SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH **ĐỀ THI THỬ TN 2021 TRỰC TUYẾN LẦN THỨ 3**

Môn thi: TOÁN

Câu 1. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh từ một nhóm có 5 học sinh?

A. $5!$. **B.** A_5^3. **C.** C_5^3. **D.** 5^3.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$. Giá trị của u_3 bằng

A. 6. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		1		-1		1		$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		1		-3		$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x = -3$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -2$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

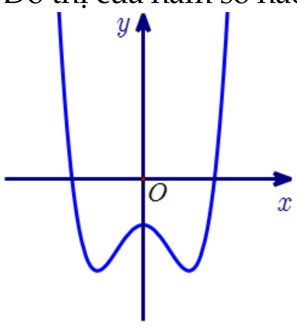
Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$

A. $x = 1$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -2$.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình sau



A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Câu 8. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 9. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(9a)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2} + \log_3 a$. **B.** $2\log_3 a$. **C.** $(\log_3 a)^2$. **D.** $2 + \log_3 a$.

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y=2^x$ là

A. $y'=2^x\ln 2$. **B.** $y'=2^x$. **C.** $y'=\dfrac{2^x}{\ln 2}$. **D.** $y'=x.2^{x-1}$.

Câu 11. Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{\dfrac{1}{a^5}}$ bằng

A. $a^{\frac{5}{2}}$. **B.** $a^{\frac{-5}{2}}$. **C.** $a^{\frac{-2}{5}}$. **D.** $a^{\frac{2}{5}}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ với a là số thực dương và $m,n\in Z^+$

Câu 12. Phương trình $5^{2x-1}=125$ có nghiệm là

A. $x=2.$ **B.** $x=1.$ **C.** $x=3.$ **D.** $x=6.$

Lời giải

$5^{2x-1}=125\Leftrightarrow 5^{2x-1}=5^3\Leftrightarrow 2x-1=3\Leftrightarrow x=2.$

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1)=1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\log_3(2x-1)=1\Leftrightarrow 2x-1=3\Leftrightarrow x=2$.

Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=x^2-3x+\dfrac{1}{x}$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là

A. $x^3-3x^2+\ln x+C$. **B.** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

C. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}-\ln|x|+C$. **D.** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{1}{x^2}+C$.

Lời giải

Ta có

$$f(x)=x^2-3x+\frac{1}{x}\Rightarrow\int f(x)dx=\int\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\ln|x|+C.$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\sin x-x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)dx=-\cos x-\dfrac{x^2}{2}+C$. **B.** $\int f(x)dx=\cos x-\dfrac{x^2}{2}+C$.

C. $\int f(x)dx=-\cos x+C$. **D.** $\int f(x)dx=-\cos x-x^2+C$.

Lời giải

$$\int f(x)dx=\int(\sin x-x)dx=\int\sin xdx-\int xdx=-\cos x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Câu 16. Nếu $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_5^9 f(x)\mathrm{d}x=-7$ thì $\int_1^9 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -4. **B.** 4. **C.** 10. **D.** -10.

Câu 17. Tích phân $I=\int_{-1}^{1}(4x^3-3)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=6$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=-4$.

Câu 18. Số phức liên hợp của số phức $z=1+2i$ là

A. $\overline{z}=-1+2i$. **B.** $\overline{z}=-1-2i$. **C.** $\overline{z}=2+i$. **D.** $\overline{z}=1-2i$.

Câu 19. Cho hai số phức $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -4-5i$. Số phức $z = z_1 + z_2$ bằng

A. $-2-2i$. **B.** $-2+2i$. **C.** $2+2i$. **D.** $2-2i$.

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z = \dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$ có tọa độ là

A. $(-1;-4)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(1;-4)$. **D.** $(-1;4)$

Câu 21. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 8$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 12. **B.** 8. **C.** 24. **D.** 6.

Câu 22. Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước $3;\ 4;\ 8$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng:

A. 15. **B.** 12. **C.** 32. **D.** 96.

Câu 23. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích của khối nón đã cho.

A. 8π. **B.** 16π. **C.** $\dfrac{16\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi}{3}$.

Câu 24. Cho hình trụ có bán kính $r = 7$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 42π. **B.** 21π. **C.** 49π. **D.** 147π.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(4;-1;-1)$ **B.** $G\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ **C.** $G\left(2;\dfrac{-1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ **D.** $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+10=0$ có bán kính R bằng

A. $R=4$. **B.** $R=1$. **C.** $R=2$. **D.** $R=3\sqrt{2}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;1;-2)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;-4)$

A. $x+2y-4z-3=0$. **B.** $-x+2y-4z+3=0$.

C. $x+2y-4z-13=0$. **D.** $-x+2y-4z+13=0$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}=(2;1;1)$. **B.** $\overrightarrow{u_4}=(1;2;-3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(-1;2;1)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-3)$.

Câu 29. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nữ và 15 nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh. Tính xác
suất để 3 học sinh được chọn có 1 nữ và 2 nam.

A. $\dfrac{13}{210}$. **B.** $\dfrac{17}{210}$. **C.** $\dfrac{15}{9880}$. **D.** $\dfrac{525}{1976}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\,;1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1\,;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 31. Cho hàm số $y=x^3-9x+2\sqrt{3}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$. Tính tổng $S=M+m$?

A. $S=4\sqrt{3}+2$. **B.** $S=4\sqrt{3}-2$. **C.** $S=8+2\sqrt{3}$. **D.** $S=8-2\sqrt{3}$.

Câu 32. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log\left(x^2-4x+5\right)>1$

A. $S=(5;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;-1)$. **D.** $S=(-1;5)$.

Câu 33. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\left[3f(x)+1\right]\mathrm{d}x$

A. $I=7$. **B.** $I=11$. **C.** $I=-11$. **D.** $I=8$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, số phức liên hợp của số phức $z=(1+2i)(1-i)$ có điểm biểu diễn là điểm nào sau đây?

A. $Q(-3;1)$. **B.** $N(3;1)$. **C.** $M(3;-1)$. **D.** $P(-1;3)$.

Câu 35. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB; SC đôi một vuông góc và $SA=SB=SC=1$. Tính $\cos\alpha$, trong đó α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)?

A. $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=0\end{cases}$. Biết rằng đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B. Độ dài của đoạn thẳng AB bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Thay $x=1+t,\ y=2-2t,\ z=0$ vào phương trình mặt cầu (S) ta được $(1+t)^2+(2-2t)^2+0^2-2(1+t)-4(2-2t)-6.0=0\Leftrightarrow 5t^2=5\Leftrightarrow t=\pm1$.

+) $t=1\Rightarrow A(2;0;0)$.

+) $t=-1\Rightarrow B=(0;4;0)$.

Vậy $AB=2\sqrt{5}$.

Câu 37. Số các giá trị của a sao cho phương trình $z^2+az+3=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $z_1^2+z_2^2=-5$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $z_1.z_2=3; z_1+z_2=-a$.

$$z_1^2+z_2^2=-5\Leftrightarrow\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1.z_2=-5\Leftrightarrow(-a)^2-2.3=-5\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị a thỏa mãn.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục Ox và đi qua hai điểm $A(3;1;0)$, $B(5;5;0)$ là

A. $x^2+(y-5)^2+z^2=25$. **B.** $(x-10)^2+y^2+z^2=50$.

C. $(x-10)^2+y^2+z^2=5\sqrt{2}$. **D.** $(x-4)^2+(y-3)^2+z^2=5$.

Lời giải

Gọi I là tâm mặt cầu, tâm $I\in Ox$ nên có tọa độ $I(x;0;0)$.

Mặt cầu đi qua hai điểm $A(3;1;0)$, $B(5;5;0)$ nên:

$IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{(5-x)^2 + 5^2 + 0^2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 = x^2 - 10x + 50$

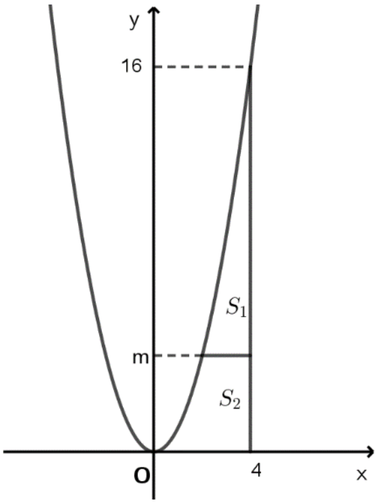
$\Leftrightarrow x = 10$

Khi đó tọa độ tâm $I(10;0;0)$.

Bán kính mặt cầu: $R = IA = \sqrt{(3-10)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$.

Phương trình mặt cầu: $(x-10)^2 + y^2 + z^2 = 50$.

Câu 39. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $y = m$ $(0 < m < 16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 thỏa mãn $S_1 = S_2$ (như hình vẽ). Giá trị của m bằng



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = m$ $(0 < m < 16)$ là $x^2 = m \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m}$.

Ta có: $S_1 = \int_{\sqrt{m}}^{4} \left|x^2 - m\right| dx = \int_{\sqrt{m}}^{4} \left(x^2 - m\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - mx\right)\Big|_{\sqrt{m}}^{4} = \frac{64}{3} - 4m + \frac{2m\sqrt{m}}{3}$.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H). Ta có: $S = \int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3}$.

Ta có: $S_1 = S_2 \Leftrightarrow S_1 = \frac{1}{2}S \Leftrightarrow \frac{64}{3} - 4m + \frac{2m\sqrt{m}}{3} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \frac{2m\sqrt{m} - 12m + 32}{3} = 0$

$\Leftrightarrow m\sqrt{m} - 6m + 16 = 0$ (1)

Đặt $t = \sqrt{m}$, $0 < m < 16 \Rightarrow 0 < t < 4$.

Phương trình (1) trở thành: $t^3 - 6t^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (t-2)\left(t^2 - 4t - 8\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 2 + 2\sqrt{3} \\ t = 2 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vì $0 < t < 4$ nên chỉ có $t = 2$ thỏa mãn.

Với $t = 2$ ta có $\sqrt{m} = 2 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 40. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log \frac{\sqrt{x-2}}{100y} = \left(y - \sqrt{x-2}\right)\left(y + \sqrt{x-2} + 1\right) - 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{\ln\left(y^2 + 2\right)}{\sqrt[2021]{x}}$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(700;800)$. **B.** $(500;600)$. **C.** $(600;700)$. **D.** $(800;900)$.

Lời giải

Với $x>2$ và $y>0$ thì

$\log\dfrac{\sqrt{x-2}}{100y}=\left(y-\sqrt{x-2}\right)\left(y+\sqrt{x-2}+1\right)-2$

$\Leftrightarrow \log\sqrt{x-2}-\log(100y)=y^2+y-x-\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow \log\sqrt{x-2}+x+\sqrt{x-2}=y^2+y+\log(100y)$

$\Leftrightarrow \log\sqrt{x-2}+x-2+\sqrt{x-2}=\log y+y^2+y$. (1)

Đặt $y=f(t)=\log t+t^2+t$, $t>0$ thì

$f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 10}+2t+1>0,\ \forall t>0$

nên

$y=f(t)=\log t+t^2+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra

$y=\sqrt{x-2}$.

Thế $y=\sqrt{x-2}$ vào P, ta có

$P=\dfrac{\ln x}{\sqrt[2021]{x}}$.

Khi đó,

$P'=\dfrac{1-\dfrac{1}{2021}\ln x}{x.\sqrt[2021]{x}}=0\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{2021}$.

Bảng biến thiên

x	2		e^{2021}		$+\infty$
P'		$+$	0	$-$	
P			$\dfrac{2021}{\mathrm{e}}$		

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{2021}{\mathrm{e}}\approx 743,48\in(700;800)$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & khi\ x\ge 1\\ 2x+1 & khi\ x>1\end{cases}$. Tích phân $I=\displaystyle\int_{e^{-2}}^{e}\dfrac{f(\ln x+2)}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. 18. **B.** $\dfrac{34}{3}$. **C.** 12. **D.** $\dfrac{56}{3}$.

Lời giải

Đặt $t=\ln x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi biến $x=e^{-2}\Rightarrow t=0$ và $x=e\Rightarrow t=3$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t$

$=\displaystyle\int_0^1\left(t^2+2t\right)\mathrm{d}t+\int_1^3(2t+1)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{1}{3}t^3+t^2\right)\Big|_0^1+\left(t^2+t\right)\Big|_1^3$

$=\left(\dfrac{1}{3}+1\right)+\left(3^2+3\right)-(1+1)=\dfrac{34}{3}$.

Câu 42. Xét các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(x;y)$.

Ta có

$$\frac{z+2}{z-2i}=\frac{x+yi+2}{x+yi-2i}=\frac{\left[(x+2)+yi\right]\left[x-(y-2)i\right]}{x^2+(y-2)^2}=\frac{x^2+2x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}+\frac{-(x+2)(y-2)+xy}{x^2+(y-2)^2}i$$

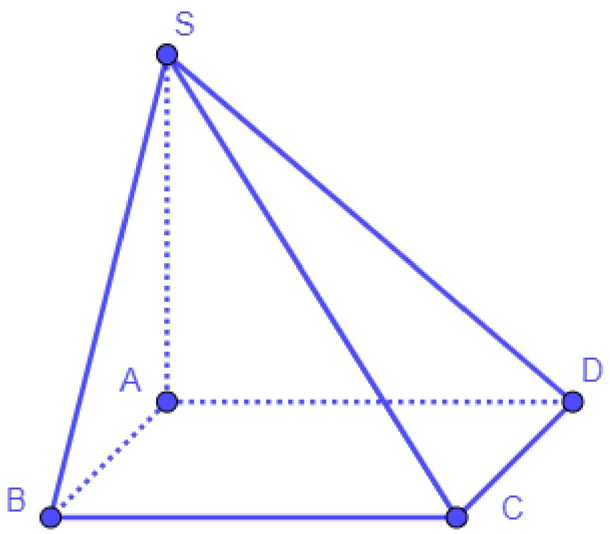
Để $\dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo thì $\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=0\\ z\neq 2i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2x-2y=0\\ z\neq 2i\end{cases}$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc đường tròn cố định $(C): x^2+y^2+2x-2y=0$ trừ điểm $A(0;2)$. Đường tròn có tâm $I(-1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30°. Thể tích khối chóp đó bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Lời giải



1.

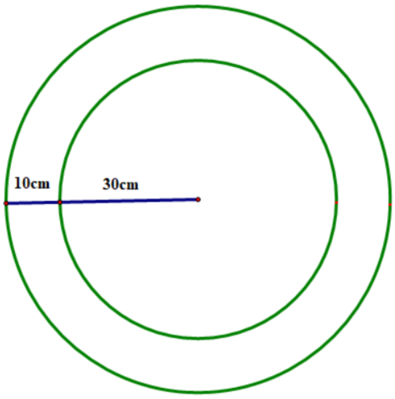
Ta có: $BC\perp(SAB)$, suy ra góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) là góc CSB.

Trong $\Delta SBC: SB=BC.\cot 30^\circ=a\sqrt{3}$.

Trong ΔSAB: $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Câu 44. Dự án công trình nông thôn mới trên đoạn đường X, chủ đầu tư cần sản xuất khoảng 800 chiếc cống dẫn nước như nhau có dạng hình trụ từ bê tông. Mỗi chiếc cống có chiều cao $1\,\text{m}$, bán kính trong bằng $30\,\text{cm}$ và độ dày của bê tông bằng $10\,\text{cm}$ (xem hình minh họa). Nếu giá bê tông là 1.000.000 đồng/ m^3 thì để sản xuất 800 chiếc cống trên thì chủ đầu tư cần hết bao nhiêu tiền bê tông? (Làm tròn đến hàng triệu đồng).

A. 176.000.000 đồng. **B.** 175.000.000 đồng.
C. 177.000.000 đồng. **D.** 178.000.000 đồng.

Lời giải

Đổi $10\,\text{cm} = 0{,}1\,\text{m}$; $30\,\text{cm} = 0{,}3\,\text{m}$.

Gọi V_1 là thể tích khối trụ với hai đáy là hình tròn lớn (đường tròn giới hạn bởi vành ngoài cống nước)

V_2 là thể tích khối trụ với hai đáy là hình tròn nhỏ (đường tròn giới hạn bởi vành trong cống nước).

Ta có: $V_1 = \pi R_1^2 h = \pi\left(0{,}1+0{,}3\right)^2.1 = 0{,}16\pi\ \left(\text{m}^3\right)$.

$V_2 = \pi R_2^2 h = \pi.0{,}3^2.1 = 0{,}09\pi\ \left(\text{m}^3\right)$.

Thể tích khối bê tông cho một chiếc cống là $V = V_1 - V_2 = 0{,}16\pi - 0{,}09\pi = 0{,}07\pi\ \left(\text{m}^3\right)$.

Thể tích khối bê tông cho 800 chiếc cống là $800.0{,}07\pi = 56\pi\ \left(\text{m}^3\right)$.

Số tiền cần để sản xuất 800 chiếc cống là $56\pi.1000000 \approx 176000000$ (đồng).

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=t+4\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): z-3=0$. Một đường thẳng đi qua điểm $M(-1;0;3)$, cắt Δ và tạo với (P) một góc $45°$ có phương trình là

A. $d:\begin{cases}x=-t-1\\y=-t\\z=t+3\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=-1\\y=-t-1\\z=t-3\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=1\\y=-t\\z=t+3\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=-1\\y=-t+1\\z=t+2\end{cases}$.

Lời giải

Gọi d là đường thẳng cần tìm, A là giao điểm của d và Δ.

Khi đó: $A(2t;t;t+4)$ và $\overrightarrow{MA} = (2t+1;t;t+1)$ là vecto chỉ phương của d.

Do $\left(d;(P)\right) = 45° \Rightarrow \left|\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{n_P}\right)\right| = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|t+1|}{\sqrt{1}.\sqrt{(2t+1)^2+t^2+(t+1)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

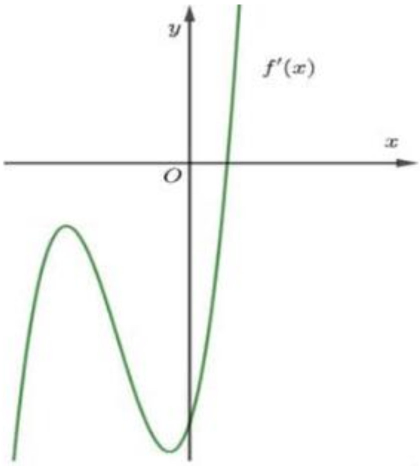
$\Leftrightarrow |t+1| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{6t^2+6t+2} \Leftrightarrow t^2+2t+1 = \dfrac{1}{2}\left(6t^2+6t+2\right) \Leftrightarrow 2t^2+t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Với $t=0 \Rightarrow d$ nhận $\overrightarrow{MA}=(1;0;1)$ làm vecto chỉ phương $\Rightarrow d:\begin{cases}x=t-1\\y=0\\z=t+3\end{cases}$ (không có đáp án)

Với $t=-\frac{1}{2}\Rightarrow d$ nhận $\vec{u}=2\overrightarrow{MA}=(0;-1;1)$ làm vecto chỉ phương$\Rightarrow d:\begin{cases}x=-1\\y=-t\\z=t+3\end{cases}$

Điểm $(-1;1;2)$ thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1\\y=-t\\z=t+3\end{cases}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Biết $f(0)=0$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|\frac{1}{3}f\left(x^3\right)-2x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Xét $h(x)=\frac{1}{3}f\left(x^3\right)-2x\Rightarrow h'(x)=x^2f'\left(x^3\right)-2$

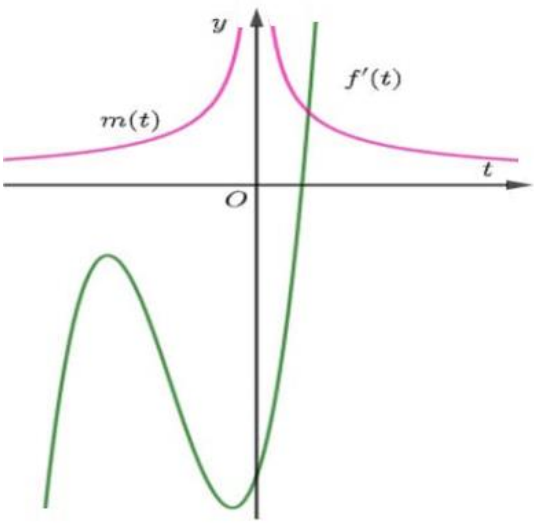
Ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\frac{2}{x^2},(x\neq 0),(1)$

Đặt $t=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$

Từ (1) ta có $f'(t)=\frac{2}{\sqrt[3]{t^2}},(2)$

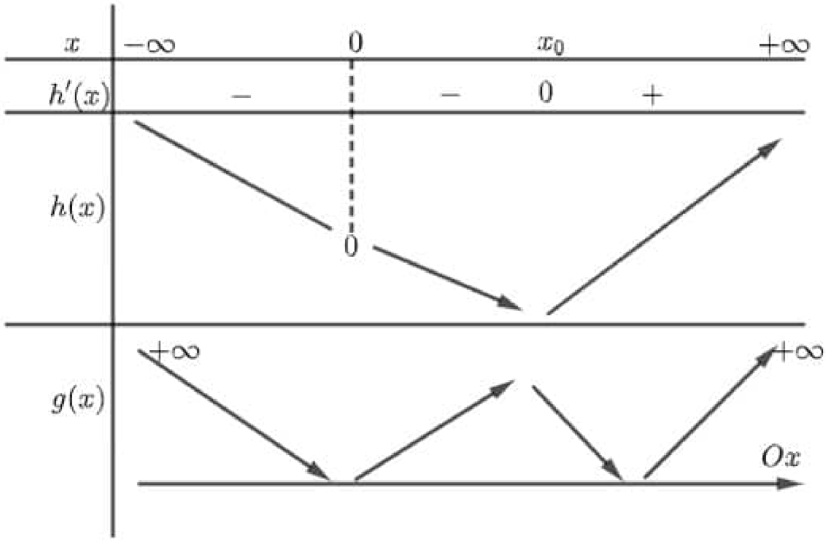
Xét $m(t)=\frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}\Rightarrow m'(t)=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{t^5}}$

Khi đó ta có đồ thị hai hàm số như sau



Suy ra phương trình (2) có 1 nghiệm $t=t_0>0\Rightarrow$ pt (1) có nghiệm $x=\sqrt[3]{t_0}=x_0>0$

Bảng biến thiên của $h(x), g(x)=|h(x)|$ như sau



Vậy hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 47. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $2^{x-y}+2^{x^2-x} \le \dfrac{2^{x^2-x+2}}{2^{x^2+y-2x}+1}$. Giá trị lớn nhất của $x-y$ là M khi $x=m$. Tổng $M+m$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết: $2^{x-y}+2^{x^2-x} \le \dfrac{2^{x^2-x+2}}{2^{x^2+y-2x}+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^{y-x}}+\dfrac{1}{2^{x-x^2}} \le \dfrac{4}{2^{y-x}+2^{x-x^2}}$

Đặt $\begin{cases} 2^{y-x}=a>0 \\ 2^{x-x^2}=b>0 \end{cases}$ khi đó giả thiết trở thành $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \le \dfrac{4}{a+b}$ (1)

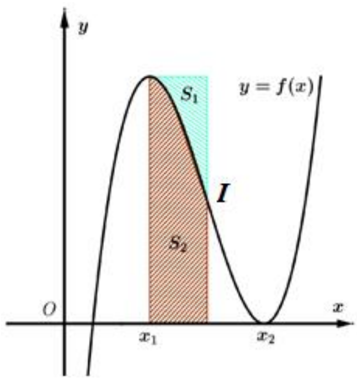
Bất đẳng thức (1) tương đương $(a-b)^2 \le 0 \Leftrightarrow a=b$

$\Rightarrow 2^{x^2-x}=2^{y-x} \Leftrightarrow x^2-x=y-x \Leftrightarrow y=x^2$.

Khi đó $x-y=x-x^2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{4}$.

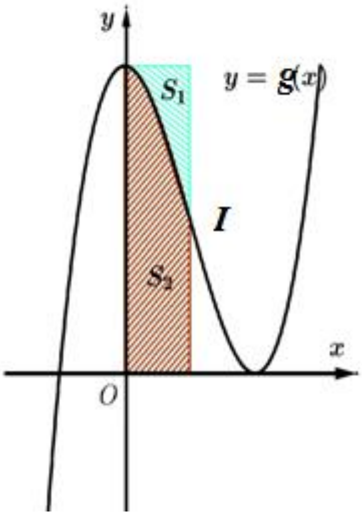
Suy ra giá trị lớn nhất của $y-x$ là $M=\dfrac{1}{4}$ khi $x=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $M+m=\dfrac{3}{4}$.

Câu 48. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2=x_1+2$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch sọc trong hình bên. Tỉ số $\dfrac{S_2}{S_1}$ bằng



A. $\frac{13}{3}$. B. $\frac{13}{4}$. C. $\frac{17}{5}$. D. $\frac{17}{4}$.

Lời giải



Kết quả bài toán không thay đổi nếu ta tịnh tiến đồ thị sang trái sao cho điểm cực trị $x_1 = 0$.

Khi đó ta có hàm số mới là $g\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow g'\left(x\right) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị hàm số mới ta thấy hàm số có hai điểm cực trị là $x = 0; x = 2$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} g'\left(0\right) = 0 \\ g'\left(2\right) = 0 \\ g\left(2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b = 0 \\ 8a + 4b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ d = 4a \end{cases}$

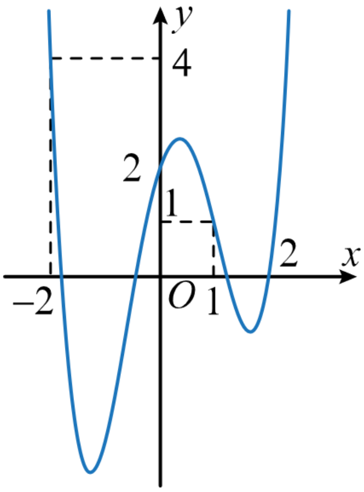
Vậy ta có $g\left(x\right) = ax^3 - 3ax^2 + 4a$

$S_1 + S_2 = \left|1.g\left(0\right)\right| = 4a$

$S_2 = a\int_0^1 \left|x^3 - 3x^2 + 4\right| = \frac{13}{4}a \Rightarrow S_1 = 4a - \frac{13}{4}a = \frac{3}{4}a$

Vậy $\frac{S_2}{S_1} = \frac{13}{3}$.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^4$ là

A. 7. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

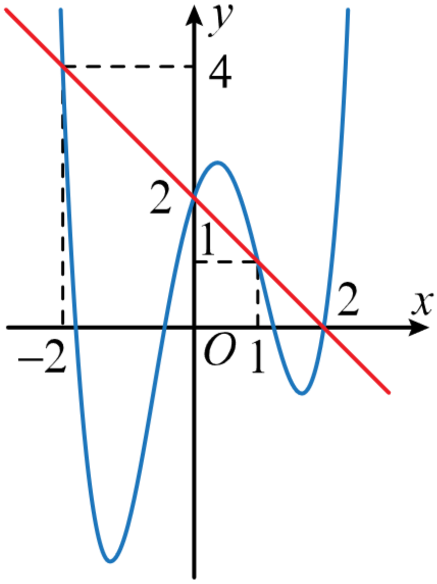
Ta có:

$g'(x) = (2x-4)f'(x^2 - 4x + 3) - 6(x-2) + 2(x-2)^3 = (2x-4)\left[f'(x^2 - 4x + 3) - 3 + (x-2)^2\right]$

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-4=0 \\ f'(x^2-4x+3)-3+(x-2)^2=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f'(x^2-4x+3)=2-(x^2-4x+3) \quad (*) \end{array}\right.$

Đặt $x^2-4x+3=t$, ta có: $(*) \Leftrightarrow f'(t)=2-t$.



Từ đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=2-t$ ta có:

$$f'(t)=2-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=-2 \\ x^2-4x+3=0 \\ x^2-4x+3=1 \\ x^2-4x+3=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=2\pm\sqrt{2} \\ x=2\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2-\sqrt{2}$		1		2		3		$2+\sqrt{2}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$ tâm I. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z}{1}$ và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh I, đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết (α) không đi qua gốc tọa độ, gọi $H(x_H, y_H, z_H)$ là tâm đường tròn (C). Giá trị của biểu thức $T=x_H+y_H+z_H$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $(\alpha)\perp d \Rightarrow \overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(1;-4;1) \Rightarrow (\alpha): x-4y+z+m=0$

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$ tâm $I \Rightarrow \begin{cases} I(1;-1;1) \\ R=\sqrt{6} \end{cases}$

$$d_{(I,(P))}=\frac{|1-4.(-1)+1+m|}{\sqrt{1+16+1}}=\frac{|m+6|}{3\sqrt{2}} \Rightarrow V_{no'n}=\frac{1}{3}d_{(I,(P))}.\pi R_{(C)}^2=\frac{1}{3}d_{(I,(P))}.\pi.\left(R_{(S)}^2-d_{(I,(P))}^2\right)$$

Xem $V_{no'n}$ là hàm với ẩn là $d_{(I;(P))}$ với $0 < d_{(I;(P))} < \sqrt{6}$. Khảo sát hàm số ta tìm được giá trị lớn nhất và giá trị lớn nhất khi $R_{(S)}^2 = 3d_{(I,(P))}^2 \Rightarrow d_{(I,(P))}^2 = \dfrac{6}{3} = 2 \Rightarrow d_{(I;(P))} = \sqrt{2} \Rightarrow m = 0 \vee m = -12$. Loại $m = 0$ vì (α) không đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow (\alpha): x - 4y + z - 12 = 0$

Gọi (d') đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow (d')\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$

$H = (d') \cap (\alpha) \Rightarrow t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow H\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{-7}{3}; \dfrac{4}{3}\right) \Rightarrow T = \dfrac{1}{3}$.

HẾT