

Gv.ThS Nguyễn Vũ Minh

0917 05 00 99

TOÁN 12

(SGK CTST)

VEC TƠ

HỆ TOẠ ĐỘ KHÔNG GIAN

Geometry

(CTST)

Chương II: VECTO và HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



Bài 01: Vector và các phép toán trong không gian

1 Vector trong không gian

Vector trong không gian là một *đoạn thẳng có hướng*.

• Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vector có điểm đầu A , điểm cuối B .

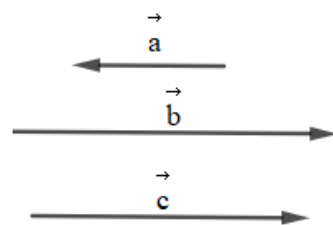
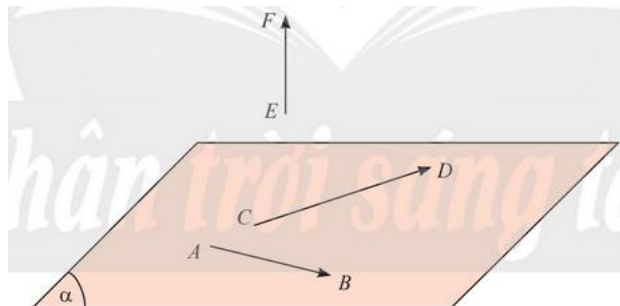
• **Độ dài của vector** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của nó. Kí hiệu là $|\vec{a}|$.

• **Giá** của vector là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vector đó.

• Hai vector được gọi là **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

• Nếu hai vector cùng phương thì chúng có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.

Ví dụ hình bên:



• Hai vector được gọi là **bằng nhau** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Nếu hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.

• Hai vector được gọi là **đối nhau** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng.

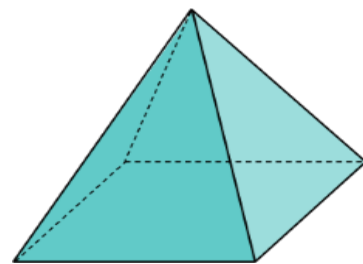
Vector đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.

Ví dụ 01: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

a) Chỉ ra các vector có điểm đầu là S và điểm cuối là các đỉnh của đa giác đáy.

b) Tìm các vector có độ dài bằng độ dài của vector $\overrightarrow{SA}$.

c) Tìm các vector đối của vector $\overrightarrow{CB}$.

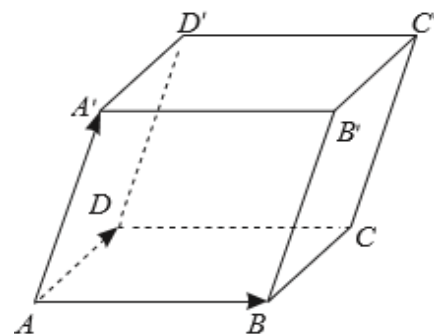


Ví dụ 02: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình vẽ).

a) Giá của ba vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

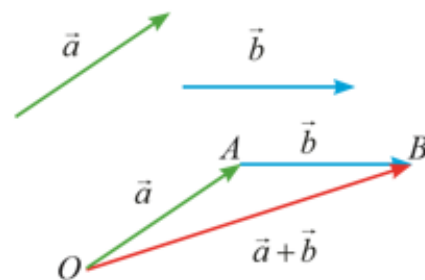
b) Tìm các vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$.

c) Tìm các vector đối của vector $\overrightarrow{AD}$.



2 Tổng – hiệu hai vector

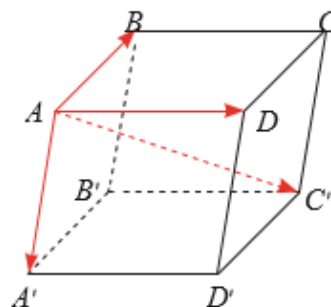
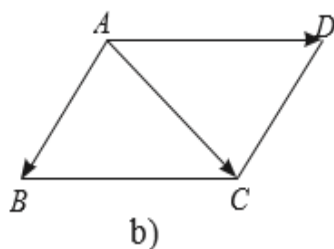
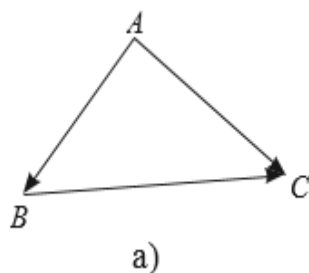
a) Tổng của hai vector: Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là tổng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.



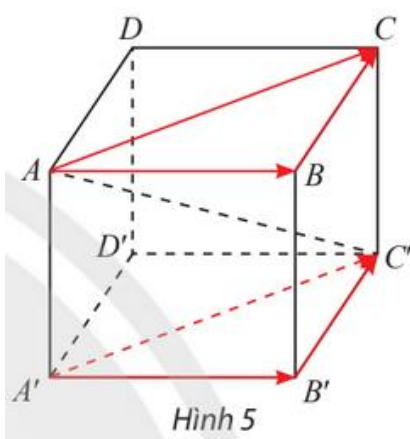
Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

Với mọi vector $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.



Ví dụ 01: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' (Hình 5).



a) Trong mặt phẳng (ABCD), tìm vector tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Trong mặt phẳng (A'B'C'D'), tìm vector tổng $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$.

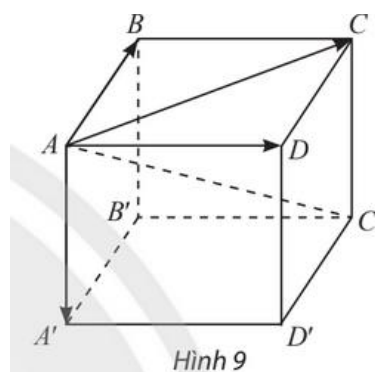
b) Tìm mối liên hệ giữa các cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

c) Giải thích tại sao $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$.

Ví dụ 02: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

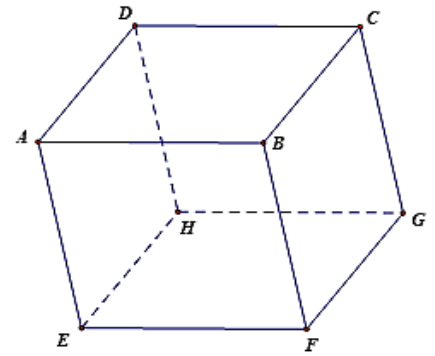
a) Tìm các vector tổng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$.

b) Dùng kết quả của câu a và tính chất kết hợp của phép cộng vector để chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.



Ví dụ 03: Cho hình hộp ABCD.EFGH. Tìm các vectơ:

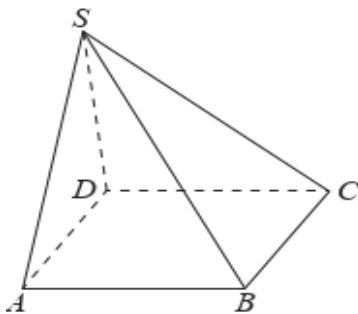
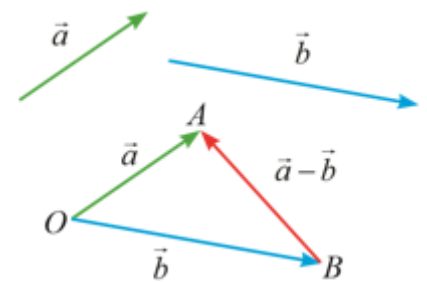
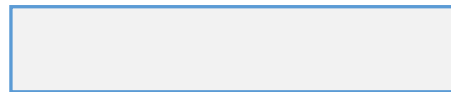
- a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$;
b) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AB}$.



Ví dụ 04: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

b) Hiệu của hai vectơ: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.



Ví dụ 02: Cho hình chóp S.ABCD

có đáy là hình bình hành. Khi đó:

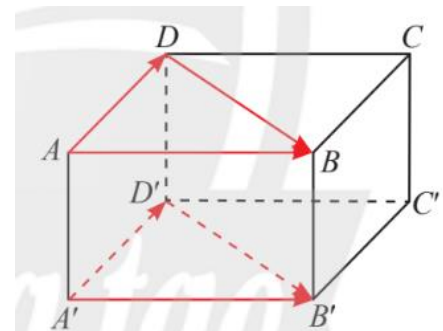
$$\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{DC} =$$

$$\overrightarrow{CS} - \overrightarrow{DA} =$$

$$\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SB} =$$

Ví dụ 02: Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'

- a) Trong mặt phẳng (ABCD), tìm vectơ hiệu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
Trong mặt phẳng (A'B'C'D'), tìm vectơ hiệu $\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D'}$.
b) Tìm mối liên hệ giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{D'B'}$.
c) Giải thích tại sao $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'D'}$.

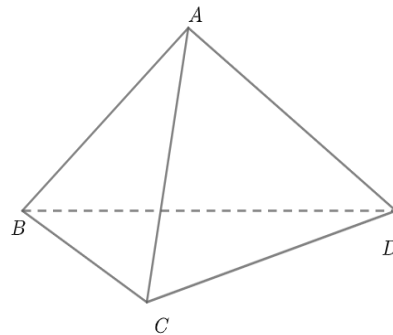


Gv. Nguyễn Vũ Minh
Sưu Tập và Biên Soạn
Zalo: 0917 05 00 99



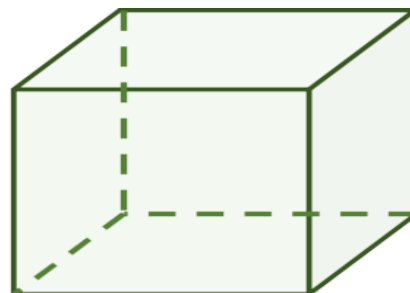
Ví dụ 03: Cho tứ diện $ABCD$ có M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm các vectơ:

- a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ND}$
b) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NC}$.



Ví dụ 04: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng đơn vị. Tìm độ dài các vectơ sau đây:

- a) $\vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$
b) $\vec{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$



3 Tích một số với một vectơ

Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$	Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu	Độ dài
Nếu	Nếu	Là

• Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{a} = \vec{0}$.

b. Tính chất: Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kỳ, với mọi số thực h và k , ta có:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
- $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Chú ý:

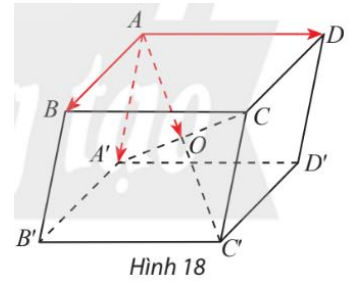
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Trung điểm đoạn thẳng	Trọng tâm tam giác	Trọng tâm tứ diện
Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB , M tùy ý: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0};$ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$	Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC , M tùy ý: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0};$ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$	Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, M tùy ý: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0};$ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

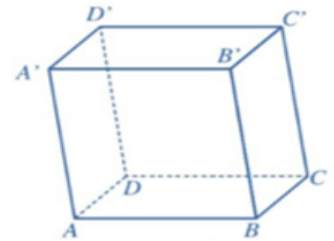
Ví dụ 01: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. AC' và $A'C$ cắt nhau tại O

a) Tìm vec tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

b) Cho biết mối quan hệ giữa vec tơ tìm được ở **câu a)** và vec tơ $\overrightarrow{AO}$.

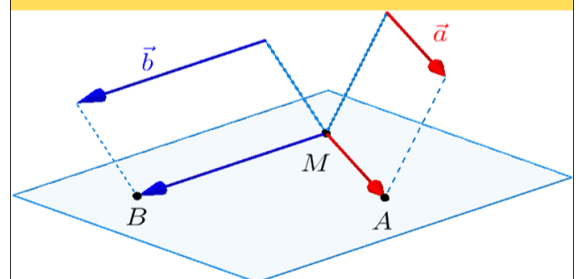


Ví dụ 02: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$.



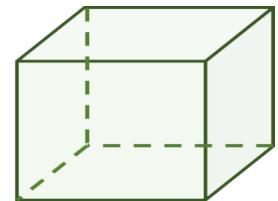
4 Tích vô hướng của hai vector

GÓC GIỮA 2 VECTO TRONG KHÔNG GIAN



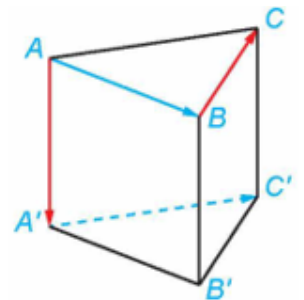
Ví dụ 01: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Xác định góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'})$, $(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'})$.



Ví dụ 02: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$.

Tính các góc giữa: a/ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$; b/ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$.



Công thức

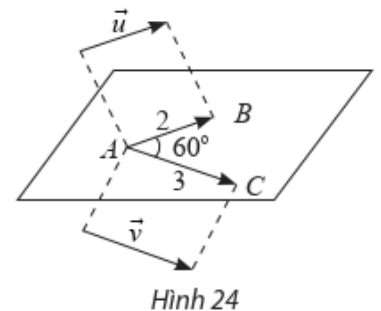
Ví dụ 02: Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u}| = 2$ và $|\vec{v}| = 3$.

Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$ (**Hình 24**). Giả sử $BAC = 60^\circ$.

a) Tính góc $(\vec{u}, \vec{v})$.

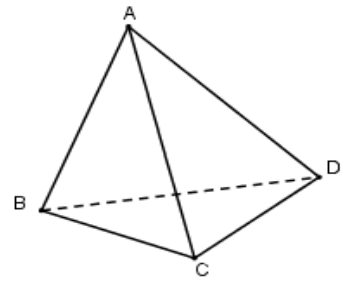
b) Trong mặt phẳng (ABC) , tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Ví dụ 03: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.

b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

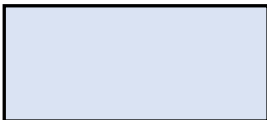


Ví dụ 04: Trong không gian, cho hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết góc giữa hai vec tơ đó là 45° , hãy tính:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$

c) $(\vec{a} + \vec{b})^2$

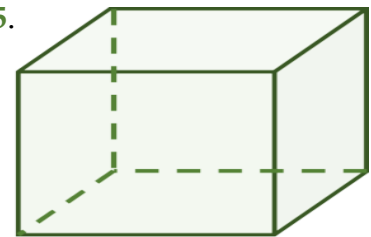


Bài tập tự luận

Bài tập 01: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2025.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}$.

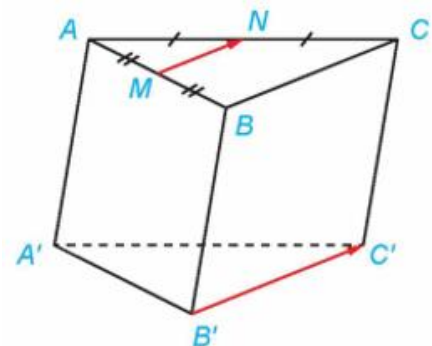
b) Tính góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'})$ (kết quả làm tròn đến phút).



Bài tập 02: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC .

a/ Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không? Giải thích vì sao $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{B'C'}|$?

b/ Gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

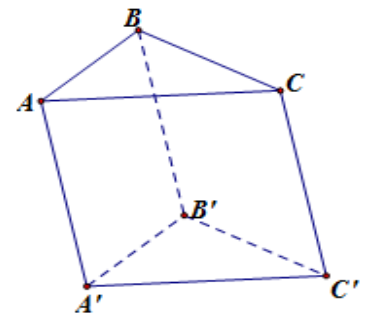


Bài tập 03: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

a) $\overrightarrow{AB'}$

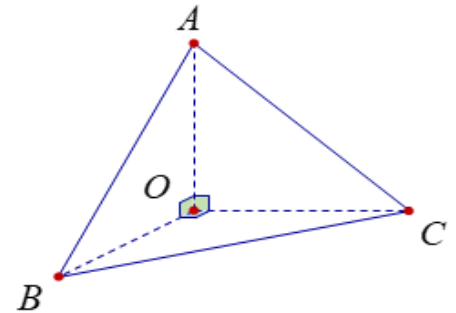
b) $\overrightarrow{B'C}$

c) $\overrightarrow{BC'}$



Bài tập 04: Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB .

Hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.



Bài tập 05: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Hãy tính:

a) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS}$

b) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$

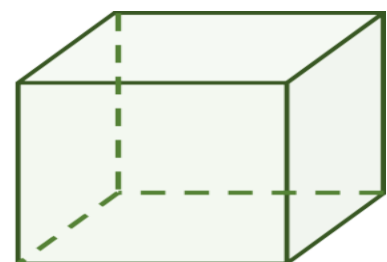
c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS}$

Bài tập 06: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Hãy tính:

a) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$

b) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BB'}$



Gv. Nguyễn Vũ Minh
Sưu Tầm và Biên Soạn
Zalo: 0917 05 00 99



Bài tập 08: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB sao cho $SE = \frac{1}{3}SA, SF = \frac{1}{3}SB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Bài tập 09: Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Bài tập 10: Cho hình chóp $S.ABC$. Điểm M thuộc cạnh SA và $SM = \frac{2}{3} SA$.

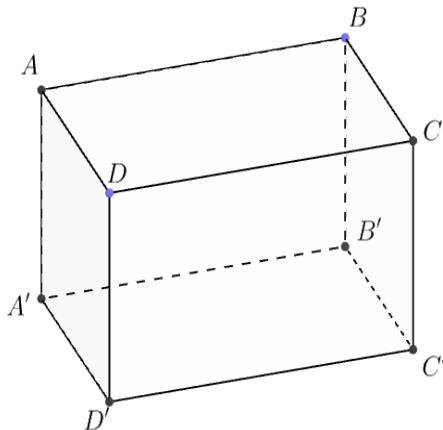
a) Viết hệ thức liên hệ giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AS}$.

b) Tìm điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

Bài tập 11: (nâng cao) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BDA' .

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AA'}$.

b) Từ câu a, hãy chứng tỏ ba điểm A , G và C' thẳng hàng.

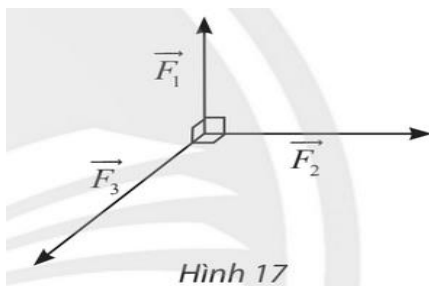


Bài tập tự luận toán thực tế

Bài tập 01: Theo định luật II Newton (**Vật lí 10 – CTST, NXBGD 2023, trang 60**): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{a}$ là vectơ gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là vectơ lực (N) tác dụng lên vật, m (kg) là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?



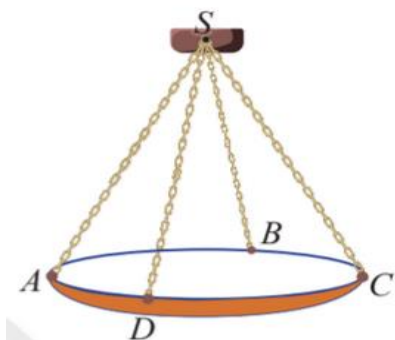
Bài tập 02: Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 2 N; 3 N; 4 N (Hình vẽ). Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



Bài tập 03: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $ASC = 60^\circ$

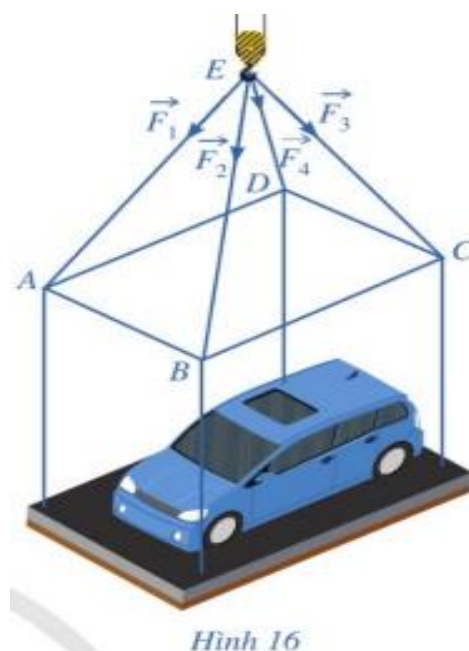
a) Sử dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2 , tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm ?

b) Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích ?



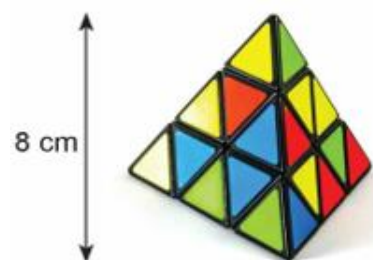
Bài tập 04: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật ABCD, mặt phẳng (ABCD) song song với mặt phẳng nằm ngang.

Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc bằng 60° (Hình 16). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là **4700 N** và trọng lượng của khung sắt là **3000 N**.



Hình 16

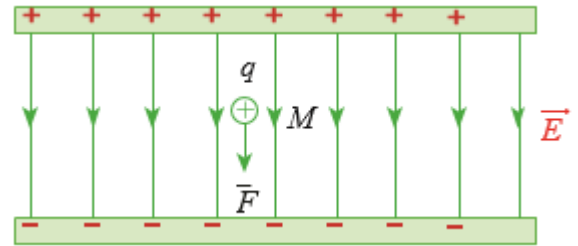
Bài tập 05: Một Trọng tâm của tứ diện ABCD là một điểm I thoả mãn $\vec{AI} = 3\vec{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD. Hãy tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (H.2.30).



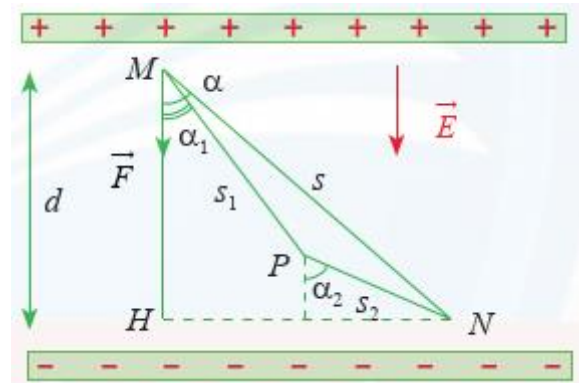
Hình 2.30

Gv. Nguyễn Vũ Minh
Sưu Tầm và Biên Soạn
Zalo: 0917 05 00 99

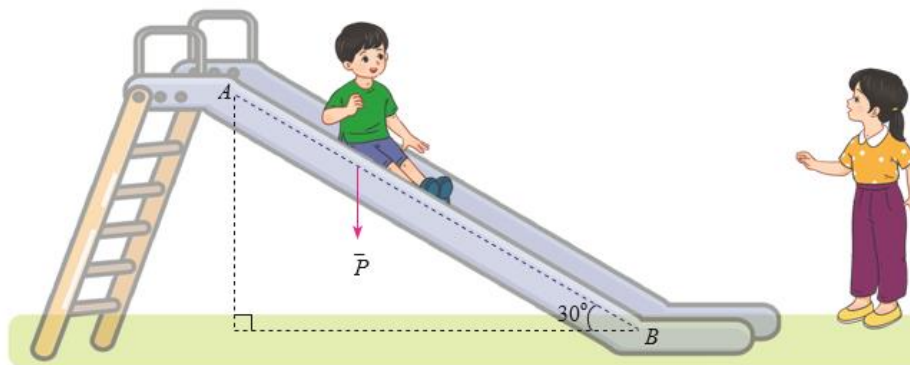
Bài tập 06: (SGK CTST) Một Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E = 10^5$ N/C (Hình vẽ)



Bài tập 07: (SGK CTST) Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình vẽ). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12}$ C, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5$ N/C và $d = MH = 5$ mm. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Bài tập 08: Một em nhỏ cân nặng $m = 25$ kg trượt trên cầu trượt dài 3,5 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình 26).



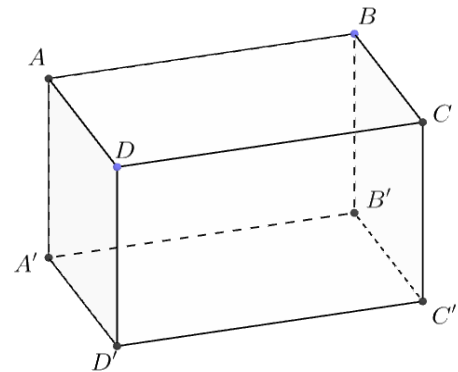
- Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn là $g = 9,8$ m/s².
- Cho biết công A (J) sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.




Câu hỏi ĐÚNG - SAI

Câu 01: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Câu hỏi	Đáp án
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'}$	
b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$	
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC}$	
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AD'}$	
e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$	
f) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$	
g) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$	
h) $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{C'D}$	



Câu 02: Hãy nhận xét tính đúng hoặc sai của các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$	
B. Tứ giác là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	
C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.	
D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$	

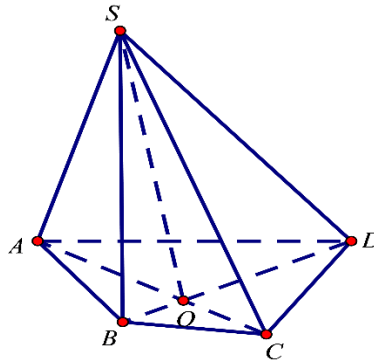
Câu 03: Trong mặt phẳng cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O .

A. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.	
B. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$	
C. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.	
D. Nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ thì $ABCD$ là hình thang.	

Câu 04: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$.

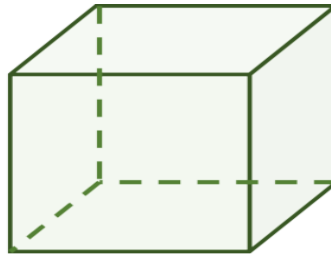
A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{b}$.	
B. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.	
C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.	
D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.	

Câu 05: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .



A. Nếu $\vec{SA} + \vec{SB} + 2\vec{SC} + 2\vec{SD} = 6\vec{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang.	
B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$.	
C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\vec{SA} + \vec{SB} + 2\vec{SC} + 2\vec{SD} = 6\vec{SO}$.	
D. Nếu $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.	
E. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC}$.	
F. Nếu $\vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.	
G. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\vec{SB} + 2\vec{SD} = \vec{SA} + 2\vec{SC}$.	
H. Nếu $\vec{SB} + 2\vec{SD} = \vec{SA} + 2\vec{SC}$ thì $ABCD$ là hình thang.	

Câu 06: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với tâm O .



A. $\vec{AB} + \vec{AA_1} = \vec{AD} + \vec{DD_1}$.	
B. $\vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}$.	
C. $\vec{AB} + \vec{BC_1} + \vec{CD} + \vec{D_1A} = \vec{0}$.	
D. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{AD_1} + \vec{D_1O} + \vec{OC_1}$.	

Câu 07: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a .

A. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông	
B. Tam giác SBD vuông cân tại S .	
C. $(\vec{SB}, \vec{BD}) = 45^\circ$.	
D. $\vec{SB} \cdot \vec{BD} = -a^2$.	



Câu hỏi trả lời ngắn

Câu 01: Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 2. (Hình 2.5).

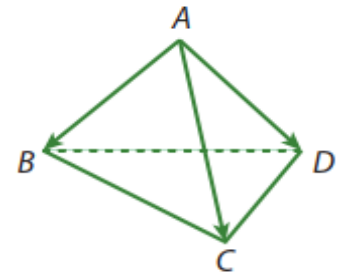
a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ diện? Liệt kê tất cả những vectơ đó?

b) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là đỉnh của tứ diện? Liệt kê tất cả những vectơ đó.

c) Trong các vectơ tìm được ở câu b), những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) .

d) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu b).

e) Bạn Lan nói: " $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ vì các vectơ này có cùng độ dài và cùng hướng (từ trên xuống dưới)". Khẳng định của bạn Lan có đúng không? Vì sao?



Hình 2.5

Câu 02: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 3$ và $AA' = 4$. Hãy chỉ ra ba vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vectơ đó:

a) Bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$; b) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$;

c) Bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$;

d) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AA'}$;

e) Trong các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD'}$, hai vectơ nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$.

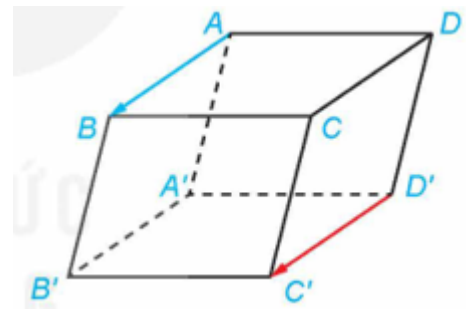
f) Trong các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD'}$, hai vectơ nào có cùng độ dài.

g) So sánh độ dài của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.

h) Nhận xét gì về giá của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.

i) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?

j) Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.

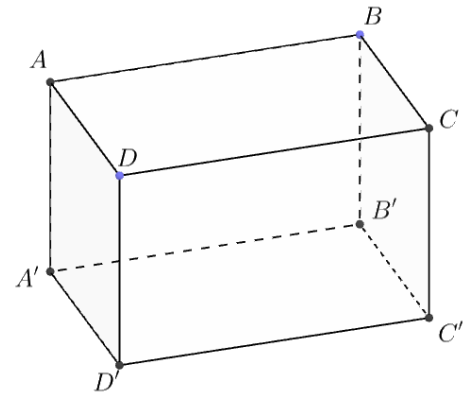


Câu 03: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Trong các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp, hãy chỉ ra những vectơ:
Cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$;

Ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

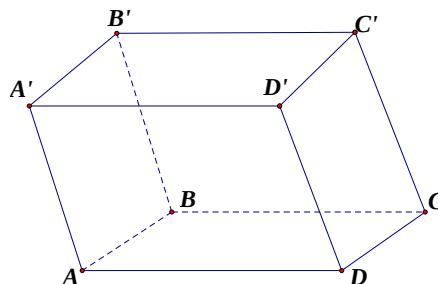


b) Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC'}$ trong trường hợp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng, có $AA' = a$, $AB = b$, $BC = c$ và $\angle ABC = 120^\circ$



Trắc nghiệm

Câu 01: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (hình dưới), tổng của $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}$ là vectơ nào dưới đây?



- A. $\overrightarrow{DB'}$. B. $\overrightarrow{DB}$. C. $\overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{BD'}$.

Câu 02: Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

- A. 4. B. 12. C. 8. D. 10.

Câu 03: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{D'C'}$; $\overrightarrow{A'B'}$. B. $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{C'D'}$.
C. $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{C'D'}$; $\overrightarrow{B'A'}$. D. $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{D'C'}$.

Câu 04: Mệnh đề nào sau đây là sai ?

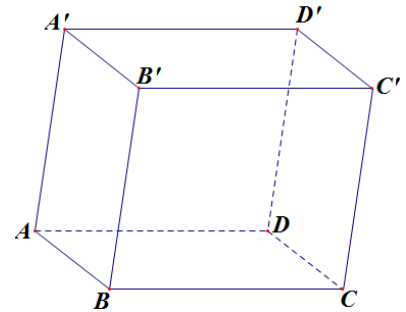
- A. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng.
B. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì ba vectơ đó đồng phẳng.
C. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vectơ bằng vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đó đồng phẳng.
D. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng.

Câu 05: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

- A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.
 B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
 C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
 D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 06: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?

- A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$.
 B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.
 C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$.
 D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA'}$.



Câu 07: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Thực hiện phép toán $\vec{u} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A}$.

- A. $\vec{u} = \overrightarrow{A'C}$.
 B. $\vec{u} = \overrightarrow{BC'}$.
 C. $\vec{u} = \overrightarrow{BA'}$.
 D. $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 08: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a

- A. $a\sqrt{2}$.
 B. $(1 + \sqrt{3})a$.
 C. $a\sqrt{6}$.
 D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 09: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

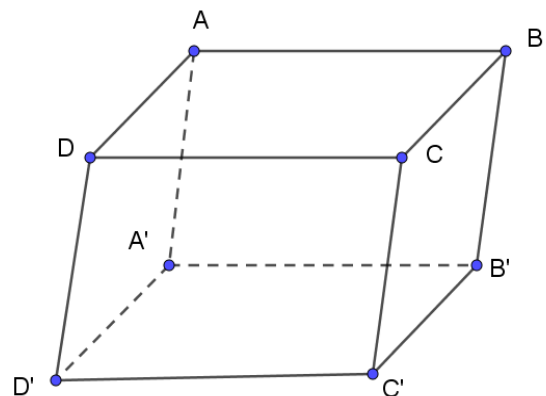
- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
 C. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{D'A}$.
 D. $\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'A} - \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AB'}$.

Câu 10: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu diễn) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

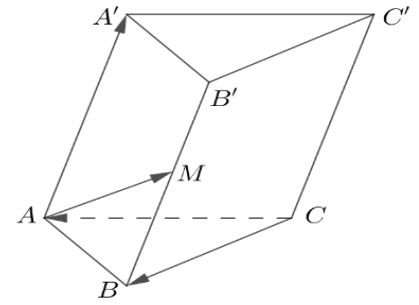
- A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
 B. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
 C. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
 D. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P , Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.
 B. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.
 C. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$.
 D. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.



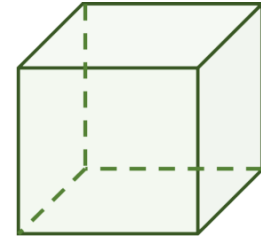
Câu 12: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ (Tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.
- B. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
- C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.
- D. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

Tính độ dài vector $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$ theo a .

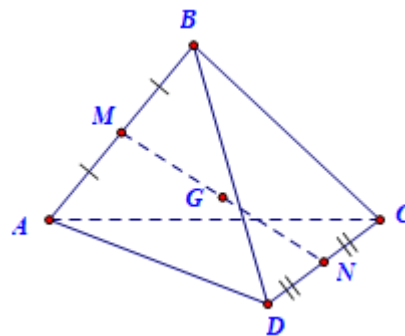


- A. $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$.
- B. $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$.
- C. $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$.
- D. $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Độ dài đoạn thẳng AD bằng

- A. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- B. $\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$.
- C. $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.
- D. $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm, hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào dưới đây là sai?



- A. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.
- B. $GM = GN$.
- C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
- D. $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GN}$.

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm 3 vector đồng phẳng.

- A. $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'C}$.
- B. $\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}$.
- C. $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{BC'}$.
- D. $\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'C}$.



Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.
- B. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.
- C. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.
- D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Câu 18: Cho $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° . Khi đó tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{15}{2}$.
- B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{15}{2}$.
- C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$.
- D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$.

Câu 19: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a ?

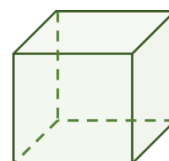
- A. $\frac{1}{2}a^2$.
- B. a^2 .
- C. $-a^2$.
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Câu 20: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

- A. $-\frac{a^2}{2}$.
- B. $\frac{a^2}{2}$.
- C. a^2 .
- D. 0 .

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF}$

- A. $2a^2$.
- B. $a\sqrt{2}$.
- C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
- D. a^2 .



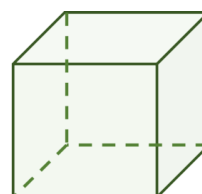
Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Tính góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$.

- A. 45° .
- B. 90° .
- C. 120° .
- D. 60° .

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$.

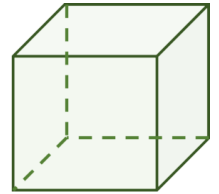
Góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng

- A. 0° .
- B. 60° .
- C. 90° .
- D. 30° .



Câu 24: Cho hình lập phương $ABCDEFGH$, góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG}$ là

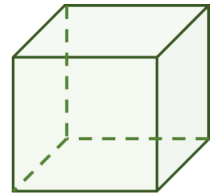
- A. 45° .
- B. 30° .
- C. 60° .
- D. 120° .



Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{AB'}$ bằng:

- A. 60° .
- B. 45° .
- C. 120° .
- D. 90° .



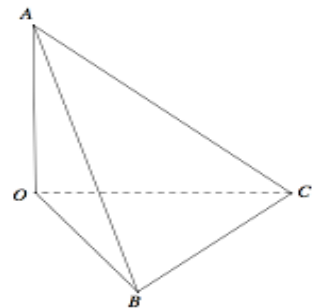
Câu 26: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

- A. 0.
- B. $\frac{a^2}{2}$.
- C. a^2 .
- D. $-\frac{a^2}{2}$.

Câu 27: Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB .

Góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

- A. 135° .
- B. 150° .
- C. 120° .
- D. 60° .



Câu 28: Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm cạnh AB . Khi đó góc giữa 2 vectơ $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

- A. 135° .
- B. 150° .
- C. 120° .
- D. 30° .

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a . Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

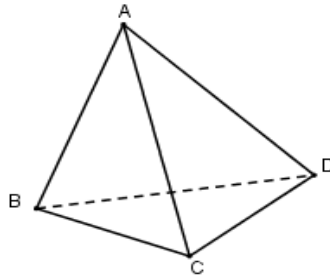
- A. 60° .
- B. 120° .
- C. 30° .
- D. 90° .

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chọn mệnh đề **sai**?

- A. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CD}) = 120^\circ$.
- B. $(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AD}) = 90^\circ$.
- C. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ$.
- D. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$.

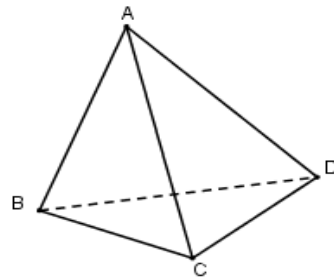
Câu 31: Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây **sai**.

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
- B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
- C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.
- D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.



Câu 32: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q là trung điểm của AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.
- B. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.
- C. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$.
- D. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

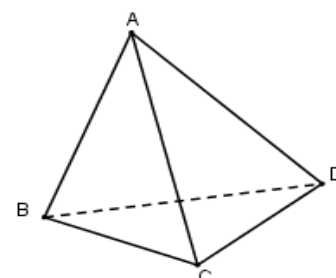


Câu 33: Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

- A. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
- B. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
- C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.
- D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

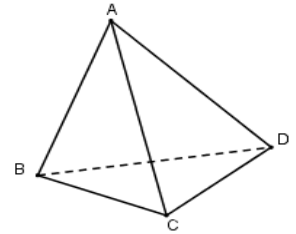
Câu 34: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$
- B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$
- C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
- D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.



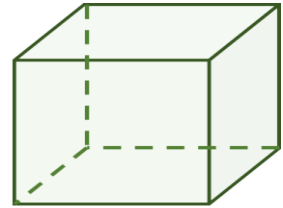
Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , G là trung điểm của IJ . Cho các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
 B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{IJ}$
 C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{JI}$
 D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{JI}$



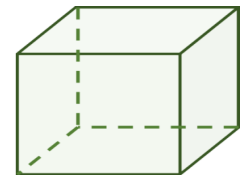
Câu 36: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$.
 B. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA_1} + 2\overrightarrow{C_1C} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AA_1}$.
 D. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$.



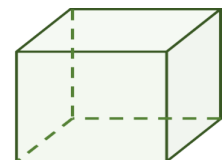
Câu 37: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O . Hãy chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau đây:

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$
 D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.



Câu 38: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn đẳng thức **sai**?

- A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1A_1}$. B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{DC}$.
 C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BD_1}$. D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BC}$.



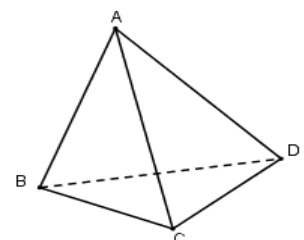
Câu 39: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
 B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.
 C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
 D. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 40: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là 1 điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector:

$$\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

- A. $k = 2$.
 B. $k = 4$.
 C. $k = 1$.
 D. $k = 0$.





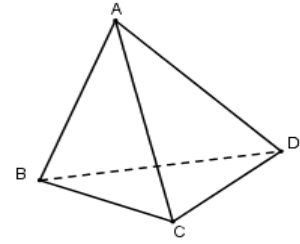
Câu 41: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{DG}$

A. $k = \frac{1}{3}$.

B. $k = 2$.

C. $k = 3$.

D. $k = \frac{1}{2}$.



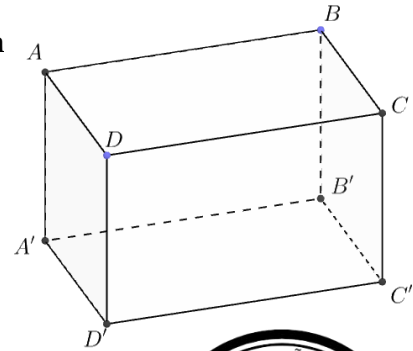
Câu 42: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$.

A. $k = 0$.

B. $k = 1$.

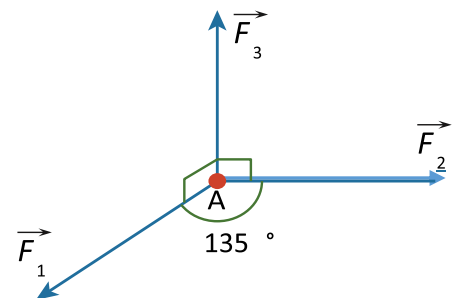
C. $k = 4$.

D. $k = 2$.



BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài về nhà 01: Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α) , chịu tác động bởi ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$. Các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ có giá nằm trong (α) và $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}) = 135^\circ$, còn lực $\overrightarrow{F_3}$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định hợp lực của các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.

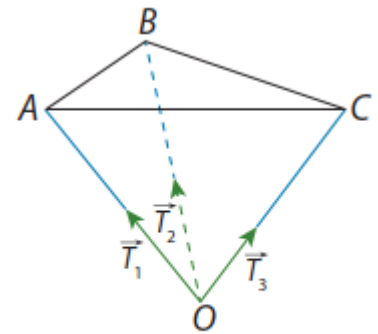


Hình 2.26

Bài về nhà 02: Người ta treo một vật trang trí O có khối lượng $m = 2$ kg trên trần nhà bằng các sợi dây nhẹ, không co giãn tại các điểm A, B và C . Để bảo đảm lực phân phối đều trên các dây và tính thẩm mỹ, người ta chọn độ dài các dây sao cho $OABC$ là tứ diện đều. Gọi $\overrightarrow{T_1}, \overrightarrow{T_2}$ và $\overrightarrow{T_3}$ lần lượt là các lực căng dây của ba dây treo tại A, B và C . Lấy giá trị gần đúng của gia tốc trọng trường g là 10 m/s^2 .

a) Tính cường độ của hợp lực.

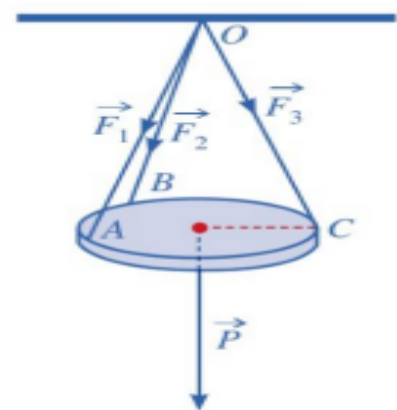
b) Tính cường độ của lực căng trên mỗi dây.



Hình 2.27

Bài về nhà 03: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$. (Hình 14).

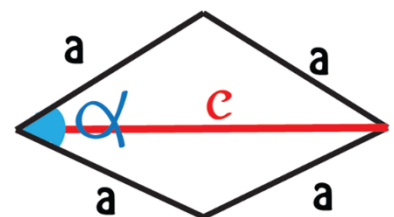
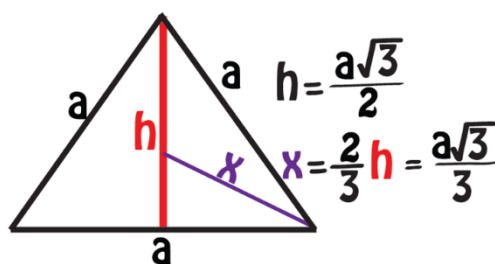
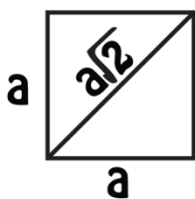
Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó. (ĐS : $15\sqrt{3}$)



Hình 14

Phụ lục 1: Các hình học đặc biệt

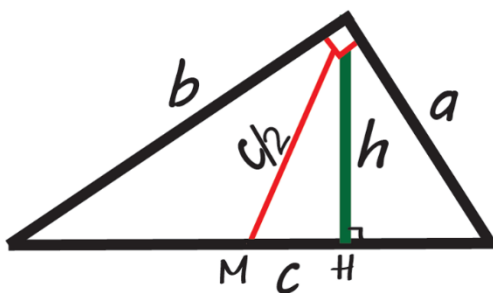
(giúp 500 anh em thao tác nhanh trong quá trình làm BT)



$$\alpha = 60^\circ, c = a\sqrt{3}$$

$$\alpha \text{ bất kỳ}$$

$$c = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$$



bộ ba tam giác vuông thường gặp

a	b	c
1	$\sqrt{3}$	2
3	4	5
6	8	10
12	16	20

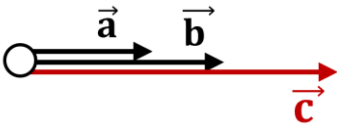
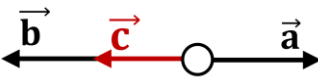
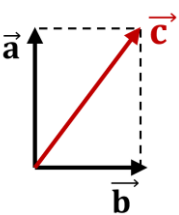
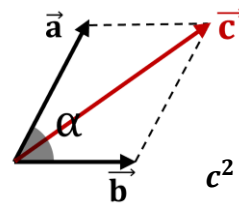
$$h = \frac{a \times b}{c}, \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Gv. Nguyễn Vũ Minh
Sưu Tầm và Biên Soạn
Zalo: 0917 05 00 99

Phụ lục 2: Ôn tập hình học 10

(giúp 500 anh em thao tác nhanh trong quá trình làm BT)

PHÉP CỘNG VECTOR

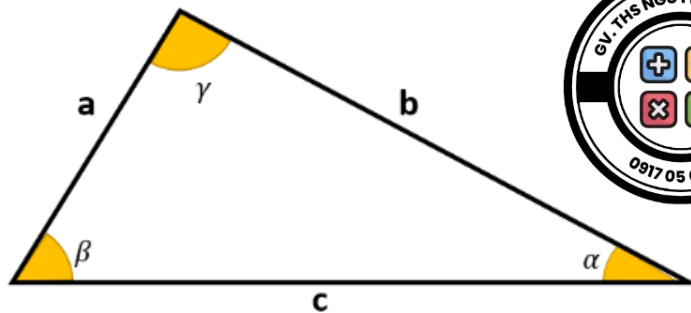
Hai vector cùng phương, cùng chiều  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ $c = a + b$	Hai vector cùng phương, ngược chiều  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ $c = a - b $
Hai vector vuông góc nhau  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ $c^2 = a^2 + b^2$	Hai vector lệch nhau góc α  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ $c^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos(\alpha)$

- Định lý **cosin** trong tam giác:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\gamma)$$

- Định lý **sin** trong tam giác:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$



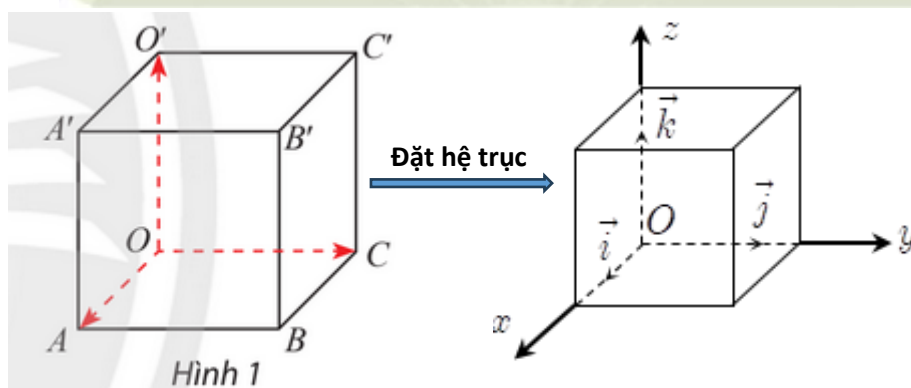
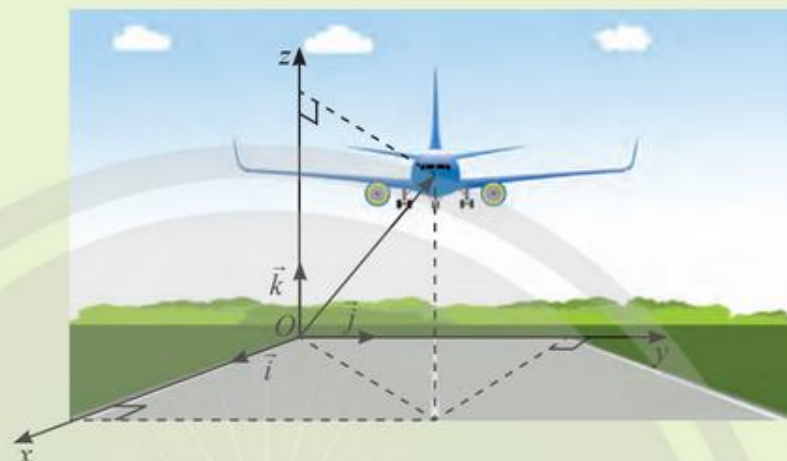
Chương II: VECTO và HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 02: Toạ độ của vectơ trong không gian

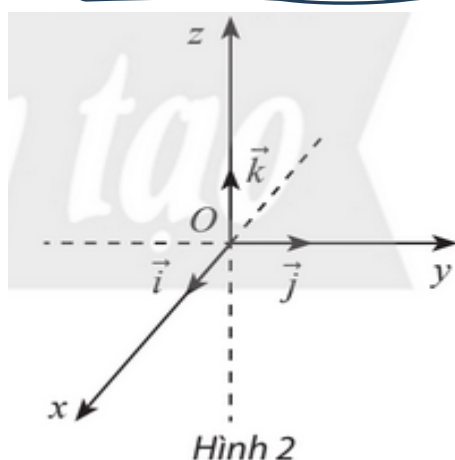
1 Hệ toạ độ trong không gian



Trong kiểm soát không lưu, người ta dùng bộ ba số để xác định vị trí của máy bay. Người ta đã làm điều đó như thế nào?



Hệ 3 trục Ox , Oy , Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung điểm gốc O .
Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$ là **các vectơ đơn vị**, tương ứng trên các trục Ox , Oy , Oz .



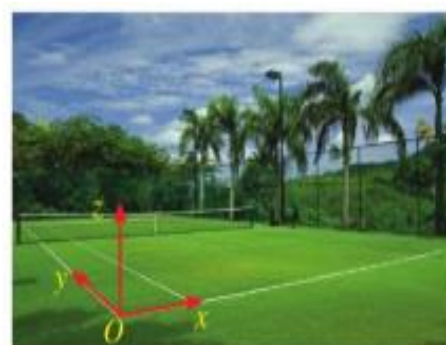
- Điểm O được gọi là **gốc toạ độ**.
- Các trục Ox , Oy , Oz được gọi là các **trục toạ độ**.
- Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các **mặt phẳng toạ độ**.
- Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

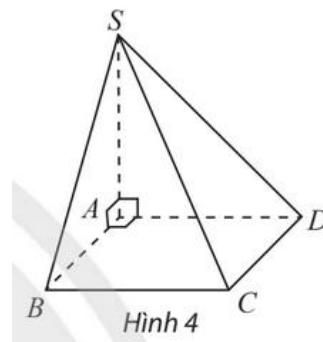
Ví dụ 01: Một sân tennis với hệ toạ độ $Oxyz$ được chọn như ở Hình 20.

- Hỏi mặt sân nằm trong mặt phẳng toạ độ nào?
- Trục Oz có vuông góc với mặt sân hay không?



Hình 20

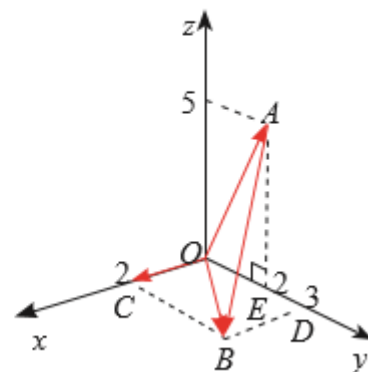
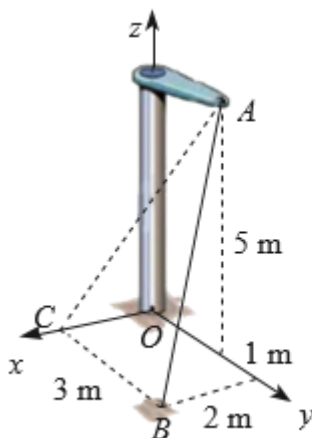
Ví dụ 01: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng 1 (**Hình vẽ dưới**). Vẽ hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A , các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.



Ví dụ 02: Một thiết kế cơ khí trong Hình thứ nhất và được biểu diễn trong không gian $Oxyz$ như Hình thứ hai bên phải.

a) Hãy vẽ ba vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz (**vectơ đơn vị có độ dài bằng 1 m**).

b) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ theo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



2 Toạ độ điểm và toạ độ vectơ

a) **Toạ độ của điểm:** $M(a; b; c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

hay

$$M = (a; b; c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (a; b; c).$$

b) **Toạ độ của vectơ:** $\vec{a} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

c) **Hai vectơ bằng nhau:** Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

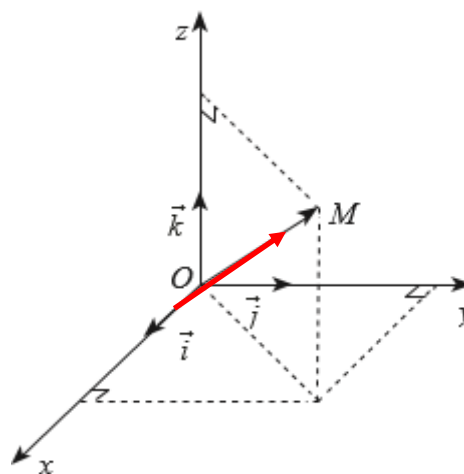
Hai vectơ bằng nhau

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

Ví dụ 01: Trong không gian $Oxyz$, biết:

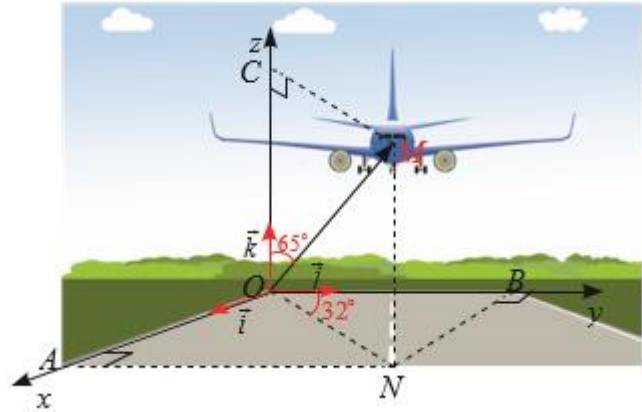
a) $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$. Tìm toạ độ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

b) $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \overrightarrow{ON} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Tìm toạ độ các điểm M, N .



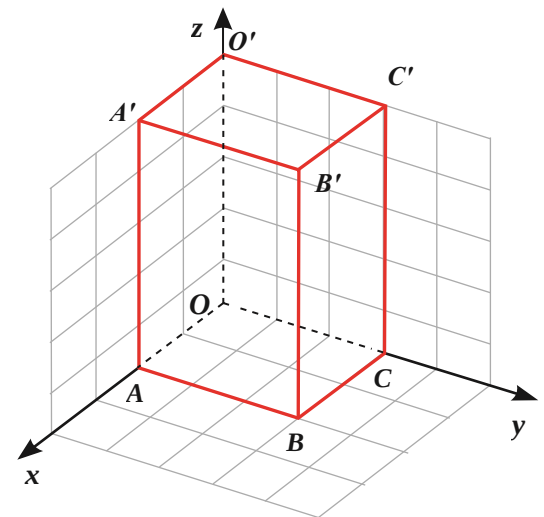
c) $\vec{HO} = 2\vec{i} - 2025\vec{j} + 6\vec{k}$. Tìm tọa độ các điểm H .

Ví dụ 02: Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình vẽ, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM=14$, góc $NOB = 32^\circ$, $MOC = 65^\circ$. Tìm tọa độ điểm M .



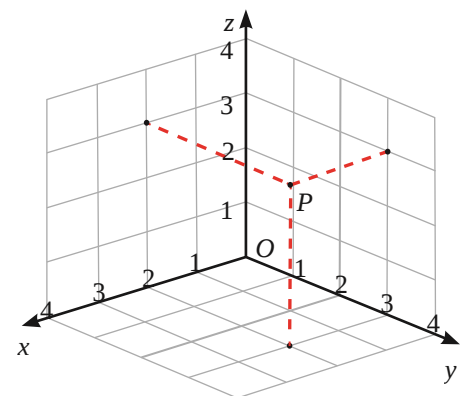
Ví dụ 03: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ như hình.

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp biết $B'(2; 3; 5)$.
- Tính độ dài đường chéo OB' của hình hộp chữ nhật đó.



Ví dụ 04: (trả lời ngắn) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm P được biểu diễn trong Hình vẽ dưới đây.

- Tìm tọa độ điểm P .
- Tìm tọa độ hình chiếu của điểm P trên các mặt phẳng (Oxy) , (Oxz) và (Oyz) .
- Tìm tọa độ hình chiếu của điểm P trên các trục Ox , Oy và Oz .



- Tính khoảng cách OP .



Bài tập tự luận

Bài tập 01: Trong không gian $Oxyz$, biết:

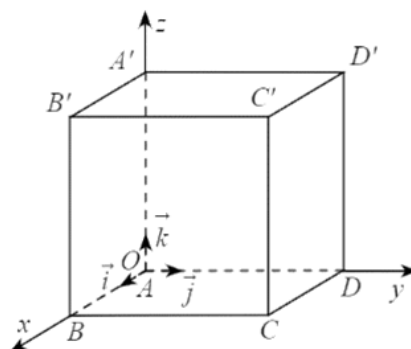
a) $\vec{a} = (-2; 5; -7)$, $\vec{b} = (4; 0; 1)$. Tính $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) $A(7; -2; 1)$, $B(0; 5; 0)$. Tính $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Bài tập 02: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3; -2; 2025)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) . Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

Bài tập 03: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-2; 333; 444)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

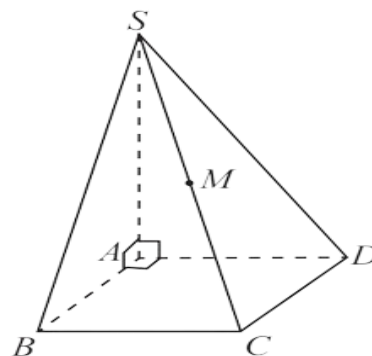
Bài tập 04: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A ; các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ các điểm B, C, C' .



Bài tập 05: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng 3 (Hình 11).

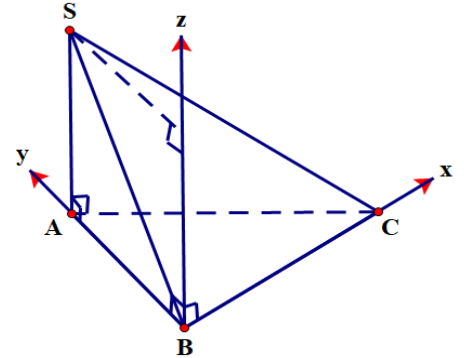
a) Vẽ hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A , các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

b) Trong hệ tọa độ nói trên, tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC .

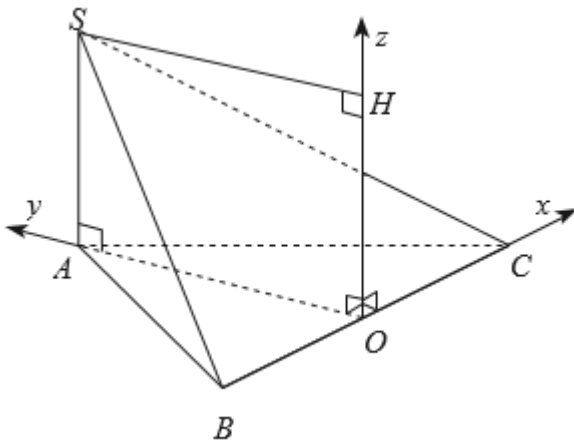


Bài tập 06: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2 (Hình vẽ).

- a) Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.
b) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .

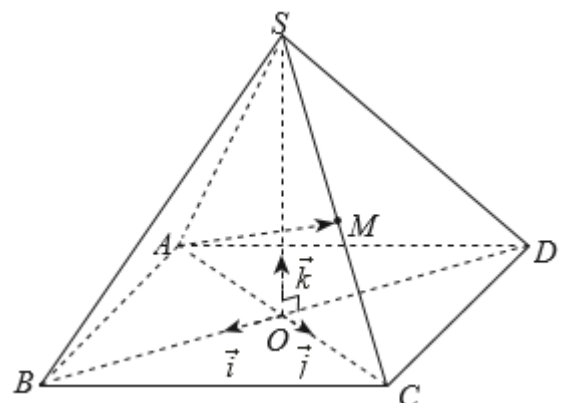


Bài tập 07: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và SA bằng 1 (Hình vẽ). Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ, hãy vẽ các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .

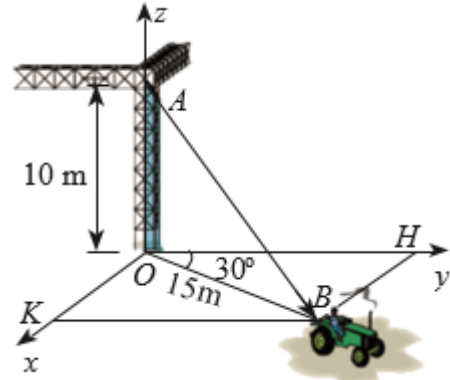


Bài tập 08: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O . Các vectơ $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và $OA = OS = 4$ (Hình vẽ).

Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC .



Bài tập 09: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như Hình vẽ với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 m. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Gv. Nguyễn Vũ Minh
 Sưu Tầm và Biên Soạn
 Zalo: 0917 05 00 99

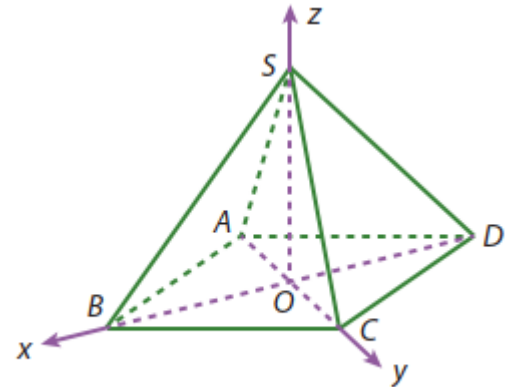


Câu hỏi trả lời ngắn

Câu 01: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD .

Biết $SA = a$, $SO = h$. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ với các tia Ox , Oy , Oz tương ứng trùng với các tia OB , OC , OS như hình bên.

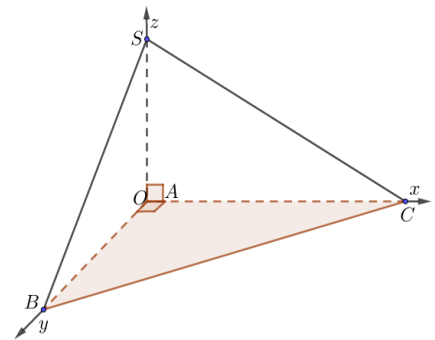
a/ Hãy xác định tọa độ các điểm S , A , B , C , D .



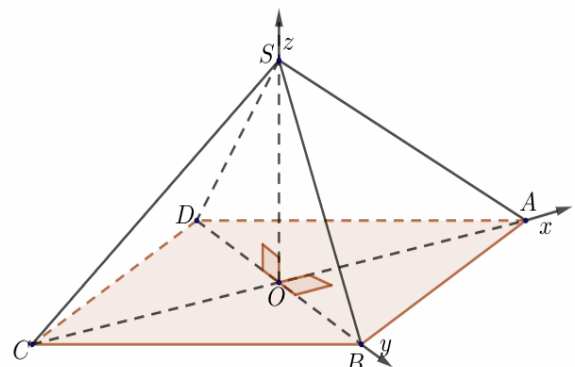
Hình 2.40

b/ Tìm độ dài vectơ $\overrightarrow{SC}$

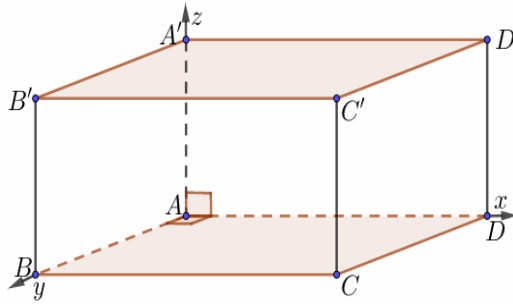
Câu 02: Cho hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA , AB , AC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 2021$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A , B , C , S .



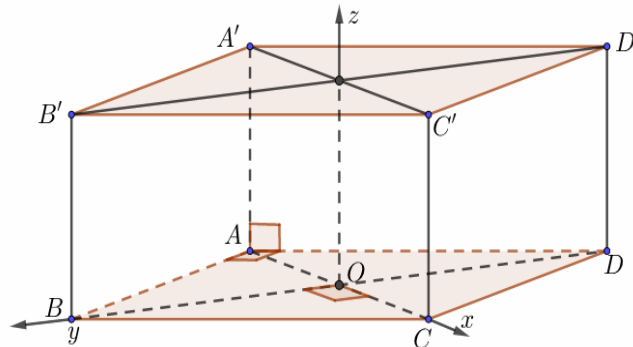
Câu 03: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{5}$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các điểm A , B , C , D , S .



Câu 05: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $7a$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



Câu 06: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $BAD = 60^\circ$. Gọi O là tâm của đáy $ABCD$. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tìm tọa độ các đỉnh của hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$.



Trắc nghiệm

Câu 01: Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nhận xét nào dưới đây sai?

- A. $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. B. $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$. C. $|\vec{i}| = 1$. D. $\vec{i} \cdot \vec{k} = -1$.

Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. B. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$.
C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. D. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

Câu 02: Trong không gian $Oxyz$, vectơ đơn vị trên trục Oy là

- A. $\vec{j} = (0; 1; 0)$. B. $\vec{i} = (1; 0; 0)$. C. $\vec{k} = (0; 0; 1)$. D. $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Câu 03: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(-3; 5; 1)$ trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

- A. $M(-3; 5; 1)$. B. $N(-3; 0; 1)$. C. $P(0; 5; 1)$. D. $Q(-3; 5; 0)$.

Câu 04: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1; 2; 3)$ trên trục Oy là điểm

- A. $R(1; 0; 0)$. B. $P(1; 0; 3)$. C. $Q(0; 2; 0)$. D. $S(0; 0; 3)$.

Câu 05: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy) ?

- A. $A(0; 1; 2)$. B. $B(1; 0; 2)$. C. $C(-1; 3; 0)$. D. $D(0; 0; 1)$.

Câu 06: Hình chiếu vuông góc của điểm $A(5; -4; 3)$ trên trục Ox là điểm

- A. $A'(5; 4; -3)$. B. $A'(-5; 4; 0)$. C. $A'(-5; 4; -3)$. D. $A'(5; 0; 0)$.

Câu 07: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}$.

- A. $(2; 1; -3)$. B. $(2; -3; 1)$. C. $(1; 2; -3)$. D. $(2; 3; 1)$.

Câu 08: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} = (2; 3; -5)$, $\vec{b} = (-3; 4; 0)$, $\vec{c} = (-1; -2; 0)$.

B. $\vec{a} = (2; 3; -5)$, $\vec{b} = (-3; 4; 0)$, $\vec{c} = (0; -2; 0)$.

C. $\vec{a} = (2; 3; -5)$, $\vec{b} = (0; -3; 4)$, $\vec{c} = (-1; -2; 0)$.

D. $\vec{a} = (2; 3; -5)$, $\vec{b} = (1; -3; 4)$, $\vec{c} = (-1; -2; 1)$.

Câu 09: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 0; 2)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $M \in (Oxz)$. B. $M \in (Oyz)$. C. $M \in Oy$. D. $M \in (Oxy)$.

Câu 10: Trong không gian $d : Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (Oyz) là

- A. $Q(0; -2; -3)$. B. $P(1; 0; -3)$. C. $N(1; -2; 0)$. D. $K(1; 0; 3)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -5; 2)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $A(3; -5; 0)$. B. $B(0; -5; 2)$. C. $C(3; 0; 2)$. D. $D(0; 0; 2)$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$ với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ cho $\vec{OA} = -\vec{i} + 5\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A

- A. $(-1; 5)$. B. $(5; -1; 0)$. C. $(-1; 0; 5)$. D. $(-1; 5; 0)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của véc tơ $\vec{a}$ là

- A. $\vec{a} = (-3; 2; -1)$ B. $\vec{a} = (2; -3; -1)$ C. $\vec{a} = (-1; 2; -3)$ D. $\vec{a} = (2; -1; -3)$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{OA} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .

- A. $A(4; -2; 3)$ B. $A(-2; 3; 4)$ C. $A(-2; 4; 3)$ D. $A(4; 2; -3)$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{x} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ có tọa độ là:

- A. $(1; 3; 2)$. B. $(1; -3; 2)$. C. $(1; 2; 3)$. D. $(0; -3; 2)$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ có tọa độ là

- A. $(2; 0; -3)$. B. $(-2; 0; 3)$. C. $(2; -3; 0)$. D. $(2; 1; -3)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ

$\vec{MO} = 5(3\vec{i} - \vec{j}) + 2(3\vec{j} - 2\vec{k}) - 3(\vec{k} - 2\vec{i})$. Tìm tọa độ điểm M là

A. $M(21; 1; -7)$.

B. $M(-21; -1; 7)$.

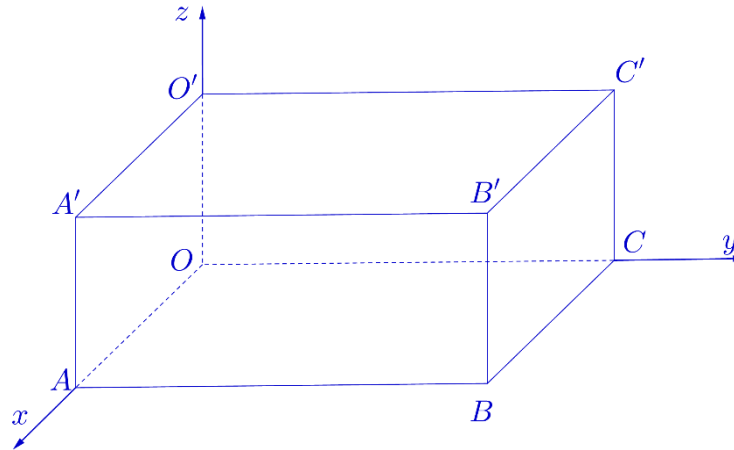
C. $M(21; -1; 7)$.

D. $M(21; -1; -7)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ cho $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{i} + 5\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A

- A. $(5; -2; 1)$. B. $(-2; 1; 5)$. C. $(1; -2; 5)$. D. $(-2; 5; 1)$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có ba đỉnh A, C, O' lần lượt nằm trên ba tia Ox, Oy, Oz và có ba cạnh $OA = 6, OC = 8, OO' = 2023$ (tham khảo hình vẽ minh họa). Điểm B' có tọa độ là



- A. $(8; 6; 2023)$. B. $(2023; 6; 8)$. C. $(6; 2023; 8)$. D. $(6; 8; 2023)$.

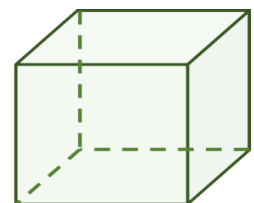
Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ điểm C?

- A. $(3; 0; 0)$
B. $(0; 0; 3)$
C. $(0; 3; 3)$
D. $(3; 3; 0)$

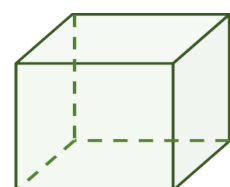
Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Tọa độ của C' là:

- A. $(2; 3; 0)$.
B. $(2; 3; 4)$.
C. $(0; 3; 4)$.
D. $(2; 0; 4)$.



Câu 22: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Gọi M là trung điểm $D'C'$. Tọa độ điểm M là:

- A. $(4; 6; 0)$
B. $(0; 6; 4)$
C. $(4; 6; 4)$
D. $(4; 0; 4)$





BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài tập 01: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và vectơ $\vec{u} = (3; -4; 2)$.

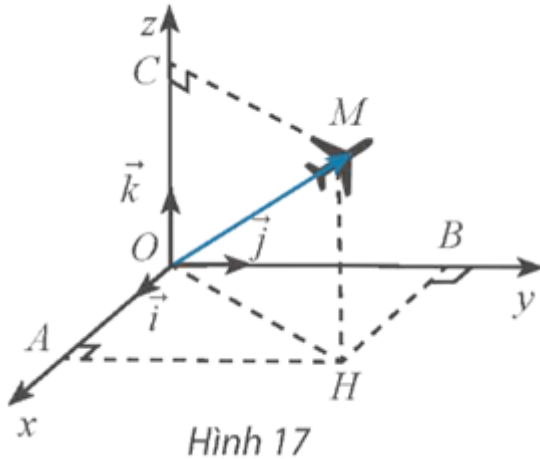
Hãy biểu diễn theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ mỗi vectơ sau: a) $\vec{OA}$ b) $\vec{u}$

Bài tập 02: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vectơ $\vec{OB} = -\vec{i} + 2\vec{k}$ và vectơ $\vec{u} = -7\vec{j} + \vec{k}$.

Hãy tọa độ của: a) Điểm B b) Vectơ $\vec{v}$

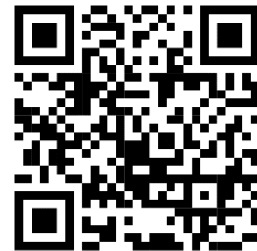
Bài tập 03: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian Oxyz như Hình 17. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy).

Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$, $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M.



Hình 17

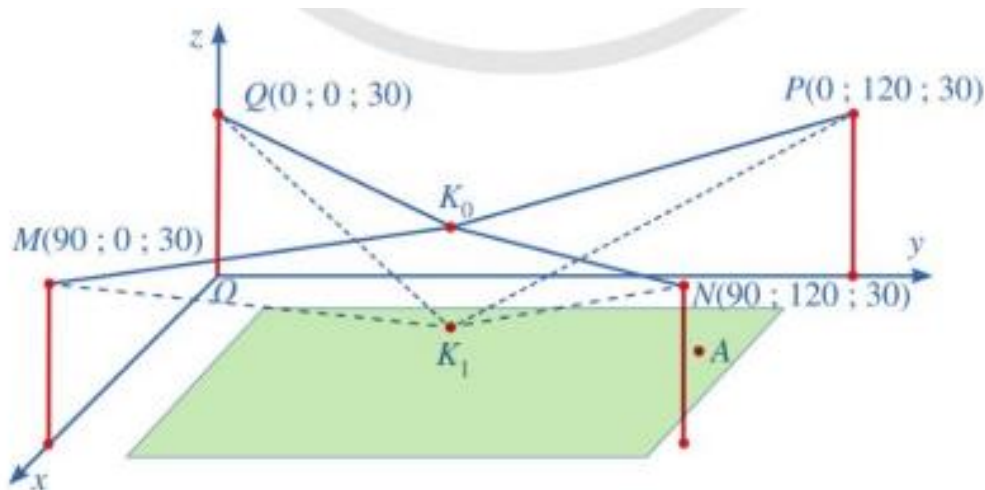
Đáp án



Bài tập 04: Cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hãy tìm tọa độ của các điểm:

- M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Oxz).
- M', M'', M''' lần lượt là điểm đối xứng của M qua các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Oxz) và trục Oy.
- N', N'', N''' lần lượt là điểm đối xứng của M qua các trục Ox, Oy, Oz.

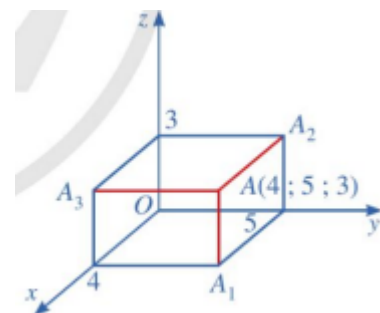
Bài tập 05: Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kỹ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ Oxyz (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90; 0; 30)$, $N(90; 120; 30)$, $P(0; 120; 30)$, $Q(0; 0; 30)$ (Hình 34). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 cao độ bằng 19 (Nguồn: <https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI). Tìm tọa độ của các điểm K_0 , K_1 và của vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$.



Hình 34

Bài tập 06: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(4; 5; 3)$ được biểu diễn như hình vẽ dưới đây:

- Tìm tọa độ các điểm A_1 ; A_2 ; A_3 trên hình vẽ
- Tính độ dài OA .



Gv. Nguyễn Vũ Minh
Sưu Tầm và Biên Soạn
Zalo: 0917 05 00 99

Chương II: VECTO và HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



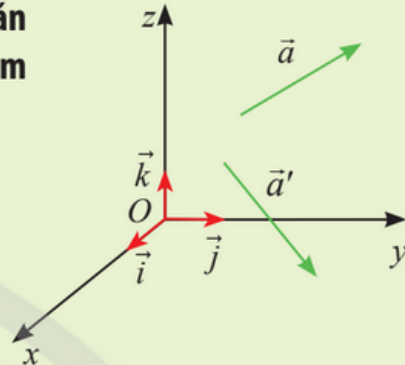
Bài 03: Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ



Trong không gian $Oxyz$, có thể thực hiện các phép toán vectơ dựa trên toạ độ của chúng tương tự như đã làm trong mặt phẳng Oxy không?

$$\vec{a} = (x; y; z), \vec{a}' = (x'; y'; z')$$

$$\vec{a} + \vec{a}' = ?$$



1. Biểu thức toạ độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $k \in \mathbb{R}$.

- Khi đó:**
- ❶ $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.
 - ❷ $k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.
 - ❸ $\vec{a} \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k, \vec{b} \neq \vec{0}$

Ví dụ 01: (trả lời ngắn) Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc $\vec{a} = (300; 200; 400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A.

- a) Tìm toạ độ vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B.
- b) Tính tốc độ của máy bay B.

Ví dụ



Hình 3

Ví dụ 02: Cho $\vec{u} = (2; -5; 3)$ và $\vec{v} = (0; 2; -1)$, $\vec{w} = (1; 7; 2)$.
Tìm toạ độ của vectơ $\vec{a} = \vec{u} - 4\vec{v} - 2\vec{w}$.

2. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng:

- ❶ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
- ❷ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- ❸ Độ dài của vectơ $\vec{a}$ là $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- ❹ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

Ví dụ

Ví dụ 01: Tính công sinh bởi lực $\vec{F} (20; 30; -10)$ (đơn vị: N) tạo bởi một **Drone** giao hàng (Hình 7) khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d} = (150; 200; 100)$ (đơn vị: m).

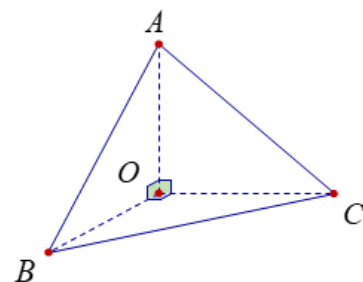


Hình 7

Ví dụ 02: Cho ba vectơ $\vec{m} = (-5; 4; 9)$, $\vec{n} = (2; -7; 0)$, $\vec{p} = (6; 3; -4)$.

- Tính $\vec{m} \cdot \vec{n}$, $\vec{m} \cdot \vec{p}$
- Tính $|\vec{m}|, |\vec{n}|, \cos(\vec{m}, \vec{n})$.
- Cho $\vec{q} = (1; -2; 0)$. Vectơ $\vec{q}$ có vuông góc với $\vec{p}$ không?

Ví dụ 03: Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Tính góc tạo bởi hai vectơ $\vec{BC}$ và $\vec{OM}$.



3. Vận dụng

- Vectơ $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- Độ dài của vectơ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.
- Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$.

Chú ý: Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

Ví dụ 01: Cho tam giác MNP có $M(2; 1; 3)$, $N(1; 2; 3)$, $P(-3; -1; 0)$.

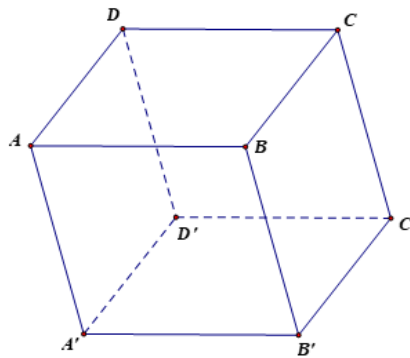
- Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{MN}, \vec{NP}, \vec{MP}$.
- Trọng tâm I của tam giác MNP .

- Tìm tọa độ điểm Q để $MNPQ$ là hình bình hành.



e) Tìm tọa độ điểm E sao cho $3\overrightarrow{MN} + 4\overrightarrow{EP} = \vec{i}$.

Ví dụ 02: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.



Ví dụ 03: Cho hai điểm $A(-1; 2; -3)$ và $B(2; -1; 0)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$. B. $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -3)$. C. $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -3)$. D. $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 3)$.

Ví dụ 04: Cho ba điểm $A(1; 3; 5)$, $B(2; 0; 1)$, $C(0; 9; 0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A. $G(3; 12; 6)$. B. $G(1; 5; 2)$. C. $G(1; 0; 5)$. D. $G(1; 4; 2)$.

Ví dụ 05: (THPT Hậu Lộc 2024) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 2; 3)$ lên mặt phẳng (Oxy)

- A. $M'(1; 2; 0)$. B. $M'(0; 0; 3)$. C. $M'(1; 0; 3)$. D. $M'(0; 2; 3)$.

Ví dụ 06: Cho các điểm $A(-1; -1; 0)$, $B(0; 3; -1)$, $C(-1; 14; 0)$, $D(-3; 6; 2)$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

Ví dụ 07: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 2; 300)$. Tìm tọa độ hình chiếu của A lên (Oxz) và điểm đối xứng với A qua (Oxz) ?

Ví dụ 08: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-1; 2; -2)$ trên trục Oz là điểm H . Tìm H và điểm đối xứng với M qua trục Oz ?

Ví dụ 09: Cho các điểm $A(-1; -12; 27)$, $D(0; 3; -1)$, $C(-103; 14; 2)$.
Tìm tọa độ điểm B sao cho tứ giác ABDC là hình bình hành ?



Ví dụ 10: Cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(0; -2; 3)$.

- a) Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.
- b) Tính diện tích tam giác OAB .

Ví dụ 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 4; 2)$, $B(-1; 2; 4)$ và đường thẳng $M(1-t; -2+t; 2t)$. Khi $MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất, hãy tìm giá trị t ?



Bài tập tự luận

Bài tập 01: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (4; 2; 3)$ và điểm $A(1; 1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.

Bài tập 02: a/ Cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau góc 60° . Biết rằng $|\vec{u}| = 2$ và $|\vec{v}| = 4$.

Tìm $|\vec{u} + \vec{v}|$.

b/ Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tìm độ dài của vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$

Bài tập 03: Xét hệ tọa độ $Oxyz$ gắn với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như **Hình 39**, đơn vị của mỗi trục bằng độ dài cạnh hình lập phương.

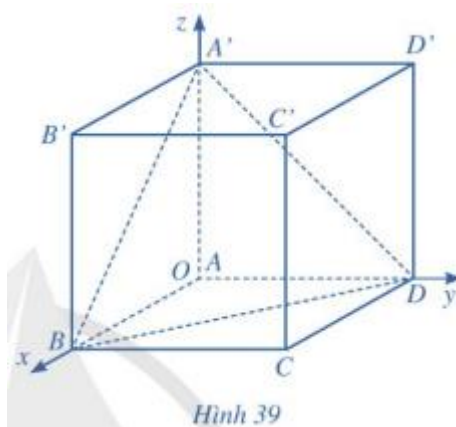
Biết $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$.

a) Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác $A'BD$.

c) Xác định tọa độ các vectơ $\vec{OG}$ và $\vec{OC'}$.

d) Chứng minh rằng ba điểm O , G , C thẳng hàng và $OG = \frac{1}{3}OC'$.



Bài tập 04: Cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$.

a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$. b) Tính $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \cos(\vec{a}, \vec{b})$. c) Cho $\vec{d} = (1; 7; -3)$. Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

Bài tập 05: Cho tam giác ABC có $A(7; 3; 3)$, $B(1; 2; 4)$, $C(2; 3; 5)$.

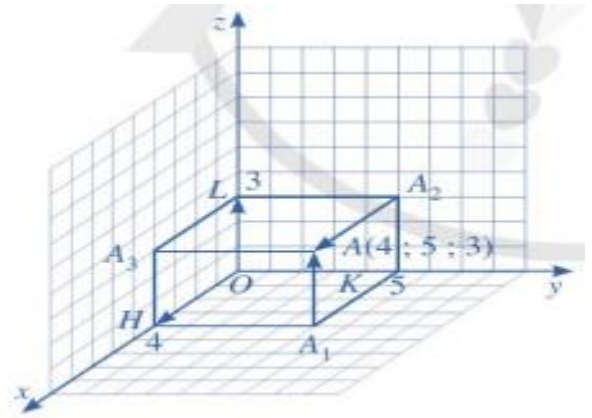
a) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

b) Tìm độ dài cạnh AB và AC .

c) Tính góc A .

Bài tập 06: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình vẽ dưới đây:

- Tìm tọa độ điểm A
- Tính độ dài OA
- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật $AA_2LA_3.A_1KOH$.
- Tính diện tích của hình chữ nhật $ALOA_1$
- Tính thể tích của khối hộp chữ nhật $AA_2LA_3.A_1KOH$.
- Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{A_1A}; \overrightarrow{A_2A}; \overrightarrow{A_3A}; \overrightarrow{KA}$
- Tính số đo các góc $LOA; HLK$



Hình 30

Gv. Nguyễn Vũ Minh
Sưu Tầm và Biên Soạn
Zalo: 0917 05 00 99

Bài tập 07: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$ và $C(2; 1; 1)$.

- Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.
- Tính chu vi của tam giác ABC .
- Tính $\cos \widehat{ABC}$.



Bài tập 08: Cho ba điểm $A(2; 0; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 1; 2)$.

- a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- b) Tính các độ dài AB, BC, CA .
- c) Trung điểm M của AB ;
- d) Chứng minh ba điểm ABC tạo thành một tam giác. Tính chu vi của tam giác ABC .
- e) Trọng tâm G của tam giác ABC .
- f) Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.
- g) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- h) Tính góc A .
- i) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oz sao cho đường thẳng BM vuông góc với đường thẳng AC .
- j) Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho A, B, N thẳng hàng.
- k) Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Bài tập 09: Trong không gian Oxyz, cho tứ diện ABCD với A(1; 3; -2), B(3; 2; -4), C(2; 1; 0), D(3; 5; -1).

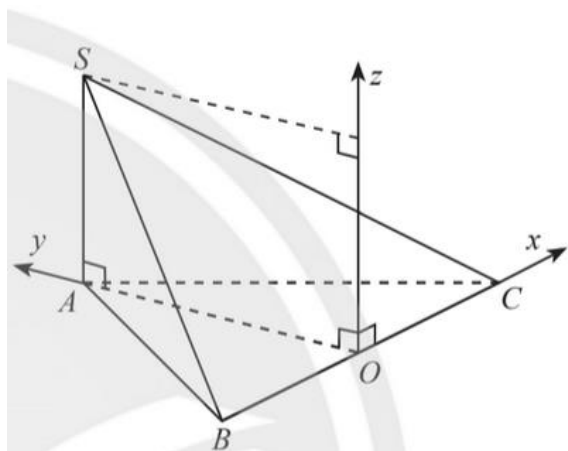
- a) Chứng minh rằng $AB = CD$.
- b) Chứng minh rằng BCD là tam giác đều.
- c) Tính số đo của $\angle AMD$ với M là trung điểm của BC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- d) Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

Bài tập 10: Cho ba điểm A(3; 3; 3), B(1; 1; 2) và C(5; 3; 1).

- a) Tìm điểm M trên trục Oy cách đều hai điểm B, C.
- b) Tìm điểm N trên mặt phẳng (Oxy) cách đều ba điểm A, B, C.
- c) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm B(-1; -1; 0) và C(3; 1; -1). Tọa độ điểm M thuộc trục Oy và M cách đều B, C. ĐS: $\left(0; \frac{9}{2}; 0\right)$

Bài tập 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a , O là trung điểm của BC . Bằng cách thiết lập hệ tọa độ như Hình 3, hãy tìm tọa độ:

- Các điểm A, S, B, C .
- Trung điểm M của SB và trung điểm N của SC .
- Trọng tâm G của tam giác SBC .



Bài tập 12: Cho ba điểm $A(0;1;2), B(1;2;3), C(1;-2;-5)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng BC sao cho $MB = 3MC$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Bài tập 13: Cho $\vec{a} = (2; -5; 3), \vec{b} = (0; 2; -1), \vec{c} = (1; 7; 2)$.

a/ Tính độ dài của $|\vec{a}|; |\vec{b}|$ và $|\vec{c}|$.

b/ Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}; \vec{a} \cdot \vec{c}; \vec{b} \cdot \vec{c}$;

c/ Tính $\vec{a} \cdot (-2\vec{b}); (3\vec{a}) \cdot \vec{c}$

d/ Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

e/ Tính $|2\vec{a} + \vec{b}|$

h/ Tính $\cos(\vec{a}; \vec{b}); \cos(\vec{a}; \vec{c}); \cos(\vec{b}; \vec{c})$

Bài tập 14: Cho $\vec{a} = (7; -5; 3)$, $\vec{b} = (5; 2; -3)$, $\vec{c} = (-3; 1; 2)$.

a/ Tính $5\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$

b/ Tính $\vec{t} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$

c/ Tính $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$

d/ Tính $\vec{v} - 5\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$

e/ Tính $\vec{a} \cdot (2\vec{b} + \vec{c})$

f/ Tính $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$

g/ Tính $|2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}|$

Bài tập 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$

a/ Cho tam giác ABC có $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm độ dài đoạn AM ?

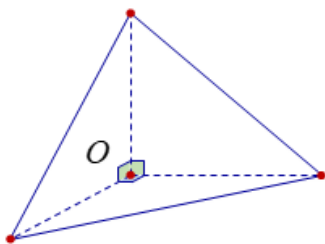
b) Cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 1; -2)$ và $\vec{b} = (1; 0; m)$. Tìm m biết góc giữa chúng bằng 45° ?

Bài tập 16: Cho hai vectơ $\vec{a} = (0; 1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 3; 1)$; $\vec{c} = (2; -3; 4)$ và $\vec{d} = (3; -1; m)$

a/ Tìm m để $\vec{f} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ vuông góc với $\vec{d}$.

b/ Tìm m để $\vec{g} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ vuông góc với $-3\vec{d} + 2\vec{k}$.

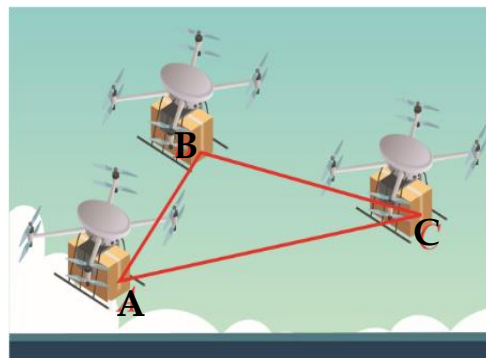
Bài tập 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho tam giác ABC có $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$. Tìm thể tích khối tứ diện $O.ABC$ và khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (ABC)



Toán thực tế

Bài tập 01: Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có tọa độ là $A(1; 1; 1)$, $B(5; 7; 9)$, $C(9; 11; 4)$. Tính:

- Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.
- Góc BAC .



Bài tập 02: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị :kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút.

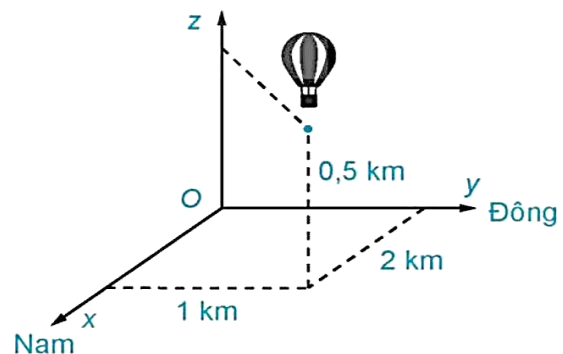
- Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?
- Xác định tọa độ của chiếc máy bay sau 10 phút tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay đang ở điểm B)



Hình 2.49

Bài tập 03: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía Đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục tọa độ **Oxyz** với gốc **O** đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (**Oxy**) trùng với mặt đất với trục **Ox** hướng về phía nam, trục **Oy** hướng về phía đông và trục **Oz** hướng thẳng đứng lên trời (**hình vẽ**), đơn vị đo lấy theo **kilômét**.

- Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Bài tập 04: Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ tọa độ Oxyz có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (**Oxy**) trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục **Ox** hướng về phía tây, trục **Oy** hướng về phía nam và trục **Oz** hướng thẳng đứng lên trời (**H.2.43**). Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ không đổi là 890 km/h trong nửa giờ. Xác định tọa độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó đối với hệ tọa độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian Oxyz được lấy theo kilômét.

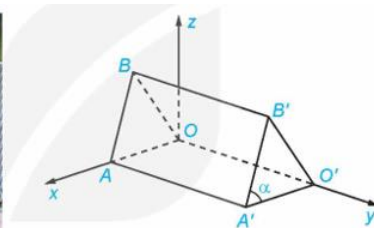


Hình 2.43

Bài tập 05: Những căn nhà gỗ trong **Hình 2.47a** được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong **Hình 2.47b**. Với hệ trục tọa độ Oxyz thể hiện như **Hình 2.47b** (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Từ những thông tin trên, hãy tính kích thước chiều dài, chiều rộng và cạnh bên mặt tiền và góc α của những căn nhà gỗ đó?



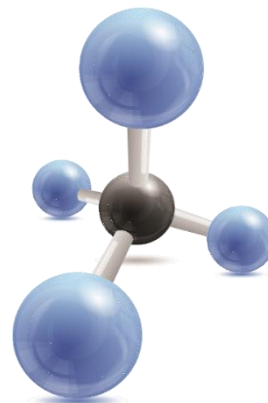
a)



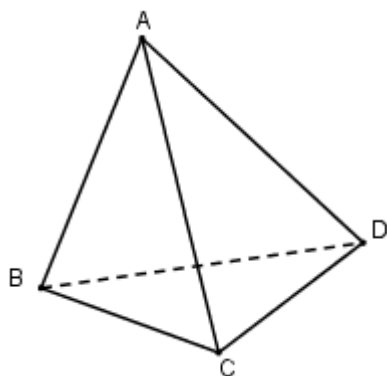
b)

Hình 2.47

***Bài tập 06:** Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H-C-H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Chứng minh rằng góc liên kết này gần bằng $109,5^\circ$.



Gv. Nguyễn Vũ Minh
Sưu Tầm và Biên Soạn
Zalo: 0917 05 00 99



Bài tập 07: Trong không gian Oxyz, lực không đổi $\vec{F} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k}$ làm di chuyển một vật dọc theo đoạn thẳng từ $M(1; 0; 2)$ đến $N(5; 3; 8)$. Tìm công sinh ra nếu khoảng cách được tính bằng mét và lực được tính bằng Newton.

Bài tập 08: Hình 2.53 minh hoạ một chiếc đèn được treo cách trần nhà là 0,5 m, cách hai tường lần lượt là 1,2 m và 1,6 m. Hai bức tường vuông góc với nhau và cùng vuông góc với trần nhà. Người ta di chuyển chiếc đèn đó đến vị trí mới cách trần nhà là 0,4 m, cách hai tường đều là 1,5 m.



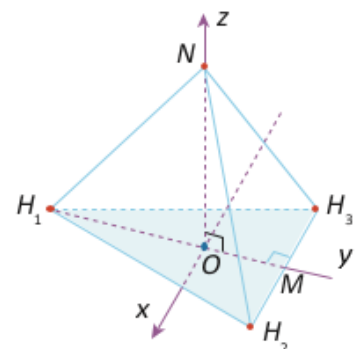
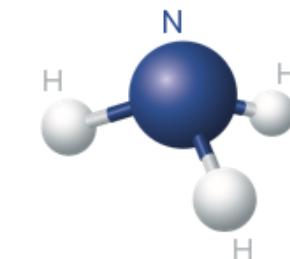
Hình 2.53

- Lập một hệ trục toạ độ Oxyz phù hợp và xác định toạ độ của bóng đèn lúc đầu và sau khi di chuyển.
- Vị trí mới của bóng đèn cách vị trí ban đầu là bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bài tập 09: Trong Hoá học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $\text{H}_1\text{H}_2\text{H}_3$ với $\text{H}_1, \text{H}_2, \text{H}_3$ là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết $\text{H}-\text{N}-\text{H}$, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm $\text{H}_1, \text{H}_2, \text{H}_3$ (chẳng hạn như H_1NH_2), được gọi là góc liên kết của phân tử NH_3 . Góc này xấp xỉ 107° . (Nguồn: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ammonia>)

Trong không gian Oxyz, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $\text{N.H}_1\text{H}_2\text{H}_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz, ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí $\text{H}_1, \text{H}_2, \text{H}_3$, trong đó $\text{H}_1(0; -2; 0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox (Hình 2.44).

- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.
- Tính khoảng cách giữa nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen (làm tròn các kết quả tính toán đến hàng phần trăm).



Hình 2.44



Câu hỏi ĐÚNG - SAI

Câu 01: Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(3; -1; 2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.	
b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.	
c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.	
d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.	

Câu 02: Trong không gian Oxyz, cho hình bình hành ABCD.

Biết $A(0; 1; -2)$, $C(0; -2; 1)$, $D(1; 0; -1)$.

a) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OC} = (0; -2; 1)$.	
b) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{DA} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.	
c) Tọa độ điểm B là $B(-1; -1; 0)$.	
d) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.	

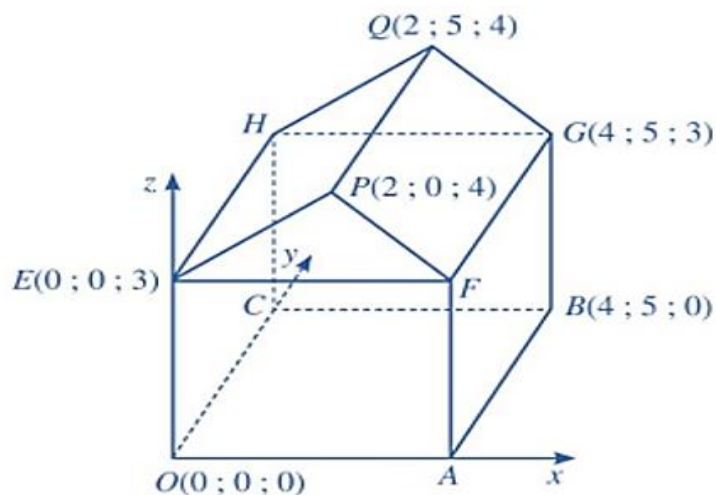


Câu 03: Trong không gian Oxyz, cho hình bình hành ABCD có $A(2; -1; -2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(1; -1; 1)$ và $D(x_D; y_D; z_D)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 4)$	
b) $\overrightarrow{DC} = (1 - x_D; -1 - y_D; 1 - z_D)$	
c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$	
d) Tọa độ điểm D là $(0; 3; 3)$	



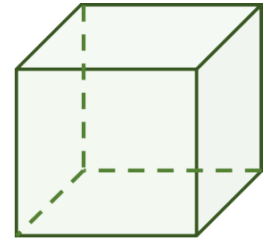
Câu 04: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ Oxyz, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Xét tính **đúng - sai** của các mệnh đề sau:



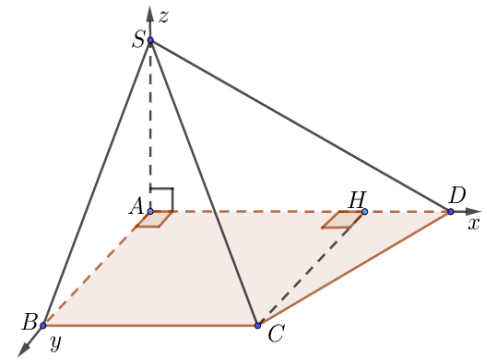
a) Tọa độ điểm F là $(4; 0; 3)$.	
b) Tọa độ $\overrightarrow{AH} = (4; 5; 3)$	
c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 3$	
d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là (FGQP) và (FGHE) bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)	

Câu 05: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2;1;0), C(0;3;0), C'(-1;2;1), D'(0;-2;0)$.

a) Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1;0;-1), B'(0;4;2)$.	
b) Tọa độ các điểm B, D là $B(1;5;1), D(1;-1;-1)$	
c) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.	
d) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.	



Câu 06: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD .



a) Tọa độ các điểm A, B là $A(0;0;0), B(a;a;0)$.	
b) Tọa độ các điểm C, D là $C(a;a;0), D(2a;0;0)$.	
c) Tọa độ điểm S là $S(0;0;2a)$.	
d) Tọa độ điểm H là $H(a;0;0)$.	

Câu 07: Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 4; -2)$ và $\vec{b} = (1; -2; 3)$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng -22	
b) $\vec{u} = (3;0;1)$, $\vec{v} = (2;1;0)$. Tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng 6	
c) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}_1(1;1;-4)$, $\vec{u}_2(0;1;1)$. Góc giữa hai vectơ đã cho bằng 60°	
d) $\vec{a} = (1;3;3)$, $\vec{b} = (-2;2;1)$ và $\vec{c} = (-1;2;3)$. Tích vô hướng $\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ bằng 5	

Câu 08: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $A(1;0;-2)$ và $B(2;-1;1)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}$ bằng 17	
b) Cho hai vectơ $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (-2;1;2)$ Khi đó tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng 10	

c) Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là 60°	
d) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(2; 1; 1)$. Độ dài đoạn AB bằng $\sqrt{6}$	

Câu 09: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;1;-2)$, $N(4;-5;1)$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng 7	
b) Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1;0;3)$ và $\vec{v} = (x;-1;1)$. Nếu $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ thì độ dài của $ \vec{v} $ bằng $\sqrt{2}$.	
c) Cho $\vec{u} = (-1;1;0)$, $\vec{v} = (0;-1;0)$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 60°	
d) Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1;3;2)$ và $\vec{b} = (2;1;1)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ là 31	



Câu 01: Cho tam giác ABC có $A(1;-1;1), B(0;1;2), C(1;0;1)$. Tìm tọa độ:

- a) Trung điểm M của AB ; b) Trọng tâm G của tam giác ABC .

Câu 02: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;3;5), B(1;1;3), C(4;-2;3)$. Số đo của góc ABC bằng bao nhiêu độ?

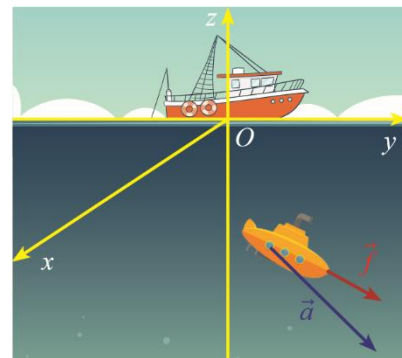
Câu 03: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $M(3;2;8)$, $N(0;1;3)$ và $P(2;m;4)$.
 Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

Câu 04: Cho ba điểm $A(2;0;2), B(1;2;3), C(2;1;2)$.

- a) Tìm $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$.
- b) Tính các độ dài AB, BC, CA .

Câu 05: Một thiết bị thăm dò đáy biển (Hình bên) được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -3)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 22; -41)$ (đơn vị: m).

Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.



Câu 06: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(3; 5; -2021)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy . Tìm độ dài đoạn thẳng M_1M_2



Trắc nghiệm

Câu 01: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{u} = (-1; 3; 2)$, $\vec{v} = (-3; -1; 2)$ khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

- A. 10. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 02: Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. D. $\vec{b} \perp \vec{a}$.

Câu 03: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$ và $B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn AB là:

- A. $2\sqrt{13}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. 3.

Câu 04: Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{a} = (1; 2; -2)$. Tính độ dài vectơ $\vec{a}$.

- A. $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$. B. $|\vec{a}| = 8$. C. $|\vec{a}| = 3$. D. $|\vec{a}| = 9$.

Câu 05: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(-4; 3; 12)$. Độ dài đoạn thẳng OA bằng

- A. 13. B. 11.
C. 17. D. 6.

Công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$

Câu 06: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1; 0; 1)$ và $B(4; 2; -2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. 2. B. 4.
C. $\sqrt{22}$. D. 22.

Câu 07: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với $A(1; 0; 2)$, $B(1; 1; 4)$, $C(1; -4; 0)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là

- A. $(1; -1; 2)$. B. $(-1; -1; 2)$. C. $(1; 1; 2)$. D. $(1; -1; -2)$.

Câu 08: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm $A(1; 2; 4)$, $B(3; 4; 2)$. Tìm tọa độ điểm M , biết B là trung điểm của AM .

- A. $M(-1; 0; 6)$. B. $M(2; 2; -2)$.
C. $M(2; 3; 3)$. D. $M(5; 6; 0)$.



Câu 09: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 0)$, $B(-1; 0; -2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB .

- A. $M(-1; -1; -1)$. B. $M(0; 1; -1)$. C. $M(0; 2; -2)$. D. $M(-2; -2; -2)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, khi đó $\cos \varphi$ bằng

- A. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. B. $\frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$. C. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$. D. $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 2; -1)$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

- A. $\sqrt{21}$.
B. 21.
C. $\sqrt{13}$.
D. 13.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (-3; 4; -5)$. Số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng:

- A. 150° .
B. 120° .
C. 60° .
D. 30° .

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (m; 3; 4)$; $\vec{b} = (4; m; -7)$. Với giá trị nào của m thì $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$?

- A. 1. B. 3.
C. 4. D. 2.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(2; 0; -3)$. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ có tọa độ là:

- A. $M\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -1\right)$
B. $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -2\right)$
C. $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 1\right)$
D. $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -2\right)$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $\overrightarrow{AB} = (-3; 0; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (5; -2; 4)$. Độ dài trung tuyến AM là:

- A. $3\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$
C. $2\sqrt{3}$ D. $5\sqrt{3}$

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 1), B(3; 2; -2), C(-3; 1; 5)$. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CM}$. Khi đó tổng $S = \frac{9}{x} + \frac{3}{y} - \frac{27}{z}$ bằng

- A. 6.
- B. -15.
- C. 16.
- D. -13.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng của $A(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây

- A. $Q(-1; 2; 3)$.
- B. $N(1; -2; 3)$.
- C. $P(1; 2; -3)$.
- D. $M(1; -2; -3)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 5), B(3; -6; 3)$. Hình chiếu vuông góc của trung điểm I của đoạn AB trên mặt phẳng (Oyz) là điểm nào dưới đây?

- A. $P(3; 0; 0)$.
- B. $N(3; -1; 5)$.
- C. $M(0; -2; 4)$.
- D. $Q(0; 0; 5)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-3; 1; 4)$ và $A(1; 0; -1), B(2; 3; 5)$. Tọa độ điểm C là

- A. $C(-6; 2; 0)$.
- B. $C(4; 2; -1)$
- C. $C(-12; 0; 8)$
- D. $C(3; -1; -5)$

Câu 20: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3); B(2; -3; 4)$. Tìm điểm $M \in (Oxy)$ sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng

- A. $M(1; 1; 0)$.
- B. $M(3; -5; 7)$.
- C. $M(-3; 5; 0)$.
- D. $M(-2; 1; 0)$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; 1; 4)$ và $N(0; 2; -1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác OMN là

- A. $(-3; 1; -5)$.
- B. $(-1; -1; -1)$.
- C. $(3; 3; 3)$.
- D. $(1; 1; 1)$.

Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\overrightarrow{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$. Tọa độ của điểm A là

- A. $(3; 17; -2)$. B. $(-3; -17; 2)$.
C. $(3; -2; 5)$. D. $(3; 5; -2)$.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; 4)$, $B(2; 4; -1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB .

- A. $G(6; 3; 3)$. B. $G(2; 1; 1)$.
C. $G(2; 1; 1)$. D. $G(1; 2; 1)$.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-2; 4; -5)$.
B. $D(4; 2; 9)$.
C. $D(6; 2; -3)$.
D. $D(-4; -2; 9)$.



Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-4; 1; -5)$; $B(2; -4; 7)$; $C(3; -2; 9)$. Tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành là

- A. $(2; 3; -3)$.
B. $(-3; -3; 3)$.
C. $(-6; 5; -12)$.
D. $(-3; 3; -3)$.



Câu 26: Cho hai điểm $M(1; -2; 3)$ và $N(3; 0; -1)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN .

- A. $I(4; -2; 2)$. B. $I(2; -1; 2)$.
C. $I(4; -2; 1)$ D. $I(2; -1; 1)$

Câu 27: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$ và $D(2; 2; 2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm I của MN là:

- A. $I(1; -1; 2)$. B. $I(1; 1; 0)$.
C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. D. $I(1; 1; 1)$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = -6$.
B. $m = 0$.
C. $m = -4$.
D. $m = 2$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCE$ với

$A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh E là

A. $E(4;4;1)$.

B. $E(0;2;-1)$.

C. $E(1;3;-1)$.

D. $E(1;1;2)$.



Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u}(1;1;-2)$ và $\vec{v}(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có số đo bằng 45° .

Một học sinh giải như sau:

$$\text{Bước 1: } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1-2m}{\sqrt{6(m^2+1)}}$$

$$\text{Bước 2: Góc giữa hai vector bằng } 45^\circ \text{ nên: } \frac{1-2m}{\sqrt{6(m^2+1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 1-2m = \sqrt{3(m^2+1)} \quad (*)$$

$$\text{Bước 3: Phương trình } (*) \Leftrightarrow (1-2m)^2 = 3(m^2+1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 - \sqrt{6} \\ m = 2 + \sqrt{6} \end{cases}$$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Đúng.

B. Sai ở bước 1.

C. Sai ở bước 2.

D. Sai ở bước 3.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $K(2;4;6)$, gọi K' là hình chiếu vuông góc của K trên trục Oz , khi đó trung điểm OK' có tọa độ là:

A. $(1;0;0)$

B. $(0;0;3)$

C. $(0;2;0)$

D. $(1;2;3)$

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a}(-1;1;0), \vec{b}(1;1;0), \vec{c}(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$

B. $\vec{a}$ cùng phương $\vec{c}$

C. $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $OABD$ có $\vec{OA} = \vec{a}(-1;1;0)$, $\vec{OB} = \vec{b}(1;1;0)$ (O là gốc tọa độ). Tọa độ tâm hình bình hành $OABD$ là:

A. $(0;1;0)$

B. $(1;0;0)$

C. $(1;0;1)$

D. $(1;1;0)$



Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;0)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;-1;2)$.

Tam giác ABC là tam giác:



- A. cân đỉnh A.
- B. vuông đỉnh A.
- C. đều.
- D. Đáp án khác.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2; 3; 1), N(5; 6; -2)$. Đường thẳng MN cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm A.

Điểm A chia đoạn thẳng MN theo tỉ số:

- A. 2
- B. -2
- C. $-\frac{1}{2}$
- D. $\frac{1}{2}$

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $M(3; 0; 0)$
- B. $N(0; -1; 1)$
- C. $P(0; -1; 0)$
- D. $Q(0; 0; 1)$

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0), B(-1; 1; 3), C(3, 1, 0)$.

Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- A. $D(-2; 1; 0), D(-4; 0; 0)$
- B. $D(0; 0; 0), D(-6; 0; 0)$
- C. $D(6; 0; 0), D(12; 0; 0)$
- D. $D(0; 0; 0), D(6; 0; 0)$



BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài tập 01: Cho ba điểm $A(2; 1; -1), B(3; 2; 0)$ và $C(2; -1; 3)$.

- a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- b) Tính các độ dài AB, BC, CA .
- c) Trung điểm M của AB; trung điểm N của AC.
- d) Chứng minh ba điểm ABC tạo thành một tam giác. Tính chu vi của tam giác ABC.
- e) Trọng tâm G của tam giác ABC.
- f) Tìm tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành. Tính chu vi của hình bình hành ABCD.
- g) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của ΔABC .
- h) Tính góc A.
- i) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oz sao cho CM vuông góc với đường thẳng AB.



j) Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho B, C, N thẳng hàng.

k) Tìm tọa độ điểm E sao cho $2\overrightarrow{AB} - 2025\overrightarrow{CE} = \vec{0}$.



Bài tập 02: Cho ba điểm $A(3; 3; 3)$, $B(1; 1; 2)$ và $C(5; 3; 1)$.

- Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tính chu vi $\triangle ABC$.
- Tìm tọa độ trung điểm của các cạnh của $\triangle ABC$.
- Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành. Tính chu vi của hình bình hành $ABCD$.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tính góc A .
- Tìm điểm F trên trục Oy cách đều hai điểm B, C .
- Tìm điểm R trên mặt phẳng (Oxy) cách đều ba điểm A, B, C .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc tia Oz sao cho đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng AB .
- Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho B, C, N thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Bài tập 04:

- a/ Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (2; 0; -1)$, Tìm φ ?
- b/ Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 0)$ và $B(-3; 0; 4)$. Tìm độ dài đoạn thẳng AB ?
- c/ Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 4)$, $B(-1; 1; 4)$, $C(0; 0; 4)$. Tìm số đo của góc ABC ?
- d/ Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tìm độ dài đoạn thẳng OA

Đáp án



Bài tập 06: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(1; 1; 1)$.
Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng** - **sai**?

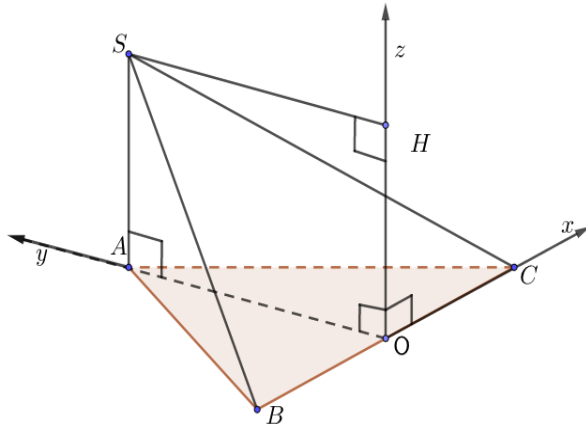
A. Thể tích Tứ diện $OABC$ là $1/6$	
B. Tam giác ABD là tam giác đều.	
C. $AB \perp CD$	
D. Tam giác BCD là tam giác vuông.	

Chương II: VECTO và HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Phụ lục: PHÉP CHỌN TRỤC CƠ BẢN (

SA vuông góc với mặt đáy

1/ Đáy là tam giác đều



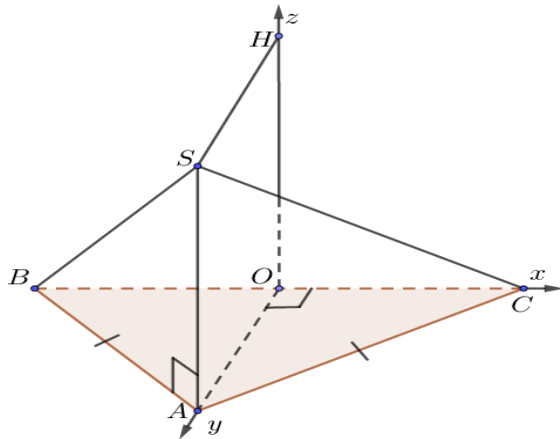
Gọi O là trung điểm BC .

Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = a = 1$.

$$O(0;0;0), A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right),$$

$$C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; OH\right).$$

2/ Đáy là tam giác cân tại A



Gọi O là trung điểm BC .

Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

Tọa độ các điểm là:

$$O(0;0;0), A(0;OA;0), B(-OB;0;0),$$

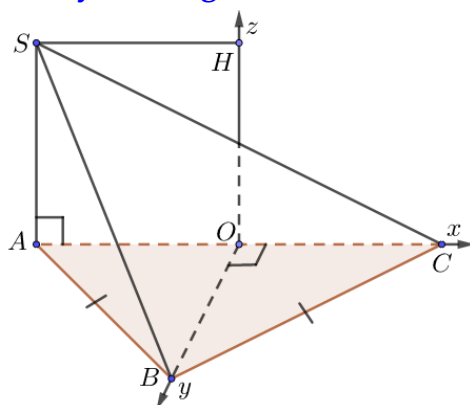
$$C(OC;0;0), S\left(0;OA;OH\right).$$

Gv. Nguyễn Vũ Minh

Sưu Tầm và Biên Soạn

Zalo: 0917 05 00 99

3/ Đáy là tam giác cân tại B



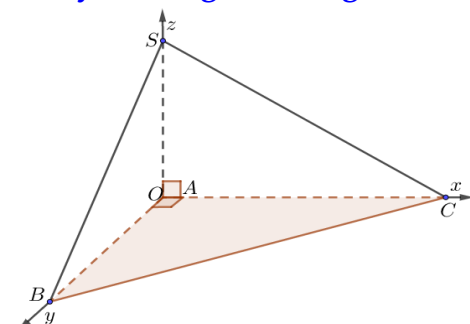
Gọi O là trung điểm AC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,

$$A(-OA;0;0), B(0;OB;0),$$

$$C(OC;0;0), S\left(-OA;0;OH\right).$$

4/ Đáy là tam giác vuông tại A

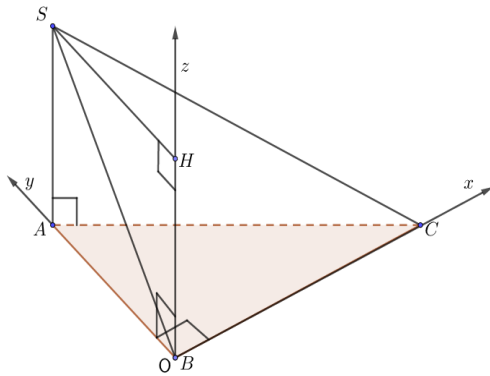


Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

Tọa độ các điểm: $A \equiv O(0;0;0)$,

$$B(0;OB;0), C(AC;0;0), S(0;0;SA).$$

5/ Đáy là tam giác vuông tại B

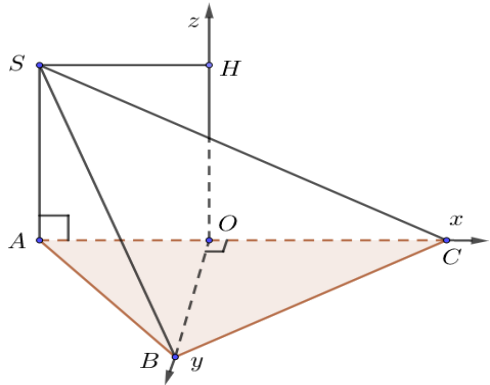


Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$

Tọa độ các điểm: $B \equiv O(0;0;0)$,

$A(0; AB; 0)$, $C(BC; 0; 0)$, $S\left(0; AB; BH\right)$.
=SA

6/ Đáy là tam giác thường



Dựng đường cao BO của $\triangle ABC$.

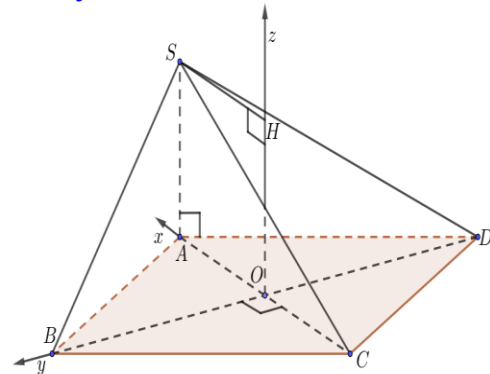
Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$

Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,

$A(-OA; 0; 0)$, $B(0; OB; 0)$,

$C(OC; 0; 0)$, $S\left(-OA; 0; OH\right)$.
=SA

7/ Đáy là hình thoi



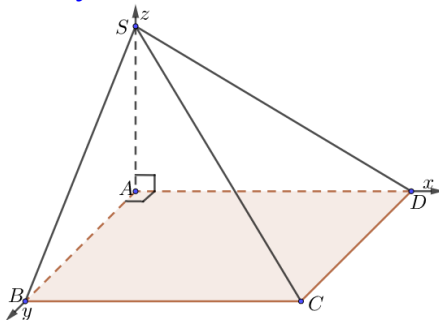
Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(OA; 0; 0)$,

$B(0; OB; 0)$, $C(-OC; 0; 0)$

$D(0; -OD; 0)$, $S\left(OA; 0; OH\right)$.
=SA

8/ Đáy là hình chữ nhật

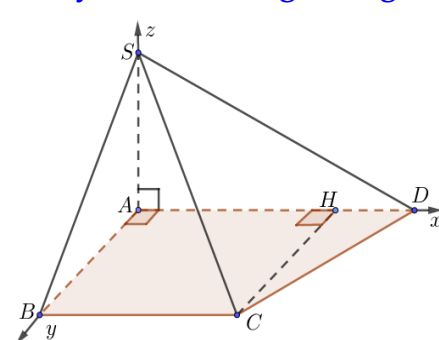


Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0; AB; 0)$,

$C(AD; AB; 0)$, $D(AD; 0; 0)$, $S(0; 0; SA)$.

9/ Đáy là hình thang vuông



Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

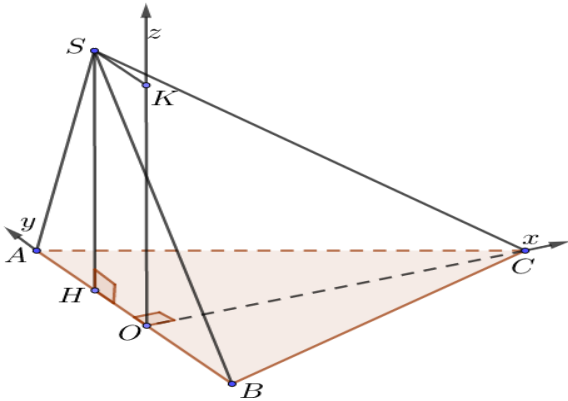
Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$,

$B(0; AB; 0)$, $C(AH; AB; 0)$,

$D(AD; 0; 0)$, $S(0; 0; SA)$.

Mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

1/ Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



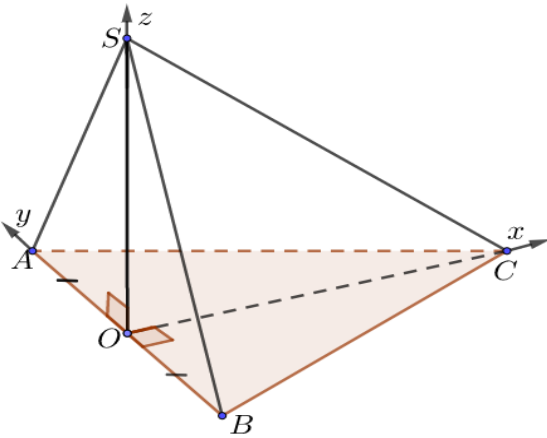
Vẽ đường cao CO trong $\triangle ABC$.

Chọn hệ trục như hình, $a = 1$.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$,

$$C(OC;0;0), S\left(\begin{matrix} 0;OH;OK \\ =SH \end{matrix}\right)$$

2/ Đây là hình vuông hoặc hình chữ nhật



Gọi O là trung điểm BC

Chọn hệ trục như hình, $a = 1$.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,

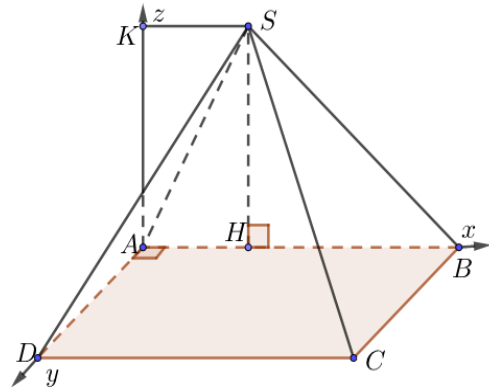
$$B(0;-OB;0), C(OC;0;0), S(0;0;SO)$$

Gv. Nguyễn Vũ Minh

Sưu Tầm và Biên Soạn

Zalo: 0917 05 00 99

3/ Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



Dựng hệ trục như hình, chọn $a = 1$.

Ta có:

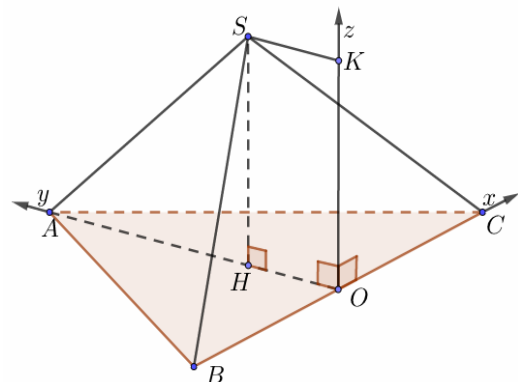
$$A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0), C(AB;AD;0),$$

$$D(0;AD;0), S\left(\begin{matrix} AH;0;AK \\ =SH \end{matrix}\right)$$

Hình chóp đều

1/ Hình chóp tam giác đều

$$O(0;0;0), A\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(-\frac{BC}{2}; 0; 0\right), \\ C\left(\frac{BC}{2}; 0; 0\right), S\left(0; \underbrace{\frac{AB\sqrt{3}}{6}}_{=OH}; \overbrace{OK}^{=SH}\right).$$

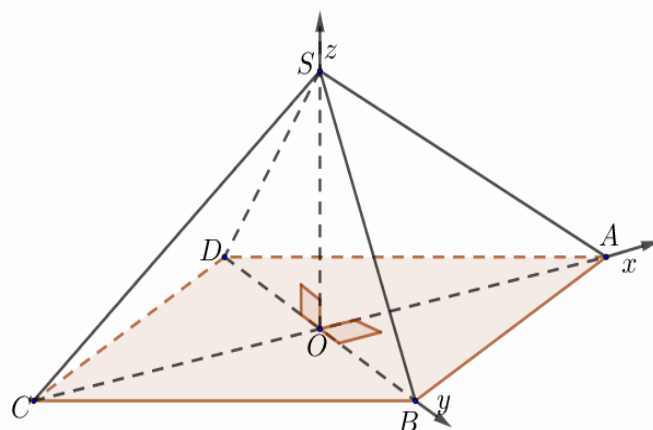


2/ Hình chóp tứ giác đều

$O(0;0;0), S(0;0;SO);$

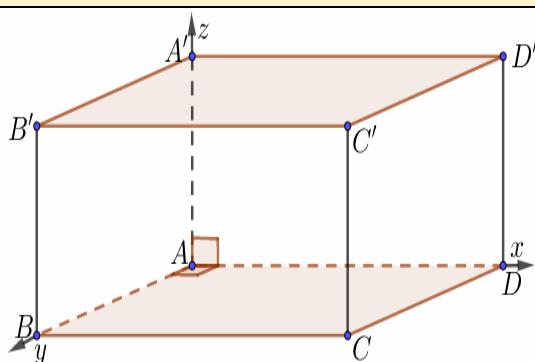
$$A\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{AB\sqrt{2}}{2};0\right);$$

$$C\left(-\frac{AB\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;-\frac{AB\sqrt{2}}{2};0\right)$$



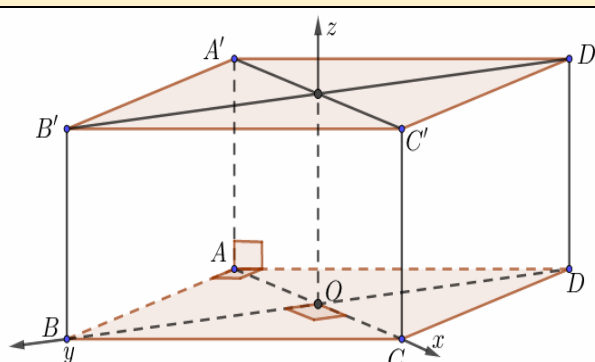
Hình chóp – lăng trụ đều

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật



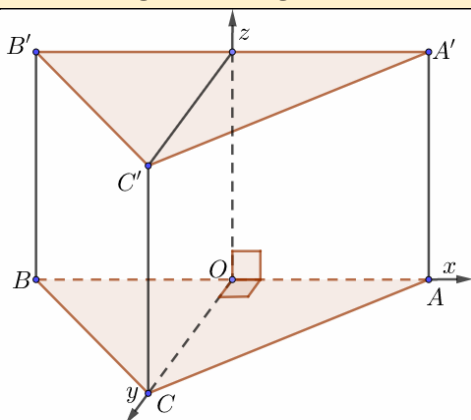
$A \equiv O(0;0;0), B(0;AB;0), C(AD;AB;0),$
 $D(AD;0;0), A'(0;0;AA'),$
 $B'(0;AB;AA'), C'(AD;AB;AA'),$
 $D'(AD;0;AA').$

Lăng trụ đứng đáy là hình thoi



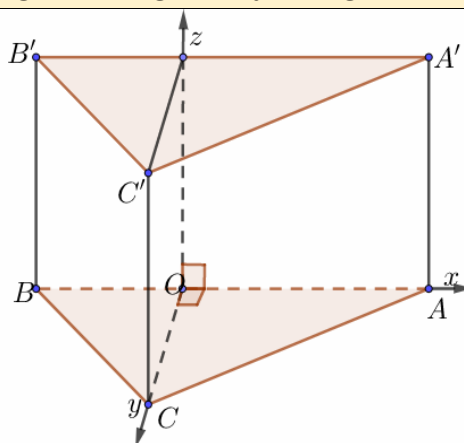
$O(0;0;0), A(-OA;0;0), B(0;OB;0),$
 $C(OC;0;0), D(0;-OD;0),$
 $A'(-OA;0;AA'), B'(0;OB;AA'),$
 $C'(OC;0;CC'), D'(0;-OD;DD').$

Lăng trụ tam giác đều



$O(0;0;0), A\left(\frac{AB}{2};0;0\right), B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right),$
 $C(0;OC;0), A'(OA;0;AA'),$
 $B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right), C'(0;OC;CC').$

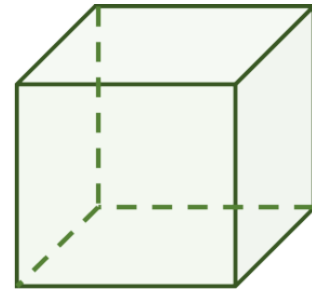
Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường



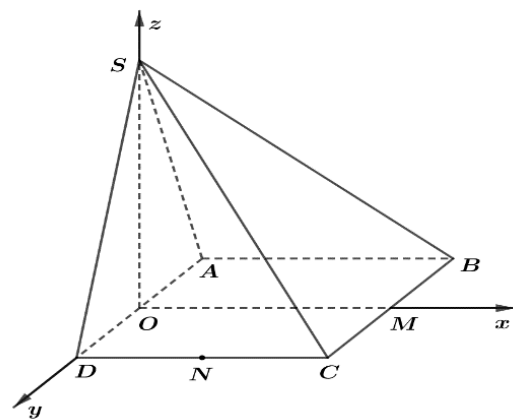
$O(0;0;0), A(OA;0;0), B(-OB;0;0),$
 $C(0;OC;0), A'(OA;0;AA'), B'(-OB;0;BB'),$
 $C'(0;OC;CC').$

Ví dụ 01: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BB' . Cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và AC' là:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
- B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- C. $\frac{1}{2}$.
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Ví dụ 02: (Câu hỏi đúng – sai) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



A. Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$.	
B. Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.	
C. Tọa độ điểm S là $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.	
D. Tọa độ các điểm M, N là $M\left(1; 0; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$	