SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THPT
NĂM HỌC 2018 - 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi thứ nhất: 26/9/2018
Thời gian làm bài: 180 phút (*không kể thời gian phát đề*)

Bài 1. (*5 điểm*)

Xét dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 3, a_2 = 7$ và $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ với $n = 1,2,3,...$

a) Chứng minh rằng $\frac{a_1^2}{7} + \frac{a_2^2}{7^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{7^n} < \frac{142}{3}, \forall n = 1,2,3,...$

b) Với mỗi $n \geq 1$, đặt $b_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + ... + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$.

Chứng minh rằng dãy số (b_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tìm giới hạn đó.

Bài 2. (*5 điểm*)

Cho đa thức bậc ba $P(x) = x^3 - 3x$.

a) Chứng minh rằng tồn tại các số thực a, b, c đôi một phân biệt sao cho

$$P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a.$$

b) Giả sử tồn tại 3 bộ số thực (a_i, b_i, c_i) với $i = \overline{1,3}$ gồm 9 số đôi một phân biệt sao cho $P(a_i) = b_i, P(b_i) = c_i, P(c_i) = a_i$ với $i = \overline{1,3}$. Đặt $S_i = a_i + b_i + c_i$ với $i = \overline{1,3}$.

Chứng minh rằng $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \neq S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1$.

Bài 3. (*5 điểm*)

Cho AB là một dây cố định khác đường kính của đường tròn (O) cố định. Gọi M là trung điểm của cung nhỏ AB. Xét đường tròn (O') thay đổi tiếp xúc với đoạn thẳng AB và tiếp xúc trong với (O) tại một điểm thuộc cung lớn AB (O' khác phía với M so với đường thẳng AB). Các đường thẳng qua M vuông góc với $O'A, O'B$ cắt đoạn thẳng AB lần lượt tại các điểm C, D.

a) Chứng minh rằng $AB = 2CD$.

b) Gọi T là một điểm thuộc (O') sao cho $\widehat{ATB} = 90°$. Giả sử tiếp tuyến của (O') tại T cắt đoạn thẳng AB tại N và đường thẳng MN cắt (O) tại K khác M. Vẽ đường tròn qua M, K và tiếp xúc ngoài với (O') tại S. Chứng minh rằng điểm S luôn di động trên một đường tròn cố định khi (O') thay đổi.

Bài 4. (*5 điểm*)

Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, hai điểm nguyên (hoành độ và tung độ là các số nguyên) A, B được gọi là "thân thiết" với nhau nếu A, B khác O và $-1 \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 1$ với O là gốc tọa độ.

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm nguyên $M(x, y)$ với $|x| \leq 19, |y| \leq 19$ thỏa mãn điểm M và điểm $N(3;7)$ "thân thiết" với nhau?

b) Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu điểm nguyên đôi một "thân thiết" với nhau?

--- HẾT ---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THPT
NĂM HỌC 2018 - 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi thứ hai: 27/9/2018
Thời gian làm bài: 180 phút (*không kể thời gian phát đề*)

Bài 1. (*5 điểm*)
Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\left(f(x^3+x)\right)^2 \le f(2x)+2 \text{ và } \left(f(-2x)\right)^3 \ge 3f(-x^3-x)+2 \text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ không phải là đơn ánh trên $\mathbb{R}$.
b) Chứng minh rằng $f(x)\ge -1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Bài 2. (*5 điểm*)
Cho tam giác ABC nhọn, không cân và nội tiếp (O). Một đường tròn (J) thay đổi đi qua B,C và cắt các đoạn thẳng AB,AC lần lượt tại D,E. Trên đường thẳng BC lấy hai điểm phân biệt R,S sao cho $(DER),(DES)$ tiếp xúc với đường thẳng BC. Giả sử (ADE) cắt (O) tại M khác A. Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác RSM.
a) Chứng minh rằng đường tròn (O') đi qua trực tâm của tam giác ARS.
b) Chứng minh rằng điểm O' luôn di động trên một đường thẳng cố định khi (J) thay đổi.

Bài 3. (*5 điểm*)
Gọi S là tập hợp các bộ $(a_1,a_2,\ldots,a_{164})$ là hoán vị của 164 số nguyên dương đầu tiên.
a) Có bao nhiêu hoán vị $(a_1,a_2,\ldots,a_{164})$ thuộc S sao cho với mọi $i\in\{1,2,\ldots,164\}$ ta luôn có $a_i\ne i$ và $a_i\equiv i \pmod{41}$?
b) Tồn tại hay không hoán vị $(a_1,a_2,\ldots,a_{164})$ thuộc S sao cho với mọi $i\in\{1,2,\ldots,164\}$ đều tồn tại các số nguyên $b_i\in\{0,1,\ldots,40\}$ thỏa mãn $a_1+a_2+\cdots+a_i\equiv b_i^2 \pmod{41}$?

Bài 4. (*5 điểm*)
Tại một hội nghị khoa học có 100 đại biểu tham dự. Người ta nhận thấy rằng không có 3 đại biểu nào đôi một quen nhau. Biết rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho không có đại biểu nào quen quá n đại biểu khác và với mọi $k, 1\le k\le n$ có ít nhất một đại biểu quen đúng k đại biểu khác. Hãy tìm giá trị lớn nhất của n.

--- HẾT ---