏ được 100 đồng vào ngày đầu tiên nên số tiền An tích lũy được vào ngày thứ n là

$$S = 100 + 100(n - 1).$$

Vậy tổng số tiền An tích lũy được là:

$$S = 100 + 200 + \dots + 121 \cdot 100 = \frac{121(100 + 121 \cdot 100)}{2} = 738 \cdot 100.$$

Vậy An đã tích lũy được 738 100 đồng vào ngày sinh nhật của bạn. □

Bài 49 (TH). Người ta trồng 3 003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây... cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Số hàng cây được trồng là bao nhiêu?

Lời giải.

Tổng số cây trồng được là $1 + 2 + 3 + \dots + n$, nghĩa là tổng của n số tự nhiên đầu tiên. Ta cần tìm số n để tổng này bằng 3003.

Ta có công thức tổng của n số tự nhiên đầu tiên là:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Giải phương trình:

$$\frac{n(n + 1)}{2} = 3003.$$

Ta có:

$$n(n + 1) = 6006 \Rightarrow n = 77.$$

Vậy số hàng cây được trồng là 77. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 55 (TH). Một công ty đang cần tuyển dụng thêm nhân viên. Công ty quyết định tăng số lượng nhân viên hàng tháng theo cấp số cộng. Nếu công ty đã có 20 nhân viên và quyết định tăng thêm 2 nhân viên hàng tháng, hỏi sau bao nhiêu tháng công ty sẽ có 50 nhân viên?

(A) 19 tháng.

(B) 16 tháng.

(C) 36 tháng.

(D) 26 tháng.

Lời giải.

Để giải bài toán này, ta có thể sử dụng công thức cấp số cộng:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times d.$$

Trong đó a_1 là số lượng nhân viên ban đầu, d là số lượng nhân viên tăng hàng tháng và n là số tháng.

Ta cần tìm số tháng n để công ty có được 50 nhân viên. Thay các giá trị vào công thức cấp số cộng ta có:

$$50 = 20 + (n - 1) \times 2.$$

Suy ra:

$$n = \frac{50 - 20}{2} + 1 = 16.$$

Vậy sau 16 tháng kể từ khi công ty quyết định tăng số lượng nhân viên hàng tháng theo cấp số cộng, công ty sẽ có được 50 nhân viên.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56 (VD). Một người đang tăng cường luyện tập thể thao hàng ngày. Anh ta quyết định tăng mức độ luyện tập theo cấp số cộng hàng tuần. Nếu anh ta bắt đầu với mức luyện tập 30 phút mỗi ngày và tăng thêm 5 phút mỗi ngày, hỏi anh ta sẽ luyện tập được bao lâu để đạt được mức luyện tập 60 phút mỗi ngày?

(A) 16 ngày.

(B) 6 ngày.

(C) 9 ngày.

(D) 7 ngày.

Lời giải.

Gọi n là số ngày liên tiếp mà người đó tăng mức độ luyện tập. Theo đó, mức độ luyện tập của người đó sau n ngày là:

$$30 + 5n \text{ (phút).}$$

Vì để đạt được mức luyện tập 60 phút mỗi ngày nên:

$$30 + 5n = 60.$$

Từ đó suy ra:

$$n = \frac{60 - 30}{5} = 6.$$

Vậy người đó cần luyện tập liên tiếp trong 6 ngày để đạt được mức luyện tập 60 phút mỗi ngày.

Chọn đáp án (B) □

Câu 57 (VD). Nếu một công ty công nghệ mới thành lập có số lượng người dùng ban đầu là 10 000 và mỗi tháng tăng thêm cố định 5 000 lượng người dùng, thì sau bao lâu có số lượng người dùng là 1 triệu.

(A) 198 tháng.

(B) 197 tháng.

(C) 18 tháng.

(D) 98 tháng.

Lời giải.

Ta cần tính số tháng n theo công thức sau:

$$\begin{aligned} 10\,000 + 5\,000n &= 1\,000\,000. \\ \Rightarrow n &= \frac{1\,000\,000 - 10\,000}{5\,000} = 198. \end{aligned}$$

Vậy sau khoảng 198 tháng (khoảng 16 năm và 6 tháng), công ty sẽ đạt được 1 triệu người dùng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 58 (VDC). Một nhà đầu tư đang đầu tư vào một quỹ đầu tư với mức lợi nhuận cố định hàng năm. Nếu nhà đầu tư đầu tư vào quỹ đầu tư với số tiền ban đầu là 20 triệu đồng và mức lợi nhuận hàng năm là 10%, hỏi số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 7 năm?

(A) 34 triệu đồng.

(B) 14 triệu đồng.

(C) 30 triệu đồng.

(D) 39 triệu đồng.

Lời giải.

Với số tiền ban đầu là 20 triệu đồng và mức lợi nhuận hàng năm là 10%, ta có thể tính được số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 1 năm, sau đó sử dụng cấp số cộng để tính số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 7 năm. Số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 1 năm là: $20 \text{ triệu đồng} \times 10\% = 2 \text{ triệu đồng}$. Số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 7 năm là: $2 \text{ triệu đồng} \times 7 \text{ năm} + 20 \text{ triệu đồng} = 34 \text{ triệu đồng}$. Vậy sau 7 năm, nhà đầu tư sẽ nhận được tổng cộng 34 triệu đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 59 (VDC). Một công ty sản xuất bánh kẹo tăng sản lượng sản phẩm của mình lên mỗi tháng. Nếu sản lượng ban đầu là 1 000 sản phẩm, một sản phẩm lợi nhuận 1 USD và tăng thêm 200 sản phẩm mỗi tháng, thì sau bao nhiêu tháng lợi nhuận công ty 1 triệu đô.

(A) 8 000 tháng.

(B) 7 000 tháng.

(C) 9 000 tháng.

(D) 5 000 tháng.

Lời giải.

Để tính thời gian công ty đạt được lợi nhuận 1 triệu đô, chúng ta cần biết lợi nhuận của công ty đạt được bao nhiêu sau mỗi tháng.

Giả sử sản lượng ban đầu là 1 000 sản phẩm một sản phẩm lợi nhuận 1 USD và tăng thêm 200 sản phẩm mỗi tháng. Ta có thể tính được lợi nhuận của công ty sau mỗi tháng như sau:

- ☑ Tháng 1: $1\,000 \times 1 = 1\,000$ USD.
- ☑ Tháng 2: $(1\,000 + 200) \times 1 = 1\,200$ USD.
- ☑ Tháng 3: $(1\,000 + 2 \times 200) \times 1 = 1\,400$ USD.
- ☑ Tháng 4: $(1\,000 + 3 \times 200) \times 1 = 1\,600$ USD.
- ☑ Tháng n : $(1\,000 + (n - 1) \times 200) \times 1 = (n - 1) \times 200 + 1\,000$ USD.

Để tính thời gian để công ty đạt được lợi nhuận 1 triệu đô, ta giải phương trình sau: $(n - 1) \times 200 + 1\,000 = 10^6$
 $\Rightarrow (n - 1) \times 200 = (10^6 - 1\,000) \Rightarrow n - 1 = \frac{10^6 - 1\,000}{200} \Rightarrow n = \frac{10^6 - 1\,000}{200} + 1 \Rightarrow n = 5\,001$ Vậy sau 5 000 tháng, công ty sẽ đạt được lợi nhuận 1 triệu đô.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 60 (VDC). Một công ty tăng lương cho nhân viên hàng năm bằng cách thêm một số tiền cố định vào lương của họ. Ví dụ: Nếu lương ban đầu của một nhân viên là 10 triệu đồng và công ty tăng lương 2 triệu đồng mỗi năm, thì lương của nhân viên sẽ là bao nhiêu nếu làm cho công ty 19 năm?

- (A)** 16 triệu đồng. **(B)** 26 triệu đồng. **(C)** 28 triệu đồng. **(D)** 46 triệu đồng.

Lời giải.

Do tăng lương cho nhân viên hàng năm bằng cách thêm một số tiền cố định nên ta có thể sử dụng công thức tính số hạng thứ n của cấp số cộng $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Ở bài toán này, ta có:

$a_1 = 10$ (triệu đồng) là lương ban đầu của nhân viên.

$d = 2$ (triệu đồng) là công sai của cấp số cộng.

$n = 19$ là số thứ tự của số hạng.

Ta thay các giá trị này vào công thức trên để tính lương của nhân viên sau 19 năm:

$a_{19} = 10 + (19 - 1)2 \Rightarrow a_{19} = 46$ (triệu đồng).

Vậy lương của nhân viên sau 19 năm làm việc cho công ty là 46 triệu đồng.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 61 (VDC). Tài sản thường bị khấu hao khiến chúng có tuổi thọ hữu ích giới hạn. Ví dụ, nếu một công ty mua một chiếc xe tải với giá 35 000 đô la và nó bị khấu hao với tốc độ không đổi là 700 đô la mỗi tháng, thì sau bao lâu giá trị của nó còn 5 000 đô la.

- (A)** $x = 23$ tháng. **(B)** $x = 43$ tháng. **(C)** $x = 41$ tháng. **(D)** $x = 40$ tháng.

Lời giải.

Cách 1: Thời gian để giá trị của chiếc xe tải trên được khấu hao xuống còn 5.000 đô la có thể được tính bằng cách sử dụng công thức sau:

Giá trị khởi đầu của chiếc xe tải là 35 000 Giá trị cuối cùng của chiếc xe tải là 5 000 Tốc độ khấu hao tương ứng 700/tháng

Để tìm ra thời gian cần thiết để giá trị của chiếc xe tải giảm xuống còn 5.000, ta cần tìm số tháng được khấu hao.

Giả sử số tháng cần khấu hao là x tháng.

Giá trị của chiếc xe tải sau x tháng khấu hao được tính bằng:

$35\,000 - 700x = 5\,000$.

Giải phương trình trên ta có: $x \approx 43$ tháng

Vì vậy, sau 43 tháng, giá trị của chiếc xe tải sẽ giảm xuống còn 5 000. Ngoài ra ta có thể giải theo cấp số cộng như sau:

Cách 2: Ta có thể sử dụng công thức tính số hạng thứ n của cấp số cộng $a_n = a_1 + (n - 1)d$

- ☑ $u_1 = 35\,000$ (đô la) là giá trị ban đầu của xe tải.
- ☑ $d = -700$ (đô la) là công sai của cấp số cộng (âm vì giá trị xe tải giảm).
- ☑ $a_n = 5\,000$ (đô la) là giá trị cuối cùng của xe tải.

Ta thay các giá trị này vào công thức trên để tính số tháng mà xe tải bị khấu hao đến 5 000 đô la:

$$5\,000 = 35\,000 + (n - 1)(-700) \Rightarrow n = 43,857.$$

Vậy sau khoảng 43,857 tháng, tức là khoảng 3 năm và 7 tháng, giá trị của xe tải sẽ còn khoảng 5 000 đô la.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 62 (VDC). Các thiết bị điện tử như máy tính, điện thoại, hoặc máy ảnh thường bị khấu hao nhanh chóng do sự phát triển của công nghệ mới. Ví dụ, nếu một người mua một máy tính Macbook với giá 2000 đô la và nó bị khấu hao với tốc độ không đổi là 100 đô la mỗi tháng, thì giá trị của Macbook còn lại 1000 đô la sau bao nhiêu tháng?

- (A) $x = 12$ tháng. (B) $x = 43$ tháng. (C) $x = 11$ tháng. (D) $x = 10$ tháng.

Lời giải.

Để giải bài toán này, ta có thể sử dụng công thức tính số hạng thứ n của cấp số cộng $a_n = a + (n - 1)d$.

Ở bài toán này, ta có:

$a = 2000$ (đô la) là giá trị ban đầu của máy tính Macbook.

$d = -100$ (đô la) là công sai của cấp số cộng (âm vì giá trị máy tính giảm).

$a_n = 1000$ (đô la) là giá trị cuối cùng của máy tính Macbook.

Ta thay các giá trị này vào công thức trên để tính số tháng mà máy tính bị khấu hao đến 1000 đô la:

$$1000 = 2000 + (n - 1)(-100) \Rightarrow n = 11.$$

Vậy sau 11 tháng, giá trị của máy tính Macbook sẽ còn 1000 đô la.

Chọn đáp án (C) □

Câu 63 (VDC). Ban đầu có 1m^2 bèo sinh sôi trên mặt hồ biết tốc độ sinh sôi ngày sau hơn ngày trước $0,5\text{m}^2$. Biết diện tích mặt hồ nước là 120m^2 hỏi sau bao lâu bèo phủ đầy mặt hồ?

- (A) $x = 120$ tháng. (B) $x = 143$ tháng. (C) $x = 238$ tháng. (D) $x = 130$ tháng.

Lời giải.

Giả sử sau x ngày, diện tích của bèo phủ đầy mặt hồ là $S\text{m}^2$. Theo đề bài, ta biết được rằng:

- ☑ Tốc độ sinh sôi của bèo là $0,5\text{m}^2/\text{ngày}$.
- ☑ Ban đầu, diện tích của bèo là 1m^2 .
- ☑ Diện tích mặt hồ là 120m^2 .

Vậy ta có phương trình sau đây: $S = 1 + 0,5x$.

Điều kiện để bèo phủ đầy mặt hồ là $S = 120$.

$1 + 0,5x = 120$ hay $0,5x = 119 \Rightarrow x = 238$ ngày.

Vậy sau 238 ngày, bèo sẽ phủ đầy mặt hồ.

Chọn đáp án (C) □

Câu 64 (VDC). Nhà hát lớn Dạ Cổ Vĩ Lan ở An Cư có hàng ghế đầu kí hiệu dãy A là 50 chỗ hàng ghế, sau dãy B là 48 chỗ và như thế hàng sau ít hơn hàng trước 2 ghế, biết hàng cuối cùng có 10 ghế. Tính tổng số dãy ghế và tổng số chỗ ngồi?

- (A) 21 dãy và 630 chỗ. (B) 20 dãy và 630 chỗ. (C) 11 dãy và 630 chỗ. (D) 21 dãy và 930 chỗ.

Lời giải.

Gọi n là số dãy ghế. Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} S = 50 + 48 + \dots + 10 = \frac{50 + 10}{2}n \\ S = \frac{2 \cdot 50 + (n - 1) \cdot (-2)}{2}n \end{cases}$$

Từ phương trình đầu tiên, ta có:

$$S = 50 + 48 + \dots + 10 = \frac{50 + 10}{2}n = 30n.$$

Từ phương trình thứ hai, ta có:

$$S = \frac{2 \cdot 50 + (n - 1) \cdot (-2)}{2}n = (50 - n + 1)n = (51 - n)n.$$

Do đó, ta có:

$$30n = (51 - n)n \Rightarrow n = 21.$$

Vậy $n = 21$ dãy ghế và $30 \cdot 21 = 630$ ghế.

Chọn đáp án (A) □

Câu 65 (VDC). Người ta trồng cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 3 cây, hàng thứ ba trồng 5 cây,... cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây là 6561. Số hàng cây được trồng là bao nhiêu?

- (A) 81 hàng. (B) 16 hàng. (C) 100 hàng. (D) 89 hàng.

Lời giải.

Để giải bài toán này, ta cần tìm số hàng cây được trồng cho đến khi tổng số cây là 2023.

- ☑ Hàng thứ nhất trồng 1 cây.
- ☑ Hàng thứ hai trồng 3 cây (1 cây + 2 cây).
- ☑ Hàng thứ ba trồng 5 cây (1 cây + 2 cây + 2 cây).
- ☑ ...

Vậy ta thấy rằng số cây trồng trong hàng thứ n là $(n - 1) \cdot 2 + 1$.

Số cây được trồng trong n hàng đầu tiên là:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Để tìm số hàng cây được trồng cho đến khi tổng số cây là 6561, ta giải phương trình sau:

$n^2 = 6561$. Vậy số hàng cây được trồng là 81 hàng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 66 (VDC). Người ta thả một 1 m² lá bèo vào một hồ nước. Kinh nghiệm cho thấy sau x giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ 500 m². Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng thêm 0,5 m² và tốc độ tăng không đổi tìm x ?

- (A) 888 giờ. (B) 777 giờ. (C) 999 giờ. (D) 700 giờ.

Lời giải.

Bài toán này có thể giải bằng cách sử dụng công thức tăng trưởng của bèo. Giả sử lượng lá bèo ban đầu là 1 m², sau mỗi giờ lượng lá bèo tăng thêm 0,5 m². Sau x giờ, lượng lá bèo đã phủ kín mặt hồ 500 m². Ta có thể viết phương trình sau:

$$1 + 0,5x = 500.$$

Giải phương trình ta được:

$$x = \frac{500 - 1}{0,5} \approx 999.$$

Vậy sau khoảng 999 giờ (khoảng 41 ngày), lượng lá bèo sẽ phủ kín mặt hồ 500 m².

Chọn đáp án (C) □

Bài số 3

CẤP SỐ NHÂN

A – ĐỊNH NGHĨA

- ☑ Cấp số nhân là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q , tức là:

$$u_n = u_{n-1} \cdot q \text{ với } n \geq 2.$$

Số q được gọi là *công bội* của cấp số nhân.

- ☑ Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q và $u_n \neq 0$ với mọi $n \geq 1$ thì với số tự nhiên $n \geq 2$, ta có

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q.$$

⚠ Khi $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi.

B – SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

🔗 **Định nghĩa 3.1.** Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

C – TỔNG N SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

🔗 **Định lý 3.1.** Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

⚠ Nếu $q = 1$ thì $S_n = nu_1$.

D – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

📁 Dạng 1. Nhận diện cấp số nhân. Tìm số hạng đầu và công bội q của CSN

Để nhận diện (chứng minh) mỗi dãy số là cấp số nhân, ta làm như sau:

Chứng minh $u_{n+1} = u_n q$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và q là một số không đổi.

Nếu $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

- ☑ Nếu k là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = k$.
- ☑ Nếu k phụ thuộc vào n thì (u_n) không phải là cấp số nhân.

Để chứng minh dãy (u_n) không phải là một cấp số nhân. Khi đó, ta chỉ cần chỉ ra ba số hạng liên tiếp không tạo thành một cấp số nhân, chẳng hạn $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

Để chứng minh ba số a, b, c theo thứ tự đó lập được một cấp số nhân, thì ta chứng minh $ac = b^2$ hoặc $|b| = \sqrt{ac}$.

1. Ví dụ mẫu**Ví dụ 1 (Cánh Diều).** Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số nhân? Vì sao?

a) $125; 25; 5; 1; \frac{1}{5}$.

b) $2; -6; 18; 54$.

Lời giải.

Xét các thương của các số hạng (kể từ số hạng thứ hai trở đi) với số hạng ngay trước đó, ta thấy

a) $\frac{25}{125} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{5}}{1} = \frac{1}{5}$.

Vậy dãy số đã cho là cấp số nhân.

b) $\frac{-6}{2} = -3, \frac{18}{-6} = -3, \frac{54}{18} = 3 \neq -3$.

Vậy dãy số đã cho không là cấp số nhân.

□

Ví dụ 2 (CTST). Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

a) $1; 11; 121; 12321; 1234321$.

b) $1; -1; 1; -1; 1$.

c) $4; 8; 12; 16$.

Lời giải.

a) Dãy số: $1; 11; 121; 12321; 1234321$ không là cấp số nhân vì $\frac{12321}{121} \neq \frac{121}{11}$.

b) Dãy số: $1; -1; 1; -1; 1$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -1$.

c) Dãy số: $4; 8; 12; 16$ có $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên không là cấp số nhân.

□

Ví dụ 3 (NB). Dãy số $1; 1; 1; 1; \dots$ có phải là một cấp số nhân hay không?**Lời giải.**

Để thấy $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = 1$ là một số không đổi.

Do đó dãy số $1; 1; 1; 1; \dots$ là một cấp số nhân.

□

Ví dụ 4 (KNTT). Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

a) $u_n = 3(-2)^n$.

b) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot 7^n$.

c) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$

Lời giải.

a) $u_1 = 3(-2)^1 = -6; u_2 = 3(-2)^2 = 12; u_3 = 3(-2)^3 = -24$.

Dãy này là cấp số nhân với công bội $q = -2$.

b) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+2} \cdot 7^{n+1}}{(-1)^{n+1} \cdot 7^n} = -7$. Dãy này là cấp số nhân với công bội $q = -7$.

c) Xét dãy $\begin{cases} u_n = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 13$ nên $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$ do đó dãy số này không là cấp số nhân.

□

Ví dụ 5 (TH). Dãy số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Xét dãy số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$ có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9}{u_n} : \frac{9}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2$.

Do đó ta có $\begin{cases} u_1 = u_3 = u_5 = \dots = u_{2n+1} = \dots & (1) \\ u_2 = u_4 = u_6 = \dots = u_{2n} = \dots & (2). \end{cases}$

Theo đề bài ta có $u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \dots = u_{2n} = u_{2n+1} = \dots$

Do đó (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1$. □

Ví dụ 6 (TH). Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0, u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_n u_{2n}$ cũng là một cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có $\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{u_n u_{2n}}{u_{n-1} u_{2(n-1)}} = \frac{u_1 q^{n-1} \cdot u_1 q^{2n-1}}{u_1 q^{n-2} \cdot u_1 q^{2n-3}} = q^3$. Do đó (v_n) là một cấp số nhân với công bội là q^3 . □

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Vì sao?

- a) 5; -0,5; 0,05; -0,005; 0,0005; b) -9; 3; -1; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{9}$; c) 2; 8; 32; 64; 256.

Lời giải.

a) Xét dãy số 5; -0,5; 0,05; -0,005; 0,0005; Xét $q = \frac{-0,5}{5} = -\frac{1}{10}$. Ta có $5q = -0,5$; $-0,5q = 0,05$; $0,05q = -0,005$; $-0,005q = 0,0005$.
Vậy dãy số đã cho là cấp số nhân với công bội $q = -\frac{1}{10}$.

b) Xét dãy số -9; 3; -1; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{9}$; Xét $q = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$. Ta có $-9q = 3$; $3q = -1$; $-1q = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}q = -\frac{1}{9}$.
Vậy dãy số đã cho là cấp số nhân với công bội $q = -\frac{1}{3}$.

c) Xét dãy số 2; 8; 32; 64; 256. Xét $q = \frac{8}{2} = 4$. Ta có $2q = 8$; $8q = 32$; $32q = 128 \neq 64$.
Vậy dãy số đã cho không phải cấp số nhân. □

Bài 2. Chứng minh mỗi dãy số (u_n) với số hạng tổng quát như sau là cấp số nhân:

- a) $u_n = \frac{-3}{4} \cdot 2^n$ b) $u_n = \frac{5}{3^n}$; c) $u_n = (-0,75)^n$.

Lời giải.

a) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{-3}{4} \cdot 2^{n+1} \\ &= \frac{-3}{4} \cdot 2^n \cdot 2 \\ &= 2u_n. \end{aligned}$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là cấp số nhân.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{5}{3^{n+1}} \\ &= \frac{5}{3^n \cdot 3} \\ &= \frac{1}{3} u_n. \end{aligned}$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là cấp số nhân.

c) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (-0,75)^{n+1} \\ &= (-0,75)^n \cdot (-0,75) \\ &= (-0,75) u_n. \end{aligned}$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là cấp số nhân.

Bài 3 (NB). Dãy số $1; 1; 1; 1; \dots$ có phải là một cấp số nhân hay không?

Lời giải.

Để thấy $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = 1$ là một số không đổi.

Do đó dãy số $1; 1; 1; 1; \dots$ là một cấp số nhân.

Bài 4 (TH). Dãy số $u_n = 3^n$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \cdot 3}{3^n} = 3$ là số không đổi nên (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$.

Bài 5 (TH). Dãy số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Xét dãy số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$ có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9}{u_n} : \frac{9}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2$.

Do đó ta có $\begin{cases} u_1 = u_3 = u_5 = \dots = u_{2n+1} = \dots & (1) \\ u_2 = u_4 = u_6 = \dots = u_{2n} = \dots & (2). \end{cases}$

Theo đề bài ta có $u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \dots = u_{2n} = u_{2n+1} = \dots$

Do đó (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Bài 6 (TH). Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0, u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_n u_{2n}$ cũng là một cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có $\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{u_n u_{2n}}{u_{n-1} u_{2(n-1)}} = \frac{u_1 q^{n-1} \cdot u_1 q^{2n-1}}{u_1 q^{n-2} \cdot u_1 q^{2n-3}} = q^3$. Do đó (v_n) là một cấp số nhân với công bội là q^3 .

Bài 7 (VDT). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Ta có $v_n = u_n + 3$ (1) và $v_{n+1} = u_{n+1} + 3$ (2).

Theo đề ta có $u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3)$ (3).

Thay (1) và (2) vào (3) ta được $v_{n+1} = 4v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$.

Bài 8 (TH). Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$. Chứng minh (u_n) là một cấp số nhân và tìm số hạng u_3 .

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$ là một số không đổi nên (u_n) là một cấp số nhân với công bội là $q = \frac{1}{3}$.

Do đó $u_3 = u_2 \cdot q = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{2}{9}$. □

Bài 9 (VD). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = 2u_n - 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Ta có $v_n = 2u_n - 4$ (1) và $v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4$ (2).

Theo đề ta có $u_{n+1} = 2u_n - 2 \Rightarrow 2u_{n+1} - 4 = 2(2u_n - 4)$ (3).

Thay (1) và (2) vào (3) ta được $v_{n+1} = 2v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$ và số hạng đầu $v_1 = 2u_1 - 4 = 2 \cdot 3 - 4 = 2$. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

(A) 128; -64; 32; -16; 8; ...

(B) $\sqrt{2}$; 2; 4; $4\sqrt{2}$; ...

(C) 5; 6; 7; 8; ...

(D) 15; 5; 1; $\frac{1}{5}$; ...

Lời giải.

Xét phương án 128; -64; 32; -16; 8; ...

Có $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = -\frac{1}{2}$ là một số không đổi nên dãy số 128; -64; 32; -16; 8; ... là một cấp số nhân.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

(A) 1; -1; 1; -1; ...

(B) 3; 3²; 3³; 3⁴; ...

(C) a ; a^3 ; a^5 ; a^7 ; ... ($a \neq 0$).

(D) $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ...

Lời giải.

Xét dãy $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ... có $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2} \left(\frac{1}{\pi} \neq \frac{1}{\pi^2} \right)$.

Do đó dãy $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ... không là một cấp số nhân.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân với

(A) Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 2.

(B) Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

(C) Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

(D) Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 1.

Lời giải.

Ta có $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = 2$.

Vậy dãy số đã cho là một cấp số nhân với công bội là $q = 2$ và số hạng đầu tiên là $u_1 = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và công bội $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

(A) -2; 10; 50; -250.

(B) -2; 10; -50; 250.

(C) -2; -10; -50; -250.

(D) -2; 10; 50; 250.

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên ta có $u_{n+1} = u_n q$.

Do đó $u_2 = u_1 q = (-2) \cdot (-5) = 10$, $u_3 = u_2 q = 10 \cdot (-5) = -50$, $u_4 = u_3 q = (-50) \cdot (-5) = 250$.

Vậy bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó là -2; 10; -50; 250.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 3 và 12. Số hạng tiếp theo của cấp số nhân là

(A) 15.**(B)** 21.**(C)** 36.**(D)** 48.**Lời giải.**

Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 3 và 12, do đó ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{12}{3} = 4$.

Vậy số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là $u_{n+2} = u_{n+1}q = 12 \cdot 4 = 48$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$. Khi đó số hạng đầu u_1 và công bội q là

(A) $u_1 = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{5}$.**(B)** $u_1 = \frac{3}{2}, q = 5$.**(C)** $u_1 = \frac{15}{2}, q = \frac{1}{5}$.**(D)** $u_1 = \frac{15}{2}, q = 5$.**Lời giải.**

Ta có $u_1 = \frac{3}{2} \cdot 5^1 = \frac{15}{2}$ và $u_2 = \frac{3}{2} \cdot 5^2 = \frac{75}{2}$.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{75}{2} : \frac{15}{2} = 5$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 7. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

(A) $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$.**(B)** $u_n = \frac{n}{3^n}$.**(C)** $u_n = (n+2) \cdot 3^n$.**(D)** $u_n = n^2$.**Lời giải.**

☑ Với $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$, ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3^{n-3}} : \frac{1}{3^{n-2}} = 3$ là một số không đổi.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$ là một cấp số nhân.

☑ Với $u_n = \frac{n}{3^n}$, ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3n}$ không phải là một số không đổi.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n}{3^n}$ không là một cấp số nhân.

☑ Với $u_n = (n+2) \cdot 3^n$, ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+3) \cdot 3^{n+1}}{(n+2) \cdot 3^n} = \frac{3(n+3)}{n+2}$ không phải là một số không đổi.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = (n+2) \cdot 3^n$ không là một cấp số nhân.

☑ Với $u_n = n^2$, ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ không là một số không đổi.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = n^2$ không là một cấp số nhân.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 8. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

(A) $u_n = 7 - 3n$.**(B)** $u_n = 7 - 3^n$.**(C)** $u_n = \frac{7}{3^n}$.**(D)** $u_n = 7 \cdot 3^n$.**Lời giải.**

☑ Với $u_n = 7 - 3n$, ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7 - 3(n+1)}{7 - 3n} = \frac{4 - 3n}{7 - 3n}$ không phải là một số không đổi.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7 - 3n$ không là một cấp số nhân.

☑ Với $u_n = 7 - 3^n$, ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7 - 3^{n+1}}{7 - 3^n} = \frac{7 - 3 \cdot 3^n}{7 - 3^n} = 1 - \frac{2 \cdot 3^n}{7 - 3^n}$ không phải là một số không đổi.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7 - 3^n$ không là một cấp số nhân.

☑ Với $u_n = \frac{7}{3^n}$, ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7}{3(n+1)} : \frac{7}{3^n} = \frac{n}{n+1}$ không phải là một số không đổi.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{7}{3^n}$ không là một cấp số nhân.

☑ Với $u_n = 7 \cdot 3^n$, ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7 \cdot 3^{n+1}}{7 \cdot 3^n} = 3$ là một số không đổi.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7 \cdot 3^n$ là một cấp số nhân.

Chọn đáp án (D)

Câu 9. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.
- (B) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.
- (C) Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.
- (D) Một cấp số nhân có công bội $q > 1$ là một dãy tăng.

Lời giải.

- ☑ Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân là mệnh đề đúng.
Vì xét dãy số (u_n) là một cấp số nhân. Khi đó $u_{n+1} = u_n \cdot q$ với $u_n \neq 0, q = 1$ thì $u_{n+1} = u_n$.
- ☑ Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng là mệnh đề đúng.
Vì $u_{n+1} = u_n + d$, với $d = 0$ thì $u_{n+1} = u_n$.
- ☑ Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng là mệnh đề đúng.
Ta xét dãy (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d > 0$.
Vì $u_{n+1} = u_n + d \Rightarrow u_{n+1} - u_n = d > 0$.
Do đó dãy (u_n) là dãy số tăng.
- ☑ Một cấp số nhân có công bội $q > 1$ là một dãy tăng là mệnh đề **sai**.
Ta xét dãy số (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q > 1$.
Vì $u_{n+1} = u_n q$ với $u_n \neq 0, q > 1$. Khi đó $u_{n+1} - u_n = u_n q - u_n = u_n(q - 1)$.
Nếu $u_n < 0$ thì $u_{n+1} - u_n = u_n q - u_n = u_n(q - 1) < 0$.
Do đó dãy (u_n) là dãy số giảm.

Chọn đáp án (D)

Câu 10. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 2, u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số đã cho là biểu thức có dạng $a2^n + bn + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Khi đó tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

- (A) -4.
- (B) 4.
- (C) -3.
- (D) 3.

Lời giải.

Ta có $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1 \Leftrightarrow u_n + 3n + 5 = 2[u_{n-1} + 3(n-1) + 5]$ với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Đặt $v_n = u_n + 3n + 5$, ta có $v_n = 2v_{n-1}$ với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Như vậy (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$ và $v_1 = 10$.

Do đó $v_n = 10 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^n$.

Suy ra $u_n + 3n + 5 = 5 \cdot 2^n$ hay $u_n = 5 \cdot 2^n - 3n - 5$ với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Vậy $a = 5, b = -3, c = -5$, suy ra $a + b + c = -3$.

Chọn đáp án (C)

Dạng 2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_n . Giải hệ phương trình này tìm được u_1 và q .

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 7 (KNTT). Xác định công bội, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số nhân sau:

- a) 1, 4, 16, ...;
- b) 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, ...

Lời giải.

a) Ta có $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 16, u_4 = 16 \cdot 4 = 64, u_5 = 64 \cdot 4 = 256$.

Ta có $u_1 = 1, q = 4$.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 4^{n-1}$, với $n \geq 2$.

Số hạng thứ 100 là $u_{100} = 1 \cdot 4^{100-1} = 4^{99}$.

b) Ta có $u_1 = 2, u_2 = -\frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{8}, u_4 = \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{32}, u_5 = -\frac{1}{32} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{128}$.

Ta có $u_1 = 2, q = -\frac{1}{4}$.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, với $n \geq 2$.

Số hạng thứ 100 là $u_{100} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{100-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{197}$.

□

Ví dụ 8. Tìm công thức tổng quát của cấp số nhân (u_n) , biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

Lời giải.

Theo bài ra, ta có:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 72 \\ u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q(q^2 - 1) = 72 \\ u_1 \cdot q^2(q^2 - 1) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{144}{72} = 2, \\ u_1 = 12. \end{cases}$$

Vậy $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1} = 6 \cdot 2^n$.

□

Ví dụ 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2, u_{n+1} = 2u_n + 3n + 2, \forall n > 0$. Tìm công thức số hạng tổng quát của u_n .

Lời giải.

Đặt $v_n = u_n + 3n + 1$ ta được dãy (v_n) thỏa mãn: $v_1 = 6, v_n = 2v_{n-1}$.

Ta thấy dãy (v_n) là một cấp số nhân nên suy ra $v_n = 3 \cdot 2^n$ từ đó ta được $u_n = 3 \cdot 2^n - 3n - 1$.

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3, u_3 = \frac{27}{4}$.

a) Tìm công bội q và viết năm số hạng đầu của cấp số nhân trên.

b) Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân trên.

c) Tính tổng số hạng tổng quát của cấp số nhân trên.

Lời giải.

a) Ta có $u_3 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow u_1 q^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow 3q^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow q = \pm \frac{3}{2}$.

☑ Với $q = \frac{3}{2}$. Năm số hạng đầu của cấp số nhân đã cho là

$$u_1 = 3, u_2 = u_1 q = \frac{9}{2}, u_3 = u_2 q = \frac{27}{4}, u_4 = u_3 q = \frac{81}{8}, u_5 = u_4 q = \frac{243}{16}.$$

☑ Với $q = -\frac{3}{2}$. Năm số hạng đầu của cấp số nhân đã cho là

$$u_1 = 3, u_2 = u_1 q = -\frac{9}{2}, u_3 = u_2 q = \frac{27}{4}, u_4 = u_3 q = -\frac{81}{8}, u_5 = u_4 q = \frac{243}{16}.$$

b)

- ☑ Với $q = \frac{3}{2}$. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho là

$$S_{10} = \frac{u_1(1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{3 \left[1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{174075}{512} \approx 340.$$

- ☑ Với $q = -\frac{3}{2}$. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho là

$$S_{10} = \frac{u_1(1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{3 \left[1 - \left(-\frac{3}{2} \right)^{10} \right]}{1 + \frac{3}{2}} = -\frac{34815}{512} \approx -68.$$

Bài 11 (NB). Tìm số hạng tổng quát của dãy số 2; 4; 8; 16; 32; ..., biết dãy (u_n) là một cấp số nhân.

💬 **Lời giải.**

Vì dãy số (u_n) là một cấp số nhân nên $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = 2$ và số hạng đầu $u_1 = 2$.

Do đó dãy số 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1}$.

Bài 12 (TH). Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 & (1) \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 & (2). \end{cases}$$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{u_1 q(1 + q^4)}{u_1(1 + q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2$.

Suy ra $u_1 = \frac{51}{1 + q^4} = \frac{51}{17} = 3$, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Vậy $u_1 = 3$, $q = 2$ và $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Bài 13 (TH). Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_6 = 30 \\ u_2 + u_7 = 120. \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_6 = 30 \\ u_2 + u_7 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^5 = 30 \\ u_1 q + u_1 q^6 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^5) = 30 & (1) \\ u_1 q(1 + q^5) = 120 & (2). \end{cases}$$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{u_1 q(1 + q^5)}{u_1(1 + q^5)} = \frac{120}{30} \Leftrightarrow q = 4$.

Suy ra $u_1 = \frac{30}{1 + q^5} = \frac{30}{1 + 4^5} = \frac{6}{205}$, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{6}{205} \cdot 4^{n-1}$.

Vậy $u_1 = \frac{6}{205}$, $q = 4$ và $u_n = \frac{6}{205} \cdot 4^{n-1}$.

Bài 14 (TH). Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_3 = 40 \\ u_6 = 160. \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_3 = 40 \\ u_6 = 1080 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 = 40 & (1) \\ u_1 q^5 = 1080 & (2). \end{cases}$$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{u_1 q^5}{u_1 q^2} = \frac{1080}{40} \Leftrightarrow q^3 = 27 \Leftrightarrow q = 3$.

$$\text{Suy ra } u_1 = \frac{40}{q^2} = \frac{40}{3^2} = \frac{40}{9}, u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{40}{9} \cdot 3^{n-1} = 40 \cdot 3^{n-3}.$$

$$\text{Vậy } u_1 = \frac{40}{9}, q = 3 \text{ và } u_n = 40 \cdot 3^{n-3}.$$

Bài 15 (VDT). Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân có công bội $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, biết

$$\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 + u_3 + u_5 = -21. \end{cases}$$

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 + u_3 + u_5 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q + u_1 q^3 = 10 \\ u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^4 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q + q^3) = 10 & (1) \\ u_1(1 + q^2 + q^4) = -21 & (2). \end{cases}$$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được

$$\begin{aligned} \frac{u_1(1 + q^2 + q^4)}{u_1(q + q^3)} &= \frac{-21}{10} \Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (q + 2)(2q + 1)(5q^2 - 2q + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q = -2 \text{ (thỏa mãn)} \\ q = -\frac{1}{2} \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } u_1 = \frac{10}{q + q^3} = -1, u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-1) \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1} = -\frac{(-2)^n}{-2} = \frac{(-2)^n}{2}.$$

$$\text{Vậy } u_1 = -1, q = -2 \text{ và } u_n = \frac{(-2)^n}{2}.$$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là $u_1 \neq 0$ và công bội $q \neq 0$. Số hạng tổng quát của cấp số nhân bằng

- (A) $u_n = u_1 + (n - 1)q$. (B) $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$. (C) $u_n = u_1 \cdot q^n$. (D) $u_n = u_1 \cdot q^{n+1}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 12. Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội q là

- (A) $u_1 = \frac{6}{5}, q = 3$. (B) $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2$. (C) $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$. (D) $u_1 = \frac{6}{5}, q = 5$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n = \frac{6}{5} \cdot 2^{n-1}, \text{ suy ra } u_1 = \frac{6}{5} \text{ và } q = 2.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và công bội $q = \frac{2}{3}$. Chọn mệnh đề đúng?

- (A) $u_5 = -\frac{27}{16}$. (B) $u_5 = -\frac{16}{27}$. (C) $u_5 = \frac{16}{27}$. (D) $u_5 = \frac{27}{16}$.

Lời giải.

$$\text{Số hạng tổng quát của cấp số nhân là } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Vậy } u_5 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} = \frac{16}{27}.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 14. Dãy số có số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2^n$ là một cấp số nhân có công bội q bằng

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\frac{1}{9}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_n = \frac{1}{\sqrt{3}}^{2n} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]^n = \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}.$$

Suy ra công bội của cấp số nhân $q = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 15. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1, u_2 = -2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $u_{2024} = -2^{2023}$.

(B) $u_{2024} = 2^{2023}$.

(C) $u_{2024} = -2^{2024}$.

(D) $u_{2024} = 2^{2024}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-2)^{n-1}$.

Vậy $u_{2024} = (-2)^{2024-1} = (-2)^{2023} = -2^{2023}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 16. Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên u_1 và công bội q của cấp số nhân là

(A) $u_1 = 9$ và $q = 2$.

(B) $u_1 = 9$ và $q = -2$.

(C) $u_1 = -9$ và $q = 2$.

(D) $u_1 = -9$ và $q = -2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 54 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q(q^2 - 1) = 54 & (1) \\ u_1 q^2(q^2 - 1) = 108 & (2) \end{cases}$$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{u_1 q^2(q^2 - 1)}{u_1 q(q^2 - 1)} = \frac{108}{54} \Leftrightarrow q = 2$.

$$\text{Suy ra } u_1 = \frac{54}{q^3 - q} = \frac{54}{2^3 - 2} = 9.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases}$. Giá trị u_1 và q là

(A) $u_1 = 2; q = 5$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$.

(B) $u_1 = 5; q = 1$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$.

(C) $u_1 = 25; q = 5$ hoặc $u_1 = 1; q = \frac{1}{5}$.

(D) $u_1 = 1; q = 5$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$.

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 5 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 5 & (1) \\ u_1(1 + q^2) = 26 & (2) \end{cases}$$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{q^2 + 1}{q} = \frac{26}{5} \Leftrightarrow 5q^2 - 26q + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 5 \\ q = \frac{1}{5} \end{cases}$.

Với $q = 5$. Suy ra $u_1 = \frac{5}{q} = \frac{5}{5} = 1$.

Với $q = \frac{1}{5}$. Suy ra $u_1 = \frac{5}{q} = 5 : \frac{1}{5} = 25$.

Vậy $u_1 = 1$ với $q = 5$ hoặc $u_1 = 25$ với $q = \frac{1}{5}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 18. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + u_2 = 36 \\ u_6 - u_4 = 48 \end{cases}$ (với $q > 0$) là

(A) $u_1 = 4, q = 4$.

(B) $u_1 = 2, q = 4$.

(C) $u_1 = 2, q = 2$.

(D) $u_1 = 4, q = 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_5 + u_2 = 36 \\ u_6 - u_4 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^4 + u_1 q = 36 \\ u_1 q^5 - u_1 q^3 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q(q^3 + 1) = 36 & (1) \\ u_1 q(q^4 - q^2) = 48 & (2) \end{cases}$$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được

$$\frac{u_1 q(q^4 - q^2)}{u_1 q(q^3 + 1)} = \frac{48}{36} \Leftrightarrow \frac{q^4 - q^2}{q^3 + 1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3q^4 - 4q^3 - 3q^2 - 4 = 0 \begin{cases} q = 2 \\ q = -1. \end{cases}$$

Từ điều kiện $q > 0$ suy ra công bội của cấp số nhân là $q = 2$, do đó $u_1 = \frac{36}{q^4 + q} = 2$.

Vậy $u_1 = 2$ và $q = 2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 19. Cho cấp số nhân $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_5 = 16$. Công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

(A) $q = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{2}$.

(B) $q = \frac{-1}{2}; u_1 = \frac{-1}{2}$.

(C) $q = 4; u_1 = \frac{1}{16}$.

(D) $q = -4; u_1 = \frac{-1}{16}$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 q = \frac{1}{4}$ (1) và $u_5 = u_1 q^4 = 16$ (2).

Lấy (2) chia cho (1) vế theo vế ta được $\frac{u_1 q^4}{u_1 q} = \frac{16}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow q^3 = 64 \Leftrightarrow q = 4$.

Suy ra $u_1 = \frac{1}{4} : q = \frac{1}{4} : 4 = \frac{1}{16}$.

Vậy $u_1 = \frac{1}{16}, q = 4$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 20. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\,288 \text{ m}^2$). Diện tích mặt trên cùng (của tầng thứ 11) có giá trị nào sau đây?

(A) 6 m^2 .

(B) 8 m^2 .

(C) 10 m^2 .

(D) 12 m^2 .

Lời giải.

Vì diện tích của mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp.

Do đó diện tích của mỗi tầng tạo nên dãy số và dãy số đó là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân đó là $u_n = 12\,288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Vì từ đế tháp đến tầng thứ 11 của tháp sẽ có 12 mặt nền, do đó diện tích của mặt của tầng thứ 11 là $u_{12} = 12\,288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = 6 \text{ m}^2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Dạng 3. Tìm số hạng thứ k của CSN

Ta chuyển các số hạng của CSN về số hạng đầu u_1 và công bội q . Sử dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Chia hai phương trình vế theo vế ta thu được phương trình theo q .
Giải tìm q và u_1 . Từ đó tìm được số hạng cần tìm thỏa ycbt.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 10 (KNTT). Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 5$, công bội $q = -2$. Viết năm số hạng đầu của cấp số nhân này.

Lời giải.

Năm số hạng đầu của cấp số nhân là

$$u_1 = 5;$$

$$u_2 = u_1 \cdot q = 5 \cdot (-2) = -10;$$

$$u_3 = u_2 \cdot q = (-10) \cdot (-2) = 20;$$

$$u_4 = u_3 \cdot q = 20 \cdot (-2) = -40;$$

$$u_5 = u_4 \cdot q = (-40) \cdot (-2) = 80.$$

□

Ví dụ 11 (Cánh Diều). Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 4$, công bội $q = -\frac{1}{2}$. Tính u_7 .

Lời giải.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân, ta có

$$u_7 = u_1 \cdot q^{7-1} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{16}.$$

□

Ví dụ 12 (KNTT). Tìm 5 số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số nhân: $8, -4, \dots$

Lời giải.

Cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 8$ và công bội $q = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$.

Năm số hạng đầu của cấp số nhân là: $u_1 = 8; u_2 = -4; u_3 = 2; u_4 = -1; u_5 = \frac{1}{2}$.

Số hạng thứ 100 của cấp số nhân là $u_{100} = u_1 \cdot q^{99} = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{99} = -\frac{1}{296}$.

□

Ví dụ 13 (NB). Cho u_n là CSN thỏa $u_1 = 2; u_4 = 16$. Tìm số hạng thứ 5 của CSN.

Lời giải.

Do u_n là CSN nên ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{u_4}{u_1} = 8 \Rightarrow q = 2$.

Vậy $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 2^4 = 32$.

□

Ví dụ 14 (TH). Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp Số nhân.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3(1 + q^2) = -540 \\ u_1 q^2(1 + q^2) = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -3. \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -3 \end{cases}$ là số hạng cần tìm.

□

Ví dụ 15 (KNTT). Cho một cấp số nhân gồm các số hạng dương. Biết số hạng thứ 10 bằng 1536 và số hạng thứ 12 bằng 6144. Tìm số hạng thứ 20 của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} u_{10} = 1536 \\ u_{12} = 6144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 a^9 = 1536 \\ u_1 q^{11} = 6144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ u_1 q^9 = 1536 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2; u_1 = 3 \\ q = -2; u_1 = -3. \end{cases}$$

Số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 q^{19} = 2 \cdot 3^{19}$.

□

Ví dụ 16 (CTST). Cho cấp số nhân có 8 số hạng, số hạng đầu là 4374, số hạng cuối là 2. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Ta có $u_1 = 4374$ và $u_8 = 2$. Gọi q là công bội của cấp số nhân này, ta có:

$$u_8 = u_1 \cdot q^7, \text{ suy ra } q^7 = \frac{u_8}{u_1} = \frac{2}{4374} = \frac{1}{2187} = \left(\frac{1}{3}\right)^7, \text{ do đó } q = \frac{1}{3}.$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 16 (NB). Cho u_n là CSN thỏa $u_1 = 2$; $u_4 = 16$. Tìm số hạng thứ 5 của CSN.

Lời giải.

Do u_n là CSN nên ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{u_4}{u_1} = 8 \Rightarrow q = 2$.

Vậy $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 2^4 = 32$. □

Bài 17 (TH). Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp Số nhân.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3(1 + q^2) = -540 \\ u_1 q^2(1 + q^2) = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -3 \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -3 \end{cases}$ là số hạng cần tìm. □

Bài 18 (TH). Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \frac{2}{3}$. Số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

Lời giải.

Giả sử số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ n của cấp số nhân.

Ta có: $u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{-96}{243} \Leftrightarrow (-3) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{-96}{243} \Leftrightarrow n = 6$.

Vậy số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ 6 của cấp số nhân. □

Bài 19 (TH). Cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân đó là

Lời giải.

Ta có $u_1 = \frac{3}{5} \cdot 2^{1-1} = \frac{3}{5}$ và $u_2 = \frac{3}{5} \cdot 2^{2-1} = \frac{6}{5} \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = 2$.

Vậy $u_1 = \frac{3}{5}$ và $q = 2$. □

Bài 20 (VD). Người ta thiết kế một cái tháp gồm 10 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích bề mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt của tầng 1 bằng nửa diện tích bề mặt đế tháp. Biết diện tích bề mặt đế tháp là 12288 m^2 , tính diện tích bề mặt trên cùng của tháp.

Lời giải.

Gọi S là diện tích mặt đế và $T_1, T_2, \dots, T_{10}$ là diện tích bề mặt của tầng 1, tầng 2, $\dots$, tầng 10.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \cdot S; \\ T_2 &= \frac{1}{2} \cdot T_1 = \frac{1}{2^2} \cdot S; \\ T_3 &= \frac{1}{2} \cdot T_2 = \frac{1}{2^3} \cdot S; \\ &\vdots \\ T_{10} &= \frac{1}{2} \cdot T_9 = \frac{1}{2^{10}} \cdot S. \end{aligned}$$

Vậy diện tích bề mặt trên cùng của tháp là $T_{10} = \frac{1}{2^{10}} \cdot 12288 = 12 \text{ m}^2$. □

Bài 21 (TH). Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50. \end{cases}$

a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) .

b) Tìm số hạng thứ 8 của cấp số nhân (u_n) .

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^3 - q) = 25 \\ u_1(q^2 - q) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = -200. \end{cases}$$

$$\text{b) Ta có } u_8 = u_1 \cdot q^7 = -200 \cdot \frac{1}{2^7} = -\frac{25}{16}.$$

Bài 22 (TH). Tìm số hạng thứ 10 của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ q(u_4 - u_2) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1(q^3 - q) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 12. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 6144.$$

Bài 23 (TH). Cho một cấp số nhân có 5 số hạng biết 2 số hạng đầu là số dương, tích số hạng đầu và số hạng thứ 3 là 1, tích số hạng thứ 3 và số hạng cuối là $\frac{1}{16}$. Tìm cấp số nhân này.

Lời giải.

Gọi 5 số hạng cần tìm có dạng $\frac{x}{q^2}; \frac{x}{q}; x; xq; xq^2$.

$$\text{Theo đề ra ta có } \begin{cases} \frac{x}{q^2} \cdot x = 1 \\ x \cdot xq^2 = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (do hai số hạng đầu dương nên } q > 0).$$

$$\text{Vậy 5 số hạng cần tìm là } 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}.$$

Bài 24 (TH). Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20. \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q + q^4 - q^3) = 10 \\ u_1(q^2 + q^5 - q^4) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 1. \end{cases}$$

Bài 25 (TH). Tìm 5 số lập thành một cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{4}$ số thứ nhất và tổng 2 số đầu là $\frac{5}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Theo đề, ta có } \begin{cases} q = \frac{1}{4}u_1 \\ u_1 + u_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{4}u_1 \\ u_1 + u_1 \cdot q = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{4}u_1 \\ u_1^2 + 4u_1 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{4} \\ u_1 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} q = -\frac{5}{4} \\ u_1 = -5. \end{cases}$$

$$\text{Vậy có hai CSN là } 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \frac{1}{128} \text{ và } -5; -\frac{5}{4}; -\frac{5}{16}; -\frac{5}{64}; -\frac{5}{128}.$$

Bài 26 (TH). Tìm 3 số lập thành một cấp số nhân có tổng là 63 và tích là 1728.

Lời giải.

Gọi ba số cần tìm là $\frac{x}{q}; x; xq$. Theo đề ra, ta có $x^3 = 1728 \Rightarrow x = 12$.

$$\text{Mặt khác } \frac{x}{q} + x + xq = 63 \Leftrightarrow 12q + 12 + \frac{12}{q} = 63 \Leftrightarrow 12q^2 - 51q + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 4 \\ q = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy CSN cần tìm là } 3; 12; 48.$$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_{20} = 8u_{17}$. Công bội của cấp số nhân là

(A) $q = 2$.

(B) $q = -2$.

(C) $q = 4$.

(D) $q = -4$.

Lời giải.

Ta có $u_{20} = 8u_{17} \Rightarrow u_1 \cdot q^{19} = 8 \cdot u_1 \cdot q^{16} \Rightarrow q = 2$.

Chọn đáp án (A)

Câu 22. Cho cấp số nhân (u_n) có 10 số hạng với công bội $q \neq 0$ và $u_1 \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- (A) $u_7 = u_4 \cdot q^6$. (B) $u_7 = u_4 \cdot q^3$. (C) $u_7 = u_4 \cdot q^4$. (D) $u_7 = u_4 \cdot q^5$.

Lời giải.

Ta có $u_7 = u_1 \cdot q^6 = (u_1 \cdot q^3) \cdot q^3 = u_4 \cdot q^3$.

Chọn đáp án (B)

Câu 23. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị u_{2019} bằng

- (A) $3 \cdot 2^{2019}$. (B) $2 \cdot 3^{2019}$. (C) $3 \cdot 2^{2018}$. (D) $2 \cdot 3^{2018}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức của số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{2018}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 24. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4$, $u_4 = 9$. Tìm u_1 .

- (A) $u_1 = 6$. (B) $u_1 = -\frac{8}{3}$. (C) $u_1 = -6$. (D) $u_1 = \frac{8}{3}$.

Lời giải.

Vì $q < 0$, $u_2 > 0$ nên $u_3 < 0$. Do đó $u_3 = -\sqrt{u_2 \cdot u_4} = -\sqrt{4 \cdot 9} = -6$.

Ta có $u_2^2 = u_1 \cdot u_3 \Rightarrow u_1 = \frac{u_2^2}{u_3} = \frac{4^2}{-6} = -\frac{8}{3}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 25. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$, $u_3 = 3$. Công bội q của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 2. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -2.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân đã cho là

$$q = \frac{u_3}{u_2} = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 26. Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \frac{2}{3}$. Tính u_5 ?

- (A) $u_5 = \frac{27}{16}$. (B) $u_5 = \frac{-16}{27}$. (C) $u_5 = \frac{-27}{16}$. (D) $u_5 = \frac{16}{27}$.

Lời giải.

Ta có: $u_5 = u_1 \cdot q^4 = (-3) \left(\frac{2}{3}\right)^4 = -\frac{16}{27}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 27. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_5 = -16$. Tìm q và số hạng đầu tiên của cấp số nhân?

- (A) $q = \frac{1}{2}$; $u_1 = \frac{1}{2}$. (B) $q = -\frac{1}{2}$; $u_1 = -\frac{1}{2}$. (C) $q = -4$; $u_1 = \frac{1}{16}$. (D) $q = -4$; $u_1 = -\frac{1}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 = \frac{1}{4} \\ u_5 = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q = \frac{1}{4} \\ u_1 \cdot q^4 = -16 \end{cases} \Rightarrow q^3 = -64 \Rightarrow q = -4 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{16}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) , biết: $u_n = 81$, $u_{n+1} = 9$. Lựa chọn đáp án đúng.

- (A) $q = -\frac{1}{9}$. (B) $q = \frac{1}{9}$. (C) $q = 9$. (D) $q = -9$.

Lời giải.

Ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 29. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Số hạng u_2 bằng

- (A) 8. (B) 6. (C) 12. (D) 18.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 \cdot q = 2 \cdot 3 = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_3 = 8$. Số hạng thứ hai của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) $u_2 = 4$. (B) $u_2 = 6$. (C) $u_2 = \pm 4$. (D) $u_2 = -4$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_1 \cdot u_3 = u_2^2 \Leftrightarrow u_2^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 4 \\ u_2 = -4. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$; $q = \frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

- (A) số hạng thứ 103. (B) số hạng thứ 105. (C) số hạng thứ 104. (D) Đáp án khác.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{10^{103}} = -1 \cdot \left(\frac{-1}{10}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{10}\right)^{n-1} = \left(\frac{-1}{10}\right)^{103} \Rightarrow n = 104.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng lần lượt là 3, 9, 27, 81, ... Khi đó u_n bằng

- (A) $3 + 3^n$. (B) 3^{n-1} . (C) 3^{n+1} . (D) 3^n .

Lời giải.

Cấp số nhân đã cho có $u_1 = 3$ và công bội $q = 3$ nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

- (A) $u_{13} = 12288$. (B) $u_{13} = 3072$. (C) $u_{13} = 24567$. (D) $u_{13} = 49152$.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) .

$$\text{Ta có } 15u_1 - 4u_2 + u_3 = 45 - 12q + 3q^2 = 3(q-2)^2 + 33 \geq 33 \quad \forall q \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $q = 2$.

$$\text{Khi đó } u_{13} = u_1 q^{12} = 12288.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 + u_5 = 51$ và $u_2 + u_6 = 102$. Hỏi số 12288 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân (u_n) ?

- (A) Số hạng thứ 13. (B) Số hạng thứ 10. (C) Số hạng thứ 11. (D) Số hạng thứ 12.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 \end{cases} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3 \Rightarrow u_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

$$\text{Mặt khác } u_n = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 13.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Một tứ giác lồi có số đo các góc lập thành một cấp số nhân. Biết rằng số đo của góc nhỏ nhất bằng $\frac{1}{9}$ số đo của góc nhỏ thứ ba. Hãy tính số đo của các góc trong tứ giác đó.

- (A) $5^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 225^\circ$. (B) $9^\circ, 27^\circ, 81^\circ, 243^\circ$. (C) $7^\circ, 21^\circ, 63^\circ, 269^\circ$. (D) $8^\circ, 32^\circ, 72^\circ, 248^\circ$.

Lời giải.

Gọi các góc của tứ giác là a, aq, aq^2, aq^3 , trong đó $q > 1$.

Theo giả thiết, ta có $a = \frac{1}{9}aq^2$ nên $q = 3$.

Suy ra các góc của tứ giác là $a, 3a, 9a, 27a$.

Vì tổng các góc trong tứ giác bằng 360° nên ta có $a + 3a + 9a + 27a = 360^\circ \Leftrightarrow a = 9^\circ$.

Vậy số đo các góc trong tứ giác lần lượt là $9^\circ, 27^\circ, 81^\circ, 243^\circ$.

Chọn đáp án (B)

Dạng 4. Tìm điều kiện để một dãy số lập thành CSNDãy số a, b, c lập thành CSN khi $b^2 = a \cdot c$.Dãy số a, b, c, d lập thành CSN khi $\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ c^2 = b \cdot d. \end{cases}$ **1. Ví dụ mẫu****Ví dụ 17 (NB).** Cho dãy $3, x, 12, y$. Tìm x, y để dãy là CSN.**Lời giải.**Dãy là CSN khi $\begin{cases} x^2 = 3 \cdot 12 \\ 12^2 = x \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 24 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -6 \\ y = -24. \end{cases}$ **Ví dụ 18 (TH).** Cho dãy $x - 1, 2x, 4x + 3$. Tìm x để dãy là CSN.**Lời giải.**Dãy là CSN khi $(2x)^2 = (x - 1)(4x + 3) \Leftrightarrow x = -3$.**Ví dụ 19 (VD).** Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x + \frac{5}{3}, y - 1, 2x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y .**Lời giải.**☑ Ba số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ lập thành cấp số cộng nên $(x + 6y) + (8x + y) = 2(5x + 2y) \Leftrightarrow x = 3y$.☑ Ba số $x + \frac{5}{3}, y - 1, 2x - 3y$ lập thành cấp số nhân nên $\left(x + \frac{5}{3}\right)(2x - 3y) = (y - 1)^2$.Thay $x = 3y$ vào ta được $8y^2 + 7y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = \frac{1}{8}$.Với $y = -1$ thì $x = -3$; với $y = \frac{1}{8}$ thì $x = \frac{3}{8}$.**Ví dụ 20 (VD).** Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x - 1, y + 2, x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.**Lời giải.**

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} (x + 6y) + (8x + y) = 2(5x + 2y) \\ (x - 1)(x - 3y) = (y + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ (3y - 1)(3y - 3y) = (y + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 0 = (y + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2. \end{cases}$$

Vậy $x^2 + y^2 = 40$.**2. Bài tập rèn luyện****Bài 27 (TH).** Xác định x dương để $2x - 3; x; 2x + 3$ lập thành cấp số nhân.**Lời giải.**Ba số $2x - 3; x; 2x + 3$ lập thành cấp số nhân khi $x^2 = (2x - 3)(2x + 3) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.Do $x > 0$ nên chọn $x = \sqrt{3}$.**Bài 28 (TH).** Cho cấp số nhân $x, 12, y, 192$. Tìm x và y .**Lời giải.**Bốn số $x, 12, y, 192$ lập thành CSN khi $\begin{cases} xy = 12^2 \\ y^2 = 12 \cdot 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 48 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ y = -48. \end{cases}$ **Bài 29 (TH).** Tìm x để dãy số $1, x^2, 6 - x^2$ lập thành cấp số nhân.**Lời giải.**Ta có $1, x^2, 6 - x^2$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x^4 = 6 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Bài 30 (TH). Viết 6 số xen giữa hai số -2 và 256 để được một cấp số nhân có 8 số hạng. Tìm cấp số nhân này.

Lời giải.

$$\text{Theo đề ra, ta có } \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_8 = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_1 \cdot q^7 = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -2. \end{cases}$$

Cấp số nhân cần tìm là $-2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; 256$. □

Bài 31 (VD). Bốn góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số nhân, góc lớn nhất gấp 8 lần góc nhỏ nhất. Tìm 4 góc đó.

Lời giải.

Giả sử 4 góc của tứ giác là $A \leq B \leq C \leq D$. Suy ra $A + B + C + D = 360^\circ$.

Theo đề, ta có $D = 8A \Leftrightarrow Aq^3 = 8A \Leftrightarrow q = 2$. Khi đó, ta được

$$A(1 + q + q^2 + q^3) = 360^\circ \Rightarrow A = 24^\circ.$$

Vậy 4 góc của tứ giác lần lượt là $24^\circ; 48^\circ; 96^\circ; 192^\circ$. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 36. Ba số 1, 3, x theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm x .

- (A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 9.

Lời giải.

Ba số 1, 3, x theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên suy ra $3^2 = 1 \cdot x \Leftrightarrow x = 9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Ba số 1, 2, $-a$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

- (A) 4. (B) -4 . (C) -2 . (D) 2.

Lời giải.

Ba số 1, 2, $-a$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì suy ra $-a = 4 \Rightarrow a = -4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Xác định x để 3 số $2x - 1$; x ; $2x + 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

- (A) $x = \pm\sqrt{3}$. (B) $x = \pm\frac{1}{3}$.
(C) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. (D) Không có giá trị nào của x .

Lời giải.

Ba số $2x - 1$; x ; $2x + 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Xác định x để 3 số $x - 2$; $x + 1$; $3 - x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân

- (A) $x = \pm 1$. (B) Không có giá trị nào của x .
(C) $x = -3$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Ba số $x - 2$; $x + 1$; $3 - x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân

$$\Leftrightarrow (x - 2)(3 - x) = (x + 1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 7 = 0 \text{ (Phương trình vô nghiệm).}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Ba số thực $x + 2$; $x + 14$; $x + 50$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Giá trị của biểu thức $x^2 + 2003$ bằng

- (A) 2017. (B) 2018. (C) 2019. (D) 2020.

Lời giải.

Ba số thực $x + 2$; $x + 14$; $x + 50$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên suy ra

$$(x + 14)^2 = (x + 2)(x + 50) \Leftrightarrow 24x = 96 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy $x^2 + 2003 = 2019$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Bốn số thực $2; x; 8; y$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Giá trị của biểu thức $x^2 + y^2$ bằng

(A) 260.

(B) 272.

(C) 257.

(D) 400.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân trên. Ta có $8 = 2q^2 \Leftrightarrow q = 2$ hoặc $q = -2$.

☑ Với $q = 2$, ta có $\begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 272.$

☑ Với $q = -2$, ta có $\begin{cases} x = -4 \\ y = -16 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 272.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn A, B, C theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Tính số đo góc A .

(A) $\frac{\pi}{2}$.(B) $\frac{\pi}{7}$.(C) $\frac{2\pi}{7}$.(D) $\frac{4\pi}{7}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có A, B, C lập thành cấp số nhân với $q = 2$ nên $B = 2A; C = 4A$.

Mà ABC là một tam giác nên $A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + 2A + 4A = \pi \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{7}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng

(A) 56° .(B) 102° .(C) 168° .(D) 252° .

Lời giải.

Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A < B < C < D$) theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thỏa yêu cầu với công bội q . Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} A + B + C + D = 360 \\ D = 27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(1 + q + q^2 + q^3) = 360 \\ Aq^3 = 27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 3 \\ A = 9. \end{cases}$$

Suy ra $D = A \cdot q^3 = 9 \cdot 3^3 = 243$.

Vậy tổng số đo góc lớn nhất và góc bé nhất là $A + D = 252^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. Cho 4 số nguyên dương, trong đó 3 số đầu lập thành cấp số cộng, 3 số cuối lập thành cấp số nhân. Biết tổng số đầu và cuối là 37, tổng 2 số hạng giữa là 36. Hỏi số lớn nhất thuộc khoảng nào sau đây?

(A) (26; 29).

(B) (24; 26).

(C) (30; 33).

(D) (22; 25).

Lời giải.

Giả sử 4 số đó là a, b, c, d ($a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$).

Do a, b, c lập thành cấp số cộng nên ta có $a + c = 2b$ (1).

Do b, c, d lập thành cấp số nhân nên ta có $b \cdot d = c^2$ (*).

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} a + d = 37 & (2) \\ b + c = 36. & (3) \end{cases}$

Từ (1), (2), (3) ta có $\begin{cases} a = -d + 37 \\ b = \frac{-d + 73}{3} \\ c = \frac{d + 35}{3}. \end{cases}$

Thay vào (*) ta có $\frac{-d + 73}{3} \cdot d = \left(\frac{d + 35}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 4d^2 - 149d + 1225 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 25 \\ d = \frac{49}{4} \end{cases} \text{ (loại)}.$

Với $d = 25$, ta có $a = 12, b = 16, c = 20$.

Vậy số lớn nhất là $25 \in (24; 26)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45. Cho bốn số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội $q > 1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q , biết rằng $a + d = 14$ và $b + c = 12$.

(A) $q = \frac{20 + \sqrt{73}}{24}$.

(B) $q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24}$.

(C) $q = \frac{21 + \sqrt{73}}{24}$.

(D) $q = \frac{18 + \sqrt{73}}{24}$.

Lời giải.

Giả sử a, b, c lập thành cấp số cộng công bội q . Khi đó theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} b = aq, & c = aq^2 \\ b + d = 2c \\ a + d = 14 \\ b + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq + d = 2aq^2 & (1) \\ a + d = 14 & (2) \\ a(q + q^2) = 12. & (3) \end{cases}$$

☑ Nếu $q = 0 \Rightarrow b = c = d = 0$. (Vô lí!)

☑ Nếu $q = -1 \Rightarrow b = -a; c = a \Rightarrow b + c = 0$. (Vô lí!)

Vậy $q \neq 0, q \neq -1$, từ (2) và (3) ta có $d = 14 - a$ và $a = \frac{12}{q + q^2}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} \frac{12q}{q + q^2} + \frac{14q^2 + 14q - 12}{q + q^2} &= \frac{24q^3}{q + q^2} \Leftrightarrow 12q^3 - 7q^2 - 13q + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (q + 1)(12q^2 - 19q + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q = -1 & (\text{loại}) \\ q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24} \\ q = \frac{19 - \sqrt{73}}{24} \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $q > 1$ nên $q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là $d, (d \neq 0)$. Tính $\frac{a}{d}$.

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) 9.

(C) $\frac{4}{9}$.

(D) 3.

Lời giải.

Do a, b, c theo thứ tự lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là $d, (d \neq 0)$ nên

$$\begin{cases} b = a + 3d \\ c = a + 7d \end{cases}$$

Hơn nữa a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1 nên $ac = b^2$.

Khi đó

$$\begin{aligned} a(a + 7d) &= (a + 3d)^2 \Leftrightarrow a^2 + 7ad = a^2 + 6ad + 9d^2 \\ &\Leftrightarrow 9d^2 - ad = 0 \Leftrightarrow 9d = a \Leftrightarrow \frac{a}{d} = 9. \end{aligned}$$

Vậy $\frac{a}{d} = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q . Tìm q .

(A) $q = -2$.

(B) $q = -\frac{3}{2}$.

(C) $q = \frac{3}{2}$.

(D) $q = 2$.

Lời giải.

Giả sử ba số hạng $a; b; c$ lập thành cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu, khi đó $b; a; c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội $q \neq 1$. Ta có

$$\begin{cases} a + c = 2b \\ a = bq; c = bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq + bq^2 = 2b \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ q^2 + q - 2 = 0. \end{cases}$$

- ☑ Nếu $b = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ nên $a; b; c$ là cấp số cộng công sai $d = 0$. (Vô lí!)
- ☑ Nếu $q^2 + q - 2 = 0$ thì $q = 1$ hoặc $q = -2$. Dễ thấy trường hợp $q = 1$ là không thỏa mãn, vì khi đó $a = b = c$. Do đó $q = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số 2, 3, 9 vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.

- (A) $F = 389$ hoặc $F = 395$. (B) $F = 395$ hoặc $F = 179$.
(C) $F = 441$ hoặc $F = 357$. (D) $F = 389$ hoặc $F = 179$.

☞ **Lời giải.**

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x + z = 2y$.

Kết hợp với giả thiết $x + y + z = 21$, ta suy ra $3y = 21 \Leftrightarrow y = 7$.

Gọi d là công sai của cấp số cộng thì $x = y - d = 7 - d$ và $z = y + d = 7 + d$.

Sau khi thêm các số 2, 3, 9 vào ba số x, y, z ta được ba số là $x + 2, y + 3, z + 9$ hay $9 - d, 10, 16 + d$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $(9 - d)(16 + d) = 10^2 \Leftrightarrow d^2 + 7d - 44 = 0$.

Giải phương trình ta được $d = -11$ hoặc $d = 4$.

Với $d = -11$, cấp số cộng 18, 7, -4. Lúc này $F = 389$.

Với $d = 4$, cấp số cộng 3, 7, 11. Lúc này $F = 179$.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 5. Tính tổng của cấp số nhân

Phương pháp

- ☑ Xác định số hạng đầu u_1 , công bội q .
- ☑ Áp dụng công thức tính tổng các số hạng của cấp số nhân.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 21 (CTST). Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

☞ **Lời giải.**

Áp dụng công thức $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$, ta có $S_{10} = \frac{1 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = 2^{10} - 1 = 1023$. □

Ví dụ 22 (TH). Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 3$ và $u_2 = 6$.

☞ **Lời giải.**

Ta có: $u_2 = u_1 \cdot q \Leftrightarrow 6 = 3 \cdot q \Leftrightarrow q = 2$

$$S_8 = u_1 \frac{1 - q^8}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 765. \quad \square$$

Ví dụ 23 (Cánh Diều). Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^9}$.

☞ **Lời giải.**

Vì S là tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên

$$S = \frac{1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}. \quad \square$$

Ví dụ 24 (Cánh Diều). Tính tổng n số hạng đầu của mỗi cấp số nhân sau:

a) $3; -6; 12; -24; \dots$ với $n = 12$.

b) $\frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; \dots$ với $n = 5$.

Lời giải.

a) Cấp số nhân đã cho có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-6}{3} = -2$.

Do đó tổng 12 số hạng đầu của dãy là

$$S_{12} = \frac{u_1 \cdot (1 - q^{12})}{1 - q} = \frac{3 \cdot [1 - (-2)^{12}]}{1 - (-2)} = -4095.$$

b) Cấp số nhân đã cho có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{10}$ và công bội $q = \frac{1}{10} = \frac{-6}{3} = -2$.

Do đó tổng 5 số hạng đầu của dãy là

$$S_5 = \frac{u_1 \cdot (1 - q^5)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{10}} = 1,1111.$$

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 32 (NB). Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$.

Lời giải.

Ta có: $S_{10} = \frac{u_1 (1 - q^{10})}{1 - q} = 1023$.

□

Bài 33 (TH). Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 3$ và $u_2 = 6$.

Lời giải.

Ta có: $u_2 = u_1 \cdot q \Leftrightarrow 6 = 3 \cdot q \Leftrightarrow q = 2$

$$S_8 = u_1 \frac{1 - q^8}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 765.$$

□

Bài 34 (TH). Tính tổng vô hạn $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

Lời giải.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, với $u_1 = 1, q = \frac{1}{2}$. Khi đó

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

□

Bài 35 (VD). Tính tổng 200 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$.

Lời giải.

Để thấy dãy đã cho là một cấp số nhân với công bội $q = 3; u_1 = 1$.

Từ đó $S_{200} = u_1 \frac{q^{200} - 1}{q - 1} = \frac{3^{200} - 1}{2}$.

□

Bài 36 (VD). Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 765$, tìm n .

Lời giải.

Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân ta có $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{3 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} = 765 \Leftrightarrow n = 8$.

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 49. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ với công bội q ($q \neq 0, q \neq 1$). Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$. (B) $S_n = \frac{u_1(q^n + 1)}{q + 1}$. (C) $S_n = \frac{u_1(q^{n-1} - 1)}{q + 1}$. (D) $S_n = \frac{u_1(q^{n-1} - 1)}{q - 1}$.

Lời giải.

Ta có $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 12$ và công sai $q = \frac{3}{2}$. Tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân bằng

- (A) $\frac{93}{4}$. (B) $\frac{633}{2}$. (C) $\frac{633}{4}$. (D) $\frac{93}{2}$.

Lời giải.

Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho. Khi đó ta có

$$S_5 = u_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 12 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^5}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{633}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 51. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) .

- (A) -1023 . (B) 1023 . (C) 513 . (D) -513 .

Lời giải.

Tổng của 10 số hạng đầu bằng

$$S_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = -1023.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

- (A) $S_{1000} = \frac{3^{1000} - 1}{2}$. (B) $S_{1000} = \frac{1 - 3^{1000}}{6}$. (C) $S_{1000} = \frac{3^{1000} - 1}{6}$. (D) $S_{1000} = \frac{1 - 3^{1000}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $u_5 = u_2 \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{54}{-2} = -27 = (-3)^3 \Rightarrow q = -3$ và $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $S_{1000} = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - (-3)^{1000}}{1 + 3} = \frac{1 - 3^{1000}}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

- (A) 19674. (B) 59040. (C) 177138. (D) 6552.

Lời giải.

$u_1 = 18, u_2 = 54 \Rightarrow q = 3$.

$u_n = 39366 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 18 \cdot 3^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^7 \Leftrightarrow n = 8$.

Vậy $S_8 = 18 \cdot \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = 59040$.

Chọn đáp án (B) □

- Câu 54.** Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.
- (A) $S = \frac{1023}{2048}$. (B) $S = \frac{5}{2}$. (C) $S = \frac{1023}{512}$. (D) $S = 2$.

Lời giải.

Ta có các số hạng của dãy số (u_n) là $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^n}$. Khi đó (u_n) lập thành một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Suy ra } S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^9} = \frac{1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}.$$

Chọn đáp án (C) □

- Câu 55.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n .

- (A) $n = 9$. (B) $n = 12$. (C) $n = 11$. (D) $n = 10$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2046 = S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = -6 \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = 2((-2)^n - 1) \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10.$$

Chọn đáp án (D) □

- Câu 56.** Tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$ là

- (A) 199. (B) $2^{100} - 1$. (C) 10000. (D) 9999.

Lời giải.

Ta có (u_n) là cấp số cộng công sai $d = 2$ và $u_1 = 1$.

$$\text{Do đó } S_n = n \cdot u_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 100 \cdot 1 + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 2 = 10000.$$

Chọn đáp án (C) □

- Câu 57.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{2019} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2019}$.

- (A) $S_{2019} = 2019 + \frac{1}{2^{2019}}$. (B) $S_{2019} = \frac{4039}{2}$. (C) $S_{2019} = \frac{6057}{2}$. (D) $S_{2019} = 2020 - \frac{1}{2^{2019}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{2019} &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2019} \\ &= \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1\right] + \dots + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2019} + 1\right] \\ &= 2019 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2019} \\ &= 2019 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2019}}{1 - \frac{1}{2}} = 2019 + 1 - \frac{1}{2^{2019}} \\ &= 2020 - \frac{1}{2^{2019}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

- Câu 58.** Cho $S = 11 + 101 + 1001 + \dots + \underbrace{1000\dots01}_{(n-1) \text{ chữ số } 0}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$. (B) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9}\right) - n$.
(C) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9}\right) + n$. (D) $S = \left(\frac{10^n - 1}{9}\right) + n$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 S &= (10 + 1) + (10^2 + 1) + (10^3 + 1) + \cdots + (10^n + 1) \\
 &= (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ số } 1} \\
 &= 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + n.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 59. Gọi $S = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111 \dots 1}_{(n \text{ số } 1)}$ thì S nhận giá trị nào sau đây?

(A) $S = \frac{1}{9} \left[10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n \right].$

(B) $S = \frac{10^n - 1}{81}.$

(C) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right) - n.$

(D) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right).$

Lời giải.

Ta có $S = \frac{1}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ số } 9}) = \frac{1}{9} \cdot \left[10 \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} - n \right].$

Chọn đáp án (A)

Câu 60. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}$. Tổng $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$ là

(A) $2^{21} - 20.$

(B) $2^{21} - 22.$

(C) $2^{20}.$

(D) $2^{20} - 20.$

Lời giải.

Dự đoán công thức số hạng tổng quát $u_n = 2^n - 1$ (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp TH).

$$S = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{20} - 20 = 2 \cdot \frac{1 - 2^{20}}{1 - 2} - 20 = 2^{21} - 22.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 61. Biết rằng $S = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + 11 \cdot 3^{10} = a + \frac{21 \cdot 3^b}{4}$. Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

(A) $P = 3.$

(B) $P = 4.$

(C) $P = 1.$

(D) $P = 2.$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $3S = 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + 11 \cdot 3^{11}$.

Do đó

$$\begin{aligned}
 -2S &= S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{10} - 10 \cdot 3^{11} \\
 &= \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} - 11 \cdot 3^{11} = -\frac{1}{2} - \frac{21 \cdot 3^{11}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{21}{4} \cdot 3^{11}.
 \end{aligned}$$

Vì $S = \frac{1}{4} + \frac{21 \cdot 3^{11}}{4} = a + \frac{21 \cdot 3^b}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 11 \Rightarrow P = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} = 3.$

Chọn đáp án (A)

Dạng 6. Bài toán thực tế về cấp số nhân

Áp dụng các kiến thức về CSN vào giải bài thực tế.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 25 (Cánh Diều). Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1 %/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải.

a) Với u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm.

Ta có $u_1 = 2$ (triệu dân).

$$u_{n+1} = u_n + u_n \cdot 0,01 = 1,01u_n.$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 1,01$.

Vậy công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm là $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_n = 2 \cdot 1,01^{n-1}$.

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là $u_{10} = 2 \cdot 1,01^9 = 2,187$ (triệu dân).

□

Ví dụ 26 (Cánh Diều). Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải.

Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n . Ta có: $u_1 = 60$;

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,08 = u_{n-1} \cdot (1 + 0,08) = u_{n-1} \cdot 1,08.$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội $q = 1,08$. Áp dụng công thức tính tổng S_n , ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm là

$$S_{10} = \frac{60 \cdot (1 - 1,08^{10})}{1 - 1,08} \approx 869,194 \text{ (triệu người)}.$$

□

Ví dụ 27 (KNTT). Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Lời giải.

Gọi (u_n) là dãy số biểu diễn giá trị của chiếc máy ủi theo từng năm.

Dãy số này là một cấp số nhân có $u_1 = 3$, $q = 0,8$.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân này là $u_n = 3 \cdot 0,8^{n-1}$.

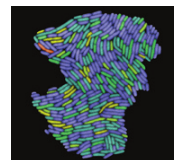
$$\text{Ta có } u_5 = 3 \cdot 0,8^4 = \frac{3}{325} = 4,8 \cdot 10^{-3}.$$

Tương ứng giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm là 480 triệu đồng.

□

Ví dụ 28 (CTST).

Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Lời giải.

Số lượng vi khuẩn sau mỗi phút lập thành một cấp số nhân với $u_1 = 1$; $q = 2$.

Suy ra tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút là $u_{20} = u_1 \cdot q^{19} = 1 \cdot 2^{19} = 524288$.

□

2. Bài tập tự luyện

Bài 37. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1 %/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải.

- a) Với u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm.
 Ta có $u_1 = 2$ (triệu dân).
 $u_{n+1} = u_n + u_n \cdot 0,01 = 1,01u_n$.
 Do đó, (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 1,01$.
 Vậy công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm là $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_n = 2 \cdot 1,01^{n-1}$.
- b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là $u_{10} = 2 \cdot 1,01^9 = 2,187$ (triệu dân).

□

Bài 38. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

- a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
 b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
 c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

🗨️ Lời giải.

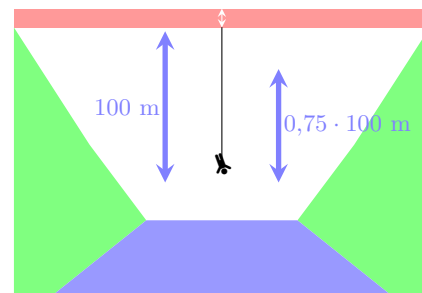
Gọi u_n là giá trị còn lại của ô tô sau n năm sử dụng.

- a) Giá trị của ô tô sau 1 năm sử dụng là $u_1 = 800 - 800 \cdot 0,04 = 800 \cdot 0,96 = 768$ triệu đồng.
 Giá trị của ô tô sau 2 năm sử dụng là $u_2 = u_1 - u_1 \cdot 0,04 = u_1 \cdot 0,96 = 737,28$ triệu đồng.
- b) Ta có $u_n = u_{n-1} - u_{n-1} \cdot 0,04 = u_{n-1} \cdot 0,96$.
 Do đó, (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 768$ và công bội $q = 0,96$.
 Vậy sau n năm sử dụng, giá trị còn lại của chiếc ô tô là $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_n = 768 \cdot 0,96^{n-1}$.
- c) Sau 10 năm, ước tính giá trị của ô tô còn lại là $u_{10} = 768 \cdot 0,96^9 \approx 531,87$ triệu đồng.

□

Bài 39.

Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



🗨️ Lời giải.

Gọi u_n là quãng đường người đó được kéo lên ở lần thứ n được kéo lên và lại rơi xuống (đơn vị tính: mét).
 Ta có $u_1 = 0,75 \cdot 100 = 100 \cdot 0,75 = 75$ m và $u_n = 0,75 \cdot u_{n-1}$.
 Vậy (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 75$ và công bội $q = 0,75$.
 Tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống là

$$\begin{aligned} S &= 100 + 2u_1 + 2u_2 + \cdots + 2u_{10} \\ &= 100 + 2S_{10} = 100 + 2 \cdot \frac{75(1 - 0,75^{10})}{1 - 0,75} \\ &\approx 666,2 \text{ m.} \end{aligned}$$

□

Bài 40 (TH). Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14%/năm.

(Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

- a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
 b) Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

Lời giải.

- a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là

$$\begin{aligned} u_1 &= 97,6 + 97,6 \cdot 0,0114 = 97,6 \cdot (1 + 0,0114) \\ &= 97,6 \cdot 1,0114 \approx 98,7 (\text{triệu người}). \end{aligned}$$

- b) Gọi u_n là dân số của Việt Nam sau n năm.
 Do tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,14% nên ta có

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,0114 = u_{n-1} \cdot (1 + 0,0114) \\ &= u_{n-1} \cdot 1,0114 \text{ với } n \geq 2. \end{aligned}$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 97,6 \cdot 1,0114$, công bội $q = 1,0114$.
 Vậy dân số của Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020 là

$$u_n = 97,6 \cdot 1,0114 \cdot 1,0114^{n-1} = 97,6 \cdot 1,0114^n \text{ (triệu người).}$$

□

Bài 41 (TH). Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6%/năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm).

Lời giải.

Gọi u_n là số tiền (cả gốc lẫn lãi) mà bác Linh có được sau n năm.
 Do lãi suất 1 năm là 6% nên ta có

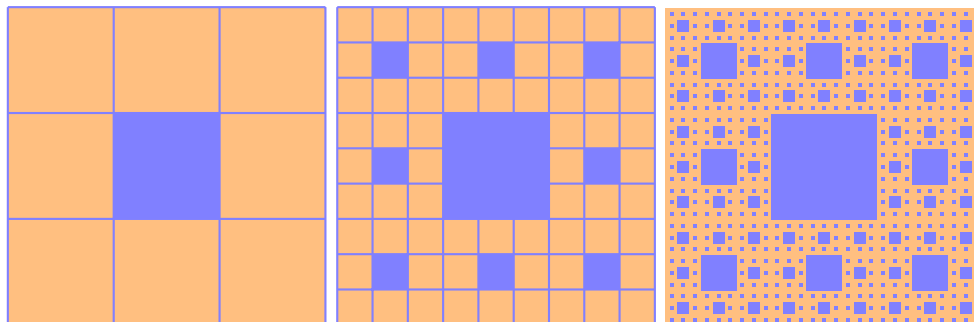
$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,06 = u_{n-1} \cdot (1 + 0,06) \\ &= u_{n-1} \cdot 1,06 \text{ với } n \geq 2. \end{aligned}$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 100$ (triệu đồng), công bội $q = 1,06$.
 Vậy số tiền mà bác Linh có được sau n năm là

$$u_n = 100 \cdot 1,06^{n-1} \text{ (triệu đồng).}$$

□

Bài 42 (VD). Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1 Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh là bao nhiêu?



Lời giải.

Lần phân chia thứ nhất, 1 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh là $u_1 = \frac{1}{9}$.

Lần phân chia thứ hai, 8 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_2 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right)$.

Lần phân chia thứ ba, 8^2 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_3 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^2$.

Lần phân chia thứ tư, 8^3 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_4 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^3$.

Lần phân chia thứ năm, 8^4 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_5 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^4$.

Như vậy diện tích các hình vuông tăng thêm sau mỗi lần chia tạo thành cấp số nhân có công bội là $q = \frac{8}{9}$, số hạng đầu là $u_1 = \frac{1}{9}$.

Do đó, tổng diện tích hình vuông tô màu xanh sau 5 lần chia là

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \frac{1 - q^5}{1 - q} \cdot u_1 = \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^5}{1 - \frac{8}{9}} \cdot \frac{1}{9} = \frac{26281}{39366}.$$

□

Bài 43 (TH). Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C .

Lời giải.

Nhiệt độ sau mỗi giờ của khay nước theo thứ tự lập thành cấp số nhân với $u_1 = 23$ và $q = (1 - 20\%)$.

Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 23 \cdot (1 - 20\%)^5 \approx 7,5$.

Nhiệt độ của khay nước sau 6 giờ là $\approx 7,5^\circ$.

□

Bài 44 (TH). Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210>). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Lời giải.

a) Ta có $\frac{690}{138} = 5$ suy ra khối lượng còn lại sau 690 này là $\frac{20}{2^5} = 0,625$ gam;

b) Ta có $\frac{7314}{138} = 53$ suy ra khối lượng còn lại sau 7314 này là $\frac{20}{2^{53}}$ gam.

□

Bài 45 (TH). Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Lời giải.

Lần phân chia thứ nhất, 1 tế bào thành 2 tế bào, số tế bào lần 1 phân chia là $u_1 = 2$.

Lần phân chia thứ hai, 2, số tế bào lần 2 phân chia là $u_2 = 2 \cdot 2 = u_1 \cdot 2$.

Lần phân chia thứ 3 có 4 tế bào phân chia, số tế bào lần 3 phân chia là $u_3 = 2 \cdot u_2$.

Như vậy một tế bào phân đôi sẽ tạo thành cấp số nhân có công bội là 2, số hạng đầu là $u_1 = 2$.

Sau n lần phân chia từ một tế bào phân được thành $u_n = 2^{n-1}u_1$.

Đổi 24 giờ = $24 \cdot 60 = 72 \cdot 20$ (phút) $\Rightarrow$ 24 giờ gấp 72 lần 20 phút.

Do đó, sau 24 giờ số tế bào nhận được là $u_{72} = 2^{71} \cdot 2 = 2^{72}$ (tế bào).

□

Bài 46 (TH). Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Lời giải.

Coi ngày điều tra dân số năm 2011 và năm 2021 trùng nhau thì từ năm 2011 đến năm 2021 là 10 năm. Vậy dân số nước ta tính đến năm 2021 là

$$u_{10} = P \cdot (1 + a\%)^{10}.$$

Ta có

$$u_1 = P \cdot (1 + a\%)^1.$$

$$u_2 = P \cdot (1 + a\%)^2.$$

Và công bội của cấp số nhân này là $\frac{u_2}{u_1} = q = \frac{P \cdot (1 + a\%)^2}{P \cdot (1 + a\%)^1} = 1 + a\%.$ □

Bài 47 (TH). Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

Lời giải.

Dân số năm 2021 tăng lên so với năm 2020 là $97 \cdot 0,91\%$ triệu người.

Dân số năm 2021 là

$$97 + 97 \cdot 0,91\% = 97 \cdot (1 + 0,91\%) \text{ triệu người.}$$

Dân số năm 2022 tăng lên so với năm 2021 là $97 \cdot (1 + 0,91\%) \cdot 0,91\%$ triệu người.

Dân số năm 2022 là

$$97 \cdot (1 + 0,91\%) + 97 \cdot (1 + 0,91\%) \cdot 0,91\% = 97 \cdot (1 + 0,91\%)^2 \text{ triệu người.}$$

Dân số năm 2023 tăng lên so với năm 2021 là $97 \cdot (1 + 0,91\%)^2 \cdot 0,91\%$ triệu người.

Dân số năm 2023 là

$$97 \cdot (1 + 0,91\%)^2 + 97 \cdot (1 + 0,91\%)^2 \cdot 0,91\% = 97 \cdot (1 + 0,91\%)^3 \text{ triệu người.}$$

Tương tự vậy ta có dân số năm 2030 là $97 \cdot (1 + 0,91\%)^{10} = 106,1973784$ triệu người. □

Bài 48 (TH). Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1 %/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải.

a) Với u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm.

Ta có $u_1 = 2$ (triệu dân).

$$u_{n+1} = u_n + u_n \cdot 0,01 = 1,01u_n.$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 1,01$.

Vậy công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm là $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_n = 2 \cdot 1,01^{n-1}$.

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là $u_{10} = 2 \cdot 1,01^9 = 2,187$ (triệu dân). □

Bài 49 (TH). Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032;

b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Lời giải.

- a) Giả sử dân số năm 2022 là $u_1 = 2,1 \cdot 10^6$ thì dân số năm 2023 là $u_2 = u_1 + 0,0075u_1 = 1,0075u_1$.
 Tương tự dân số năm 2024 là $u_3 = 1,0075u_2$.
 Do đó dân số của thành phố qua các năm lập thành một cấp số nhân với $u_1 = 2,1 \cdot 10^6$; $q = 1,0075$.
 Vậy dân số năm 2032 tương ứng với $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,0075^{10} \approx 2262924$ (người).
- b) Giả sử đến năm thứ n thì dân số gấp đôi năm 2022.
 Suy ra $u_n = 2u_1 \Leftrightarrow q^{n-1} = 2 \Leftrightarrow 1,0075^{n-1} = 2 \Leftrightarrow n \approx 93,7$.
 Vậy 94 năm sau tức là năm 2116 thì dân số thành phố sẽ gấp đôi năm 2022.

□

Bài 50 (TH). Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải.

Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n . Ta có: $u_1 = 60$;

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,08 = u_{n-1} \cdot (1 + 0,08) = u_{n-1} \cdot 1,08.$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội $q = 1,08$. Áp dụng công thức tính tổng S_n , ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm là

$$S_{10} = \frac{60 \cdot (1 - 1,08^{10})}{1 - 1,08} \approx 869,194 \text{ (triệu người)}.$$

□

Bài 51 (TH). Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Lời giải.

Gọi (u_n) là dãy số biểu diễn giá trị của chiếc máy ủi theo từng năm.

Dãy số này là một cấp số nhân có $u_1 = 3$, $q = 0,8$.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân này là $u_n = 3 \cdot 0,8^{n-1}$.

Ta có $u_5 = 3 \cdot 0,8^4 = \frac{3}{325} = 4,8 \cdot 10^{-3}$.

Tương ứng giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm là 480 triệu đồng.

□

Bài 52 (TH). Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

- a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
- b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
- c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải.

Gọi u_n là giá trị còn lại của ô tô sau n năm sử dụng.

- a) Giá trị của ô tô sau 1 năm sử dụng là $u_1 = 800 - 800 \cdot 0,04 = 800 \cdot 0,96 = 768$ triệu đồng.
 Giá trị của ô tô sau 2 năm sử dụng là $u_2 = u_1 - u_1 \cdot 0,04 = u_1 \cdot 0,96 = 737,28$ triệu đồng.
- b) Ta có $u_n = u_{n-1} - u_{n-1} \cdot 0,04 = u_{n-1} \cdot 0,96$.
 Do đó, (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 768$ và công bội $q = 0,96$.
 Vậy sau n năm sử dụng, giá trị còn lại của chiếc ô tô là $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_n = 768 \cdot 0,96^{n-1}$.
- c) Sau 10 năm, ước tính giá trị của ô tô còn lại là $u_{10} = 768 \cdot 0,96^9 \approx 531,87$ triệu đồng.

□

Bài 53 (VD). Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối tháng ông trả ngân hàng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

🗨️ **Lời giải.**

Do lãi suất là 12%/năm tương đương với lãi là 1%/tháng.

Sau 1 tháng, ông An còn nợ là: $10^9 \cdot (1 + 1\%) - a = 10^9 \cdot (1,01) - S_1$.

Sau 2 tháng, ông An còn nợ là: $10^9 \cdot (1,01)^2 - a \cdot (1,01) - a = 10^9 \cdot (1,01)^2 - S_2$.

Sau 3 tháng, ông An còn nợ là: $10^9 \cdot (1,01)^3 - a(1,01)^2 - a(1,01) - a = 10^9 \cdot (1,01)^3 - S_3$.

Sau 24 tháng, ông An còn nợ là: $10^9 \cdot (1,01)^{24} - S_{24} = 0$.

Do đó $S_{24} = 10^9 \cdot (1,01)^{24} \Leftrightarrow a \cdot \frac{1 - (1,01)^{24}}{1 - (1,01)} = 10^9 \cdot (1,01)^{24} \Leftrightarrow a = \frac{10^9 \cdot (1,01)^{24} \cdot 0,01}{(1,01)^{24} - 1} \approx 47073472, 22$.

Vậy mỗi tháng ông An phải trả 47073500. □

Bài 54 (TH). Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

🗨️ **Lời giải.**

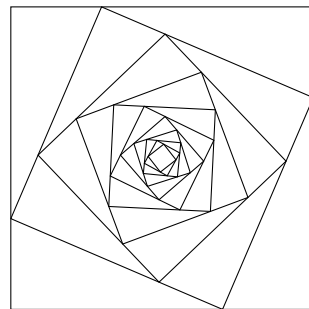
Do diện tích của mặt sàn tính từ tầng một lập thành một cấp số nhân với $u_2 = \frac{1}{2} \cdot 12288 = 6144$ và $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 = 6144 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12288 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ta có $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 12288 \cdot \frac{1}{2^{10}} = 12m^2$. Vậy diện tích của mặt sàn tầng trên cùng là $12m^2$. □

Bài 55 (TH).

Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

🗨️ **Lời giải.**

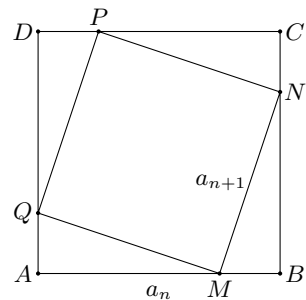
Gọi cạnh một hình vuông thứ $n, n + 1$ lần lượt là a_n, a_{n+1} .

$$\text{Do } MN = \sqrt{MB^2 + BN^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{4}\right)^2 + \left(\frac{3AB}{4}\right)^2} = AB \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Nên ta có cạnh hình vuông thứ $n + 1$ là:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Vậy dãy số (a_n) là cấp số nhân. □



Bài 56 (TH). Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Organ>). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Theo đề ta có } \begin{cases} u_1 = 400 \\ u_{13} = 800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 400 \\ u_1 q^{12} = 800 \end{cases} \Rightarrow q^{12} = 2 \Rightarrow q = \pm \sqrt[12]{2} \approx \pm 1,01414.$$

Bài 57 (VD). Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là

50 mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kề trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải.

Gọi (u_n) là dãy số biểu diễn giá trị của lượng thuốc trong máu của bệnh nhân theo từng ngày.

Dãy số này là một cấp số nhân có $u_1 = 50$, $q = \frac{1}{2}$.

Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân là $S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Theo bài toán, ta có $S_{10} = 50 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} \approx 99,902$.

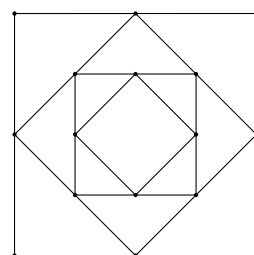
Vậy tổng lượng thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp là 99,902 mg. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 62.

Cho hình vuông có cạnh là 1. Nối các trung điểm của hình vuông trên ta được một hình vuông có diện tích S_1 , tiếp tục quá trình trên với các hình vuông với diện tích là $S_2; S_3; \dots; S_n; \dots$. Tính tổng vô hạn $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$.

- (A) 2. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 1. (D) $\frac{3}{2}$.



Lời giải.

Ta có $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{8}$, $\dots$, $S_n = \frac{1}{2^n}$, $\dots$ tạo thành 1 cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2} < 1$.

Vậy $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 63. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện của mặt trên tầng ngay bên dưới và diện tích tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Biết đế tháp có diện tích là 12288 m^2 . Tính diện tích mặt trên cùng.

- (A) 12 m^2 . (B) 6 m^2 . (C) 10 m^2 . (D) 8 m^2 .

Lời giải.

Gọi S_i là diện tích của tầng thứ i với $i = 1, 2, \dots, 11$.

Do giả thiết suy ra $S_{i+1} = \frac{1}{2} S_i$ với $i = 1, 2, \dots, 10$.

Do đó $\{S_i\}$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$. Do đó $S_{11} = \frac{1}{2^{10}} S_1 = \frac{1}{2^{11}} \cdot 12288 = 6 (\text{m}^2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 64. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua lần 9 liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu tiền?

- (A) Thắng 20000 đồng. (B) Thua 40000 đồng. (C) Hòa vốn. (D) Thua 20000 đồng.

Lời giải.

Số tiền đặt cược lần thứ n là $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1}$ với $u_1 = 20000$.

Ta có: $u_{10} - \sum_{n=1}^9 u_1 \cdot 2^{n-1} = 20000 \cdot 2^9 - \sum_{n=1}^9 20000 \cdot 2^{n-1} = 20000$.

Vậy du khách thắng 20000 đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 65. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao

nhiều năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- (A) 12 năm. (B) 11 năm. (C) 10 năm. (D) 9 năm.

Lời giải.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n}{A} \right) \Rightarrow n = \log_{(1+7,5\%)}(2) \approx 9,6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Giả sử một người đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 2.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm người ấy lại được tăng lương một lần với mức tăng bằng 7% của tháng trước đó. Hỏi sau 36 năm làm việc người ấy lĩnh được tất cả bao nhiêu tiền?

- (A) 1.287.968.492 đồng. (B) 10.721.769.110 đồng.
(C) $7,068289036 \cdot 10^8$ đồng. (D) 429.322.830,5 đồng.

Lời giải.

Ta có 36 năm tương ứng với 12 kỳ lương; mỗi kỳ lương có 36 tháng và kỳ sau tăng 7% so với kỳ trước. Do đó tổng số tiền mỗi kỳ lương là một cấp số nhân với $u_1 = 36 \times 2 = 72$ (triệu đồng) và công bội $q = 1,07$.

Vậy tổng số tiền sau 36 năm là $T = \frac{72 \cdot [(1,07)^{12} - 1]}{1,07 - 1} = 1287,968492$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Từ độ cao 55,8 (mét) của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình (mét) của bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- (A) (69; 72). (B) (60; 63). (C) (67; 69). (D) (64; 66).

Lời giải.

Đặt $u_1 = 55,8$ (mét) là quãng đường bóng rơi khi thả xuống, $u_{n+1} = \frac{1}{10^n} u_1, n \geq 1$ là quãng đường bóng rơi sau lần nảy lên thứ n .

Ta có (u_n) là dãy cấp số nhân với $u_1 = 55,8$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.

Suy ra tổng quãng đường quả bóng rơi xuống là $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 55,8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = 62$.

Ngoài ra ta còn phải tính tổng quãng đường mà bóng nảy lên. Ta có tổng quãng đường bóng nảy lên bằng tổng quãng đường rơi của bóng trừ đi quãng đường thả rơi xuống.

Vậy tổng quãng đường hành trình của quả bóng là $62 + 62 - 55,8 = 68,2$ (mét).

Chọn đáp án (C) □

Câu 68. Một gia đình lập kế hoạch tiết kiệm như sau: Họ lập một sổ tiết kiệm tại một ngân hàng và cứ đầu mỗi tháng họ gửi vào sổ tiết kiệm đó 15 triệu đồng. Giả sử lãi suất tiền gửi không đổi là 0,6 %/tháng và tiền gửi được tính lãi theo hình thức lãi kép. Hỏi sau 3 năm gia đình đó tiết kiệm được số tiền gần nhất với con số nào dưới đây?

- (A) 543240000 đồng. (B) 589269000 đồng. (C) 669763000 đồng. (D) 604359000 đồng.

Lời giải.

Gọi S_0 triệu đồng là số tiền gia đình đó định kỳ gửi tiết kiệm vào đầu hàng tháng, r là lãi suất tiền gửi hàng tháng. Ta có $S_0 = 15$ triệu đồng, $r = 0,6$ %/tháng.

Gọi $S_i, i = \overline{1, n}$ là số tiền trong sổ tiết kiệm cuối tháng thứ i .

Ta có

- ☑ $S_1 = S_0 + S_0 \cdot r = S_0(1 + r),$
 ☑ $S_2 = [S_0 + S_0(1 + r)] + [S_0 + S_0(1 + r)] r = S_0(1 + r) + S_0(1 + r)^2,$
 ☑ $S_3 = [S_0 + S_0(1 + r) + S_0(1 + r)^2] + [S_0 + S_0(1 + r) + S_0(1 + r)^2] r,$
 $= S_0(1 + r) + S_0(1 + r)^2 + S_0(1 + r)^3,$

☑ ...

$$\begin{aligned} \text{☑ } S_n &= S_0(1+r) + S_0(1+r)^2 + S_0(1+r)^3 + \dots + S_0(1+r)^n \\ &= S_0 [(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \dots + (1+r)^n] \\ &= S_0(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = S_0(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \end{aligned}$$

Vậy sau 3 năm, tức cuối tháng thứ 36 thì gia đình tiết kiệm được số tiền là

$$S_{36} = 15 \cdot 10^6(1 + 0,6 \cdot 10^{-2}) \cdot \frac{(1 + 0,6 \cdot 10^{-2})^{36} - 1}{0,6 \cdot 10^{-2}} = 604358538,2 \text{ đồng.}$$

Chọn đáp án **(D)**



Bài số 4

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A – ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP

Dạng 1. Bài tập về dãy số

1. Bài tập tự luận

Bài 1. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+4-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}.$$

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} n+2 \geq 3 &\Rightarrow 0 < \frac{3}{n+2} \leq 1 \\ \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{3}{n+2} < 0 &\Rightarrow 1 \leq u_n < 2. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) bị chặn. □

Bài 2. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của mỗi dãy số (u_n) sau, biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \frac{n^2}{n+1};$

b) $u_n = \frac{2}{n^5};$

c) $u_n = (-1)^n \cdot n^2.$

Lời giải.

a) $u_n = \frac{n^2}{n+1};$

$$\text{Xét hiệu } u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n^3 + 2n)}{(n+1)(n+2)} = \frac{3n^2 + n + 1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

$$\text{Vì } u_n = \frac{n^2}{n+1} > 0 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \text{ nên dãy số } (u_n) \text{ bị chặn dưới bởi } 0.$$

b) $u_n = \frac{2}{n^5};$

$$\text{Ta có } u_n = \frac{2}{n^5} > 0 \text{ và } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^5}{(n+1)^5} < 1. \text{ Vậy } (u_n) \text{ là dãy số giảm.}$$

$$1 = u_1 > u_n = \frac{2}{n^5} > 0 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \text{ nên dãy số } (u_n) \text{ bị chặn.}$$

c) $u_n = (-1)^n \cdot n^2.$

$$\text{Ta có } u_1 = -1; u_2 = 4; u_3 = -9;$$

Vậy (u_n) là dãy số không tăng không giảm, không bị chặn. □

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_n = 3u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Số hạng thứ năm của dãy số (u_n) là:

(A) 27.

(B) 9.

(C) 81.

(D) 243.

Lời giải.

Dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_n = 3u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$ (*).

Thay $n = 1$ vào (*): $u_1 = \frac{1}{3}$

Thay $n = 2$ vào (*): $u_2 = 3u_1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

Thay $n = 3$ vào (*): $u_3 = 3u_2 = 3 \cdot 1 = 3$

Thay $n = 4$ vào (*): $u_4 = 3u_3 = 3 \cdot 3 = 9$

Thay $n = 5$ vào (*): $u_5 = 3u_4 = 3 \cdot 9 = 27$

Chọn đáp án (A)

Câu 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) lần lượt là

(A) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{27}$.

(B) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$.

(C) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{25}$.

(D) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{28}$.

Lời giải.

Lần lượt thay $n = 1; n = 2; n = 3$ vào dãy số (u_n) , ta được $u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{1}{4}; u_3 = \frac{3}{26}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 3. Cho dãy số: $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là

(A) $u_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$.

(B) $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$.

(C) $u_n = \frac{1}{3^n}$.

(D) $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

Lời giải.

Để thấy dãy số đã cho có số hạng tổng quát là $\frac{1}{3^n}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 4. Cho dãy số $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ (số hạng sau bằng một nửa số hạng liền trước nó). Công thức tổng quát của dãy số đã cho là

(A) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(B) $u_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$.

(C) $u_n = \frac{1}{2n}$.

(D) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải.

Ta có $u_k = \frac{1}{2}u_{k-1}$, nên $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

(A) Dãy số tăng và bị chặn.

(B) Dãy số giảm và bị chặn.

(C) Dãy số giảm và bị chặn dưới.

(D) Dãy số giảm và bị chặn trên.

Lời giải.

Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)(n+2) - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra dãy số tăng.

Ta có $\frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

Suy ra $\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{n+2} < 1$.

Vậy dãy số đã cho bị chặn.

Chọn đáp án (A)

Câu 6. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số tăng?

(A) $u_n = \sin n$.

(B) $u_n = n(-1)^n$.

(C) $u_n = \frac{1}{n}$.

(D) $u_n = 2^{n+1}$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = 2^{n+1}$.

Ta có $u_n > 0$ và $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$ nên (u_n) là dãy số tăng.

Chọn đáp án (D)

Câu 7. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) Một dãy số tăng thì bị chặn dưới. (B) Một dãy số giảm thì bị chặn trên.
(C) Một dãy số bị chặn thì phải tăng hoặc giảm. (D) Một dãy số không đổi thì bị chặn.

Lời giải.

Dãy (u_n) có $u_n = 5$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bị chặn nhưng không tăng và không giảm.

Chọn đáp án (C)

Câu 8. Tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$ là

- (A) 199. (B) $2^{100} - 1$. (C) 10000. (D) 9999.

Lời giải.

Ta có (u_n) là cấp số cộng công sai $d = 2$ và $u_1 = 1$.

$$\text{Do đó } S_n = n \cdot u_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 100 \cdot 1 + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 2 = 10000.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 9. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_n = 3u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Số hạng thứ năm của dãy số (u_n) là

- (A) 27. (B) 9. (C) 81. (D) 243.

Lời giải.

Dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_n = 3u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$ (*).

- ☑ Thay $n = 1$ vào (*): $u_1 = \frac{1}{3}$.
☑ Thay $n = 2$ vào (*): $u_2 = 3u_1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.
☑ Thay $n = 3$ vào (*): $u_3 = 3u_2 = 3 \cdot 1 = 3$.
☑ Thay $n = 4$ vào (*): $u_4 = 3u_3 = 3 \cdot 3 = 9$.
☑ Thay $n = 5$ vào (*): $u_5 = 3u_4 = 3 \cdot 9 = 27$.

Chọn đáp án (A)

Dạng 2. Bài tập về cấp số cộng

Bài tập tự luận

Bài 3. Cho cấp số cộng (u_n) . Tìm số hạng đầu u_1 , công sai d trong mỗi trường hợp sau:

- a) $u_2 + u_5 = 42$ và $u_4 + u_9 = 66$; b) $u_2 + u_4 = 22$ và $u_1 \cdot u_5 = 21$.

Lời giải.

- a) $u_2 + u_5 = 42$ và $u_4 + u_9 = 66$;

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 + u_5 = 42 \\ u_4 + u_9 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 42 \\ 2u_1 + 11d = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu $u_1 = 11$, công sai $d = 4$

- b) $u_2 + u_4 = 22$ và $u_1 \cdot u_5 = 21$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 + u_4 = 22 \\ u_1 \cdot u_5 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4d = 22 \\ u_1 \cdot (u_1 + 4d) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 - 2d \\ (11 - 2d) \cdot (11 + 2d) = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 - 2d \\ 4d^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -5. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy có hai cấp số cộng thỏa mãn đề bài số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 5$; số hạng đầu $u_1 = 21$, công sai $d = -5$.

□

Bài 4. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết:

$$\text{a) } \begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}.$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10u_1 + 40d = 0 \\ 4u_1 + 6d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15u_1 + 40d = 0 \\ 4u_1 + 6d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3. \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 8$; $d = -3$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2u_1 + 20d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 7d)^2 + (30 + 7d)^2 = 1170 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ 5d^2 - 36d + 63 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -\frac{3}{5} \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Bài 5. Tứ giác $ABCD$ có số đo bốn góc A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Biết số đo góc C gấp 5 lần số đo góc A . Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$ theo đơn vị độ.

Lời giải.

Do bốn góc A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên số đo 4 góc của tứ giác $ABCD$ lần lượt là $u_1, u_1 + d, u_1 + 2d, u_1 + 3d$.

$$\text{Theo giả thiết, Ta có } \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d = 360 \\ u_1 + 2d = 5u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 360 \\ -4u_1 + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 22,5 \\ d = 45. \end{cases}$$

Vậy số đo các góc của tứ giác lần lượt là $22,5^\circ$; $67,5^\circ$; $112,5^\circ$; $157,5^\circ$.

□

Bài 6. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải.

Số cây ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

$$\text{Theo giả thiết Ta có } S_n = 4950 \Leftrightarrow n + \frac{(n-1)n}{2} = 4950 \Leftrightarrow n^2 + n - 4950 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -99 \text{ (loại)} \\ n = 100. \end{cases}$$

Vậy có 100 hàng cây được trồng.

□

Bài 7. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

Lời giải.

Lúc 1 giờ đồng hồ đánh 1 tiếng chuông.

Lúc 2 giờ đồng hồ đánh 2 tiếng chuông.

.....

Lúc 12 giờ trưa đồng hồ đánh 12 tiếng chuông.

Do đó, từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh số tiếng chuông là $1 + 2 + 3 + \dots + 11 + 12$.

Đây là tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Vậy tổng số tiếng chuông đồng hồ trong khoảng thời gian từ 0 đến 12 giờ trưa là $\frac{12 \cdot (1 + 12)}{2} = 78$. □

Bài 8. Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5 m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16 cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sân tầng hai so với mặt sân.

Lời giải.

a) Mỗi bậc thang cao 16 cm = 0,16 m nên suy ra bậc thang cao $0,16 \cdot n$ (m).

Vì mặt bằng sàn cao hơn mặt sân 0,5 m nên công thức tính độ cao của bậc n so với mặt sân sẽ là $h_n = (0,5 + 0,16n)$ (m).

b) Độ cao của sân tầng hai so với mặt sân ứng với $n = 25$ là $h_{25} = 0,5 + 0,16 \cdot 25 = 4,5$ (m). □

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 , công sai d . Khi đó, với $n \geq 2$ ta có

- (A) $u_n = u_1 + d$. (B) $u_n = u_1 + (n + 1)d$. (C) $u_n = u_1 - (n - 1)d$. (D) $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Khi đó

- (A) $u_3 = 4$. (B) $u_3 = 2$. (C) $u_3 = -5$. (D) $u_3 = 7$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d \Rightarrow d = u_2 - u_1 = -1 - 3 = -4$.

Suy ra $u_3 = u_1 + 2d = 3 - 8 = -5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -1$ và công sai $d = 3$. Khi đó S_5 bằng

- (A) 11. (B) 50. (C) 10. (D) 25.

Lời giải.

Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \Rightarrow S_5 = 5u_1 + \frac{5 \cdot 4}{2}d = 25$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng?

- (A) 21, -3, -27, -51, -75. (B) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}$.
(C) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$. (D) $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{60}$.

Lời giải.

Dãy số 21, -3, -27, -51, -75 là cấp số cộng vì số hạng liền sau bằng số liền trước cộng với một số không đổi là -24.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng?

- (A) 21, -3, -27, -51, -75. (B) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}$. (C) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$. (D) $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{60}$.

Lời giải.

Dãy số 21, -3, -27, -51, -75 là cấp số cộng vì số hạng liền sau bằng số liền trước cộng với một số không đổi là -24.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$, công sai $d = 4$. Công thức của số hạng tổng quát u_n là:

(A) $u_n = -5 + 4n$.

(B) $u_n = -1 - 4n$.

(C) $u_n = -5 + 4n^2$.

(D) $u_n = -9 + 4n$.

Lời giải.

Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = -5 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 9$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 16. Tổng của 100 số tự nhiên lẻ đầu tiên tính từ 1 là:

(A) 10000.

(B) 10100.

(C) 20000.

(D) 20200.

Lời giải.

Ta có 100 số lẻ đầu tiên tạo thành cấp số cộng có 100 số hạng với $u_1 = 1, d = 2$ và $u_{100} = 199$.

Tổng n số lẻ đầu tiên là $S_{100} = \frac{(u_1 + u_{100}) \cdot 100}{2} = 10000$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$, công sai $d = 4$. Công thức của số hạng tổng quát u_n là:

(A) $u_n = -5 + 4n$.

(B) $u_n = -1 - 4n$.

(C) $u_n = -5 + 4n^2$.

(D) $u_n = -9 + 4n$.

Lời giải.

Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = -5 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 9$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 18. Tổng của 100 số tự nhiên lẻ đầu tiên tính từ 1 là

(A) 10000.

(B) 10100.

(C) 20000.

(D) 20200.

Lời giải.

Ta có 100 số lẻ đầu tiên tạo thành cấp số cộng có 100 số hạng với $u_1 = 1, d = 2$ và $u_{100} = 199$.

Tổng n số lẻ đầu tiên là $S_{100} = \frac{(u_1 + u_{100}) \cdot 100}{2} = 10000$.

Chọn đáp án **(A)** □

Dạng 3. Bài tập về cấp số nhân

Bài tập tự luận

Bài 9. Chứng minh rằng

- a) Trong một cấp số cộng (u_n) , mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối, nếu có) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \text{ với } k \geq 2.$$

- b) Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối, nếu có) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, \text{ với } k \geq 2.$$

Lời giải.

- a) Giả sử (u_n) là một cấp số cộng, có công sai d . Khi đó $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Với $k \geq 2$, ta có $u_{k-1} + u_{k+1} = u_1 + (k-2)d + u_1 + kd = 2u_1 + 2(k-1)d = 2u_k$.

Vậy $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$, với $k \geq 2$.

- b) Giả sử (u_n) là một cấp số nhân, có công bội q . Khi đó $u_n = q^{n-1}u_1$.

Với $k \geq 2$, ta có $u_{k-1}u_{k+1} = q^{k-2}u_1q^ku_1 = q^{2k-2}u_1^2 = (u_k)^2$.

Vậy $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$, với $k \geq 2$. □

Bài 10. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) biết

$$\text{a) } \begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{u_6}{u_5} = 2 \\ 192 = u_1 q^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{192}{32} = 6. \end{cases}$$

b) Theo bài ra, ta có

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 72 \\ u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q(q^2 - 1) = 72 \\ u_1 q^2(q^2 - 1) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{144}{72} = 2 \\ u_1 = 12. \end{cases}$$

□

Bài 11. Cho cấp số nhân (u_n) . Tìm số hạng đầu u_1 , công bội q trong mỗi trường hợp sau:

$$\text{a) } u_6 = 192 \text{ và } u_7 = 384;$$

$$\text{b) } u_1 + u_2 + u_3 = 7 \text{ và } u_5 - u_2 = 14.$$

Lời giải.

$$\text{a) } u_6 = 192 \text{ và } u_7 = 384;$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^5 = 192 \\ u_1 \cdot q^6 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}.$$

Vậy số hạng đầu $u_1 = 6$, công bội $q = 2$.

$$\text{b) } u_1 + u_2 + u_3 = 7 \text{ và } u_5 - u_2 = 14.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_5 - u_2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot (1 + q + q^2) = 7 \\ u_1 \cdot q \cdot (q^3 - 1) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot (1 + q + q^2) = 7 \\ q(q - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot (1 + q + q^2) = 7 \\ q^2 - q - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 2 \\ u_1 = 7 \\ q = -1. \end{cases}$$

Vậy có hai cấp số nhân thỏa mãn đề bài số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $q = 2$; số hạng đầu $u_1 = 7$, công sai $q = -1$.

□

Bài 12. Tìm ba số, biết theo thứ tự đó chúng lập thành cấp số cộng và có tổng bằng 21, và nếu lần lượt cộng thêm các số 2; 3; 9 vào ba số đó thì được ba số lập thành một cấp số nhân.

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng cần tìm là x, y, z . Theo tính chất của cấp số cộng ta có $x + z = 2y$.

Kết hợp giả thiết ta có $x + y + z = 21 \Rightarrow 3y = 21 \Leftrightarrow y = 7$.

Gọi d là công sai của cấp số cộng x, y, z thì $x = 7 - d, z = 7 + d$.

Sau khi cộng thêm các số 2, 3, 9 vào ba số x, y, z ta được ba số $x + 2, y + 3, z + 9$ hay $9 - d, 10, 16 + d$.

Theo tính chất của cấp số nhân ta có

$$(9 - d)(16 + d) = 100 \Leftrightarrow 144 - 7d - d^2 = 100 \Leftrightarrow d^2 + 7d - 44 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ d = -11. \end{cases}$$

Với $d = 4$ ta được cấp số cộng 3, 7, 11.

Với $d = -11$ ta được cấp số cộng 18, 7, -4.

□

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 19. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3n + 6$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 3$.
 (B) Dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 6$.
 (C) Dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$.
 (D) Dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 6$.

Lời giải.

$$u_n = 3n + 6 = 3(n - 1) + 6 + 3 = u_{n-1} + 3.$$

Vậy dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. Trong các dãy số (u_n) cho bằng phương pháp truy hồi sau, dãy số nào là cấp số nhân?

- (A) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}(n - 1)$ với mọi $n \geq 2$.
 (B) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1} + 1$ với mọi $n \geq 2$.
 (C) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}^2$ với mọi $n \geq 2$.
 (D) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

Lời giải.

Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$ là cấp số nhân.

Vì $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{3}$ không đổi với mọi $n \geq 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Có bao nhiêu số thực x để $2x - 1$; x ; $2x + 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Vì $2x - 1$; x ; $2x + 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên

$$x^2 = (2x - 1)(2x + 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Một tam giác có số đo các góc lập thành cấp số nhân có công bội $q = 2$. Số đo các góc của tam giác đó lần lượt là

- (A) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{5}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{4\pi}{5}$. (C) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{6}$. (D) $\frac{\pi}{7}$; $\frac{2\pi}{7}$; $\frac{4\pi}{7}$.

Lời giải.

Giả sử tam giác ABC có ba góc theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội $q = 2$.

Ta có $B = 2A$; $C = 4A$. (1)

Mà $A + B + C = \pi$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A = \frac{\pi}{7}$.

Vậy số đo các góc của tam giác đó lần lượt là $\frac{\pi}{7}$; $\frac{2\pi}{7}$; $\frac{4\pi}{7}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\frac{1}{10}$. Khi đó $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ:

- (A) 2016. (B) 2017. (C) 2018. (D) 2019.

Lời giải.

Ta có số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Giả sử $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ n của cấp số nhân, ta có $u_n = \frac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow n = 2018$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Trong các dãy số (u_n) cho bằng phương pháp truy hồi sau, dãy số nào là cấp số nhân?

- (A) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}(n - 1)$ với mọi $n \geq 2$.
 (B) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1} + 1$ với mọi $n \geq 2$.

(C) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}^2$ với mọi $n \geq 2$.

(D) Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

🗨️ **Lời giải.**

Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$ là cấp số nhân.

Vì $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{3}$ không đổi với mọi $n \geq 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\frac{1}{10}$. Khi đó $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ:

(A) 2016.

(B) 2017.

(C) 2018.

(D) 2019.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Giả sử $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ n của cấp số nhân, ta có $u_n = \frac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow n = 2018$.

Chọn đáp án (C) □

Dạng 4. Bài toán thực tế về cấp số cộng, cấp số nhân

Bài tập tự luận

Bài 13. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

🗨️ **Lời giải.**

Lần phân chia thứ nhất, 1 tế bào thành 2 tế bào, số tế bào lần 1 phân chia là $u_1 = 2$.

Lần phân chia thứ hai, 2 tế bào thành 4 tế bào, số tế bào lần 2 phân chia là $u_2 = 2 \cdot 2 = u_1 \cdot 2$.

Lần phân chia thứ 3 có 4 tế bào phân chia, số tế bào lần 3 phân chia là $u_3 = 2 \cdot u_2$.

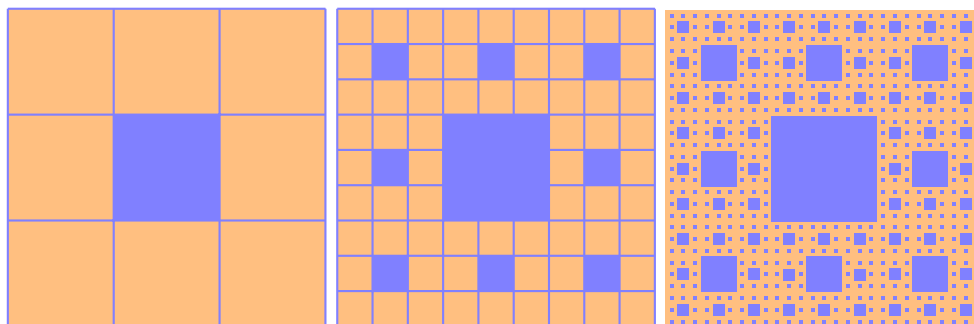
Như vậy một tế bào phân đôi sẽ tạo thành cấp số nhân có công bội là 2, số hạng đầu là $u_1 = 2$.

Sau n lần phân chia từ một tế bào phân được thành $u_n = 2^{n-1}u_1$.

Đổi 24 giờ = $24 \cdot 60 = 72 \cdot 20$ (phút) $\Rightarrow$ 24 giờ gấp 72 lần 20 phút.

Do đó, sau 24 giờ số tế bào nhận được là $u_{72} = 2^{71} \cdot 2 = 2^{72}$ (tế bào). □

Bài 14. Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1 Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh là bao nhiêu?



🗨️ **Lời giải.**

Lần phân chia thứ nhất, 1 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh là $u_1 = \frac{1}{9}$.

Lần phân chia thứ hai, 8 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_2 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right)$.

Lần phân chia thứ ba, 8^2 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là

$$u_3 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9} \right)^2.$$

Lần phân chia thứ tư, 8^3 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là

$$u_4 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9} \right)^3.$$

Lần phân chia thứ năm, 8^4 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là

$$u_5 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9} \right)^4.$$

Như vậy diện tích các hình vuông tăng thêm sau mỗi lần chia tạo thành cấp số nhân có công bội là $q = \frac{8}{9}$, số hạng đầu là $u_1 = \frac{1}{9}$.

Do đó, tổng diện tích hình vuông tô màu xanh sau 5 lần chia là

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \frac{1 - q^5}{1 - q} \cdot u_1 = \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^5}{1 - \frac{8}{9}} \cdot \frac{1}{9} = \frac{26281}{39366}.$$

□

Bài 15. Giả sử quần thể động vật này ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12%/năm, xuất cư 2%/năm, tử vong 8%/năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau 2 năm.

🗨 **Lời giải.**

Tỉ suất tăng dân số tự nhiên = (tỉ lệ sinh) + (tỉ lệ nhập cư) - (tỉ lệ tử) - (tỉ lệ xuất cư).

Sau một năm số lượng cá thể của quần thể là $11000 \cdot [1 + (12\% - 8\% - 2\%)] = 11220$ cá thể.

□

Bài 16. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao cao hơn 12 phím là 800 Hz. Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

🗨 **Lời giải.**

$$\text{Theo đề ta có } \begin{cases} u_1 = 400 \\ u_{13} = 800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 400 \\ u_1 q^{12} = 800 \end{cases} \Rightarrow q^{12} = 2 \Rightarrow q = \pm \sqrt[12]{2}.$$

□

Bài 17. Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

🗨 **Lời giải.**

Do diện tích của mặt sàn tính từ tầng một lập thành một cấp số nhân với $u_2 = \frac{1}{2} \cdot 12288 = 6144$ và $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 = 6144 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12288 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ta có $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 12288 \cdot \frac{1}{12^{10}} = 12m^2$. Vậy diện tích của mặt sàn tầng trên cùng là $12m^2$.

□

Bài 18. Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo Niên giám thống kê năm 2020). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

🗨 **Lời giải.**

Dân số Việt Nam năm 2040 là $97,6 \cdot (1 + 1,14\%)^{20} = 122,4$ (triệu người).

□

Bài 19. Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

🗨 **Lời giải.**

Nhiệt độ sau mỗi giờ của khay nước theo thứ tự lập thành cấp số nhân với $u_1 = 23$ và $q = (1 - 20\%)$.

Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 23 \cdot (1 - 20\%)^5 \approx 7,5$.

Nhiệt độ của khay nước sau 6 giờ là $\approx 7,5^\circ$.

□

Bài 20. Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối tháng ông trả ngân hàng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Lời giải.

Do lãi suất là 12%/năm tương đương với lãi là 1%/tháng.

Sau 1 tháng, ông An còn nợ là $10^9 \cdot (1 + 1\%) - a = 10^9 \cdot (1,01) - S_1$.

Sau 2 tháng, ông An còn nợ là $10^9 \cdot (1,01)^2 - a \cdot (1,01) - a = 10^9(1,01)^2 - S_2$.

Sau 3 tháng, ông An còn nợ là $10^9 \cdot (1,01)^3 - a(1,01)^2 - a(1,01) - a = 10^9 \cdot (1,01)^3 - S_3$.

Sau 24 tháng, ông An còn nợ là $10^9 \cdot (1,01)^{24} - S_{24} = 0$.

$$\text{Do đó } S_{24} = 10^9 \cdot (1,01)^{24} \Leftrightarrow a \cdot \frac{1 - (1,01)^{24}}{1 - (1,01)} = 10^9 \cdot (1,01)^{24} \Leftrightarrow a = \frac{10^9 \cdot (1,01)^{24} \cdot 0,01}{(1,01)^{24} - 1} \approx 47073472,22.$$

Vậy mỗi tháng ông An phải trả 47073500. □

2. Bài tập trắc nghiệm

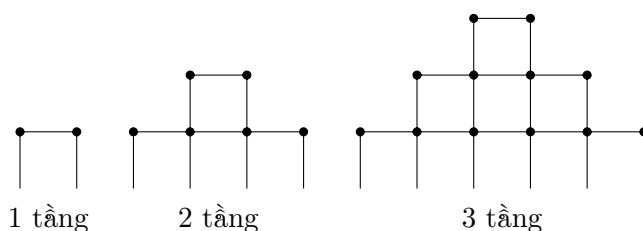
Câu 26. Bạn An chơi trò chơi xếp các que diêm thành hình tháp theo qui tắc thể hiện như hình vẽ. Để xếp được tháp có 10 tầng thì bạn An cần dùng đúng bao nhiêu que diêm?

(A) 210.

(B) 39.

(C) 100.

(D) 270.



Lời giải.

Gọi u_n là số que diêm để xếp tầng thứ n .

Ta có dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 3$, $d = 4$.

$$\text{Số que diêm đủ để xếp tháp 10 tầng là } S_{10} = 10 \cdot u_1 + \frac{10(10-1)}{2}d = 210.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, ..., cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Số hàng cây được trồng là

(A) 77.

(B) 79.

(C) 76.

(D) 78.

Lời giải.

Gọi số cây ở hàng thứ n là u_n .

Ta có: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, ... và $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 3003$.

Nhận xét dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

$$\text{Khi đó } S = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = 3003.$$

$$\text{Suy ra } \frac{n[2 \cdot 1 + (n-1)1]}{2} = 3003 \Leftrightarrow n(n+1) = 6006 \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 77 \\ n = -78 \end{cases} \Leftrightarrow n = 77 \text{ (vì } n \in \mathbb{N} \text{)}.$$

Vậy số hàng cây được trồng là 77.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Người ta trồng cây theo hình tam giác với quy luật ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

(A) 99.

(B) 100.

(C) 101.

(D) 98.

Lời giải.

Ta thấy số cây ở mỗi hàng tạo nên một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$. Ta có

$$S_n = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2} \Rightarrow \frac{n^2 + n}{2} = 4950 \Leftrightarrow n^2 - n - 9900 = 0 \Rightarrow n = 99.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80 000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

- (A) 10 125 000 đồng. (B) 5 250 000 đồng. (C) 4 245 000 đồng. (D) 4 000 000 đồng.

Lời giải.

Số tiền phải trả ở mỗi mét khoan tạo thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 80\,000$ và công sai $d = 5000$. Như vậy, tổng số tiền khi khoan đến mét thứ n được tính theo công thức

$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d].$$

Vậy tổng số tiền phải trả là

$$S_{50} = 25 \cdot (2 \cdot 80\,000 + 49 \cdot 5000) = 10\,125\,000.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Một người muốn chia 1.000.000 đồng cho bốn người con, đứa lớn hơn đứa nhỏ kế tiếp là 100.000 đồng. Hỏi đứa con lớn nhất được bao nhiêu tiền?

- (A) 200.000 đồng. (B) 300.000 đồng. (C) 400.000 đồng. (D) 100.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền của bốn người con theo thứ tự từ đứa lớn nhất đến đứa nhỏ nhất lập thành cấp số cộng với công sai $d = -100.000$ đồng. Mà tổng số tiền của 4 người con là 1.000.000 đồng, nên gọi số tiền của đứa lớn nhất là x thì ta có

$$\frac{4}{2}(2x + 3d) = 1.000.000 \Leftrightarrow 2(2x - 300.000) = 1.000.000 \Leftrightarrow x = 400.000.$$

Vậy đứa lớn nhất được 400.000 đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng 5. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2016, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016).

- (A) 738.100 đồng. (B) 726.000 đồng. (C) 714.000 đồng. (D) 750.300 đồng.

Lời giải.

Năm 2016 là năm nhuận nên tháng 02 có 29 ngày; tháng 01 và tháng 3 mỗi tháng có 31 ngày; tháng 4 có 30 ngày. Do đó, tổng số ngày bạn An bỏ tiền vào ống heo là $29 + 2 \times 31 + 30 = 121$ ngày. Số tiền An tích lũy được chính là tổng của 121 số hạng đầu của cấp số cộng với $u_1 = 100$ và công sai $d = 100$.

Vậy số tiền An có được là $S_{121} = \frac{121}{2} \cdot (2 \cdot 100 + 120 \cdot 100) = 738.100$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- (A) 11 năm. (B) 9 năm. (C) 10 năm. (D) 12 năm.

Lời giải.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n}{A} \right) \Rightarrow n = \log_{(1+7,5\%)}(2) \approx 9,6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Chọn ngẫu nhiên một số nhị phân có 10 chữ số (các chữ số của số đó hoặc là 0 hoặc là 1) có chữ số đầu tiên là 1. Tính xác suất để số được chọn không có ba chữ số liên tiếp nào đều bằng 0.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{137}{256}$. (C) $\frac{69}{128}$. (D) $\frac{273}{512}$.

Lời giải.

Gọi u_n là số các dãy nhị phân có n số hạng thỏa yêu cầu đề bài.

Ta thấy các chữ số đầu tiên bên trái của số nhị phân đó phải có dạng 11; 101 hoặc 1001.

Nên $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}, \forall n \geq 3$.

Ta tính trực tiếp

$$u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 4.$$

$$\text{Suy ra } u_4 = 7 \Rightarrow u_5 = 13; u_6 = 24; u_7 = 44; u_8 = 81; u_9 = 149.$$

$$\text{Suy ra } u_{10} = 274.$$

Mà số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 2^9$.

$$\text{Nên xác suất } P = \frac{274}{2^9} = \frac{137}{256}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Một tấm đề can hình chữ nhật được cuộn tròn lại theo chiều dài tạo thành một khối trụ có đường kính 50 cm. Người ta trải ra 250 vòng để cắt chữ và in tranh cổ động, phần còn lại là một khối trụ có đường kính 45 cm. Hỏi phần đã trải ra dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

(A) 373 (m).

(B) 192 (m).

(C) 187 (m).

(D) 384 (m).

Lời giải.

Chiều dài của phần trải ra là tổng chu vi của 250 đường tròn có bán kính là một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 25, công sai là $-a = -0.01$.

$$\text{Do đó chiều dài là } l = 2\pi(2.25 - 249 \cdot 0.01) \frac{250}{2} \approx 37314 \text{ cm} \approx 373 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua lần 9 liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu tiền?

(A) Thua 40000 đồng.

(B) Thắng 20000 đồng.

(C) Hòa vốn.

(D) Thua 20000 đồng.

Lời giải.

Số tiền đặt cược lần thứ n là $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1}$ với $u_1 = 20000$.

$$\text{Ta có: } u_{10} - \sum_{n=1}^9 u_1 \cdot 2^{n-1} = 20000 \cdot 2^9 - \sum_{n=1}^9 20000 \cdot 2^{n-1} = 20000.$$

Vậy du khách thắng 20000 đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm kể từ khi bắt đầu gửi tiền gần với kết quả nào sau đây?

(A) 212 triệu.

(B) 210 triệu.

(C) 216 triệu.

(D) 220 triệu.

Lời giải.

Số tiền người đó nhận được sau 6 tháng đầu: $100 \cdot (1 + 2\%)^2$.

Số tiền người đó nhận được sau 6 tháng tiếp theo là: $[100 \cdot (1 + 2\%)^2 + 100] \cdot (1 + 2\%)^2 \approx 212,28$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Ông Chính gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo và từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20 triệu đồng. Hỏi sau 18 năm số tiền ông Chính nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không thay đổi và ông Chính không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

(A) 1.686.898.000 đồng.

(B) 743.585.000 đồng.

(C) 739.163.000 đồng.

(D) 1.335.967.000 đồng.

Lời giải.

Số tiền (triệu đồng) trong tài khoản của ông Chính biến động như sau:

☑ Sau 1 năm: $200 \cdot (1 + 7\%)$.

☑ Sau 2 năm: $(200 \cdot (1 + 7\%) + 20)(1 + 7\%) = 200 \cdot (1 + 7\%) + 20(1 + 7\%)$.

☑ Sau n năm:

$$200 \cdot (1 + 7\%)^n + 20 \cdot (1 + 7\%)^{n-1} + \dots + 20 \cdot (1 + 7\%) = 200 \cdot (1 + 7\%)^n + 20 \cdot (1 + 7\%) \frac{(1 + 7\%)^{n-1} - 1}{7\%}.$$

Suy ra sau 18 năm số tiền ông Chính nhận được cả gốc và lãi là

$$200 \cdot (1 + 7\%)^{18} + 20 \cdot (1 + 7\%) \cdot \frac{(1 + 7\%)^{17} - 1}{7\%} = 1.335,967 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 38. Ông An gửi 320 triệu đồng vào ngân hàng ACB và VietinBank theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi vào ngân hàng ACB với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi vào ngân hàng VietinBank với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Biết tổng số tiền lãi ông An nhận được ở hai ngân hàng là 26670725,95 đồng. Hỏi số tiền ông An lần lượt gửi ở hai ngân hàng ACB và VietinBank là bao nhiêu (số tiền được làm tròn tới hàng đơn vị)?

(A) 200 triệu đồng và 120 triệu đồng.

(B) 140 triệu đồng và 180 triệu đồng.

(C) 120 triệu đồng và 200 triệu đồng.

(D) 180 triệu đồng và 140 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số tiền ông AN gửi ở hai ngân hàng ACB và VietinBank.

Từ đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 320000000 \\ x(1 + 2,1\%)^5 + y(1 + 9,73\%)^9 = 346670725,95 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120000000 \\ y = 200000000 \end{cases}$$

Vậy số tiền ông An gửi ở hai ngân hàng ACB và VietinBank lần lượt là 120 triệu đồng và 200 triệu đồng.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 39. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức như sau: Hàng tháng từ đầu mỗi tháng người đó sẽ gửi cố định số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,6% trên tháng. Biết rằng lãi suất không thay đổi trong quá trình gửi, thì sau 10 năm số tiền mà người đó nhận được cả vốn lẫn lãi gần với số nào nhất sau đây?

(A) 880,16 triệu.

(B) 880 triệu.

(C) 880,29 triệu.

(D) 880,26 triệu.

Lời giải.

Theo bài ra, ta có

- ☑ Cuối tháng 1, người đó có $5 \cdot 1,006$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.
- ☑ Cuối tháng 2, người đó có $(5 + 5 \cdot 1,006) \cdot 1,006 = 5 \cdot 1,006 \cdot (1 + 1,006)$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.
- ☑ Cuối tháng 3, người đó có $(5 + 5 \cdot 1,006 \cdot (1 + 1,006)) \cdot 1,006 = 5 \cdot 1,006 \cdot (1 + 1,006 + 1,006^2)$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.
- ...
- ☑ Cuối tháng n , người đó có $5 \cdot 1,006 \cdot (1 + 1,006 + 1,006^2 + \dots + 1,006^{n-1}) = 5 \cdot 1,006 \cdot \frac{1,006^n - 1}{0,006}$ triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm.

Do 10 năm = 120 tháng nên sau 10 năm tổng cộng số tiền người đó nhận được là

$$5 \cdot 1,006 \cdot \frac{1,006^{120} - 1}{0,006} = 880,26 \text{ triệu đồng.}$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 40. Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,5% mỗi tháng (tức là sau mỗi tháng toàn bộ lãi và gốc của tháng trước được nhập vào để tính lãi tháng sau). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng người đó có nhiều hơn 125 triệu.

(A) 45 tháng.

(B) 47 tháng.

(C) 44 tháng.

(D) 46 tháng.

Lời giải.

Gọi S_n là toàn bộ gốc và lãi ở tháng thứ n . Theo công thức lãi suất kép, ta có

$$S_n = 100 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^n > 125 \Leftrightarrow 1,005^n > 1,25$$

$$\Leftrightarrow n > \log_{1,005} 1,25 \approx 44,74.$$

Suy ra, giá trị nguyên nhỏ nhất của n là $n = 45$.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 41. Từ độ cao 55,8 (mét) của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình (mét) của bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

(A) (60; 63).

(B) (67; 69).

(C) (69; 72).

(D) (64; 66).

Lời giải.

Đặt $u_1 = 55,8$ (mét) là quãng đường bóng rơi khi thả xuống, $u_{n+1} = \frac{1}{10^n} u_1, n \geq 1$ là quãng đường bóng rơi sau lần nảy lên thứ n .

Ta có (u_n) là dãy cấp số nhân với $u_1 = 55,8$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.

Suy ra tổng quãng đường quả bóng rơi xuống là $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 55,8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = 62$.

Ngoài ra ta còn phải tính tổng quãng đường mà bóng nảy lên. Ta có tổng quãng đường bóng nảy lên bằng tổng quãng đường rơi của bóng trừ đi quãng đường thả rơi xuống.

Vậy tổng quãng đường hành trình của quả bóng là $62 + 62 - 55,8 = 68,2$ (mét).

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Một người vay ngân hàng 200 triệu đồng theo hình thức trả góp hàng tháng, lãi suất ngân hàng cố định 0,8% một tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là một tháng sau khi vay) một số tiền cố định không đổi tới hết tháng 48 thì hết nợ. Tổng số tiền lãi người đó phải trả trong quá trình nợ là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

(A) 39200000 đồng.

(B) 41641000 đồng.

(C) 38123000 đồng.

(D) 40345000 đồng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền cần phải trả ban đầu, x là số tiền cần phải trả mỗi tháng, r là lãi suất mỗi tháng.

Gọi T_n là số tiền còn lại cần phải trả ở cuối tháng n .

Ta có $T_n = A(1 + r)^n - \frac{x[(1 + r)^n - 1]}{r}$.

Như vậy $T_{48} = 0, A = 200 \cdot 10^6, r = 0,8\%$, suy ra $x = 5.034.184$ đồng.

Vậy số tiền lãi người đó phải trả là $5034184 \times 48 - 200000000 = 41.641.000$ đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho hình vuông cạnh bằng 1, chia thành 3×3 ô vuông rồi bỏ đi ô ở giữa. Tiếp tục mỗi ô vuông nhỏ cũng chia đều thành 3×3 ô vuông rồi bỏ đi ô ở giữa. Gọi (u_n) là dãy các tổng diện tích còn lại sau khi loại bỏ các ô vuông lần thứ n . Chọn khẳng định đúng.

(A) (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{3}$.

(B) (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = \frac{8}{9}$.

(C) (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = \frac{1}{3}$.

(D) (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có:

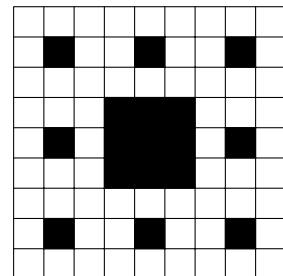
☑ Lần thứ nhất, bỏ đi 1 ô vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$. Diện tích còn lại là $u_1 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

☑ Lần thứ hai, bỏ đi 8 ô vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^2}$. Diện tích còn lại là

$$u_2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - (9 - 1) \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2.$$

☑ Lần thứ ba, bỏ đi 64 ô vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^4}$. Diện tích còn lại là

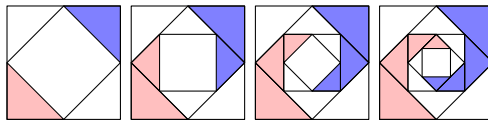
$$u_3 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 64 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3.$$



Vậy ta có nhận xét rằng (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 44. Một thợ thủ công muốn vẽ trang trí trên một hình vuông kích thước $4m \times 4m$ bằng cách vẽ một hình vuông mới với các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông ban đầu, và tô kín màu lên hai tam giác đối diện (tham khảo hình vẽ). Quá trình vẽ và tô theo quy luật đó được lặp lại 5 lần. Tính số tiền nước sơn để sơn $1m^2$ là 50000đ.



(A) 378500đ.

(B) 375000đ.

(C) 385000đ.

(D) 387500đ.

Lời giải.

Xét trong 1 hình vuông ta thấy diện tích 2 hình tam giác được tô bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình vuông đó, hình vuông được vẽ bằng cách nêu ra trong đề bài có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông ban đầu.

Đánh số các hình vuông từ ngoài vào trong là 1, 2, 3, 4, 5. Gọi diện tích hình vuông thứ i là S_i , diện tích tam giác có cạnh nằm trên cạnh của hình vuông thứ i là u_i , ta có

$$u_1 = \frac{S_1}{4}, S_2 = \frac{1}{2}S_1, u_2 = \frac{S_2}{4} = \frac{S_1}{8}, \dots$$

Vậy diện tích cần sơn là

$$4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{15}{2} (m^2).$$

Số tiền nước sơn là

$$\frac{15}{2} \cdot 50000 = 375000(\text{đ}).$$

Chọn đáp án (B)

B-ĐỀ ÔN TẬP

1. Phần Trắc nghiệm (7 điểm)

Câu 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Số hạng thứ $n+1$ là

(A) $u_{n+1} = 3^n + 3$.

(B) $u_{n+1} = 3 \cdot 3^n$.

(C) $u_{n+1} = 3^n + 1$.

(D) $u_{n+1} = 3(n+1)$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$.

Vậy số hạng thứ $n+1$ là $u_{n+1} = 3 \cdot 3^n$.

Chọn đáp án (B)

Câu 2. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Năm số hạng đầu của dãy số là

(A) 4, 5, 6, 7, 8.

(B) 4, 16, 32, 64, 128.

(C) 4, 6, 9, 13, 18.

(D) 4, 5, 7, 10, 14.

Lời giải.

Ta có

$$u_2 = u_1 + 1 = 5;$$

$$u_3 = u_2 + 2 = 7;$$

$$u_4 = u_3 + 3 = 10;$$

$$u_5 = u_4 + 4 = 14.$$

Vậy năm số hạng đầu của dãy số là 4, 5, 7, 10, 14.

Chọn đáp án (D)

Câu 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$; $u_{n+1} = u_n + n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị $u_1 + u_2 + u_3$ bằng

(A) 18.

(B) 13.

(C) 15.

(D) 16.

Lời giải.

$$u_1 = 3;$$

$$u_2 = u_1 + 1 = 3 + 1 = 4;$$

$$u_3 = u_2 + 2 = 4 + 2 = 6.$$

Suy ra $u_1 + u_2 + u_3 = 3 + 4 + 6 = 13$.

Chọn đáp án (B)

Câu 4. Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n + 1}$. Số $\frac{37}{13}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số đã cho?

(A) 8.

(B) 6.

(C) 5.

(D) 7.

Lời giải.

Giả sử số hạng $u_n = \frac{37}{13}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\frac{n^2 + 1}{2n + 1} = \frac{37}{13} \Leftrightarrow 13n^2 - 74n - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -\frac{4}{13} \end{cases}.$$

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n = 6$.

Vậy số $\frac{37}{13}$ là số hạng thứ 6 dãy số (u_n) .

Chọn đáp án (B)

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 1 \end{cases}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Số hạng thứ 4 của dãy số đã cho

là

(A) $u_4 = \frac{1}{2}$.

(B) $u_4 = 1$.

(C) $u_4 = \frac{11}{8}$.

(D) $u_4 = \frac{5}{88}$.

Lời giải.

Ta có

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{1}{2}(-3) + 1 = \frac{-1}{2};$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} + 1 = \frac{3}{4};$$

$$u_4 = \frac{1}{2}u_3 + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 1 = \frac{11}{8}.$$

Vậy số hạng thứ 4 của dãy số đã cho là $u_4 = \frac{11}{8}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n+2}$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

(A) Dãy số (u_n) là dãy số giảm và bị chặn.

(B) Dãy số (u_n) là dãy số tăng và bị chặn trên.

(C) Dãy số (u_n) là dãy số giảm và không bị chặn dưới.

(D) Dãy số (u_n) là dãy số tăng và không bị chặn trên.

Lời giải.

Ta có

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+2} = \frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+2} = u_n.$$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $0 < \frac{1}{n+2} < 1$ hay $0 < u_n < 1$.

Suy ra dãy số u_n là dãy số bị chặn.

Vậy dãy số u_n là dãy số giảm và bị chặn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2023$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để

$u_n < \frac{1}{2023}$ bằng

(A) 4092530.

(B) 4092529.

(C) 4092531.

(D) 4092532.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2}{1+u_n^2} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} = 1 + \frac{1}{u_n^2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_2^2} &= 1 + \frac{1}{u_1^2} \\ \frac{1}{u_3^2} &= 1 + \frac{1}{u_2^2} \\ \frac{1}{u_4^2} &= 1 + \frac{1}{u_3^2} \\ &\vdots \\ \frac{1}{u_n^2} &= 1 + \frac{1}{u_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

Cộng từng vế ta được: $\frac{1}{u_n^2} = (n-1) + \frac{1}{u_1^2} = (n-1) + \frac{1}{2023^2}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} u_n < \frac{1}{2023} &\Leftrightarrow \frac{1}{u_n^2} > 2023^2 \\ &\Leftrightarrow (n-1) + \frac{1}{2023^2} > 2023^2 \\ &\Leftrightarrow n > 1 - \frac{1}{2023^2} + 2023^2 \\ &\Leftrightarrow n > 4092530 - \frac{1}{2023^2}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n thỏa mãn điều kiện là 4092530.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

(A) 1, -2, -4, -6, -8.

(B) 1, -3, -6, -9, -12.

(C) 1, -3, -7, -11, -15.

(D) 1, -3, -5, -7, -9.

Lời giải.

Trong các dãy số trên, dãy số 1, -3, -7, -11, -15 là một cấp số cộng vì từ trái sang phải mỗi số đứng đằng sau sẽ kém số đứng liền trước nó 4 đơn vị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_5 = 11$ và $u_6 = 14$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) -6.

(B) 3.

(C) 12.

(D) 6.

Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho. Ta có

$$u_6 = u_5 + d \Leftrightarrow 14 = 11 + d \Rightarrow d = 3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng đã cho là

- (A) $u_n = 3 + 2n$. (B) $u_n = 3n - 1$. (C) $u_n = 2n + 1$. (D) $u_n = -2n + 5$.

Lời giải.

Cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = 2$ có số hạng tổng quát là

$$u_n = u_1 + (n - 1) \cdot d = 3 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Số hạng thứ 5 của cấp số cộng đã cho là

- (A) $u_5 = 11$. (B) $u_5 = 14$. (C) $u_5 = 17$. (D) $u_5 = 20$.

Lời giải.

Cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$ nên suy ra số hạng thứ 5 là

$$u_5 = u_1 + 4d = 2 + 4 \cdot 3 = 14.$$

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$, $u_2 = 1$. Số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

- (A) $u_{10} = -31$. (B) $u_{10} = -23$. (C) $u_{10} = -20$. (D) $u_{10} = 15$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d \Rightarrow d = -3$.

Khi đó, số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

$$u_{10} = u_1 + 9d = 4 + 9 \cdot (-3) = -23.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_1 = 4$, $u_3 = 10$. Công sai của cấp số cộng bằng

- (A) 6. (B) -6. (C) 3. (D) -3.

Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n) .

Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_1 + 2d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy công sai của cấp số cộng (u_n) là $d = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng?

- (A) 15. (B) 20. (C) 35. (D) 36.

Lời giải.

Ta có

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \Leftrightarrow 100 = -5 + (n - 1) \cdot 3 \Leftrightarrow 100 = 3n - 8 \Leftrightarrow n = 36.$$

Vậy số 100 là số hạng thứ 36 của cấp số cộng đã cho.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{20} = 60$. Tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

- (A) $S_{20} = 200$. (B) $S_{20} = -200$. (C) $S_{20} = -25$. (D) $S_{20} = 250$.

Lời giải.

Gọi u_1 và d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_5 = -15 \\ u_{20} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -35 \\ d = 5. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_{20} = \frac{20}{2} (u_1 + u_{20}) = 10 (-35 + 60) = 250.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 = 5$, $u_{10} = 15$. Số hạng thứ 7 là

(A) $u_7 = 12$.

(B) $u_7 = 8$.

(C) $u_7 = 7$.

(D) $u_7 = 9$.

Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) có

$$\begin{cases} u_5 = 5 \\ u_{10} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 5 \\ u_1 + 9d = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -3 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy số hạng thứ 7 là $u_7 = u_1 + 6d = -3 + 6 \cdot 2 = 9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Biết bốn số 5; x ; 15; y theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Giá trị của biểu thức $3x + 2y$ bằng

(A) 50.

(B) 70.

(C) 30.

(D) 80.

Lời giải.

Do 5; x ; 15; y theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng nên $x = \frac{5 + 15}{2} = 10$.

Ngoài ra $x + y = 2 \cdot 15$ nên $y = 30 - x = 30 - 10 = 20$.

Vậy $3x + 2y = 70$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Bốn số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 32 và tổng các bình phương của chúng bằng 336. Tích của bốn số đó là

(A) 5760.

(B) 15120.

(C) 1920.

(D) 1680.

Lời giải.

Gọi bốn số cần tìm là a , $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$. Từ giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a + a + d + a + 2d + a + 3d = 32 \\ a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 + (a + 3d)^2 = 336 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 16 - 3d \\ 4a^2 + 12ad + 14d^2 = 336 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 16 - 3d \\ (16 - 3d)^2 + 6d(16 - 3d) + 14d^2 = 336 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ d = -4 \\ 2a = 16 - 3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ a = 2 \\ d = -4 \\ a = 14. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy suy ra bốn số đó là 2, 6, 10, 14, nên tích của chúng là $P = 1680$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 = 18$ và $4S_n = S_{2n}$. Số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng là

(A) $u_1 = 3$, $d = 2$.

(B) $u_1 = 2$, $d = 3$.

(C) $u_1 = 2$, $d = 2$.

(D) $u_1 = 2$, $d = 4$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u_5 = 18 \\ 4S_n = S_{2n} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 18 \\ 4n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2} = 2n \cdot \frac{u_1 + u_{2n}}{2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 18 \\ 2(u_1 + u_n) = u_1 + u_{2n} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 18 \\ 2[2u_1 + (n - 1)d] = 2u_1 + (2n - 1)d \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 18 \\ 2u_1 - d = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên là 24850. Giá trị của biểu thức $S = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{48} u_{49}} + \frac{1}{u_{49} u_{50}}$ bằng

(A) $S = \frac{9}{246}$.

(B) $S = 123$.

(C) $S = \frac{4}{23}$.

(D) $S = \frac{49}{246}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$.

$24850 = 50(2 + 99d) \Rightarrow d = 5$. Có $u_{50} = u_1 + 49d = 1 + 49 \cdot 5 = 246$.

Nhận xét. $\frac{1}{u_k \cdot u_{k+1}} = \frac{1}{u_k \cdot (u_k + d)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_k + d} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right)$.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{48} u_{49}} + \frac{1}{u_{49} u_{50}} \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49}} - \frac{1}{u_{50}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}} \right) = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{246} \right) = \frac{49}{246}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Trong các dãy số cho bởi công thức truy hồi sau, dãy số nào là cấp số nhân?

(A) $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n^2$.

(B) $u_1 = -1, u_{n+1} = 2u_n$.

(C) $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n + 2$.

(D) $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n - 2$.

Lời giải.

Theo định nghĩa của cấp số nhân ta có dãy số cho bởi $u_1 = -1, u_{n+1} = 2u_n$ là cấp số nhân.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Ba số 1, 2, $-a$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

(A) 4.

(B) -4 .

(C) -2 .

(D) 2.

Lời giải.

Ba số 1, 2, $-a$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì suy ra $-a = 4 \Rightarrow a = -4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Một tam giác có số đo các góc lập thành cấp số nhân có công bội $q = 2$. Số đo các góc của tam giác đó lần lượt là

(A) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$.

(B) $\frac{\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}$.

(C) $\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{6}; \frac{4\pi}{6}$.

(D) $\frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}$.

Lời giải.

Giả sử tam giác ABC có ba góc theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội $q = 2$.

Ta có $B = 2A; C = 4A$. (1)

Mà $A + B + C = \pi$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A = \frac{\pi}{7}$.

Vậy số đo các góc của tam giác đó lần lượt là $\frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho cấp số nhân với $u_1 = 3, q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

(A) u_7 .

(B) u_6 .

(C) u_8 .

(D) Không thuộc cấp số trên.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$.

Theo đề $u_n = 192 \Leftrightarrow 3 \cdot (-2)^{n-1} = 192 \Leftrightarrow n = 7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân?

(A) $u_n = \frac{1}{3^n + 1}$.

(B) $u_n = -\frac{1}{3^{n-2}}$.

(C) $u_n = \frac{1}{3} - 2n$.

(D) $u_n = n^3 + 1$.

Lời giải.

Ta có $u_n = -\frac{1}{3^{n-2}} \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(-\frac{1}{3^{n-2}}\right) : \left(-\frac{1}{3^{n-3}}\right) = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $u_n = -\frac{1}{3^{n-2}}$ là một cấp số nhân với công bội là $q = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

(A) $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

(B) $u_{n+1} = nu_n$

(C) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$

(D) $u_{n+1} = u_{n+1} - 3$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = -5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = -5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho các cấp số nhân với $u_1 = \frac{-1}{2}; u_7 = -32$. Công bội của cấp số nhân là

(A) $\pm \frac{1}{2}$

(B) ± 4

(C) ± 2

(D) ± 1

Lời giải.

Ta có $u_7 = u_1 q^6 \Rightarrow -32 = -\frac{1}{2} q^6 \Rightarrow q = \pm 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\frac{1}{10}$. Khi đó $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ

(A) 2016.

(B) 2017.

(C) 2018.

(D) 2019.

Lời giải.

Ta có số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Giả sử $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ n của cấp số nhân, ta có

$$u_n = \frac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow n = 2018.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 29. Cho cấp số nhân với $u_1 = 3, q = -\frac{1}{2}$. Số 222 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

(A) Số hạng thứ 11.

(B) Số hạng thứ 9.

(C) Số hạng thứ 12.

(D) Không thuộc cấp số nhân.

Lời giải.

Giả sử số 222 là số hạng thứ n .

Ta có $u_n = u_1 q^{n-1} \Leftrightarrow 222 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 74$ (không tồn tại $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn).

Vậy 222 không là số hạng của cấp số nhân.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Có bao nhiêu cấp số nhân gồm bốn phần tử mà tổng của chúng bằng 45 và số hạng thứ tư bằng bốn lần số hạng thứ 2?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} S_4 = 45 \\ u_4 = 4u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 45 \\ u_1 \cdot q^3 = 4u_1 \cdot q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 0 \\ q^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 0; u_1 = 45 \\ q = 2; u_1 = 3 \\ q = -2; u_1 = -95. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot u_n$. Giá trị của tổng

$$S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \cdots + \frac{u_{10}}{10}$$

(A) $\frac{3280}{6561}$.

(B) $\frac{29524}{59049}$.

(C) $\frac{25942}{59049}$.

(D) $\frac{1}{243}$.

Lời giải.

Theo đề ta có

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \frac{u_n}{n}.$$

Mà $u_1 = \frac{1}{3}$ nên $\frac{u_2}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\frac{u_3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$; ...; $\frac{u_{10}}{10} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.

Do đó dãy $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$, công bội $q = \frac{1}{3}$.

Khi đó $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \cdots + \frac{u_{10}}{10} = \frac{3^{10} - 1}{2 \cdot 3^{10}} = \frac{59048}{2 \cdot 3^{10}} = \frac{29524}{59049}$.

Chọn đáp án (B). □

Câu 32. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 24$; $\frac{u_4}{u_{11}} = 16384$. Số hạng thứ 17 của cấp số nhân là

(A) $\frac{3}{67108864}$.

(B) $\frac{3}{268435456}$.

(C) $\frac{3}{536870912}$.

(D) $\frac{3}{214783648}$.

Lời giải.

Từ $\frac{u_4}{u_{11}} = 16384 \Leftrightarrow \frac{1}{q^7} = 16384 \Leftrightarrow q^7 = \left(\frac{1}{4}\right)^7 \Leftrightarrow q = \frac{1}{4}$.

Ta có $u_n = 24$ tương ứng khi $n = 1$.

Số hạng thứ 17 của cấp số nhân là $u_{17} = 24 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{16} = \frac{3}{536870912}$.

Chọn đáp án (C). □

Câu 33. Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

(A) $12m^2$.

(B) $24m^2$.

(C) $6m^2$.

(D) $48m^2$.

Lời giải.

Do diện tích của mặt sàn tính từ tầng một lập thành một cấp số nhân với $u_2 = \frac{1}{2} \cdot 12288 = 6144$ và $q = \frac{1}{2}$.

Ta có $\begin{cases} u_2 = 6144 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12288 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Ta có $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 12288 \cdot \frac{1}{2^{10}} = 12m^2$.

Vậy diện tích của mặt sàn tầng trên cùng là $12m^2$.

Chọn đáp án (A). □

Câu 34. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Giá trị tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$

(A) $S = \frac{15\pi}{4}$.

(B) $S = 4\pi$.

(C) $S = \frac{9\pi}{2}$.

(D) $S = 5\pi$.

Lời giải.

Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng cạnh nhân $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Với $n = 1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính

$$R_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = \pi \cdot \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Với $n = 2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính

$$R_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2 = \pi \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Với $n = 3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_3B_3C_3$ có bán kính

$$R_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_3 = \pi \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán

$$\text{kinh } R_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_n = \pi \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Khi đó ta được dãy $S_1; S_2; S_3; \dots; S_n \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

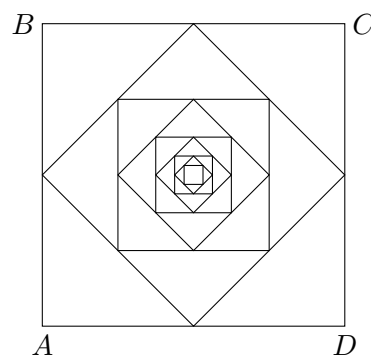
$$\text{Do đó tổng } S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q} = 4\pi.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 35.

Cho hình vuông $ABCD$ có các cạnh bằng a và có diện tích S_1 . Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2 . Tiếp tục làm như thế, ta được hình vuông thứ ba là A_2, B_2, C_2, D_2 có diện tích $S_3, \dots$ và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích có diện tích $S_4, S_5, \dots, S_{100}$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tổng có diện tích $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$ là



(A) $S = \frac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{100}}.$

(B) $S = \frac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{99}}.$

(C) $S = \frac{a^2}{2^{100}}.$

(D) $S = \frac{a^2(2^{99} - 1)}{2^{98}}.$

☞ Lời giải.

$$\text{Ta có } S_1 = a^2; S_2 = \frac{1}{2}a^2; S_3 = \frac{1}{4}a^2, \dots$$

Do đó $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{100}$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = S_1 = a^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Suy ra } S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100} = S_1 \cdot \frac{1 - q^{100}}{1 - q} = \frac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{99}}.$$

Chọn đáp án (B)

□

2. Phần Tự luận (3 điểm)

Câu 36. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

☞ Lời giải.

Giả sử cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công sai là d .

$$\text{Ta có } S_6 = 6u_1 + \frac{6 \cdot 5}{2}d \Leftrightarrow 6u_1 + 15d = 18. \quad (1)$$

$$S_{10} = 10u_1 + \frac{10 \cdot 9}{2}d \Leftrightarrow 10u_1 + 45d = 110. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình } \begin{cases} 6u_1 + 15d = 18 \\ 10u_1 + 45d = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7 \\ d = 4. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } S_{20} = 20u_1 + \frac{20 \cdot 19}{2}d = 20 \cdot (-7) + 190 \cdot 4 = 620.$$

□

Câu 37. Một tấm vải được quấn 100 vòng (theo chiều dài tấm vải) quanh một lõi hình trụ có bán kính đáy bằng 5 cm. Biết rằng bề dày tấm vải là 0,3 cm. Tính chiều dài của tấm vải.

☞ Lời giải.

Do bề dài của tấm vải là 0,3 cm nên bán kính của vòng cuộn sau sẽ lớn hơn bán kính vòng cuộn trước 0,3 cm. Từ đó chiều dài l của mảnh vải được tính theo công thức tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 2\pi \cdot 5$ và công sai $d = 2\pi \cdot 0,3$

$$l = \frac{100}{2} (2 \cdot 2\pi \cdot 5 + (100 - 1) \cdot 2\pi \cdot 0,3) \approx 12472 \text{ cm} \approx 125 \text{ m}.$$

□

Câu 38. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó.

Lời giải.

Gọi 3 số cần tìm là x, y, z . Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 114 & (1) \\ xz = y^2. & (2) \end{cases}$$

Lại có cấp số cộng có $u_1 = x, u_4 = y, u_{25} = z$. Gọi d là công sai của cấp số cộng ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u_4 = u_1 + 3d \\ u_{25} = u_1 + 24d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3d & (3) \\ z = x + 24d. & (4) \end{cases}$$

Thay (3), (4) vào (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} x + x + 3d + x + 24d = 114 \\ x(x + 24d) = (x + 3d)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 9d = 38 & (5) \\ d(2x - d) = 0. & (6) \end{cases}$$

Từ (6) $\Rightarrow d = 0$ hoặc $d = 2x$. Thay vào (5)

☑ Với $d = 0 \Rightarrow x = 38 \Rightarrow y = z = 38$, loại do điều kiện ba số khác nhau.

☑ Với $d = 2x \Rightarrow 19x = 38 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow y = 14, z = 98$.

Vậy các số cần tìm là 2; 14; 98.

□