

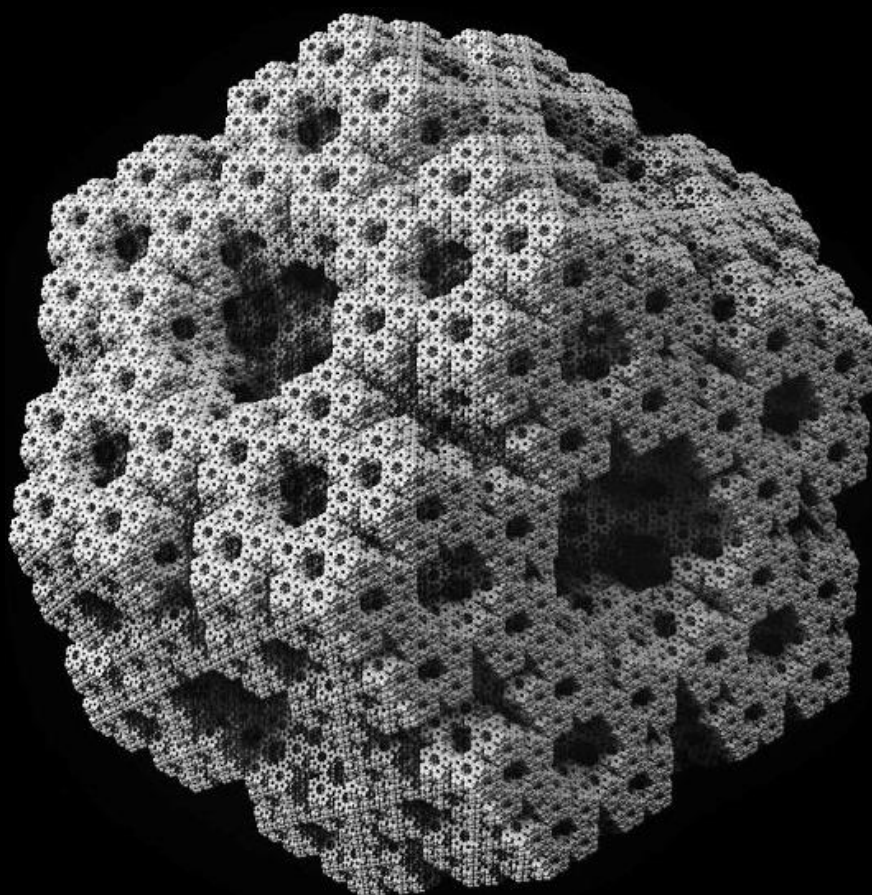
---

TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

---

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

# HÌNH KHÔNG GIAN



CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

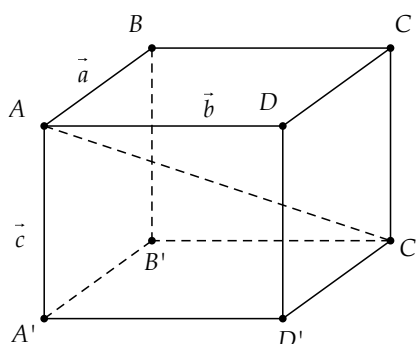
Sưu tầm và tổng hợp

# Chương 1

## Phương pháp Vector

### A. Cơ sở của phương pháp vector.

#### 1. Định nghĩa.



Các khái niệm và các phép toán của vec tơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng. Ngoài ra ta cần nhớ thêm

**Quy tắc hình hộp.** Nếu  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình hộp thì  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

#### 2. Quy tắc trọng tâm tứ diện.

$G$  là trọng tâm tứ diện  $ABCD$  khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau xảy ra

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}, \forall M$

#### 3. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu giá của chúng song song với một mặt phẳng.

Điều kiện cần và đủ để ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng là có các số  $m, n, p$  không đồng thời bằng 0 sao cho  $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ .

Cho hai vectơ không cùng phương khi đó điều kiện cần và đủ để ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng là có các số  $m, n$  sao cho  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

Nếu ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng thì mỗi vector  $\vec{d}$  đều có thể phân tích một cách duy nhất dưới dạng  $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ .

## B. Các bài toán ứng dụng vector.

**Bài toán 1.** Chứng minh đẳng thức vec tơ.

**Phương pháp.**

Sử dụng qui tắc cộng, qui tắc trừ ba điểm, qui tắc trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác, trọng tâm tứ giác, qui tắc hình bình hành, qui tắc hình hộp... để biến đổi về này thành về kia.

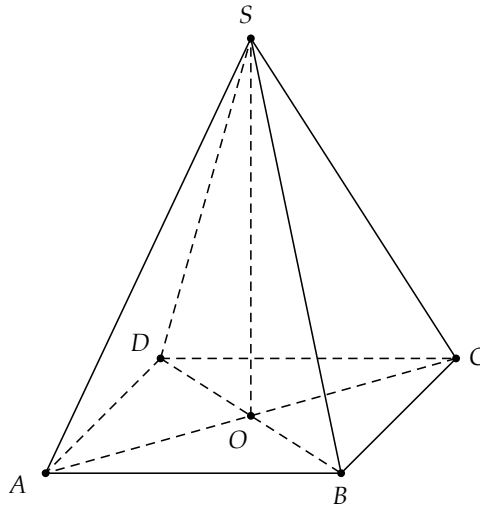
Sau đây là các bài toán minh họa.

### Câu 1

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$$

Lời giải



Gọi  $O$  là tâm của hình chữ nhật  $ABCD$

Ta có  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$ .

$$\overrightarrow{SA}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OA} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{SC}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$   
 $= 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2$  ( vì  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$  ).

Tương tự  $\overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2$ . Từ đó suy ra  $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$ .

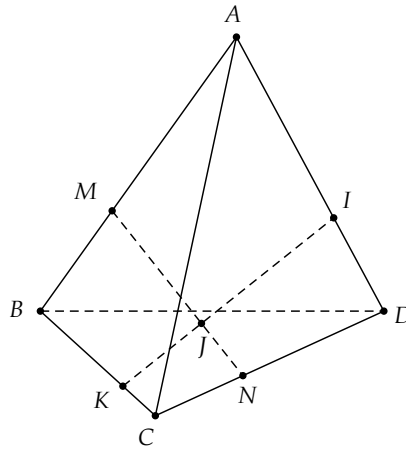
### Câu 2

Cho tứ diện  $ABCD$ ,  $M$  và  $N$  lần lượt là các điểm thuộc các cạnh  $AB$  và  $CD$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$ ; các điểm  $I, J, K$  lần lượt thuộc  $AD, MN, BC$  sao cho

$$\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}, \overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}.$$

Chứng minh với mọi điểm  $O$  ta có  $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$ .

Lời giải



Vì  $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$  nên với điểm  $O$  bất kì ta có

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = -2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}$$

Tương tự ta có  $\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}}{3}$ ,  $\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OD}}{1-k}$ ,  $\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}$ ,  $\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{ON}}{1-k}$ .

$$\begin{aligned} \text{Từ đó ta có } \overrightarrow{OJ} &= \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OD} - 2k\overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{3} [(1-k)\overrightarrow{OI} + 2(1-k)\overrightarrow{OK}] = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OK}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}.$$

**Bài toán 2.** Chứng minh ba vec tơ đồng phẳng và bốn điểm đồng phẳng.

**Phương pháp.**

Để chứng minh ba vec tơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau

- Chứng minh giá của ba vec tơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  cùng song song với một mặt phẳng.
- Phân tích  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$  trong đó  $\vec{a}, \vec{b}$  là hai vec tơ không cùng phương.

Để chứng minh bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng ta có thể chứng minh ba vec tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  đồng phẳng. Ngoài ra có thể sử dụng kết quả quen thuộc sau

Điều kiện cần và đủ để điểm  $D \in (ABC)$  là với mọi điểm  $O$  bất kì ta có

$$\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \text{ trong đó } x + y + z = 1$$

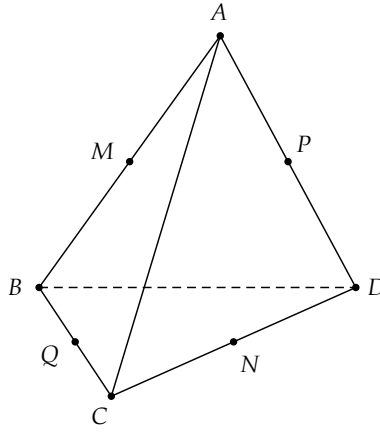
Tính chất trên gọi là tâm tỉ cự trong không gian.

Sau đây là các bài toán minh họa.

### Câu 3

Cho tứ diện  $ABCD$ , các điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$ ,  $\overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC}$  ( $k \neq 1$ ). Chứng minh  $M, N, P, Q$  đồng phẳng.

**Lời giải**



Ta có  $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MP} = k(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MP}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}$ .

Tương tự  $\overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC} \Rightarrow \overrightarrow{MQ} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

Suy ra  $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k} = \frac{k}{k-1}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$  ( Do  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$  )

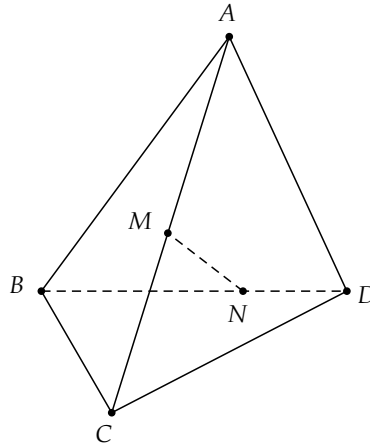
Mặt khác  $N$  là trung điểm của  $CD$  nên  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}$  suy ra ba vec tơ  $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}$  đồng phẳng, hay bốn điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng.

#### Câu 4

Cho tứ diện  $ABCD$ , các điểm  $M, N$  xác định bởi  $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND}$  ( $x, y \neq 1$ ). Tìm điều kiện giữa  $x$  và  $y$  để ba vec tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$  đồng phẳng.

#### Lời giải

Đặt  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$  thì  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng.



Ta có  $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DM} = x(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM}) \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DA} - x\overrightarrow{DC}}{1-x} = \frac{\vec{a} - x\vec{c}}{1-x}$  (1).

Lại có  $\overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{1}{1-y}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{1-y}\vec{b}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = \frac{-1}{1-x}\vec{a} + \frac{1}{1-y}\vec{b} + \frac{x}{1-x}\vec{c}$ .

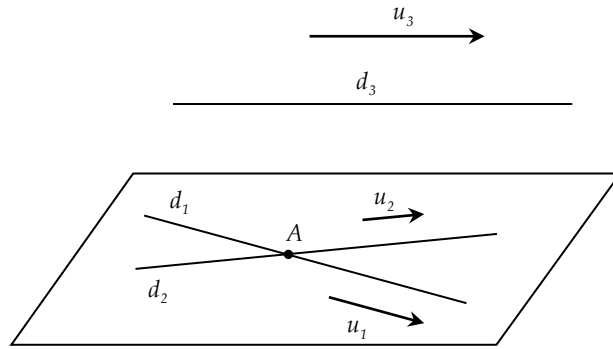
Ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{CD} = -\vec{c}; \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  là hai vec tơ không cùng phương nên  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$  đồng phẳng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{CD}$ , tức là

$$\frac{-1}{1-x}\vec{a} + \frac{1}{1-y}\vec{b} + \frac{x}{1-x}\vec{c} = m(\vec{b} - \vec{a}) - n\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{1-x}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1-y} - m\right)\vec{b} + \left(n + \frac{x}{1-x}\right)\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{1-x} \\ m = \frac{1}{1-y} \\ n = -\frac{x}{1-x} \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Vậy ba vec tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$  đồng phẳng khi và chỉ khi  $x = y$ .

**Lưu ý.** Ta có thể sử dụng điều kiện đồng phẳng của ba vec tơ để xét vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng. Cho ba đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  lần lượt chứa ba vec tơ  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  trong đó  $d_1, d_2$  cắt nhau và  $d_3 \not\subset mp(d_1, d_2)$ .



Khi đó

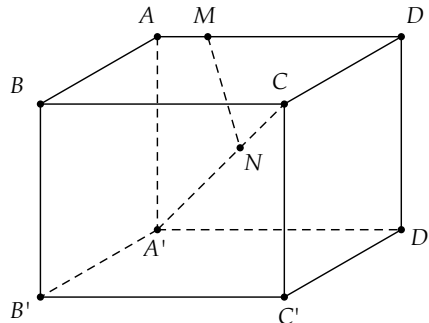
- $d_3 \parallel (d_1, d_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  là ba vec tơ đồng phẳng.
- $d_3 \cap mp(d_1, d_2) = M \Leftrightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  là ba vec tơ không đồng phẳng

### Câu 5

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ ,  $M, N$  là các điểm thỏa  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$ ,  $\overrightarrow{NA'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{NC'}$ .

Chứng minh  $MN \parallel (BC'D)$ .

### Lời giải



Đặt  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BB'} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}$  thì  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  là ba vec tơ không đồng phẳng và

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{c}; \overrightarrow{BC'} = \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{BA'} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Ta có  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BM}) \Rightarrow \frac{5}{4}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{4\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}}{5} = \frac{4\vec{a} + (\vec{a} + \vec{c})}{5} = \frac{5\vec{a} + \vec{c}}{5}.$$

Tương tự  $\overrightarrow{BN} = \frac{3\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}$  và

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{5} = -\frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{c}) + \frac{3}{5}(\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC'}$$

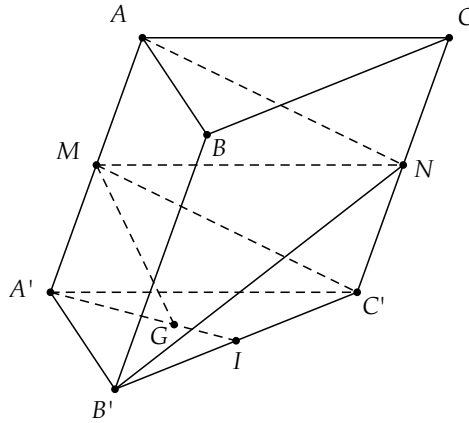
Suy ra  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC'}$  đồng phẳng mà  $N \notin (BC'D) \Rightarrow MN \parallel (BC'D)$ .

**Nhận xét.** Có thể sử dụng phương pháp trên để chứng minh hai mặt phẳng song song.

### Câu 6

Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AA', CC'$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$ . Chứng minh  $(MGC') \parallel (AB'N)$ .

#### Lời giải



Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Vì  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AA', CC'$  nên

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$  nên  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}) = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

Ta có  $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$

Suy ra  $\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AN}$  đồng phẳng.

Mặt khác  $G \notin (AB'N) \Rightarrow MG \parallel (AB'N)$  (1)

Tương tự  $\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{AN} \Rightarrow MC' \parallel (AB'N)$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $\begin{cases} MG \parallel (AB'N) \\ MC' \parallel (AB'N) \end{cases} \Rightarrow (MGC') \parallel (AB'N)$ .

**Bài toán 3.** Tính độ dài đoạn thẳng.

**Phương pháp.**

Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vec tơ ta sử dụng cơ sở

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

Vì vậy để tính độ dài của đoạn  $MN$  ta thực hiện theo các bước sau

- Chọn ba vec tơ không đồng phẳng  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  so cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.
- Phân tích  $\vec{MN} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

$$\text{Khi đó } MN = |\vec{MN}| = \sqrt{MN^2} = \sqrt{(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c})^2}$$

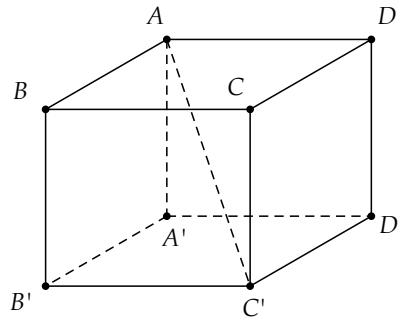
$$= \sqrt{m^2|\vec{a}|^2 + n^2|\vec{b}|^2 + p^2|\vec{c}|^2 + 2mn\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 2np\cos(\vec{b}, \vec{c}) + 2mp\cos(\vec{c}, \vec{a})}.$$

Sau đây là các bài toán minh họa.

### Câu 7

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh  $a$  và các góc  $BAA' = BAD = DAA' = 60^\circ$ . Tính độ dài đường chéo  $AC'$ .

#### Lời giải



Đặt  $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AD} = \vec{b}, \vec{AA'} = \vec{c}$  thì  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a, (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = 60^\circ$ .

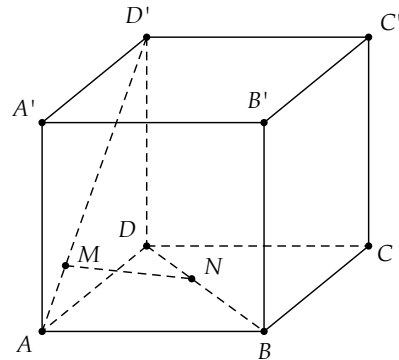
$$\text{Ta có } \vec{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{AC'}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a}$$

$$= 3a^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ + 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ + 2|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ = 6a^2 \Rightarrow AC' = a\sqrt{6}.$$

### Câu 8

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh  $a$ . Lấy  $M$  thuộc đoạn  $A'D$ ,  $N$  thuộc đoạn  $BD$  với  $AM = DN = x$  ( $0 < x < a\sqrt{2}$ ). Tính  $MN$  theo  $a$  và  $x$ .

#### Lời giải



Đặt  $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AD} = \vec{b}, \vec{AA'} = \vec{c}$

Ta có  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a, (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = 90^\circ$

- $\overrightarrow{DN} = \frac{DN}{DB} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{x}{a\sqrt{2}} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \frac{x}{a\sqrt{2}} (\vec{a} - \vec{b})$
- $\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AD'} \cdot \overrightarrow{AD'} = \frac{x}{a\sqrt{2}} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = \frac{x}{a\sqrt{2}} (\vec{b} + \vec{c})$

Suy ra  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \frac{x}{a\sqrt{2}} (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} + \frac{x}{a\sqrt{2}} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{x}{a\sqrt{2}} \vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a\sqrt{2}}\right) \vec{b} - \frac{x}{a\sqrt{2}} \vec{c}$ .

Khi đó  $MN^2 = \left( \frac{x}{a\sqrt{2}} \vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a\sqrt{2}}\right) \vec{b} - \frac{x}{a\sqrt{2}} \vec{c} \right)^2 = \frac{x^2}{2a^2} \vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a\sqrt{2}}\right)^2 \vec{b}^2 + \frac{x^2}{2a^2} \vec{c}^2$   
 $= x^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}x}{a} + \frac{x^2}{2a^2}\right) a^2 = \frac{3x^2}{2} - \sqrt{2}ax + a^2 \Rightarrow MN = \sqrt{\frac{3x^2}{2} - \sqrt{2}ax + a^2}$

Đến đây bài toán có thể hỏi tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn  $MN$  !

**Bài toán 4.** Sử dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải bài toán hình không gian

**Phương pháp.**

Sử dụng các kết quả

- $A, B, C, D$  là bốn điểm đồng phẳng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = m\overrightarrow{DB} + n\overrightarrow{DC}$
- $A, B, C, D$  là bốn điểm đồng phẳng khi và chỉ khi với mọi điểm  $O$  bất kì ta có

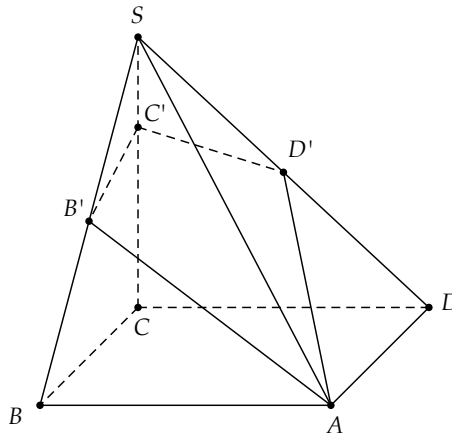
$$\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \text{ trong đó } x + y + z = 1.$$

Sau đây là các bài toán minh họa.

#### Câu 9

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là một hình bình hành. Gọi  $B', D'$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SB, SD$ . Mặt phẳng  $(AB'D')$  cắt  $SC$  tại  $C'$ . Tính  $\frac{SC'}{SC}$ .

**Lời giải**



Đặt  $\vec{a} = \overrightarrow{SA}, \vec{b} = \overrightarrow{SB}, \vec{c} = \overrightarrow{SD}$  và  $m = \frac{SC'}{SC}$ .

Ta có  $\overrightarrow{SB'} = \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{SD'} = \frac{1}{2}\vec{c}$  và  $\overrightarrow{SC'} = m\overrightarrow{SC} = m(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC}) = m(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$ .

$$\Rightarrow \overrightarrow{SC'} = 2m\overrightarrow{SB'} - m\overrightarrow{SA} + 2m\overrightarrow{SD'}$$

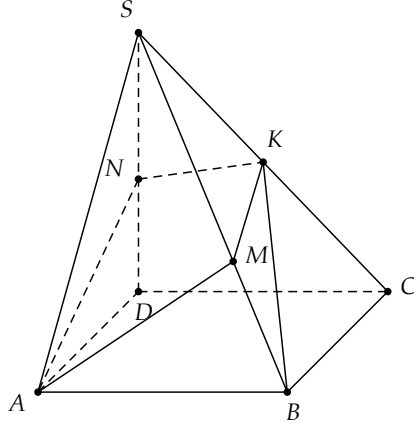
Do  $A, B', C', D'$  đồng phẳng nên  $2m + (-m) + 2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$ . Vậy  $\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}$ .

**Câu 10**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là một hình bình hành. Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $SC$ .

Mặt phẳng qua  $AK$  cắt các cạnh  $SB, SD$  lần lượt tại  $M, N$ . Chứng minh  $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$ .

**Lời giải**



Đặt  $\vec{a} = \overrightarrow{SA}, \vec{b} = \overrightarrow{SB}, \vec{c} = \overrightarrow{SD}$  và  $\frac{SB}{SM} = m, \frac{SD}{SN} = n$ . Ta có  $\overrightarrow{SM} = \frac{SM}{SB} \overrightarrow{SB} = \frac{1}{m} \overrightarrow{SB}; \overrightarrow{SN} = \frac{SN}{SD} \overrightarrow{SD} = \frac{1}{n} \overrightarrow{SD}$

$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \frac{n}{2} \overrightarrow{SN} + \frac{m}{2} \overrightarrow{SM} - \frac{1}{2} \overrightarrow{SA}.$$

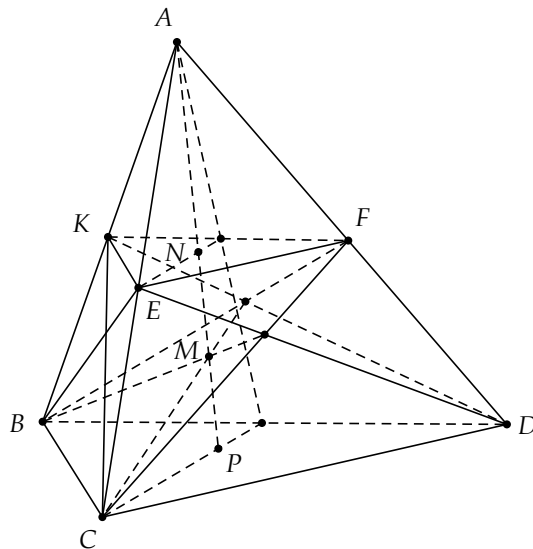
Mặt ta có  $A, M, K, N$  đồng phẳng nên  $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow m + n = 3$ .

Vậy  $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$ .

**Câu 11**

Cho tứ diện  $ABCD$ , trên các cạnh  $AB, AC, AD$  lấy các điểm  $K, E, F$ . Các mặt phẳng  $(BCF), (CDK), (BDE)$  cắt nhau tại  $M$ . Đường thẳng  $AM$  cắt  $(KEF)$  tại  $N$  và cắt mặt phẳng  $(BCD)$  tại  $P$ . Chứng minh  $\frac{NP}{NA} = 3 \frac{MP}{MA}$ .

**Lời giải**



Chỉ ra sự tồn tại của điểm  $M$ .

| Một số chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi hình học không gian

$$\text{Gọi } I = CF \cap BK \Rightarrow CI = (BCF) \cap (CDK)$$

$$\text{Gọi } J = DE \cap CF \Rightarrow (BCF) \cap (BDE) = BJ$$

Khi đó  $M = CI \cap BJ$  chính là giao điểm của ba mặt phẳng  $(BCF), (CDK), (BDE)$ .

$$\text{Chứng minh } \frac{NP}{NA} = 3 \frac{MP}{MA}. \text{ Giả sử } \overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC} = \beta \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD} = \gamma \overrightarrow{AF}$$

Do  $M, N$  thuộc đoạn  $AP$  nên tồn tại các số  $m, n > 1$  sao cho  $\overrightarrow{AP} = m \overrightarrow{AM} = n \overrightarrow{AN}$ .

Ta có  $B, C, D, P$  đồng phẳng nên tồn tại  $x, y, z$  với  $x + y + z = 1$  (1) sao cho

$$\overrightarrow{AP} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC} + z \overrightarrow{AD} = \alpha x \overrightarrow{AK} + \beta y \overrightarrow{AE} + \gamma z \overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\alpha x}{n} \overrightarrow{AK} + \frac{\beta y}{n} \overrightarrow{AE} + \frac{\gamma z}{n} \overrightarrow{AF}$$

Mặt khác  $N \in (KEF)$  nên  $\frac{\alpha x}{n} + \frac{\beta y}{n} + \frac{\gamma z}{n} = 1 \Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = n$  (2). Làm tương tự ta có

$$M \in (BCE) \Rightarrow x + y + \gamma z = m \quad (3)$$

$$M \in (CDK) \Rightarrow x + \beta y + \gamma z = m \quad (4)$$

$$M \in (BDE) \Rightarrow \alpha x + y + z = m \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra  $2(x + y + z) + \alpha x + \beta y + \gamma z = 3m$ . Kết hợp với (1), (2) ta được

$$2 + n = 3m \Leftrightarrow 2 + \frac{AP}{AN} = 3 \frac{AP}{AM} \Leftrightarrow 3 + \frac{NP}{NA} = 3 \left( 1 + \frac{MP}{MA} \right) \Leftrightarrow \frac{NP}{NA} = 3 \frac{MP}{MA}$$

### Câu 12

Cho đa giác lồi  $A_1 A_2 \dots A_n$  ( $n \geq 2$ ) nằm trong  $(P)$  và  $S$  là một điểm nằm ngoài  $(P)$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các cạnh  $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$  của hình chóp  $S.A_1 A_2 \dots A_n$  tại các điểm  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sao cho  $\frac{SA_1}{SB_1} + \frac{SB_2}{SB_2} + \dots + \frac{SA_n}{SB_n} = a$ . Chứng minh rằng mặt phẳng  $(\alpha)$  luôn đi qua một điểm cố định.

### Lời giải

Trên các cạnh  $SA_i$  lấy các điểm  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sao cho  $SX_i = \frac{SA_i}{a}$

Gọi  $I$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SX_1} + \overrightarrow{SX_2} + \dots + \overrightarrow{SX_n}$  thì  $I$  là điểm cố định (do các điểm  $S$  và  $X_1, X_2, \dots, X_n$  cố định)

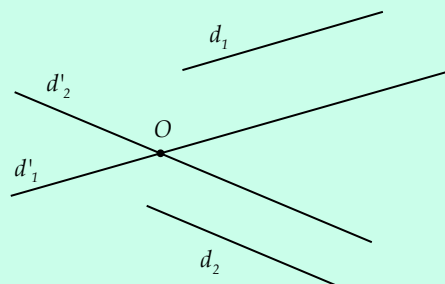
$$\text{Ta có } \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SX_1} + \overrightarrow{SX_2} + \dots + \overrightarrow{SX_n} = \frac{SX_1}{SB_1} \overrightarrow{SB_1} + \frac{SX_2}{SB_2} \overrightarrow{SB_2} + \dots + \frac{SX_n}{SB_n} \overrightarrow{SB_n}$$

$$\text{Do } \frac{SX_1}{SB_1} + \frac{SX_2}{SB_2} + \dots + \frac{SX_n}{SB_n} = \frac{SA_1}{aSB_1} + \frac{SA_2}{aSB_2} + \dots + \frac{SA_n}{aSB_n} = 1$$

Nên các điểm  $I, B_1, B_2, \dots, B_n$  đồng phẳng suy ra mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $I$  cố định.

**Bài toán 5.** Tính góc giữa hai đường thẳng.

**Phương pháp.**



Để tính góc giữa hai đường thẳng  $d_1, d_2$  trong không gian ta có thể thực hiện theo hai cách

**Cách 1.** Tìm góc giữa hai đường thẳng  $d_1, d_2$  bằng cách chọn một điểm  $O$  thích hợp ( $O$  thường nằm trên một trong hai đường thẳng).

Từ  $O$  dựng các đường thẳng  $d'_1, d'_2$  lần lượt song song (có thể trùng nếu  $O$  nằm trên một trong hai đường thẳng) với  $d_1$  và  $d_2$ . Góc giữa hai đường thẳng  $d'_1, d'_2$  chính là góc giữa hai đường thẳng  $d_1, d_2$ .

**Chú ý.** Để tính góc này ta thường sử dụng định lý cosine trong tam giác

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

**Cách 2.** Tìm hai vec tơ chỉ phương  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  của hai đường thẳng  $d_1, d_2$

Khi đó góc giữa hai đường thẳng  $d_1, d_2$  xác định bởi  $\cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|}$ .

**Chú ý.** Để tính  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, |\vec{u}_1|, |\vec{u}_2|$  ta chọn ba vec tơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng, sau đó biểu thị các vec tơ  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  qua các vec tơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  rồi thực hiện các tính toán.

Ngoài ra ta có thể dùng tích vô hướng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

Để chứng minh  $d_1 \perp d_2$  ta có trong phần này ta có thể thực hiện theo các cách sau

- Chứng minh  $d_1 \perp d_2$  ta chứng minh  $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$  trong đó  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  lần lượt là các vec tơ chỉ phương của  $d_1$  và  $d_2$ .
- Sử dụng tính chất  $\begin{cases} b \parallel c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$ .

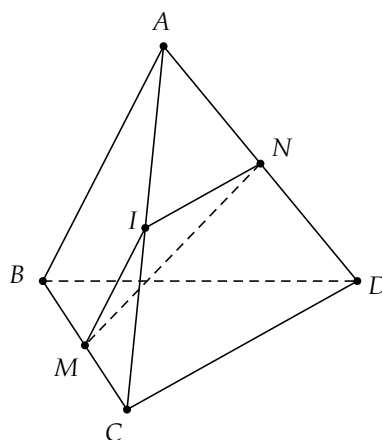
Sử dụng định lý Pitago hoặc xác định góc giữa  $d_1, d_2$  và tính trực tiếp góc đó.

Sau đây là các bài toán minh họa.

### Câu 13

Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC$  và  $AD$ , biết rằng  $AB = CD = a, MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

#### Lời giải



#### Cách 1.

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Ta có  $\begin{cases} IM \parallel AB \\ IN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB, CD) = (IM, IN)$

Đặt  $\angle MIN = \alpha$ . Xét tam giác  $IMN$  có  $IM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, IN = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}, MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Theo định lí cosine, ta có } \cos \alpha = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM \cdot IN} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \angle MIN = 120^\circ \text{ suy ra } (AB, CD) = 60^\circ.$$

**Cách 2.** Ta có  $\cos(AB, CD) = \cos(IM, IN) = \frac{|\vec{IM} \cdot \vec{IN}|}{|\vec{IM}| |\vec{IN}|}$

$$\text{Và } \vec{MN} = \vec{IN} - \vec{IM} \Rightarrow \vec{MN}^2 = (\vec{IN} - \vec{IM})^2 = IM^2 + IN^2 - 2\vec{IN} \cdot \vec{IM}$$

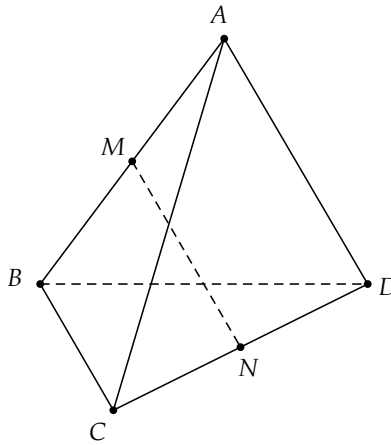
$$\vec{IN} \cdot \vec{IM} = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2} = -\frac{a^2}{8} \Rightarrow \cos(AB, CD) = |\cos(IM, IN)| = \frac{|\vec{IM} \cdot \vec{IN}|}{|\vec{IM}| |\vec{IN}|} = \frac{1}{2}$$

Vậy  $(AB, CD) = 60^\circ$ .

#### Câu 14

Cho tứ diện  $ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $m$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tính góc giữa đường thẳng  $MN$  với các đường thẳng  $AB, BC$  và  $CD$ .

#### Lời giải



Đặt  $\vec{AD} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$ . Khi đó, ta có  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = m$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = 60^\circ$ .

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{m^2}{2}$ . Vì  $M, N$  là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  nên

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$$

$$MN^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{ac} - 2\vec{ab} - 2\vec{bc}) = \frac{m^2}{2} \Rightarrow MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \vec{MN} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{ab} + \vec{bc} - \vec{b}^2) = 0$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $AB$  bằng  $90^\circ$ .

$$\text{Ta có } \vec{MN} \cdot \vec{CD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{ac} - \vec{ab} - \vec{ac} - \vec{c}^2 + \vec{bc}) = 0$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $CD$  bằng  $90^\circ$ .

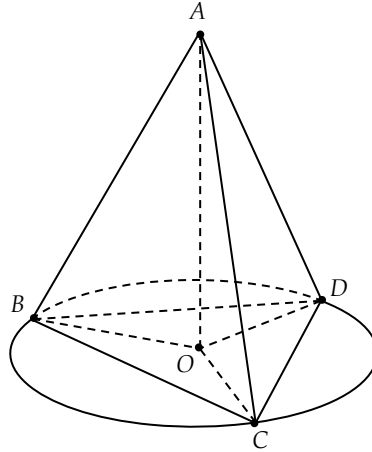
$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(-\vec{b} + \vec{c}) = \frac{m^2}{2} \Rightarrow \cos(MN, BC) = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\frac{m^2}{2}}{m \cdot \frac{m\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $BC$  bằng  $45^\circ$ .

### Câu 15

Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $BCD$ . Chứng minh  $AO \perp CD$ .

**Lời giải**



Ta có  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ , ta lưu ý trong tam giác  $ABC$  thì  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Vì } AC = AD = a, OD = OC = R \Rightarrow \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = -\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= -\frac{OA^2 + OD^2 - CD^2}{2} + \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

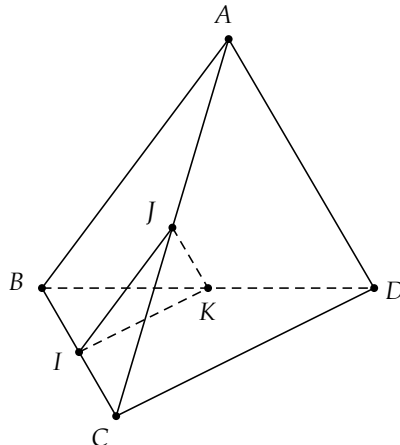
Vậy  $AO \perp CD$ .

### Câu 16

Cho tứ diện  $ABCD$  có  $CD = \frac{4}{3}AB$ . Gọi  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AC, BD$ . Cho biết

$JK = \frac{5}{6}AB$ . Tính góc giữa đường thẳng  $CD$  với các đường thẳng  $IJ$  và  $AB$ .

**Lời giải**



$$\text{Ta có } IJ = \frac{1}{2}AB, IK = \frac{1}{2}CD = \frac{2}{3}AB \Rightarrow IJ^2 + IK^2 = \frac{1}{4}AB^2 + \frac{4}{9}AB^2 = \frac{25}{36}AB^2 \quad (1)$$

$$\text{Mà } JK = \frac{5}{6}AB \Rightarrow JK^2 = \frac{25}{36}AB^2 \quad (2)$$

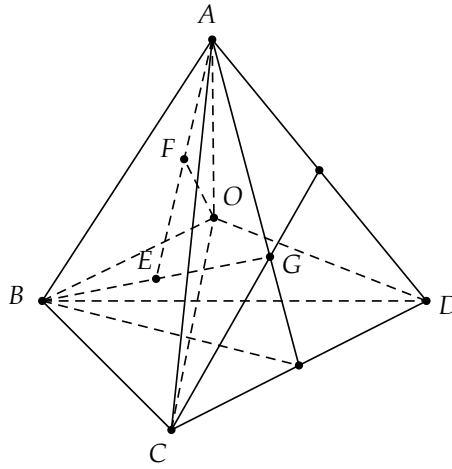
Từ (1) và (2) suy ra  $IJ^2 + IK^2 = JK^2 \Rightarrow JI \perp IK$ .

Mặt khác ta có  $IJ \parallel AB, IK \parallel CD \Rightarrow AB \perp CD$ . Tương tự  $\begin{cases} IJ \parallel AB \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow IJ \perp CD$ .

### Câu 17

Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = AD$ . Gọi  $O$  là điểm thỏa mãn  $OA = OB = OC = OD$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ACD$ , gọi  $E$  là trung điểm của  $BG$  và  $F$  là trung điểm của  $AE$ . Chứng minh  $OF$  vuông góc với  $BG$  khi và chỉ khi  $OD$  vuông góc với  $AC$ .

### Lời giải



Đặt  $OA = OB = OC = OD = R(1)$  và  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$ .

Ta có  $AB = AC = AD$  nên  $\triangle AOB = \triangle AOC = \triangle AOD$  suy ra

$$\angle AOB = \angle AOC = \angle AOD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} \quad (3)$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$  và do  $AG = 2GM$  nên

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d} - 3\vec{b} \end{aligned} \quad (4)$$

Gọi  $E, F$  theo thứ tự là trung điểm của  $AE, BG$  ta có

$$\begin{aligned} 12\overrightarrow{OF} &= 6(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}) = 6\overrightarrow{OA} + 3(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}) = 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OG} \\ &= 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = 7\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có  $36\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{OF} = (7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$

$$= 7\vec{a}^2 - 9\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 - 18\vec{ab} + 8\vec{ac} + 8\vec{ad} + 2\vec{cd}.$$

Theo (3) ta có  $36\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{OF} = 2\vec{d}(\vec{c} - \vec{a}) = 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AC}$  suy ra  $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{OF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Hay  $OF \perp BG \Leftrightarrow OD \perp AC$ .

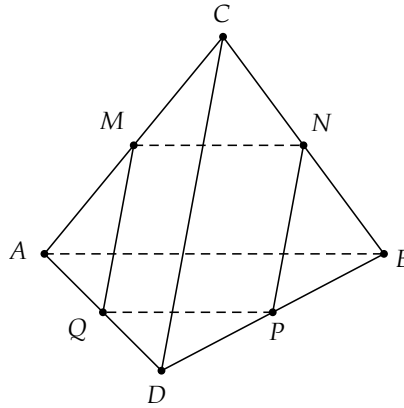
**Câu 18**

Cho tứ diện  $ABCD$  có hai mặt  $ABC$  và  $ABD$  là các tam giác đều

a) Chứng minh  $AB \perp CD$ .

b) Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AC, BC, BD, DA$ . Chứng minh  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

**Lời giải**



a) Đặt  $AB = AD = AC = a$ . Ta có  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$

$$= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Vậy  $AB \perp CD$ .

b) Ta có  $MN \parallel PQ \parallel AB$  và  $MN = PQ = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$  nên tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành.

Lại có  $\begin{cases} MN \parallel AB \\ NP \parallel CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow MN \perp NP$ , do đó  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

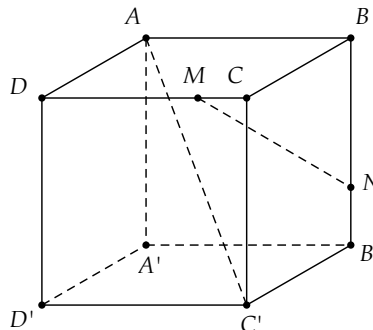
**Câu 19**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Trên các cạnh  $DC$  và  $BB'$  lấy các điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $MD = NB = x$  ( $0 \leq x \leq a$ ). Chứng minh

a)  $AC' \perp B'D'$

b)  $AC' \perp MN$ .

**Lời giải**



Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$ .

a) Ta có  $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{B'D'} = \vec{c} - \vec{b}$  nên

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{B'D'} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) + \vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{b} = a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow AC' \perp B'D'.$$

| Một số chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi hình học không gian

b) Ta có  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) = \left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}$

Từ đó ta có  $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \left[\left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right)\right] = \frac{x}{a}\vec{a} \cdot \vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{c}$   
 $= \frac{x}{a}a^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)b^2 - c^2 = x.a + \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 - a^2 = 0.$

Vậy  $AC' \perp MN$ .

### Các bài toán luyện tập.

#### Câu 20

Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $E, F$  là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{EA} = k\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD} = l\overrightarrow{FC}$  còn  $P, Q, R$  là các điểm xác định bởi  $\overrightarrow{PA} = l\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QE} = l\overrightarrow{QF}, \overrightarrow{RB} = l\overrightarrow{RC}$ . Chứng minh ba điểm  $P, Q, R$  thẳng hàng.

#### Lời giải

Ta có  $\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EQ} & (1) \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FQ} & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có  $\overrightarrow{PQ} = l\overrightarrow{PD} + l\overrightarrow{DF} + l\overrightarrow{FQ} \quad (3)$

Lấy (1) - (3) theo vế ta có  $(1-l)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AE} - l\overrightarrow{DF} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE} - \frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}$

Tương tự  $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{1-l}\overrightarrow{EB} - \frac{l}{1-l}\overrightarrow{FC}$

Mặt khác  $\overrightarrow{EA} = k\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD} = l\overrightarrow{FC}$  nên  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE} - \frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF} = \frac{-k}{1-l}\overrightarrow{EB} - \frac{kl}{1-l}\overrightarrow{FC} = -k\overrightarrow{QR}$

Vậy  $P, Q, R$  thẳng hàng.

#### Câu 21

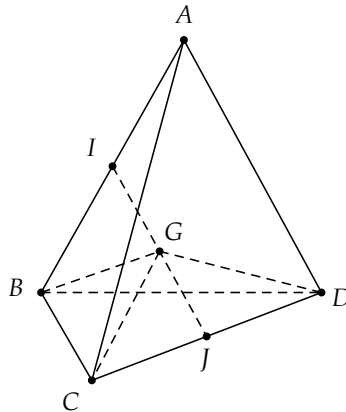
Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ,  $G$  là trung điểm của  $IJ$ .

a) Chứng minh  $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

b) Chứng minh  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

c) Xác định vị trí của  $M$  để  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$  nhỏ nhất.

#### Lời giải



$$a) \begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

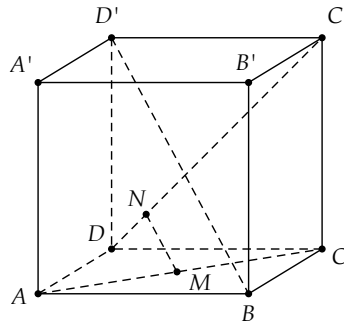
$$b) \text{ Ta có } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = 2(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}) = \vec{0}.$$

$$c) \text{ Ta có } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MG}| \text{ nên } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| \text{ nhỏ nhất khi } M \equiv G.$$

### Câu 22

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Xác định vị trí các điểm  $M, N$  lần lượt trên  $AC$  và  $DC'$  sao cho  $MN \parallel BD'$ . Tính tỉ số  $\frac{MN}{BD'}$ .

#### Lời giải



Ta có  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BB'} = \vec{c}$ . Giả sử  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$ .

Để dàng có các biểu diễn  $\overrightarrow{BM} = (1-x)\vec{a} + x\vec{b}$  và  $\overrightarrow{BN} = (1-y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c}$ .

Từ đó suy ra  $\overrightarrow{MN} = (x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c}$  (1)

Để  $MN \parallel BD'$  thì  $\overrightarrow{MN} = z\overrightarrow{BD'} = z(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$  (2)

Từ (1) và (2) ta có  $(x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} = z(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$\Leftrightarrow (x-y-z)\vec{a} + (1-x-z)\vec{b} + (y-z)\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 1-x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy các điểm  $M, N$  được xác định bởi  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$ .

Ta cũng có  $\overrightarrow{MN} = z\overrightarrow{BD'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD'} \Rightarrow \frac{MN}{BD'} = \frac{1}{3}$ .

### Câu 23

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh đều bằng  $a$  và các góc

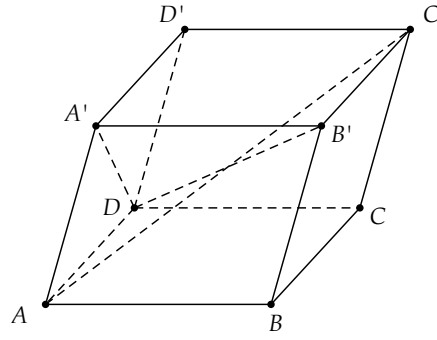
$$B'A'D' = 60^\circ, B'A'A = D'A'A = 120^\circ$$

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng  $AB$  với  $A'D$ ;  $AC'$  với  $B'D$ .

b) Tính diện tích các tứ giác  $A'B'CD$  và  $ACC'A'$ .

c) Tính góc giữa đường thẳng  $AC'$  với các đường thẳng  $AB, AD, AA'$ .

#### Lời giải



a) Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{A'B'} = \vec{b}, \overrightarrow{A'D'} = \vec{c}$ . Ta có  $\overrightarrow{A'D} = \vec{a} + \vec{c}$  nên

$$\cos(AB, A'D) = \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'D}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{A'D}|} = \frac{|\vec{a}(\vec{a} + \vec{c})|}{|\vec{a}| |\vec{a} + \vec{c}|}.$$

Đề ý rằng  $|\vec{a} + \vec{c}| = a$ ,  $\vec{a}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{a^2}{2}$ . Từ đó  $\cos(AB, A'D) = \frac{1}{2} \Rightarrow (AB, A'D) = 60^\circ$

Ta có  $\overrightarrow{AC'} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}, \overrightarrow{B'D} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ , từ đó tính được

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{B'D} = (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0 \Rightarrow (AC', B'D) = 90^\circ.$$

b)  $\overrightarrow{A'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{B'D} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\Rightarrow A'C \perp B'D$  nên  $S_{A'B'DC} = \frac{1}{2} A'C \cdot B'D$ .

Dễ dàng tính được  $A'C = a\sqrt{2}, B'D = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{A'B'DC} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2$

$$S_{AA'C'C} = AA' \cdot AC \sin(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}), AA' = a, AC = a\sqrt{3}.$$

Tính được  $\sin(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}) = \sqrt{1 - \cos^2(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC})} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy  $S_{AA'C'C} = AA' \cdot AC \sin(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = a^2 \sqrt{2}$ .

c) Ta có  $(AC', AB) = (AC', AD) = (AC', AA') = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

#### Câu 24

Chứng minh rằng diện tích của tam giác  $ABC$  được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

#### Lời giải

Ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 \sin^2 A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 (1 - \cos^2 A)} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ .

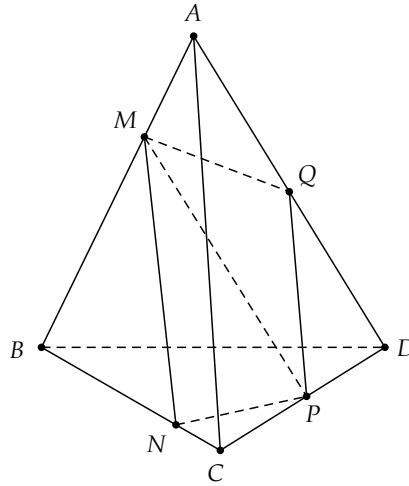
#### Câu 25

Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy các điểm  $M, N, P, Q$  lần lượt thuộc  $AB, BC, CD, DA$  sao cho

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k \overrightarrow{DC}$$

Hãy xác định  $k$  để  $M, N, P, Q$  đồng phẳng.

#### Lời giải



**Cách 1.**

Ta có  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ .

Lại có  $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$  do đó  $MN \parallel AC$ .

Vậy Nếu  $M, N, P, Q$  đồng phẳng thì  $(MNPQ) \cap (ACD) = PQ \parallel AC$

$$\Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{QA}{QD} = 1 \text{ hay } \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

**Cách 2.** Đặt  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$  thì không khó khăn ta có các biểu diễn

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c}, \overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

Các điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng khi và chỉ khi các vec tơ  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$  đồng phẳng do đó

$$\exists x, y: \overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c} = x\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + y\left(-\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

Do các vec tơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng nên điều này tương đương với

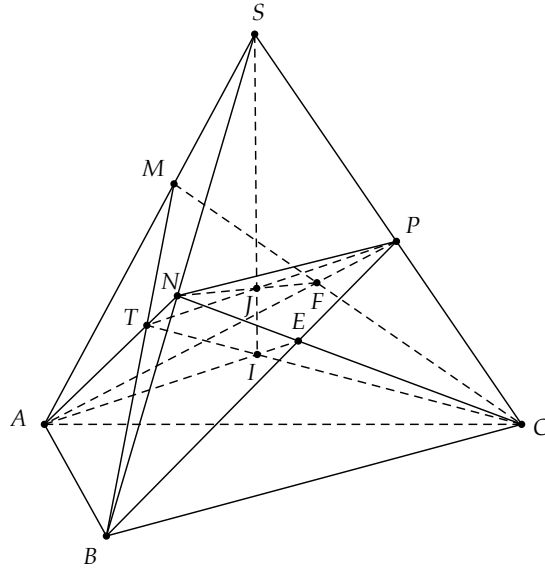
$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}y = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x = k \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}, y = 1, k = \frac{1}{2}.$$

**Câu 26**

Giả sử  $M, N, P$  là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh  $SA, SB, SC$  của tứ diện  $SABC$ . Gọi  $I$  là giao điểm của ba mặt phẳng  $(BCM), (CAN), (ABP)$  và  $J$  là giao điểm của ba mặt phẳng

$(ANP), (BPM), (CMN)$ . Chứng minh  $S, I, J$  thẳng hàng và  $\frac{MS}{MA} + \frac{NS}{NB} + \frac{PS}{PC} + 1 = \frac{JS}{JI}$ .

**Lời giải**



Goi  $E = BP \cap CN, F = CM \cap AP, T = AN \cap BM$ .

Trong  $(BCM)$  có  $I = BF \cap CT$  trong  $(ANP)$  có  $NF \cap PT = J$ .

Đặt  $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$  và  $\overrightarrow{SM} = x\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{SP} = z\overrightarrow{PC}$

Ta có  $\overrightarrow{SM} = \frac{x}{x+1}\vec{a}, \overrightarrow{SN} = \frac{y}{y+1}\vec{b}, \overrightarrow{SP} = \frac{z}{z+1}\vec{c}$  ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ). Do  $T = AN \cap BM$  nên

$$\begin{aligned} \begin{cases} T \in AN \\ T \in BM \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{ST} = \alpha\overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{ST} = \beta\overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA} \end{cases} \Rightarrow \alpha\overrightarrow{SM} + (1-\alpha)\overrightarrow{SB} = \beta\overrightarrow{SN} + (1-\beta)\overrightarrow{SA} \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha x}{x+1}\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b} = \frac{\beta y}{y+1}\vec{b} + (1-\beta)\vec{a}. \end{aligned}$$

Vì  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương nên ta có

$$\begin{cases} \frac{\alpha x}{x+1} = 1-\beta \\ \frac{\beta y}{y+1} = 1-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{x+y+1} \\ \beta = \frac{y}{x+y+1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{ST} = \frac{x}{x+y+1}\vec{a} + \frac{y}{x+y+1}\vec{b}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có  $\overrightarrow{SE} = \frac{y}{y+z+1}\vec{b} + \frac{z}{y+z+1}\vec{c}, \overrightarrow{SF} = \frac{z}{z+x+1}\vec{c} + \frac{x}{z+x+1}\vec{a}.$

Làm tương tự như trên đối với hai giao điểm  $I = BF \cap CT$  và  $NF \cap PT = J$  ta được

$$\overrightarrow{SI} = \frac{1}{x+y+z+1}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}), \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{x+y+z+2}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c})$$

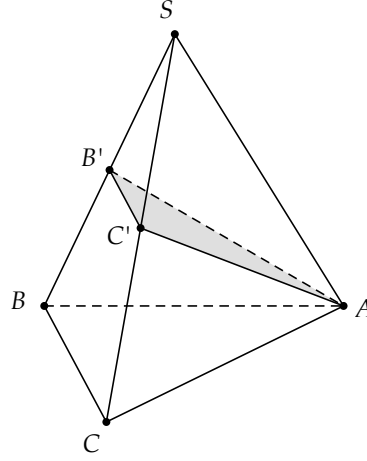
Suy ra  $\overrightarrow{SJ} = \frac{x+y+z+1}{x+y+z+2}\overrightarrow{SI} \Rightarrow \overrightarrow{SJ} = (x+y+z+1)\overrightarrow{IJ}$

Vậy  $S, I, J$  thẳng hàng và  $\frac{SI}{IJ} = x+y+z+1 = \frac{SM}{MA} + \frac{SN}{NB} + \frac{SP}{PC} + 1.$

### Câu 27

Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = a, \angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = \alpha$ . Gọi  $(\beta)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  và các trung điểm của  $SB, SC$ . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\beta)$ .

Lời giải



Gọi  $B', C'$  lần lượt là trung điểm của  $SB, SC$ . Thiết diện là tam giác  $AB'C'$ .

$$\text{Theo bài tập 5 thì } S_{AB'C'} = \frac{1}{2} \sqrt{AB'^2 AC'^2 - (\overline{AB'} \cdot \overline{AC'})^2}$$

$$\text{Ta có } \overline{AB'} = \overline{SB'} - \overline{SA} = \frac{1}{2} \overline{SB} - \overline{SA} \Rightarrow AB'^2 = \frac{1}{4} SB^2 + SA^2 - \overline{SA} \overline{SB} = \frac{a^2}{4} (5 - 4 \cos \alpha).$$

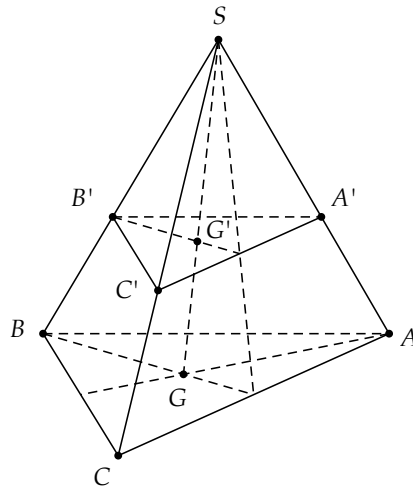
$$\text{Tính tương tự, ta có } \overline{AB'} \cdot \overline{AC'} = \frac{a^2}{4} (4 - 3 \cos \alpha).$$

$$\text{Vậy } S_{AB'C'} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4}{16} (5 - 4 \cos \alpha)^2 - \frac{a^4}{16} (4 - 3 \cos \alpha)^2} = \frac{a^2}{8} \sqrt{7 \cos^2 \alpha - 16 \cos \alpha + 9}.$$

### Câu 28

Cho hình chóp  $S.ABC$ , mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các tia  $SA, SB, SC, SG$  lần lượt tại các điểm  $A', B', C', G'$ , với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}.$

#### Lời giải



Do  $G$  là trọng tâm của  $\Delta ABC$  nên

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overline{SG} = \overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC} \Leftrightarrow 3 \frac{SG}{SG'} \overline{SG'} = \frac{SA}{SA'} \overline{SA'} + \frac{SB}{SB'} \overline{SB'} + \frac{SC}{SC'} \overline{SC'}$$

$$\text{Mặt khác } A', B', C', G' \text{ đồng phẳng nên } \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}.$$

**Chú ý.** Ta có một kết quả quen thuộc trong hình học phẳng

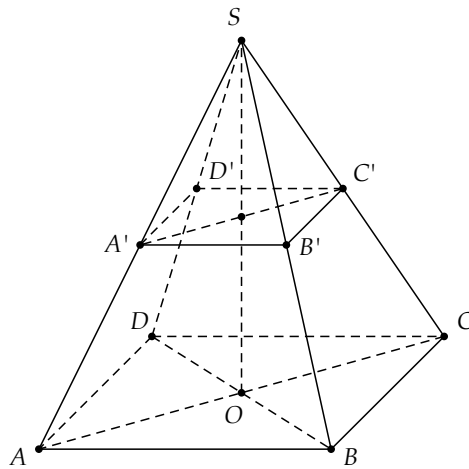
Nếu  $M$  là điểm thuộc miền trong tam giác  $ABC$  thì  $S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0}$  trong đó  $S_a, S_b, S_c$  lần lượt là diện tích các tam giác  $MBC, MCA, MAB$ . Vì vậy ta có bài toán tổng quát hơn như sau

Cho hình chóp  $S.ABC$ , mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các tia  $SA, SB, SC, SM$  ( $M$  là điểm thuộc miền trong tam giác  $ABC$ ) lần lượt tại các điểm  $A', B', C', M'$ . Chứng minh  $\frac{S_a SA}{SA'} + \frac{S_b SB}{SB'} + \frac{S_c SC}{SC'} = \frac{S.SM}{SM'}$ . Với  $S_a, S_b, S_c$  lần lượt là diện tích các tam giác  $MBC, MCA, MAB$  và  $S$  là diện tích tam giác  $ABC$ .

#### Câu 29

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Một mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các cạnh  $SA, SB, SC, SD$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$ . Chứng minh  $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$ .

#### Lời giải



Gọi  $O$  là tâm của hình bình hành  $ABCD$  thì  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$

$$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} \overrightarrow{SA'} + \frac{SB}{SB'} \overrightarrow{SB'} = \frac{SB}{SB'} \overrightarrow{SB'} + \frac{SC}{SC'} \overrightarrow{SC'}$$

Do  $A', B', C', D'$  đồng phẳng nên đẳng thức trên  $\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$ .

#### Câu 30

Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = a, SB = b, SC = c$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  luôn đi qua trọng tâm của tam giác  $ABC$ , cắt các cạnh  $SA, SB, SC$  lần lượt tại  $A', B', C'$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}.$$

#### Lời giải

Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

$$\text{Ta có } 3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \frac{SA}{SA'} \overrightarrow{SA'} + \frac{SB}{SB'} \overrightarrow{SB'} + \frac{SC}{SC'} \overrightarrow{SC'}.$$

$$\text{Mà } G, A', B', C' \text{ đồng phẳng nên } \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} = 3$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left( \frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2} \right) (a^2 + b^2 + c^2) \geq \left( \frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi  $\frac{1}{aSA'} = \frac{1}{bSB'} = \frac{1}{cSC'}$  kết hợp với  $\frac{a}{SA'} + \frac{b}{SB'} + \frac{c}{SC'} = 3$  ta được

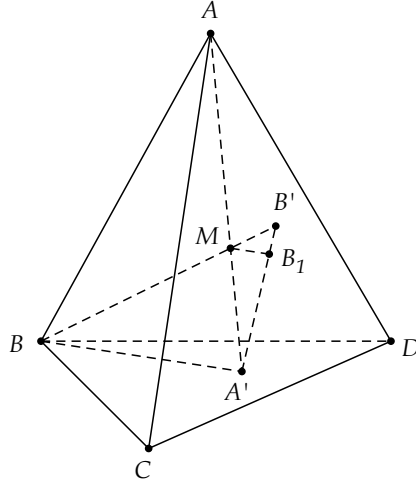
$$SA' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3a}, SB' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3b}, SC' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3c}.$$

Vậy GTNN của  $\frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2}$  là  $\frac{9}{a^2 + b^2 + c^2}$ .

### Câu 31

Cho tứ diện  $ABCD$ ,  $M$  là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng  $AM, BM, CM, DM$  cắt các mặt  $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M$  và song song với  $(BCD)$  lần lượt cắt  $A'B', A'C', A'D'$  tại các điểm  $B_1, C_1, D_1$ . Chứng minh  $M$  là trọng tâm của tam giác  $B_1C_1D_1$ .

### Lời giải



Vì  $M$  nằm trong tứ diện  $ABCD$  nên tồn tại  $x, y, z, t > 0$  sao cho

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} + t\overrightarrow{MD} = \vec{0} \quad (1)$$

Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $M$  và song song với mặt phẳng  $(BCD)$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) \parallel (BCD) \\ (BB'A') \cap (\alpha) = MB_1 \Rightarrow MB_1 \parallel BA' \\ (BB'A') \cap (BCD) = BA' \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \frac{MB_1}{BA'} = \frac{MB'}{BB'} \Rightarrow \overrightarrow{MB_1} = \frac{MB'}{BB'} \overrightarrow{BA'} \quad (2)$$

Trong (1), chiếu các vec tơ lên đường thẳng  $BB'$  theo phương  $(ACD)$  ta được

$$\begin{aligned} x\overrightarrow{MB'} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MB'} + t\overrightarrow{MB'} &= \vec{0} \Rightarrow (x + y + z)\overrightarrow{MB'} + y\overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ \Rightarrow (x + y + z + t)\overrightarrow{MB'} &= y\overrightarrow{BB'} \Rightarrow \frac{MB'}{BB'} = \frac{y}{x + y + z + t} \end{aligned}$$

$$\text{Từ (2) suy ra } \overrightarrow{MB_1} = \frac{y}{x + y + z + t} \overrightarrow{BA'} \quad (3)$$

$$\text{Tương tự ta có } \overrightarrow{MC_1} = \frac{z}{x + y + z + t} \overrightarrow{CA'} \quad (4); \quad \overrightarrow{MD_1} = \frac{t}{x + y + z + t} \overrightarrow{DA'} \quad (5)$$

| Một số chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi hình học không gian

Mặt khác chiếu các vectơ trong (1) lên mặt phẳng  $(BCD)$  theo phương  $AA'$  thì thu được

$$y\overrightarrow{A'B} + z\overrightarrow{A'C} + t\overrightarrow{A'D} = \vec{0}.$$

Vậy từ (3),(4),(5) ta có  $\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = \frac{1}{x+y+z+t}(y\overrightarrow{BA'} + z\overrightarrow{CA'} + t\overrightarrow{DA'}) = \vec{0}$ , hay  $M$  là trọng tâm của tam giác  $B_1C_1D_1$ .

### Câu 32

Cho tứ diện  $ABCD$  có  $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$ .

Gọi  $S$  là diện tích toàn phần. Chứng minh rằng  $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \leq \frac{9}{S^2}$ .

#### Lời giải

Do tứ diện  $ABCD$  có  $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$  nên

$$\Delta BCD = \Delta ADC = \Delta DAB = \Delta CBA$$

Gọi  $S'$  là diện tích và  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì  $S = 4S' = \frac{abc}{R}$ , nên bất

đẳng thức cần chứng minh  $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \leq \frac{9}{S^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ .

Theo **công thức Leibnitz**. Với điểm  $M$  bất kì và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + 9MG^2)$$

Cho  $M$  trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  ta được

$$9R^2 = aa^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

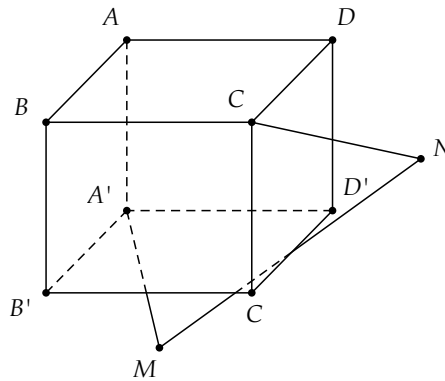
### Câu 33

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  và các điểm  $M, N, P$  xác định bởi

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'} \ (k \neq 0), \overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$$

Hãy tính  $x, y$  theo  $k$  để ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

#### Lời giải



Đặt  $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ .

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}(\vec{b} + \vec{c}) & (1) \\ \overrightarrow{AN} = \vec{b} + \frac{x}{x-1}(\vec{a} + \vec{c}) & (2) \\ \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{y}{y-1}(\vec{c} - \vec{b}) & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta có } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{x}{x-1}\vec{a} - \frac{1}{k-1}\vec{b} + \left(\frac{x}{x-1} - \frac{k}{k-1}\right)\vec{c} + \left(\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1}\right)\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \left(\frac{y}{y-1} + \frac{1}{k-1}\right)\vec{b} + \left(\frac{y}{y-1} - \frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$$

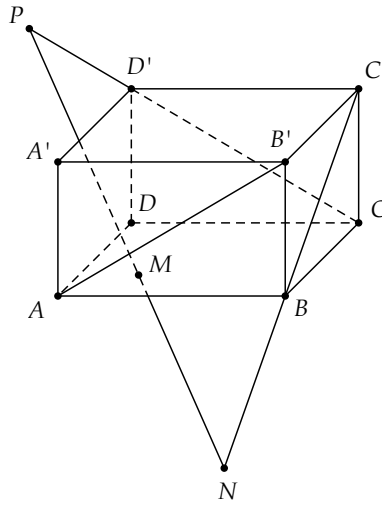
Ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại  $\lambda$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{MP}$  (\*).

Thay các vec tơ  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$  vào (\*) và lưu ý  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng ta tính được  $x = \frac{1+k}{1-k}, y = -\frac{1}{k}$

### Câu 34

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Một đường thẳng  $\Delta$  cắt các đường thẳng  $AA', BC, C'D'$  lần lượt tại  $M, N, P$  sao cho  $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$ . Tính  $\frac{MA}{MA'}$ .

### Lời giải



Đặt  $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ . Vì  $M \in AA'$  nên  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c}$

$$N \in BC \Rightarrow \overrightarrow{BN} = l\overrightarrow{BC} = l\vec{a}, \quad P \in C'D' \Rightarrow \overrightarrow{C'P} = m\vec{b}$$

Ta có  $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P} = (1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}$$

$$\text{Do } \overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP} \Rightarrow -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c} = 2[(1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}] \Leftrightarrow \begin{cases} -l = 2(1-l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, l = 2.$$

$$\text{Vậy } \frac{MA}{MA'} = 2.$$

# Các khối tứ diện đặc biệt

Trong chương trình hình học không gian bậc THPT có lẽ khối đa diện được nhắc tới nhiều nhất và cũng đồng thời được khai thác rất nhiều trong các đề thi thử, HSG, THPT quốc gia chính là khối tứ diện. Chắc hẳn nhiều bạn đã từng gặp qua các bài toán về tứ diện mà các giả thiết của nó trông rất lạ, hoặc một số bài toán tính thể tích mà trong đó giả thiết liên quan tới góc hoặc tới cạnh chẳng hạn, và chúng ta chưa có cách giải quyết chúng. Vì thế trong chương này tôi sẽ cùng bạn đọc tìm hiểu các bài toán liên quan tới tứ diện từ dễ đến khó để có thể giải quyết hoàn toàn vấn đề này.

## I. Khối tứ diện tổng quát.

### A. Các tính chất của khối tứ diện tổng quát.

#### 1. Công thức tính đường trọng tuyến.

Đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện được gọi là đường trọng tuyến của tứ diện.

**Tính chất.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $DA = a, DB = b, DC = c$ ,  $BC = a_1, CA = b_1, AB = c_1$ . Gọi  $m_d$  là đường trọng tuyến xuất phát từ đỉnh  $D$ . Ta có

$$m_d^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9}.$$

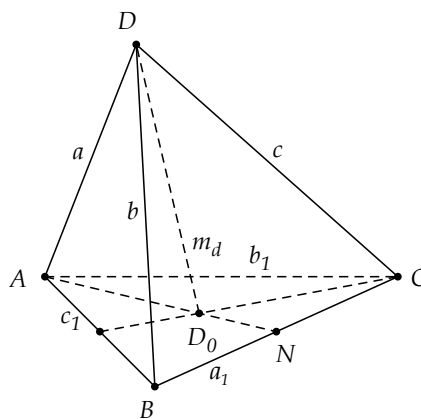
#### Chứng minh

Gọi  $D_0$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $N$  là trung điểm của  $BC$ .

Đặt  $DN = p, AN = q, DD_0N = \varphi$ . Ta có  $DN^2 = D_0D^2 + D_0N^2 - 2D_0D.D_0N \cos ND_0D$

$$\Rightarrow p^2 = m_d^2 + \frac{q^2}{9} - 2m_d \frac{q}{3} \cos \varphi \quad (1)$$

Tương tự  $AD^2 = D_0D^2 + D_0A^2 - 2D_0D.D_0A \cos AD_0D \Rightarrow a^2 = m_d^2 + \frac{4}{9}q^2 + 2 \cdot \frac{2q}{3} m_d \cos \varphi \quad (2)$



Từ (1) và (2) ta có

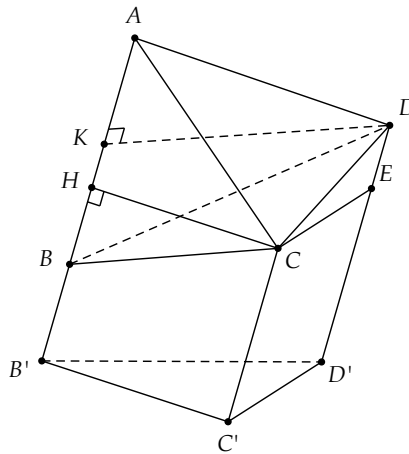
$$2p^2 + a^2 = 2\left(m_d^2 + \frac{q^2}{9} - 2m_d \frac{q}{3} \cos \varphi\right) + m_d^2 + \frac{4}{9}q^2 + \frac{4q}{3}m_d \cos \varphi \Rightarrow 3m_d^2 = a^2 + 2p^2 - \frac{2q^2}{3}.$$

Mặt khác  $p^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a_1^2}{4}$  và  $q^2 = \frac{b_1^2 + c_1^2}{2} - \frac{a_1^2}{4}$  nên  $m_d^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9}.$

## 2. Một số công thức về diện tích.

**Tính chất 1.** Gọi  $S_1, S_2$  là diện tích các mặt  $ABC$  và  $ABD$ ,  $\alpha$  là góc nhị diện cạnh  $AB$ ,  $\varphi$  là góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ . Giả sử  $AB = a, CD = b$ . Ta có  $S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = \frac{(ab \sin \varphi)^2}{4}$

### Chứng minh



Xét mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với cạnh  $AB$  tại  $B'$ . Gọi  $H, K$  là chân đường cao các tam giác  $CAB$  và  $DAB$ . Chiếu tứ diện lên  $(P)$  theo phương  $AB$  ta được  $A, B, H, K \mapsto B', C \mapsto C', D \mapsto D'$ , nên tứ diện  $ABCD$  có hình chiếu là tam giác  $B'C'D'$ .

Ta có  $\begin{cases} B'C' = HC = \frac{2S_1}{a} \\ B'D' = DK = \frac{2S_2}{a} \end{cases}$  và  $C'D' = DE = CD \sin \varphi = b \sin \varphi$ . Áp dụng định lí cosine với  $\triangle B'C'D'$  ta có

$$C'D'^2 = B'C'^2 + B'D'^2 - 2B'C' \cdot B'D' \cos \alpha.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4S_1^2}{a^2} + \frac{4S_2^2}{a^2} - 2 \frac{2S_1}{a} \cdot \frac{2S_2}{a} \cos \alpha = (b \sin \varphi)^2 \Leftrightarrow S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = \frac{(ab \sin \varphi)^2}{4}.$$

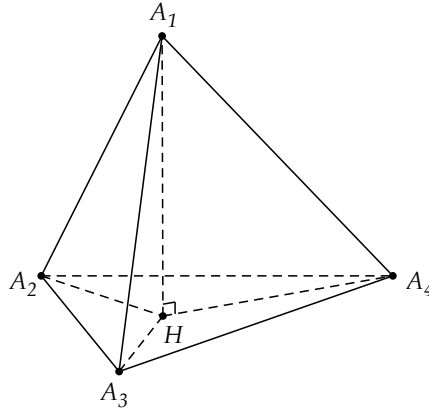
Vậy ta có điều phải chứng minh!

**Tính chất 2.** Trong tứ diện  $A_1A_2A_3A_4$  ta có :

- $S_1 = S_2 \cos \varphi_{1,2} + S_3 \cos \varphi_{1,3} + S_4 \cos \varphi_{1,4}$  (1).
- $S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3 \cos \varphi_{2,3} - 2S_2S_4 \cos \varphi_{2,4} - 2S_3S_4 \cos \varphi_{3,4}$  (2).

Trong đó  $\varphi_{i,j}$  là góc nhị diện tạo bởi mặt đối diện với đỉnh  $A_i$  và các mặt đối diện với đỉnh  $A_j$ ,  $S_i$  là diện tích của mặt đối diện với đỉnh  $A_i$ .

### Chứng minh



Gọi  $H$  là chân đường cao của tứ diện  $ABCD$ .

Theo công thức hình chiếu với chú ý góc giữa hai mặt phẳng bằng hoặc bù với góc giữa hai nhị diện ta có

$$\begin{aligned} S_{HA_3A_4} &= S_2 |\cos \varphi_{1,2}|, S_{HA_2A_4} = S_3 |\cos \varphi_{1,3}| \\ S_{HA_2A_3} &= S_4 |\cos \varphi_{1,4}|. \end{aligned}$$

- Nếu  $\varphi_{1,2} < 90^\circ$  thì  $H$  và  $A_2$  nằm cùng phía đối với  $A_3A_4$  và khi đó  $S_{HA_3A_4} = S_2 \cos \varphi_{1,2}$ .
- Nếu  $\varphi_{1,2} = 90^\circ \Rightarrow H \in A_3A_4 \Rightarrow S_{HA_3A_4} = 0$ .
- Nếu  $\varphi_{1,2} > 90^\circ$  thì  $H$  và  $A_2$  nằm khác phía đối với  $A_3A_4$  và khi đó  $S_{HA_3A_4} = -S_2 \cos \varphi_{1,2}$ .

Ta cũng có các kết quả tương tự đối với các tam giác  $HA_2A_3$  và  $HA_2A_4$ .

• **Trường hợp 1.**

Cả ba góc  $\varphi_{1,j} \leq 0$  khi đó  $S_1 = S_{HA_2A_3} + S_{HA_3A_4} + S_{HA_2A_4} = S_2 \cos \varphi_{1,2} + S_3 \cos \varphi_{1,3} + S_4 \cos \varphi_{1,4}$ .

• **Trường hợp 2.**

Có hai góc không tù, chẳng hạn  $\varphi_{1,2} \leq 90^\circ, \varphi_{1,3} \leq 90^\circ, \varphi_{1,4} > 90^\circ$

Khi đó  $S_1 = S_{HA_2A_4} + S_{HA_3A_4} - S_{HA_2A_3} = S_3 \cos \varphi_{1,3} + S_2 \cos \varphi_{1,2} - (-S_4 \cos \varphi_{1,4}) = S_2 \cos \varphi_{1,2} + S_3 \cos \varphi_{1,3} + S_4 \cos \varphi_{1,4}$ .

• **Trường hợp 3.**

Có một góc không tù, chẳng hạn  $\varphi_{1,2} \leq 90^\circ$  khi đó

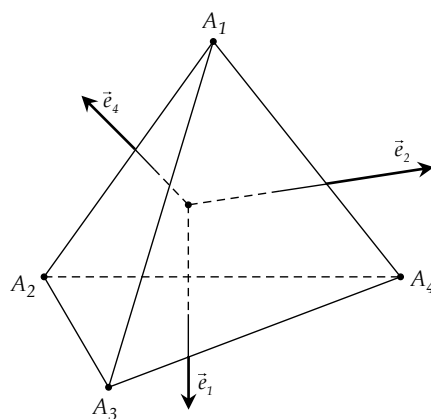
$$S_1 = S_{HA_3A_4} - S_{HA_2A_4} - S_{HA_2A_3} = S_2 \cos \varphi_{1,2} - (-S_3 \cos \varphi_{1,3}) - (-S_4 \cos \varphi_{1,4}) = S_2 \cos \varphi_{1,2} + S_3 \cos \varphi_{1,3} + S_4 \cos \varphi_{1,4}.$$

Rõ ràng không thể có trường hợp cả ba góc không nhọn do đó ta có điều phải chứng minh

**Chú ý.** Có thể chứng minh công thức (1) cách sử dụng phương pháp vectơ và định lí con nhím như sau.

Gọi  $\vec{e}_i (i=1,2,3,4)$  là các vector đơn vị vuông góc với mặt đối diện của đỉnh  $A_i$  thì ta có

$$S_1 \vec{e}_1 + S_2 \vec{e}_2 + S_3 \vec{e}_3 + S_4 \vec{e}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow S_1 \vec{e}_1 = - (S_2 \vec{e}_2 + S_3 \vec{e}_3 + S_4 \vec{e}_4).$$



Nhân vô hướng hai vế với  $\vec{e}_1$  và lưu ý

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_j) + \varphi_{1,j} = 180^\circ \Rightarrow \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_j) = -\cos \varphi_{1,j} \quad (j = 2, 3, 4)$$

Ta được  $S_1 = S_2 \cos \varphi_{1,2} + S_3 \cos \varphi_{1,3} + S_4 \cos \varphi_{1,4}$ .

Ta chứng minh công thức (2) bằng phương pháp vector, ta có

$$S_1 \vec{e}_1 + S_2 \vec{e}_2 + S_3 \vec{e}_3 + S_4 \vec{e}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow S_1 \vec{e}_1 = - (S_2 \vec{e}_2 + S_3 \vec{e}_3 + S_4 \vec{e}_4)$$

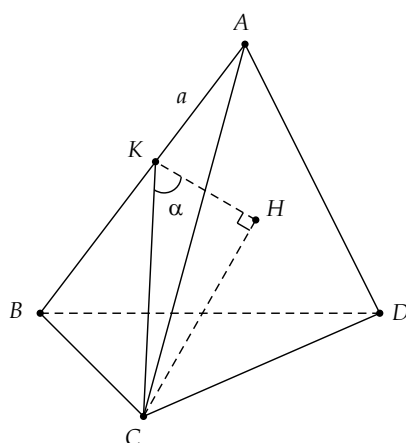
Bình phương vô hướng kết hợp với  $\Rightarrow \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = -\cos \varphi_{i,j} \quad (i \neq j, i, j = 2, 3, 4)$  ta có điều phải chứng minh.

### 3. Một số công thức về thể tích của tứ diện.

Sau đây mình sẽ trình bày một số công thức tính thể tích dựa vào các đặc điểm đặc biệt của tứ diện như diện tích, góc giữa mặt phẳng và các yếu tố cạnh, góc trong tứ diện. Chú ý các công thức dưới đây rất hay dùng trong giải toán trắc nghiệm nên các bạn cần lưu ý.

**Tính chất 1.** Gọi  $S_1, S_2$  là diện tích các mặt  $ABC$  và  $ABD$ ,  $\alpha$  là góc nhị diện cạnh  $AB = a$ . Thì thể tích tứ diện  $ABCD$  là  $V = \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3a}$

#### Chứng minh



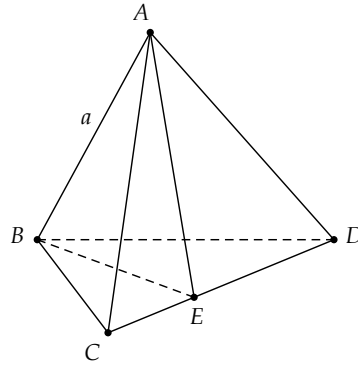
Gọi  $H$  là chân đường cao hạ từ  $C$  của tứ diện, kẻ  $HK \perp AB$  thì  $CHK = \alpha$ .

Ta có  $V = \frac{1}{3} CH \cdot S_2$ , mà  $CH = CK \sin \alpha = \frac{2S_1 \sin \alpha}{a}$ . Suy ra  $V = \frac{2S_1 S_2 \sin \alpha}{3a}$ .

**Nhận xét.** Công thức này rất hay, ứng dụng được trong nhiều bài toán khó về góc giữa 2 mặt phẳng!

**Hệ quả.** Mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh  $AB$  cắt tứ diện theo thiết diện có diện tích  $S = \frac{2S_1S_2}{S_1+S_2} \cos \frac{\alpha}{2}$ .

**Chứng minh**

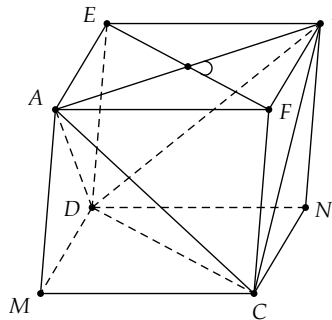


Gọi  $E$  là giao điểm của mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh  $AB$ , ta có

$$= \frac{1}{4}OA^2BC^2 + \frac{1}{4}OI^2BC^2 \Leftrightarrow 2S_1S_2 \cos \frac{\alpha}{2} = (S_1 + S_2)S \Leftrightarrow S = \frac{2S_1S_2 \cos \frac{\alpha}{2}}{S_1 + S_2}$$

**Tính chất 2.** Thể tích tứ diện  $ABCD$  là  $V = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi$ , trong đó  $d$  là khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ ,  $\varphi$  là góc giữa chúng.

**Chứng minh**



Dựng hình hộp  $AEBF.CMDN$  ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$

Ta có  $EF \parallel CD$  nên  $(AB, EF) = (AB, CD) = \alpha$ . Vì  $AEBF$  là hình bình hành nên

$$S_{AEBF} = \frac{1}{2}AB \cdot EF \sin \alpha = \frac{1}{2}AD \cdot CD \sin \alpha$$

Do đường cao của hình hộp là  $h = d((AEBF), (CMDN)) = d(AB, CD) = d$

Nên thể tích khối hộp là  $V_{hh} = \frac{1}{2}AD \cdot CD \cdot d \sin \alpha$ . Dễ thấy  $V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{hh} = \frac{1}{6}AB \cdot AD \cdot d \sin \alpha$ .

Vậy ta có điều phải chứng minh!

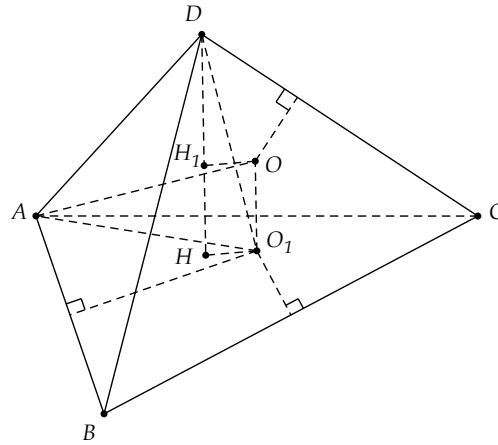
**Hệ quả.** Mở rộng cho khối chóp có diện tích mặt bên và mặt đáy

Cho khối chóp  $S.A_1A_2 \dots A_n$ , khi đó ta có  $V = \frac{2S_{SA_1A_2} \cdot S_{A_1A_2 \dots A_n} \cdot \sin((SA_1A_2), (A_1A_2 \dots A_n))}{3A_1A_2}$

**Tính chất 3.** Gọi  $S_i, R_i$  và  $l_i$  ( $i=1,4$ ) là diện tích các mặt, bán kính đường tròn ngoại tiếp các mặt đó và khoảng cách từ tâm các đường tròn đó đến các đỉnh đối diện của tứ diện thì

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 S_i^2 (l_i^2 - R_i^2)}{2}}$$

### Chứng minh



Trước tiên ta xét tâm mặt cầu ngoại tiếp nằm trong tứ diện.

Gọi  $R_1, h_1, l_1, d_1$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ , đường cao  $DH$ , và khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  đến  $d$ .

Gọi  $O, O_1$  lần lượt là tâm mặt cầu và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ ,  $H_1$  là hình chiếu của  $O$  trên  $DH$ . Đặt  $OO_1 = d_1$  và  $R$  là bán kính mặt cầu. Ta có  $O_1H^2 = O_1D^2 - DH^2 = l_1^2 - h_1^2$

$$OH_1^2 = OD^2 - DH_1^2 = R^2 - (h_1 - d_1)^2$$

Vì  $R^2 - d_1^2 + 2h_1d_1 - h_1^2$ . Vì  $O_1H = OH_1$  nên

$$R^2 - d_1^2 + 2h_1d_1 - h_1^2 = l_1^2 - h_1^2 \Leftrightarrow l_1^2 - R^2 + d_1^2 = 2h_1d_1.$$

Lại có  $R^2 - d_1^2 = OA^2 - OO_1^2 = AO_1^2 = R_1^2$  nên  $l_1^2 - R_1^2 = 2h_1d_1$ .

Tương tự  $l_i^2 - R_i^2 = 2h_id_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ).

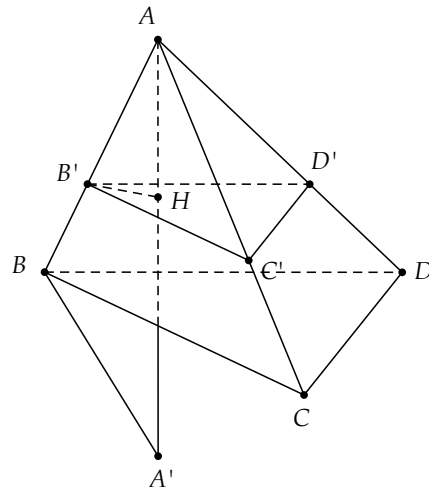
$$\text{Do đó } \sum_{i=1}^4 S_i^2 (l_i^2 - R_i^2) = \sum_{i=1}^4 2S_i^2 h_i d_i = \sum_{i=1}^4 2(S_i h_i)^2 \left( \frac{d_i}{h_i} \right) = \sum_{i=1}^4 18V^2 \left( \frac{d_i}{h_i} \right)$$

$$\text{Mà } \sum_{i=1}^4 \frac{d_i}{h_i} = 1 \text{ nên } V = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 S_i^2 (l_i^2 - R_i^2)}{2}}.$$

**Tính chất 4.** Cho tứ diện  $ABCD$  có thể tích  $V$  và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là  $R$ .

1. Chứng minh rằng  $ABC$  là số đo 3 cạnh của một tam giác nào đó
2. Gọi  $S$  là diện tích tam giác đó. Chứng minh  $S = 6VR$  – Công thức Crelle

### Chứng minh



Gọi  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  và  $A'$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ .  $H$  là trung điểm của  $AO$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $H$  và vuông góc với  $AO$ ,  $B', C', D'$  lần lượt là giao điểm của  $(P)$  với  $AB, AC, AD$ . Ta có các tam giác vuông  $AHB', ABA'$  đồng dạng nên

$$\frac{AB'}{AH} = \frac{AA'}{AB} \Rightarrow AB \cdot AB' = AH \cdot AA' = \frac{1}{2} R \cdot 2R = R^2 \Rightarrow AB \cdot AB' = R^2.$$

Tương tự ta có  $AC \cdot AC' = AD \cdot AD' = R^2$

$$AB = \frac{1}{2} D_2 D_3 = CD_2 = CD$$

$$\Rightarrow B'C' = \frac{BC \cdot AC'}{AB} = \frac{BC \cdot AC' \cdot AC \cdot AD}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{AD \cdot BC \cdot R^2}{AB \cdot AC \cdot AD} \Rightarrow \frac{B'C'}{AD \cdot BC} = \frac{R^2}{AB \cdot AC \cdot AD}.$$

Tương tự ta có  $\frac{B'C'}{AD \cdot BC} = \frac{C'D'}{AB \cdot CD} = \frac{D'B'}{AC \cdot DB} = \frac{R^2}{AB \cdot AC \cdot AD}$

Vậy là 3 cạnh của tam giác đồng dạng với tam giác  $A'B'C'$ .

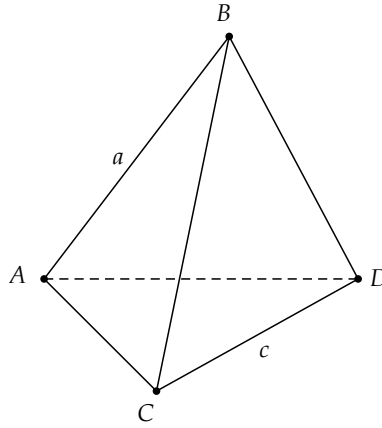
$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{S}{S_{\Delta B'C'D'}} &= \left( \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{R^2} \right)^2 \Rightarrow S = \left( \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{R^2} \right)^2 S_{\Delta B'C'D'} = \left( \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{R^2} \right)^2 \cdot \frac{3V_{\Delta B'C'D'}}{AH} \\ &= 6 \frac{(AB \cdot AC \cdot AD)^2}{R^5} \cdot \frac{V_{\Delta B'C'D'}}{V_{\Delta ABCD}} \cdot V_{\Delta ABCD} = 6 \frac{(AB \cdot AC \cdot AD)^2}{R^5} \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} \cdot V \\ &= 6 \frac{(AB \cdot AB')(AC \cdot AC')(AD \cdot AD')}{R^5} V = 6 \frac{R^6}{R^5} V = 6VR. \end{aligned}$$

#### Tính chất 5 – Định lý sine trong tứ diện.

Cho tứ diện  $ABCD$ , có  $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f$ . Gọi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \lambda$  lần lượt là góc nhị diện các cạnh  $AB, BC, CD, DA, AC, BD$ , khi đó ta có

$$\frac{ac}{\sin \alpha \sin \gamma} = \frac{bd}{\sin \beta \sin \delta} = \frac{ef}{\sin \varphi \sin \lambda}$$

**Chứng minh**



Đặt  $S_i (i = \overline{1,4})$  lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh  $A, B, C, D$ .

$$\text{Ta có } V = \frac{2S_3 S_4 \sin \alpha}{3a} \text{ và } V = \frac{2S_1 S_2 \sin \gamma}{3c} \Rightarrow \frac{4S_1 S_2 S_3 S_4 \sin \alpha \sin \gamma}{9ac} = V^2 \Rightarrow \frac{ac}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{4S_1 S_2 S_3 S_4}{9V^2}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{bd}{\sin \beta \sin \delta} = \frac{4S_1 S_2 S_3 S_4}{9V^2} \frac{ef}{\sin \phi \sin \lambda} = \frac{4S_1 S_2 S_3 S_4}{9V^2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{ac}{\sin \alpha \sin \gamma} = \frac{bd}{\sin \beta \sin \delta} = \frac{ef}{\sin \phi \sin \lambda}.$$

## II. Các khối tứ diện đặc biệt.

### A. Khối tứ diện vuông.

#### 1. Định nghĩa.

Tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc được gọi là tứ diện vuông.

#### 2. Tính chất.

Sau đây là một số tính chất và công thức liên quan đến tứ diện vuông mà có nhiều hệ thức tương tự như công thức lượng trong tam giác vuông.

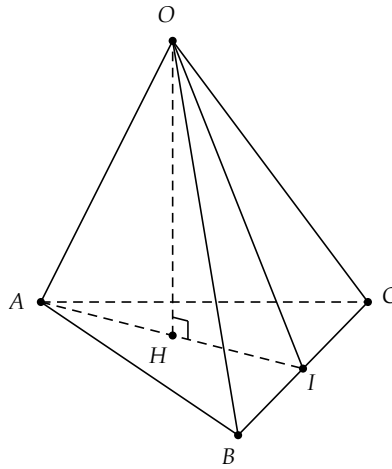
**Tính chất.** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc,  $OA = a, OB = b, OC = c$ , đường cao  $OH = h$ . Ta có

- $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$
- $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$
- $S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$  – Định lí Pitago trong không gian.
- $S_{\Delta OAB}^2 = S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta HAB}$
- Gọi  $\alpha, \beta, \gamma$  là góc giữa  $OH$  với  $OA, OB, OC$  thì  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .
- Gọi  $A, B, C$  là ba góc của tam giác  $ABC$  thì  $a^2 \tan A = b^2 \tan B = c^2 \tan C$
- Độ dài đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối bằng nhau.
- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$
- $V = \frac{1}{6} abc$ ,  $S_{tp} = \frac{1}{2} (ab + bc + ca + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2})$

- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp  $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Bán kính mặt cầu nội tiếp  $r = \frac{3V_{OABC}}{S_{tp}}$
- Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, và AB. Khi đó OMNP là tứ diện đều và  $V_{OMNP} = \frac{1}{4}V_{OABC} = \frac{1}{24}abc$
- $ABCD$
- $\frac{2R}{r} \geq 3(1 + \sqrt{3})$  trong đó r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện.
- Gọi X, Y, Z lần lượt là góc giữa OA, OB, OC với mặt  $(ABC)$  ta có

$$\sin^2 X + \sin^2 Y + \sin^2 Z = 1$$

### Chứng minh



- Ta có  $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ , lại có  $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$   
 $\Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$ .

Tương tự  $AB \perp CH$ , do đó H là trực tâm tam giác ABC.

- Gọi I là giao điểm của AH và BC.

$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

- $S_{ABC}^2 = \frac{1}{4}AI^2 BC^2 = \frac{1}{4}(OA^2 + OI^2)BC^2$   
 $= \frac{1}{4}OA^2 BC^2 + \frac{1}{4}OI^2 BC^2 = \frac{1}{4}OA^2(OB^2 + OC^2) + \frac{1}{4}OI^2 BC^2 = S_{AOB}^2 + S_{BOC}^2 + S_{OCA}^2.$

- $S_{OAB}^2 = \frac{1}{4}OA^2 OB^2 = \frac{1}{4}(AH \cdot AI)(BI \cdot BC) = \left(\frac{1}{2}AI \cdot BC\right)\left(\frac{1}{2}AH \cdot BI\right) = S_{ABC} \cdot S_{AHB}$

- Từ  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$  suy ra

$$\left(\frac{OH}{OA}\right)^2 + \left(\frac{OH}{OB}\right)^2 + \left(\frac{OH}{OC}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

- Ta có  $\tan OCA = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Suy ra  $a^2 \tan A = \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$ .

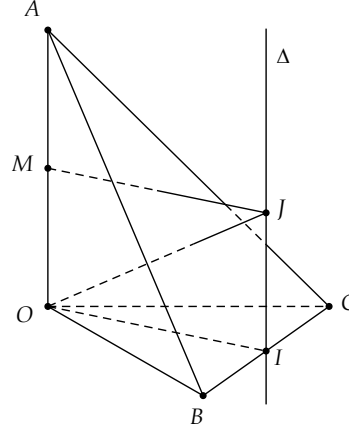
$$\text{Hoàn toàn tương tự } \sin 2A = 2 \sin A \cos A; b^2 \tan B = \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$$

Vậy  $a^2 \tan A = b^2 \tan B = c^2 \tan C$ .

- Sử dụng công thức tính đường trung tuyến và định lý Pitagore ta có ngay  $d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$ .

- Theo tính chất thứ 3 ta có  $S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}c^2a^2$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$



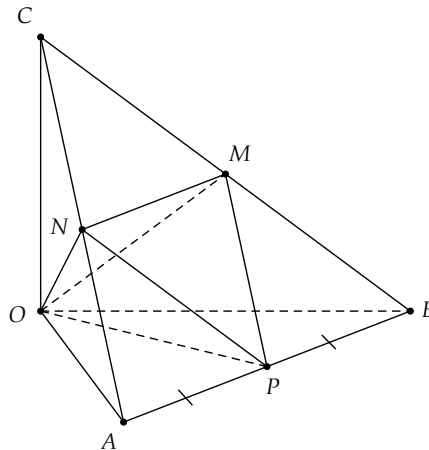
- Từ trung điểm  $I$  của  $BC$  kẻ đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mặt phẳng  $(OBC)$ , gọi  $J$  là giao điểm của  $\Delta$  với mặt phẳng trung trực của đoạn  $OA$  thì  $J$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $OABC$  và bán kính  $R = \sqrt{OI^2 + IJ^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

- Gọi  $T$  là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện  $OABC$ , ta có

$$\begin{aligned} V_{OABC} &= V_{TOAB} + V_{TOAC} + V_{TOBC} + V_{TABC} \\ &= \frac{1}{3}r(S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} + S_{ABC}) = \frac{1}{3}r.S_{tp} \Rightarrow r = \frac{3V_{OABC}}{S_{tp}} \end{aligned}$$

- Dễ thấy  $MN = OP = \frac{1}{2}AB$ ;  $NP = OM = \frac{1}{2}BC$ ;  $MP = ON = \frac{1}{2}AC$ .

Do vậy tứ diện  $ONMP$  là tứ diện đều.



$$\text{Ta có } \frac{V_{CONM}}{V_{OABC}} = \frac{OC}{OC} \cdot \frac{CN}{CA} \cdot \frac{CM}{CB} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \text{ Tương tự } \frac{V_{AONP}}{V_{OABC}} = \frac{1}{4}; \frac{V_{BOMP}}{V_{OABC}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Từ đó ta có } V_{ONMP} = \frac{1}{4}V_{OABC}$$

- Ta có  $S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} \geq 9 \frac{h^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \geq 9 \frac{h^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2}(ab + bc + ca) \geq 9$   
 $\Leftrightarrow \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)(ab + bc + ca) \geq 9.$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \Rightarrow \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)(ab + bc + ca) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9 \\ ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \end{cases}$$

- Ta có  $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  và  $r = \frac{3V_{OABC}}{S_{tp}}$ , do đó

$$\begin{aligned} \frac{2R}{r} &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\frac{3V_{OABC}}{S_{tp}}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \frac{1}{2}(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2})}{3 \cdot \frac{abc}{6}} \\ &\Rightarrow \frac{2R}{r} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot (ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2})}{abc} \\ &\geq \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \left( 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + \sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} \right)}{abc} = \frac{3\sqrt{3}abc + 3abc}{abc} = 3(\sqrt{3} + 1). \end{aligned}$$

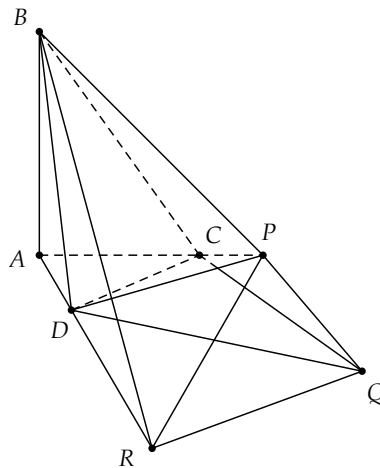
Vậy  $\frac{2R}{r} \geq 3(1 + \sqrt{3})$ . Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c$ .

### 3. Các bài toán minh luyện tập.

#### Câu 1.

Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc và  $AB = AC + AD$ . Tính giá trị của biểu thức  $ABC + DBC + CBD$ .

#### Lời giải



**Cách 1.** Trên các tia  $AC, AD$  lấy các điểm  $P, R$  sao cho  $AP = AR = AB$ , dựng hình vuông  $APQR$ .

Ta có  $AC = DR$ ,  $AB = QR$  nên  $\triangle ABC = \triangle RQD$ .

Tương tự  $\triangle ABD = \triangle PQC$ , suy ra  $\triangle BCD = \triangle QDC$ .

Vậy tổng các góc phẳng tại đỉnh  $B$  là  $PQC + CQD + DQR = PQR = 90^\circ$

**Cách 2.** Ta có  $\alpha = CBD, \beta = ADB, \gamma = ABC$ .

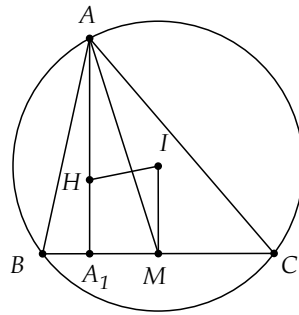
$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{BC^2 + DB^2 - CD^2}{2BC \cdot BD} = \frac{AB^2 + AC^2 + AD^2 + AB^2 - (AC^2 + AD^2)}{2BC \cdot BD} \\ &= \frac{AB^2}{BC \cdot BD} = \frac{AB(AC + AD)}{BC \cdot BD} = \frac{AB}{BD} \cdot \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} \\ &= \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma = \sin(\beta + \gamma) \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ\end{aligned}$$

### Câu 2.

Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc. Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$  và  $A, B, C$  ba góc của tam giác  $ABC$ . Đặt  $\alpha = AOH, \beta = BOH, \gamma = COH$ .

Chứng minh rằng  $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2A} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin 2C}$ .

### Lời giải



Gọi  $A_1$  là giao điểm của  $AH$  và  $BC$ , ta có  $\triangle AOA_1$  vuông tại  $O$  và có  $OH$  là đường cao nên

$$\sin^2 \alpha = \frac{AH^2}{OA^2} = \frac{AH^2}{AH \cdot AA_1} = \frac{AH}{AA_1} \quad (1)$$

Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$  thì  $2IM = AH$  và  $BAC = BIM$  do đó  $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2BM \cdot IM}{IB^2} = \frac{BC \cdot AH}{2R^2} \quad (2)$

Từ (1) & (2) suy ra  $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2A} = \frac{R^2}{\frac{1}{2} AA_1 \cdot BC} = \frac{R^2}{S}$ . Trong đó  $S$  là diện tích tam giác  $ABC$

Tương tự ta có  $\frac{\sin^2 \beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin 2C} = \frac{R^2}{S}$ . Vậy  $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2A} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin 2C}$ .

### Câu 3.

Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc,  $AC = 2OB, BC = 2OA$ . Gọi  $D$  là trung điểm của  $AB$ ,  $E$  và  $F$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của các tam giác  $OBC$  và  $OAC$ .

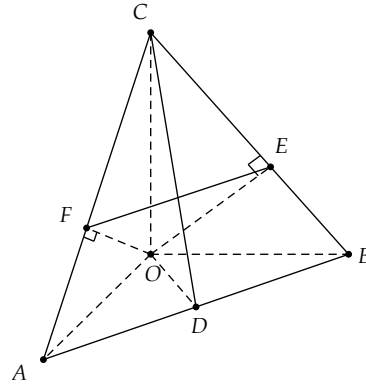
Chứng minh  $\frac{\tan^4 OCD}{\tan^4 OCA} + \frac{EF}{AB} = 1$ .

### Lời giải

Đặt  $OA = a, OB = b, OC = c$  thì  $BC = 2a, AC = 2b$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} OA^2 + OC^2 = AC^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = 4b^2 & (1) \\ OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 4a^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) & (2) suy ra  $a = b, c = a\sqrt{3}$ .



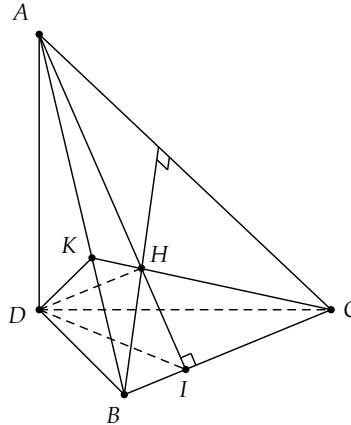
Từ đó dễ dàng tính được  $BE = \frac{a}{2}, AF = \frac{a}{2}$ . Do  $CA = CB = 2a, AF = BE = \frac{a}{2}$  nên  $CE = CF \Rightarrow EF \parallel BC$  và  $\frac{EF}{BC} = \frac{3}{4}$ . Ta có  $\tan OCD = \frac{OD}{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \tan OCA = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Từ đó ta có  $\frac{\tan^4 OCD}{\tan^4 OCA} + \frac{EF}{AB} = 1$ .

#### Câu 4.

Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc, gọi  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Đặt  $\alpha = \angle DAH, \beta = \angle DBH, \gamma = \angle DCH, \varphi = \angle AHB$ . Chứng minh rằng

$$\sin \varphi = \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta} \text{ và } \cos \varphi = -\tan \alpha \tan \beta.$$

#### Lời giải



Do  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$  nên  $DH \perp (ABC)$ .

Gọi  $I = AH \cap BC$ . Tam giác  $ADI$  vuông tại  $D$  có đường cao  $DH$  nên

$$DH^2 = AH \cdot HI = -AH \cdot BH \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{DH}{AH} \cdot \frac{DH}{BH} = -\tan \alpha \tan \beta$$

Gọi  $K = CH \cap AB$  thì ta có  $DKC$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ABD)$ .

Theo công thức hình chiếu ta có  $S_{HAB} = S_{ABD} \cos \angle DKC$  (1)

Ta có  $\cos \angle DKC = \sin \gamma$  nên từ (1) suy ra  $\frac{1}{2} HA \cdot HB \sin \varphi = \frac{1}{2} DA \cdot DB \sin \gamma$ .

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{DA}{HA} \cdot \frac{DB}{HB} \cdot \sin \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

### B. Khối tứ diện gần đều.

#### 1. Định nghĩa.

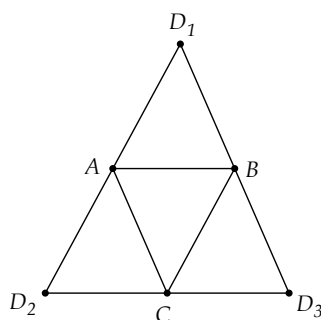
Tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau được gọi là tứ diện gần đều.

**Nhận xét.** Từ định nghĩa ta thấy tứ diện gần đều có bốn mặt là các tam giác bằng nhau.

## 2. Điều kiện cần và đủ để một tứ diện là tứ diện gần đều.

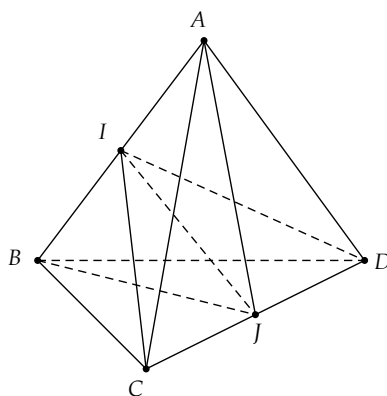
- Tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh bằng  $180^\circ$
- Mỗi đường nối trung điểm của các cặp cạnh đối là đường vuông góc chung của cặp cạnh tương ứng đó.
- Bốn mặt của tứ diện là các tam giác có diện tích bằng nhau.
- Tứ diện có hai trục đối xứng.
- Bốn đường cao của tứ diện bằng nhau.
- Tâm mặt cầu nội tiếp và tâm mặt cầu ngoại tiếp bằng nhau.
- Tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau.
- Tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm trùng nhau.
- Tổng cosin của các nhị diện chứa cùng một mặt bằng của tứ diện bằng 1
- Góc nhị diện của các cặp cạnh đối bằng nhau.

### Chứng minh



- Nếu  $ABCD$  là tứ diện gần đều thì dễ dàng chứng minh được tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh bằng  $180^\circ$ . Giả sử ngược lại, tứ diện  $ABCD$  có tổng các góc ở mỗi đỉnh bằng  $180^\circ$ , trải các mặt chứa  $D$  của tứ diện lên  $(ABC)$ . Giả sử các mặt  $DAB, DBC, DAC$  khi trải xuống mặt phẳng  $(ABC)$  ta được các mặt  $(D_1AB), (D_2BC), (D_3AC)$ . Dễ thấy tổng các góc ở mỗi đỉnh bằng  $180^\circ$  nên các điểm  $A, B, C$  thuộc các cạnh của tam giác  $D_1D_2D_3$ .

Ta có  $D_1A = DA = D_2A$ ,  $BD_1 = BD_3 = BD$ ,  $CD_2 = CD_3 = CD$  nên  $A, B, C$  lần lượt là trung điểm của  $D_1D_2, D_1D_3, D_2D_3$  do đó  $AB = \frac{1}{2}D_2D_3 = CD_2 = CD$ ; tương tự  $AC = BD, AD = BC$ . Vậy  $ABCD$  là tứ diện gần đều.



- Giả sử  $ABCD$  là tứ diện gần đều và  $I, J$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD, CD$ .

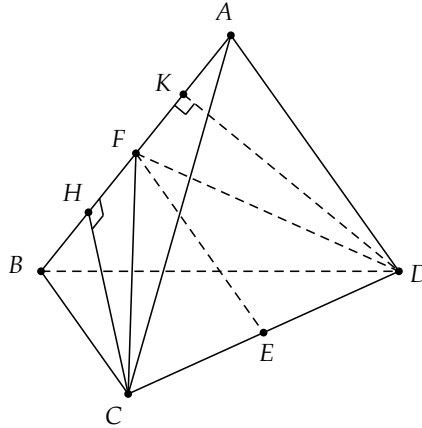
Do  $AB = CD, AC = BD, BC = AD$  nên  $\triangle ABC = \triangle ABD \Rightarrow IC = ID$ .

Từ đó ta có  $IJ \perp CD$ , tương tự  $IJ \perp AB$  hay  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$ . Lí luận tương tự ta được đoạn thẳng nối trung điểm của hai cặp cạnh đối còn lại cũng là đường vuông góc chung của chúng.

Đảo lại, giả sử đoạn  $IJ$  là đoạn vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$ , khi đó  $IJ$  là đường trung trực của  $AB$  và  $CD$  nên phép đối xứng trục qua  $IJ$  biến

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D \Rightarrow AC \rightarrow BD \Rightarrow AC = BD$$

Tương tự ta cũng có  $AD = BC, AB = CD$  nên  $ABCD$  là tứ diện gần đều.



- Giả sử  $ABCD$  là tứ diện gần đều thì các mặt của nó là các tam giác bằng nhau nên có diện tích bằng nhau. Ngược lại, giả sử tứ diện  $ABCD$  có các mặt có diện tích bằng nhau.

Gọi  $E$  là trung điểm của  $CD$ ,  $H, K, F$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $C, D, E$  trên  $AB$ .

Ta có  $E$  là trung điểm của  $CD$  nên  $F$  là trung điểm của  $HK$ , mặt khác

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DK,$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} \Rightarrow CH = DK$$

Suy ra hai tam giác vuông  $\triangle CHF$  và  $\triangle DKF$  bằng nhau, do đó  $CF = DF \Rightarrow \triangle FCD$  cân tại  $F \Rightarrow FE \perp CD$ , vậy đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$  đi qua trung điểm của  $CD$ .

Do vai trò bình đẳng giữa  $AB$  và  $CD$  nên  $F$  cũng là trung điểm của  $AB$ .

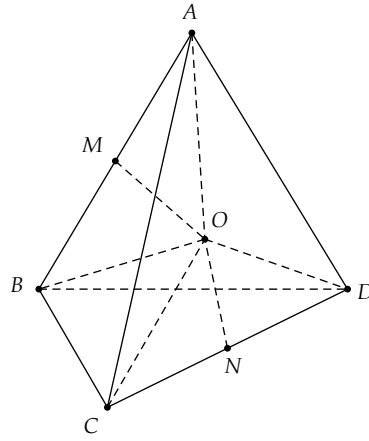
Vậy  $EF$  là trục đối xứng của tứ diện  $ABCD$  nên  $AC = BD, AD = BC$ .

Tương tự  $AB = CD$ , vì vậy  $ABCD$  là tứ diện gần đều.

- Hiển nhiên mỗi trục đối xứng phải đi qua trung điểm của một cặp cạnh đối nên nó là đường vuông góc chung của cặp cạnh đối đó theo tính chất 2 ta có (đpcm).
- Nếu  $ABCD$  là tứ diện gần đều thì theo tính chất 3 ta có diện tích các mặt bằng nhau.

Áp dụng công thức  $V = \frac{1}{3} h S_d$  ta có ngay bốn đường cao của tứ diện bằng nhau.

Ngược lại nếu tứ diện có bốn đường cao bằng nhau thì cũng từ công thức  $V = \frac{1}{3} h S_d$  ta có diện tích bốn mặt của bằng nhau, theo tính chất 3 ta cũng có điều phải chứng minh!



- Giả sử  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều  $ABCD$  ta sẽ chứng minh  $O$  cũng là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện  $ABCD$ . Thật vậy, gọi  $O_1, O_2$  lần lượt là hình chiếu của  $O$  trên các mặt  $ABC$  và  $DBC$ , khi đó  $O_1, O_2$  là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $ABC$  và  $DBC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Ta có  $\triangle ABC = \triangle DBC \Rightarrow O_1I = O_2I, OO_1 = OO_2$ .

Tương tự ta sẽ chứng minh được  $O$  cách đều các mặt của tứ diện, do đó  $O$  là tâm mặt cầu nội tiếp. Ngược lại, giả sử tứ diện  $ABCD$  có tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau. Gọi  $O_1, O_2$  là các tiếp điểm của mặt cầu nội tiếp với các mặt  $ABC$  và  $DBC$  thì  $O_1, O_2$  là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $ABC$  và  $DBC$  và

$$\triangle O_1BC = \triangle O_2BC \Rightarrow BO_1C = BO_2C \Rightarrow BAC = BDC.$$

Hoàn toàn tương tự ta có  $CAD = CBD, BAD = BCD$  suy ra tổng các góc phẳng tại đỉnh  $A$  của tứ diện  $ABCD$  bằng  $180^\circ$ , và điều này đúng cho tất cả các đỉnh của tứ diện, vì vậy theo tính chất 1 thì  $ABCD$  là tứ diện gần đều.

- Giả sử  $ABCD$  là tứ diện gần đều, gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $O$  là trung điểm của  $MN$  thì  $O$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ .

Ta chứng minh  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ .

Thật vậy, ta có  $MN$  là đường trung trực của  $AB$  và  $CD$  nên

$$OA = OB, OC = OD$$

$$\text{Lại có } OA = \sqrt{MA^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{AB^2 + MN^2}}{2}; OD = \sqrt{ON^2 + ND^2} = \frac{\sqrt{CD^2 + MN^2}}{2}$$

Mà  $AB = CD \Rightarrow OA = OD$ , vậy  $OA = OB = OC = OD$  nên  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ .

Ngược lại nếu tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm trùng nhau thì đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối chính là đường vuông góc chung của chúng nên theo tính chất 2 ta có điều phải chứng minh!

- Tính chất này được suy ra từ hai tính chất 6 và 7.
- Giả sử  $ABCD$  là tứ diện gần đều khi đó theo tính chất là diện tích ở phần trước có

$$S_{ABC} = S_{DAB} \cos \alpha + S_{DBC} \cos \beta + S_{DAC} \cos \gamma$$

trong đó  $\alpha, \beta, \gamma$  lần lượt là góc nhị diện các cạnh  $AB, BC, AC$ .

Mặt khác  $S_{ABC} = S_{DAB} = S_{DBC} = S_{DAC}$  nên  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$ .

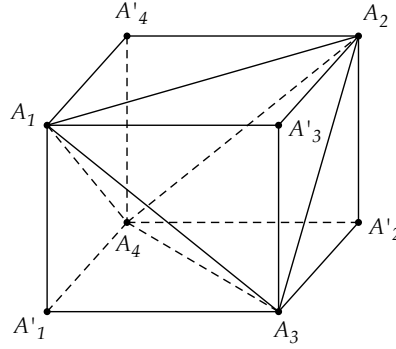
Ngược lại, giả sử  $ABC$  là mặt có diện tích lớn nhất và  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$  với  $\alpha, \beta, \gamma$  lần lượt là góc nhị diện các cạnh  $AB, BC, AC$  khi đó từ

$$S_{ABC} = S_{DAB} \cos \alpha + S_{DBC} \cos \beta + S_{DAC} \cos \gamma \Rightarrow S_{ABC} \leq S_{ABC} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = S_{ABC}$$

Do đó  $S_{ABC} = S_{DAB} = S_{DBC} = S_{DAC} \Rightarrow ABCD$  là tứ diện gần đều.

- Giả sử  $A_1A_2A_3A_4$  là tứ diện gần đều  $S_1, S_2, S_3, S_4$  là diện tích các mặt đối diện với đỉnh  $A_i$ . Gọi  $\alpha, \beta$  lần lượt là góc phẳng nhị diện cạnh  $A_1A_2$  và  $A_3A_4$ .

Dựng hình hộp  $A_1A'_4A_2A'_3.A'_1A_3A'_2A_4$ . Gọi  $S'$  là diện tích các mặt của tứ diện



Áp dụng công thức  $S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = \frac{(ab \sin \phi)^2}{4}$  ta có diện tích hình chữ nhật  $A_1A'_4A_2A'_3$  là  $S'^2 = 2S^2 - 2S^2 \cos \alpha$  và diện tích hình chữ nhật  $A'_1A_3A'_2A_4$  là  $S''^2 = 2S^2 - 2S^2 \cos \beta$  mà  $S' = S'' \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$  v - do  $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ . Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được góc phẳng nhị diện của các cặp cạnh đối còn lại bằng nhau. Ngược lại, giả sử tứ diện  $A_1A_2A_3A_4$  có góc nhị diện các cặp cạnh đối bằng nhau, khi đó áp dụng công thức  $V = \frac{2S_1S_2 \sin \alpha}{3a}$  ta có

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \Rightarrow ABCD \text{ là tứ diện gần đều}$$

### 3. Các bài toán luyện tập.

#### Câu 1.

Chứng minh rằng trong tứ diện gần đều tổng cosine của các góc nhị diện bằng 2.

#### Lời giải

**Cách 1.** Xét tứ diện  $A_1A_2A_3A_4$ . Gọi  $\alpha_{i,j} (i \neq j, i, j = \overline{1,4})$  là các góc phẳng nhị diện của các cạnh thuộc một mặt đối diện với đỉnh  $A_i$ . Theo tính chất thứ 9 thì ta có  $\sum_{j=1, j \neq i}^4 \cos \alpha_{i,j} = 1$  nên tổng các cosine của

các góc nhị diện là  $\frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^4 \sum_{i=1}^4 \cos \alpha_{i,j} = 2$ .

**Cách 2.** Gọi  $\vec{e}_i (i = \overline{1,4})$  là các vector đơn vị có hướng vuông góc với mặt đối diện của đỉnh  $A_i$  có hướng từ một điểm trong tứ diện ra phía ngoài tứ diện,  $S_i$  là diện tích của mặt đối diện với đỉnh  $A_i$ , theo định lí con nhím thì  $S_1\vec{e}_1 + S_2\vec{e}_2 + S_3\vec{e}_3 + S_4\vec{e}_4 = \vec{0} \Rightarrow \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 = \vec{0}$ .

Bình phương hai vế ta được  $4 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ .

Lưu ý rằng  $\cos(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = -\cos \alpha_{i,j} (i \neq j)$ . Từ đó ta có điều phải chứng minh.

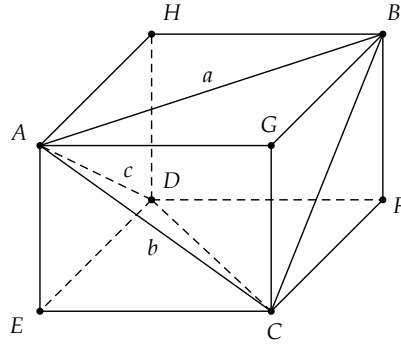
#### Câu 2.

Tính thể tích của tứ diện gần đều  $ABCD$  có các cạnh

$$AB = CD = a, AC = BD = b, BC = AD = c.$$

#### Lời giải

**Cách 1.**



Dựng hình hộp  $AGBH.ECFD$ . Vì  $ABCD$  là tứ diện gần đều nên hình hộp ngoại tiếp nó là hình hộp chữ nhật. Đặt  $AG = x, AH = y, AE = z$  thì  $V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{hh} = \frac{1}{3}xyz$ .

$$\text{Lại có } \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = b^2 \\ z^2 + x^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2). \text{ Từ đó ta có}$$

$$x = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}, y = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}, z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

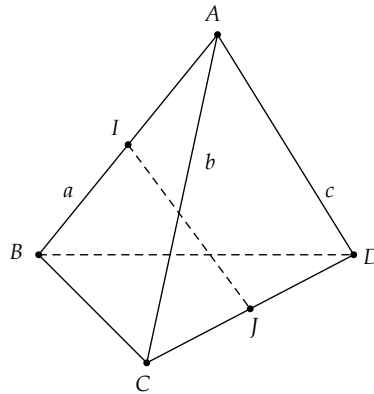
$$\text{Nên } V_{ABCD} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(c^2 + b^2 - a^2)}{72}}.$$

**Cách 2.** Dựng tứ diện  $DA'B'C'$  sao cho  $A, B, C$  lần lượt là trung điểm của  $B'C', C'A', A'B'$ . Khi đó tứ diện  $DA'B'C'$  có các cạnh  $DA', DB', DC'$  đôi một vuông góc.

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{DA'B'C'} = \frac{1}{24}DA'.DB'.DC' \text{ và } \begin{cases} DA'^2 + DC'^2 = 4b^2 \\ DA'^2 + DB'^2 = 4a^2 \\ DB'^2 + DC'^2 = 4c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DA'^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \\ DB'^2 = 2(a^2 - b^2 + c^2) \\ DC'^2 = 2(-a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } V_{ABCD} = \frac{1}{24}DA'.DB'.DC' = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

**Cách 3.** Sử dụng công thức  $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d(AB, CD).\sin(AB, CD)$



Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Ta chứng minh được  $IJ$  là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa  $AB$  và  $CD$ .

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.IJ.\sin \alpha$$

| Một số chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi hình học không gian

- $IJ^2 = IC^2 - CJ^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot CD \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \quad (*)$

$$\text{Tính } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \quad (**)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}$$

$$\text{Tương tự ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

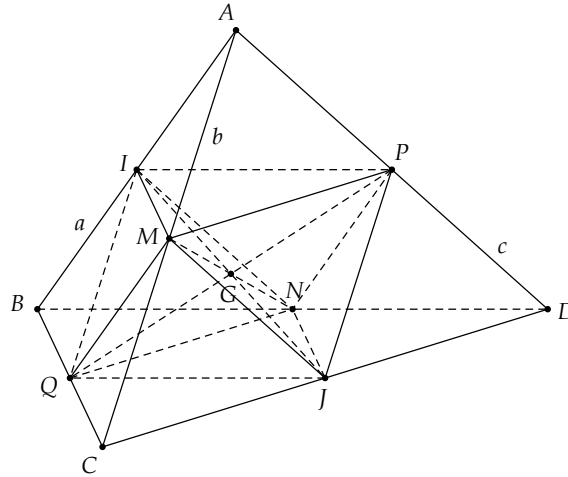
$$\text{Thay vào } (**) \text{ ta được } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = c^2 - b^2$$

$$\text{Từ } (*) \text{ ta có } c^2 - b^2 = a^2 \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \Rightarrow (c^2 - b^2)^2 = a^4 \cdot \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{(c^2 - b^2)^2}{a^4}$$

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot IJ \cdot \sin \alpha = \frac{1}{6} a^2 \cdot \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{(c^2 - b^2)^2}{a^4}}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

**Cách 4.** Gọi  $I, J, M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD, AC, BD, AD, BC$ .



Ta thấy tứ giác  $MINJ$  là hình thoi. Ta chứng minh được  $PQ$  vuông góc với  $AD$  và  $BC$  nên  $PQ$  vuông góc với  $mp(IMJN)$ . Gọi  $G$  là giao điểm của các đường  $IJ, MN, PQ$ .

$$\text{Ta có } V_{PIMJNQ} = 2V_{P \cdot MINJ} = 2 \cdot \frac{1}{3} PG \cdot \frac{1}{2} IJ \cdot MN = \frac{1}{6} PQ \cdot IJ \cdot MN$$

$$\text{Vì } V_{AIMP} = V_{BINQ} = V_{CQMJ} = V_{DPNJ} = \frac{1}{8} V_{ABCD} \text{ nên}$$

$$V_{PIMJNQ} = V_{ABCD} - (V_{AIMP} + V_{BINQ} + V_{CQMJ} + V_{DPNJ}) = \frac{1}{2} V_{ABCD}$$

$$\text{Suy ra } V_{ABCD} = 2V_{PIMJNQ} = \frac{1}{3} PQ \cdot IJ \cdot MN$$

$$\text{Ta tính được } IJ^2 = IC^2 - CJ^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

$$\text{Tương tự } PQ^2 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2}; \quad MN^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}$$

Từ đó  $V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$

**Câu 3.**

Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều  $ABCD$  có các cạnh  $AB = CD = a, AC = BD = b, BC = AD = c$ .

**Lời giải**

Ta có hình hộp ngoại tiếp là hình hộp chữ nhật có đường chéo

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}.$$

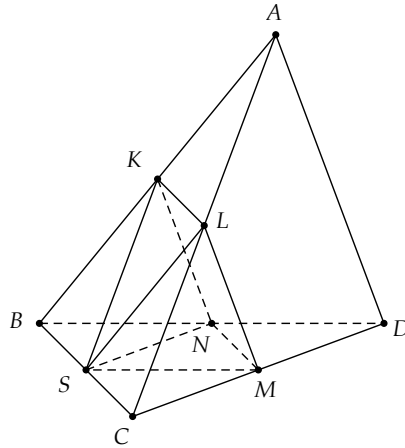
Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp  $AGBH.ECFD$  nên bán

kính mặt cầu là  $R = \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$ .

**Câu 4.**

Cho tứ diện  $ABCD$  có  $BAC = ABD = ACD = BDC$ . Chứng minh rằng tứ diện  $ABCD$  là tứ diện gần đều?

**Lời giải**



Gọi  $S, K, L, M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, AB, AC, CD, BD$ . Dễ thấy  $KLMN$  là hình bình

hành. Từ giả thiết ta suy ra được  $KSL = LSM = MSN = NSK$  kết hợp với  $KLMN$  là hình bình hành ta có được  $KLMN$  là hình thoi suy ra  $AD = 2KN = 2MN = BC$ .

Ta có  $SK = SM$  và  $SL = SN$  suy ra  $AC = BD$  và  $AB = CD$ .

Vậy  $ABCD$  là tứ diện gần đều.

**Câu 5.**

Chứng minh trong tứ diện gần đều tất cả các góc phẳng đều nhọn.

**Lời giải**

Dựng hình hộp  $AGBH.ECFD$  ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ , giả sử các kích thước của ba cạnh là  $AG = x, AH = y, AE = z$  khi đó vì  $AGBH.ECFD$  là hình hộp chữ nhật nên

$$AB^2 = CD^2 = x^2 + y^2, BC^2 = AD^2 = y^2 + z^2, AC^2 = BD^2 = x^2 + z^2.$$

Xét các góc phẳng tại đỉnh  $A$  ta có

$$\cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{x^2 + y^2 + y^2 + z^2 - (x^2 + z^2)}{2\sqrt{(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)}} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)}} > 0.$$

Tính toán tương tự cho tất cả các góc phẳng còn lại ta có điều phải chứng minh!

### Câu 6.

Cho tứ diện gần đều  $OABC$  có  $\alpha, \beta, \gamma$  là các góc nhị diện của các cạnh thuộc mặt  $ABC$  với  $(0 < \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ)$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \cos \alpha + \sqrt{\cos \alpha \cos \beta} + \sqrt[3]{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

#### Lời giải

Theo tính chất thứ 9 ta có  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$ . Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{\cos \alpha \cdot 4 \cos \beta} \leq \frac{\cos \alpha + 4 \cos \beta}{2}$$

$$\sqrt[3]{\cos \alpha \cdot 4 \cos \beta \cdot 16 \cos \gamma} = \frac{\cos \alpha + 4 \cos \beta + 16 \cos \gamma}{3}$$

$$\text{Từ đây suy ra } P \leq \cos \alpha + \frac{1}{4}(\cos \alpha + 4 \cos \beta) + \frac{1}{12}(\cos \alpha + 4 \cos \beta + 16 \cos \gamma) = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \cos \alpha = \frac{16}{21}, \cos \beta = \frac{4}{21}, \cos \gamma = \frac{1}{21}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $P$  là  $\frac{4}{3}$ .

### C. Tính chất của tứ diện trực tâm.

#### 1. Định nghĩa.

Tứ diện có các đường cao ( hoặc phần kéo dài của chúng) cắt nhau tại một điểm được gọi là tứ diện trực tâm.

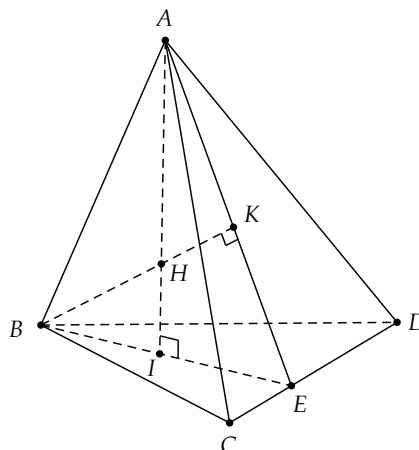
#### 2. Điều kiện cần và đủ để một tứ diện là tứ diện trực tâm.

Mỗi điều kiện sau là một điều kiện cần và đủ để một tứ diện là tứ diện trực tâm.

##### Điều kiện.

- Một tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc.
- Các đoạn thẳng nối các cặp cạnh đối bằng nhau.
- Tổng các bình phương của các cặp cạnh đối bằng nhau.
- Tích các cosine của các góc nhị của các cặp cạnh đối bằng nhau.
- Các góc giữa các cạnh đối bằng nhau.
- Chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đối diện là trực tâm của mặt đó.

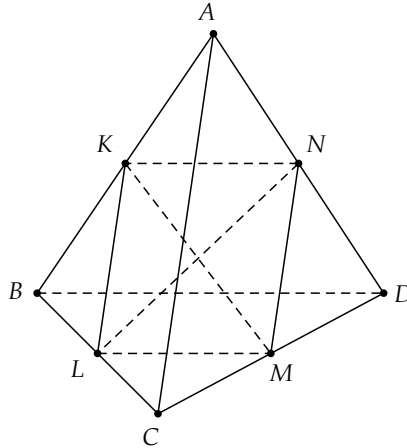
##### Chứng minh



- Giả sử tứ diện  $ABCD$  có bốn đường cao cắt nhau tại  $H$ , khi đó  $AH \perp CD, BH \perp CD$  nên  $CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$ .

Tương tự  $AD \perp BC, AC \perp BD$ .

Ngược lại, giả sử tứ diện  $ABCD$  có các cặp cạnh đối vuông góc. Gọi  $AI$  là đường cao của hình chóp và  $E$  là giao điểm của  $BI$  và  $CD$ . Kẻ  $BK \perp AE, K \in AE$ , gọi  $H$  là giao điểm của  $AI$  và  $BK$ . Khi đó  $CD \perp AB$  và  $CD \perp BI \Rightarrow CD \perp BK$ . Từ đây suy ra  $BK \perp (ACD)$ . Hay đường cao xuất phát từ các đỉnh  $A$  và  $B$  cắt nhau tại  $H$ . Lập luận tương tự ta được bốn đường cao của tứ diện đôi một cắt nhau, khi đó bốn đường cao hoặc đồng phẳng hoặc đồng quy, mặt khác bốn đường cao của tứ diện thì không thể đồng phẳng nên chúng đồng quy.



- Gọi  $K, L, M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$  thì  $KLMN$  là hình bình hành. Ta thấy  $AB \perp CD \Leftrightarrow KLMN$  là hình chữ nhật  $\Leftrightarrow KM = LN$  (vì hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau khi và chỉ khi nó là hình chữ nhật). Vì vậy ta có đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi các cặp cạnh đối vuông góc  $\Leftrightarrow ABCD$  là tứ diện trực tâm, theo tính chất 1.
- Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}$ . Ta chứng minh tổng bình phương của hai cặp cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi cặp cạnh còn lại vuông góc. Thật vậy, giả sử

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow AB \perp CD.$$

Vậy tứ diện  $ABCD$  có tổng bình phương các cặp cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi tứ diện  $ABCD$  các cặp cạnh đối vuông góc. Do đó  $ABCD$  là tứ diện trực tâm

- Kí hiệu  $\angle AB$  là góc phẳng nhị diện cạnh  $AB$ . Theo định lý sin trong tứ diện ta có

$$\frac{AB \cdot CD}{\sin \angle AB \cdot \sin \angle CD} = \frac{AC \cdot BD}{\sin \angle AC \cdot \sin \angle BD} \quad (1).$$

Mặt khác theo **định lý Bretschneider** "Trong tứ diện  $ABCD$  với cặp cạnh đối  $a, b$  và  $\alpha, \beta$  là góc phẳng nhị diện tương ứng của chúng thì

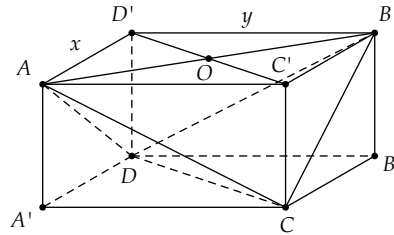
$$a^2 + b^2 + 2ab \cot \alpha \cot \beta = \frac{2 \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 4} S_i^2 S_j^2 \right) - \sum_{i=1}^4 S_i^4}{9V^2} = \text{const}$$

trong đó  $S_i (i = \overline{1, 4})$  là diện tích các mặt và  $V$  là thể tích của tứ diện."

$$\text{Ta có } AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD \cot \angle AB \cdot \cot \angle CD = AC^2 + BD^2 + 2AC \cdot BD \cot \angle AC \cdot \cot \angle BD \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \cos \angle AB \cdot \cos \angle CD = \cos \angle AC \cdot \cos \angle BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2.$$

Từ đó ta có tích các cosine của các góc nhị của các cặp cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi tổng các bình phương của các cặp cạnh đối bằng nhau. Điều này tương đương với  $ABCD$  là tứ diện trực tâm đúng theo tính chất thứ 3.



- Ta chứng minh góc giữa các cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi các cặp cạnh đối vuông góc.  
Gọi  $\alpha$  là số đo góc giữa hai cạnh đối ( của tất cả các cặp cạnh đối)  
Giả sử  $\alpha \neq 90^\circ$ . Ta chứng minh trong ba số  $AB \cdot CD \cos \alpha$ ,  $CB \cdot AD \cos \alpha$ ,  $AC \cdot BD \cos \alpha$  có một số bằng tổng của hai số còn lại. Dựng hình hộp ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$  mà mỗi mặt của hình hộp đi qua một cạnh và song song với cạnh đối diện.  
Đặt  $AD' = x, D'B = y$ , giả sử  $x \geq y$  khi đó theo định lí cô sin ta có

$$AD'^2 = OA^2 + OD'^2 - 2OA \cdot OD' \cos(\pi - \alpha) = OA^2 + OD'^2 + 2OA \cdot OD' \cos \alpha$$

$$\text{hay } 4x^2 = AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD \cos \alpha \quad (1).$$

$$\text{Tương tự } 4y^2 = AB^2 + CD^2 - 2AB \cdot CD \cos \alpha \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } AB \cdot CD \cos \alpha = x^2 - y^2.$$

Thiết lập các hệ thức tương tự nữa ta thu được ba số

$$AB \cdot CD \cos \alpha, CB \cdot AD \cos \alpha, AC \cdot BD \cos \alpha$$

có một số bằng tổng của hai số còn lại.

$$\text{Giả sử } AB \cdot CD \cos \alpha = AD \cdot BC \cos \alpha + AC \cdot BD \cos \alpha \Leftrightarrow AB \cdot CD = AD \cdot BC + AC \cdot BD$$

Điều này vô lý vì theo **công thức Crelle** thì  $AB \cdot CD, AD \cdot BC, AC \cdot BD$  là ba cạnh của một tam giác. Vậy  $\alpha = 90^\circ$  do đó  $ABCD$  có các cặp cạnh đối vuông góc.

Theo tính chất 1 ta có điều cần chứng minh.

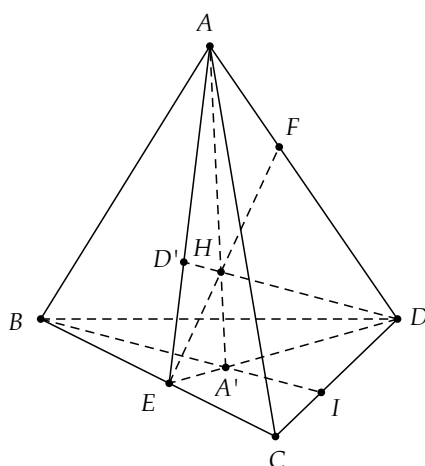
- Nếu  $ABCD$  là tứ diện trực tâm thì dễ dàng chứng minh được chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đối diện là trực tâm của mặt đó.  
Ngược lại nếu chân đường cao hạ từ đỉnh xuống mặt đối diện là trực tâm của mặt đó thì ta chứng minh được các cặp cạnh đối vuông góc, vì vậy tứ diện này là tứ diện trực tâm – theo tính chất 3.

### 3. Các bài toán luyện tập.

#### Câu 1.

Chứng minh trong tứ diện trực tâm các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối đồng quy.

#### Lời giải



Gọi  $AA'$  là đường cao của tứ diện trực tâm  $ABCD$ , thế thì  $A'$  là trực tâm của tam giác  $BCD$ .

Gọi  $E = BC \cap DA'$  và  $H$  là điểm đồng quy của bốn đường cao,  $F = EH \cap AD$

Khi đó  $\begin{cases} BC \perp DA' \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp EF$ . Lại có  $H$  là trực tâm của tam giác  $ADE$  nên  $EF \perp AD$  điều này

chứng tỏ đường vuông góc chung  $EF$  của cặp cạnh đối  $AD, BC$  đi qua  $H$ . Dĩ nhiên các đường vuông góc chung của hai cặp cạnh còn lại cũng đi qua  $H$ . Vậy trong tứ diện trực tâm các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối đồng quy.

## Câu 2.

Chứng minh rằng trong tứ diện trực tâm:

- Tất cả các góc phẳng tại một đỉnh hoặc đều nhọn hoặc đều vuông hoặc đều tù.
- Có ít nhất một mặt là tam giác nhọn.

### Lời giải

a) Xét tứ diện trực tâm  $ABCD$ , ta chứng minh các góc tại đỉnh  $A$  cùng nhọn hoặc cùng vuông hoặc cùng tù. Thật vậy, theo tính chất 3 ta có

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = CB^2 + AD^2 \quad (1).$$

Áp dụng định lí cosine ta có  $2AB.AC \cos BAC = AB^2 + AC^2 - BC^2 \quad (2)$

$$2AB.AD \cos BAD = AB^2 + AD^2 - BD^2 \quad (3)$$

$$2AC.AD \cos CAD = AC^2 + AD^2 - CD^2 \quad (4).$$

Từ (1), (2), (3) & (4) suy ra  $AB.AC \cos BAC = AB.AD \cos BAD = AC.AD \cos CAD$  nên các góc tại đỉnh  $A$  hoặc cùng nhọn, hoặc cùng vuông hoặc cùng tù.

b) Nếu tất cả các góc ở mỗi đỉnh đều nhọn thì khẳng định của bài toán đúng.

Nếu có một góc nào đó không nhọn thì không mất tính tổng quát, giả sử  $BAC \geq 90^\circ$  khi đó các góc  $ABC$  và  $ACB$  nhọn, dẫn đến  $DBC$  và  $BCD$  nhọn.

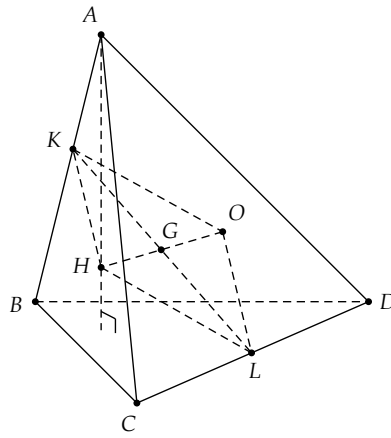
Lại có  $DAC \geq 90^\circ \Rightarrow ADC$  nhọn  $\Rightarrow BDC$  nhọn.

Từ các điều trên chứng tỏ tam giác  $BCD$  nhọn.

## Câu 3.

Chứng minh trong tứ diện trực tâm  $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$  trong đó  $O$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp,  $H$  là điểm đồng quy của bốn đường cao và  $d$  là khoảng cách giữa hai trung điểm của các cặp cạnh đối.

### Lời giải



Trước hết chúng ta để ý trong tứ diện trực tâm thì giao điểm  $H$  của bốn đường cao, trọng tâm  $G$  và tâm mặt cầu ngoại tiếp  $O$  thẳng hàng và  $G$  là trung điểm của  $OH$ , do đó gọi  $K, L$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  thì  $KHLO$  là hình bình hành tâm  $G$ . Ta có  $OK = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}, OL = \sqrt{R^2 - \frac{CD^2}{4}}$

Trong hình bình hành  $KHLO$  ta có  $OH^2 + KL^2 = 2(OK^2 + OL^2)$

$$\Leftrightarrow OH^2 = 2\left(R^2 - \frac{AB^2}{4}\right) + 2\left(R^2 - \frac{CD^2}{4}\right) - d^2 = 4R^2 - d^2 - \frac{AB^2 + CD^2}{2}.$$

Theo công thức đường trung tuyến ta có

$$4LK^2 = 2(LA^2 + LB^2) - AB^2 = \left(AC^2 + AD^2 - \frac{CD^2}{2}\right) + \left(BC^2 + BD^2 - \frac{CD^2}{2}\right) - AB^2$$

$$\Leftrightarrow 4d^2 = AC^2 + AD^2 + CB^2 + BD^2 - CD^2 - AB^2 = AB^2 + CD^2$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{AB^2 + CD^2}{4}. \text{ Do trong tứ diện trực tâm thì } AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2.$$

$$\text{Vậy } OH^2 = 4R^2 - 3d^2.$$

#### Câu 4.

Chứng minh rằng trong tứ diện trực tâm các mặt phẳng đi qua trung điểm một cạnh và vuông góc với cạnh đối diện đồng quy tại giao điểm của các đường cao. Điểm này gọi là **điểm Monggiơ** của tứ diện.

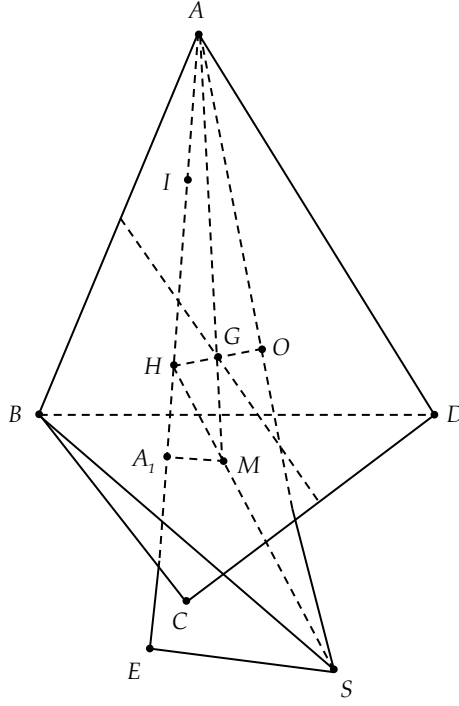
#### Lời giải

Vì  $AB \perp CD$  nên tồn tại mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $AB$  và vuông góc với  $CD$ , mặt phẳng này chứa giao điểm hai đường cao hạ từ  $A$  và  $B$ . Lí luận tương tự ta được các mặt phẳng còn lại cũng đi qua  $H$ . Hay các mặt phẳng này đồng quy tại  $H$ .

#### Câu 5.

Chứng minh trong tứ diện trực tâm trọng tâm của các mặt, trực tâm của các mặt và các điểm chia các đoạn nối giao điểm các đường cao với đỉnh, theo tỉ số  $2:1$  kể từ đỉnh nằm trên một mặt cầu (mặt cầu 12 điểm)

#### Lời giải



Gọi  $A_1, B_1, C_1, D_1$  là chân các đường cao hạ từ các đỉnh  $A, B, C, D$ ;  $M, N, P, Q$  là trọng tâm các mặt đối diện với các đỉnh  $A, B, C, D$  và  $I, J, K, F$  là các điểm trên các đường cao  $AH, BH, CH, DH$  sao cho

$$\frac{HI}{HA} = \frac{HJ}{HB} = \frac{HK}{HC} = \frac{HF}{HD} = \frac{1}{2}.$$

Gọi  $S$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $O$  và  $E$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{HE} = 3\overrightarrow{HA_1}$  (1).

Sử dụng tính chất  $H, O$  đối xứng nhau qua  $G$  và biểu thị vector ta có  $\overrightarrow{HS} = 3\overrightarrow{HM}$  (2).

Từ (1) & (2) suy ra  $A_1M \parallel ES$  mà  $A_1M \perp AA_1 \Rightarrow SE \perp AE$  hay  $E$  thuộc mặt cầu  $(O)$  ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ . Ta có  $V_{\left(H, \frac{1}{3}\right)}: S \rightarrow M, E \rightarrow A_1, A \rightarrow I$  mà  $S, E, A$  thuộc mặt cầu  $(O)$  nên  $M, A_1, I$  thuộc mặt cầu  $(O')$  ảnh của mặt cầu  $(O)$  qua  $V_{\left(H, \frac{1}{3}\right)}$ . Lí luận tương tự đối với các mặt còn lại ta được 12 điểm  $A_1, B_1, C_1, D_1, M, N, P, Q, I, J, K, F$  cùng thuộc mặt cầu  $(O')$ .

# Cực trị hình học không gian

Cực trị và bất đẳng thức nói chung luôn là các bài toán khó yêu cầu người làm bài phải có kỹ năng tốt về bất đẳng thức cũng như kiến thức vững về hàm số cũng như đạo hàm. Trong chương này chúng ta sẽ cùng đi tìm hiểu lớp bài toán cực trị hình không gian cũng như bất đẳng thức trong hình không gian.

## I. Các kiến thức cơ bản về bất đẳng thức.

### Bất đẳng thức Cauchy – AM – GM .

Cho  $n$  số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  khi đó ta có  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

Bất đẳng thức AM – GM dạng cộng mẫu số cho  $n$  số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}$

Dấu “=” xảy ra khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

### Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz .

Cho 2 bộ số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Khi đó ta có  $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$

Ngoài ra cần phải chú ý đến bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu Engel:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

Bất đẳng thức trên còn có thể gọi là bất đẳng thức Svachơ.

Dấu “=” xảy ra khi  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ . Riêng dạng cộng mẫu thì cần thêm điều kiện là  $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$

### Bất đẳng thức Minkowski.

Tổng quát: Cho mọi số thực  $r \geq 1$  và mọi số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  thì ta có:

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^r\right]^{\frac{1}{r}} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

Ở đây chỉ xét trường hợp cho 2 bộ số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  và  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Khi đó ta có:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ .

## II. Phương pháp giải các bài toán cực trị.

Khi gặp các bài toán cực trị thì thông thường học sinh cảm thấy rất lúng túng và không biết cách giải quyết như thế nào, tuy nhiên bản chất của nó là các bài toán hình không gian cơ bản, kết hợp với các bài toán khảo sát hàm số hoặc bất đẳng thức cơ bản.

Sau đây là phương pháp giải của đa số các bài toán cực trị trong phần này!

**Phương pháp.** Để giải quyết các bài toán cực trị hình không gian thì ta cần làm 3 bước sau:

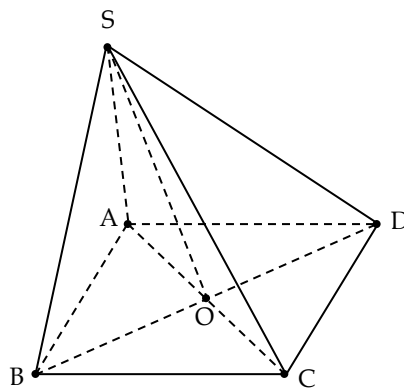
- **Bước 1.** Biểu diễn đối tượng đề bài yêu cầu qua một ( hoặc 2) đại lượng chưa biết ta gọi là biến  $x$ .
- **Bước 2.** Tìm điều kiện của biến  $x$  dựa vào giả thiết đã cho.
- **Bước 3.** Khảo sát hàm số theo biến  $x$  để tìm ra kết quả của bài toán.

Có thể trong nhiều tài liệu cũng như sách tham khảo khác các tác giả sẽ chia ra làm nhiều dạng dựa theo đặc điểm của khối hình không gian mà ta đang xét. Tuy nhiên như thế là khá rắc rối bởi có quá nhiều dạng, ta chỉ cần nắm chắc phương pháp giải gồm 3 bước như trên. Sau đây là các bài toán minh họa trong phần này.

### Câu 1.

Cho khối chóp  $S.ABCD$ , có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $SA = SB = SC = a$ . Đặt  $x = SD$ , trong đó  $0 < x < a\sqrt{3}$ . Tìm  $x$  theo  $a$  để tích  $AC.SD$  đạt giá trị lớn nhất?

#### Lời giải



**Phân tích.** Với bài toán này bước đầu tiên chúng ta sẽ phải đi biểu diễn  $AC.SD$  theo  $x$ .

Ta có  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$  nên  $\Delta SOC = \Delta BOC \Rightarrow OS = OB = OD$

Từ đó suy ra tam giác  $SBD$  vuông tại  $S$ .

Suy ra  $BD = \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$ ;  $AC = 2OC = 2\sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{3a^2 - x^2}$ .

Do đó  $AC.SD = x\sqrt{3a^2 - x^2}$ . Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x\sqrt{3a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow AC.SD \leq \frac{3a^2}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $x = \sqrt{3a^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

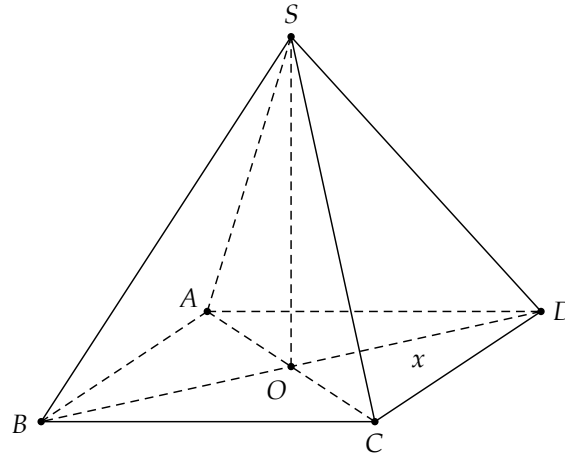
Vậy  $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$  thì tích  $AC.SD$  đạt giá trị lớn nhất.

**Nhận xét.** Ngoài cách sử dụng AM – GM ra thì chúng ta cũng có thể sử dụng hàm số để giải quyết nó!

**Câu 2.**

Tìm giá trị lớn nhất của thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng  $b$  ?

**Lời giải**



Giả sử hình chóp đều  $S.ABCD$  có  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Suy ra  $SO \perp (ABCD)$ .

Đặt  $OD = x \Rightarrow SO = \sqrt{b^2 - x^2}, 0 < x < b$ . Do đó thể tích  $S.ABCD$  là  $V_{S.ABCD} = \frac{2}{3}x^2\sqrt{b^2 - x^2}$ .

Đặt  $t = \sqrt{b^2 - x^2}, 0 < t < b$  thì  $V_{S.ABCD} = \frac{2}{3}(b^2 - t^2)t = \frac{2}{3}f(t)$  với  $f(t) = b^2t - t^3$ .

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

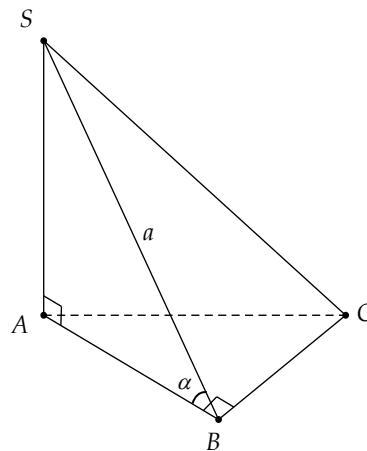
$$V = \frac{2}{3}x^2\sqrt{b^2 - x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^4(b^2 - x^2)} \leq \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{x^2 + x^2 + 2b^2 - 2x^2}{3}\right)^3} = \frac{4b^3}{9\sqrt{3}}.$$

Vậy  $V_{\max} = \frac{4b^3}{9\sqrt{3}}$ .

**Câu 3.**

Cho hình chóp tam giác  $S.ABC$ ,  $SA \perp (ABC)$ . Đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân đỉnh  $B$ ,  $SB = a$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SCB)$  và  $(ABC)$ . Xác định giá trị của  $\sin \alpha$  để thể tích khối chóp  $S.ABC$  lớn nhất.

**Lời giải**



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = \alpha = SBA.$$

$$\Rightarrow AB = a \cdot \cos \alpha = BC; SA = a \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Nên } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} SA \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{6} a^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} \max \Leftrightarrow (\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha) \max. \text{ Đặt } x = \sin \alpha (0 < x < 1), \text{ khi đó } \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = x(1-x^2) = x - x^3$$

Xét hàm số  $y = x - x^3$  với  $0 < x < 1$  ta có  $y' = 1 - 3x^2$ , Lập bảng biến thiên ta có

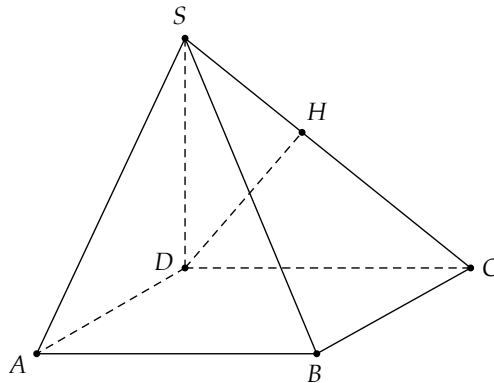
$$y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{Vậy } V_{\max} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

#### Câu 4.

Cho khối chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ . khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng  $a\sqrt{2}$ ,  $SAB = SCB = 90^\circ$ . Xác định độ dài cạnh  $AB$  để thể tích khối chóp  $S.ABC$  nhỏ nhất.

#### Lời giải



Dựng hình vuông  $ABCD$ , cạnh bằng  $x$ , ta có  $SD \perp (ABCD)$ ; đặt  $SD = h$ .

Dựng  $DH \perp SC \Rightarrow DH \perp (SBC)$  Ta có  $d(A; (SBC)) = d(D; (SBC)) = DH = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow V = \frac{1}{6} h \cdot x^2 = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{h^3}{h^2 - 2a^2}$$

Xét hàm số  $f(h) = \frac{h^3}{h^2 - 2a^2}$  với  $h > a\sqrt{2}$

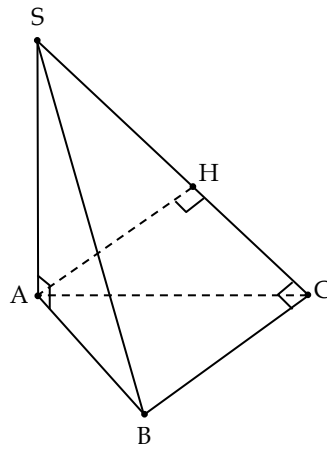
$$\text{Ta có } f'(h) = \frac{h^2(h^2 - 6a^2)}{3(h^2 - 2a^2)^2} = 0 \Leftrightarrow h = a\sqrt{6}$$

Vậy  $f(h)$  nhỏ nhất khi  $h = a\sqrt{6} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$ .

#### Câu 5.

Cho khối chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $C$ . Khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng  $a\sqrt{3}$ ,  $SAB = SCB = 90^\circ$ . Xác định độ dài cạnh  $AB$  để khối chóp  $S.ABC$  có thể tích nhỏ nhất.

#### Lời giải



**Phân tích.** Bài toán này trước tiên ta chưa thể biểu diễn được  $S.ABC$  qua một ẩn, vì thế trước tiên ta sẽ biểu diễn nó qua 2 ẩn rồi sau đó dựa vào giả thiết đã cho để tìm mối liên hệ giữa 2 ẩn đó.

Ta có  $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ASC)$ . Kẻ  $AH \perp SC \Rightarrow AH = a\sqrt{3}$ . Đặt  $AC = x, SC = y \Rightarrow CH = \frac{x^2}{y}$ .

Ta có  $V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{3}AH \cdot S_{\Delta BCS}$  đạt GTNN khi và chỉ khi  $S_{\Delta BCS} = \frac{1}{2}xy$  đạt GTNN.

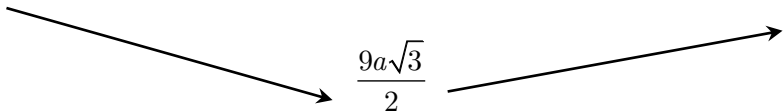
Do  $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SA$  mà  $SA \perp AB$  (theo giả thiết) nên  $SA \perp (ABC)$ .

Suy ra  $\Delta SAC$  vuông tại A. Trong  $\Delta AHC$  có

$$AC^2 - CH^2 = AH^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x^4}{y^2} = 3a^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} \Rightarrow xy = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 3a^2}}$$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} \left( x > a\sqrt{3} \right)$ .

Có  $f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 - 3a^2}} - \frac{x^4}{(\sqrt{x^2 - 3a^2})^3} \left( x > a\sqrt{3} \right); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}a}{2}$ .

|         |                                                                                      |                        |           |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-----------|
| $x$     | $a\sqrt{3}$                                                                          | $\frac{3\sqrt{2}a}{2}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -                                                                                    | 0                      | +         |
| $f(x)$  |  |                        |           |

Vậy  $\min(xy) = \frac{9a\sqrt{3}}{2}$  khi  $AB = x\sqrt{2} = 3a$ .

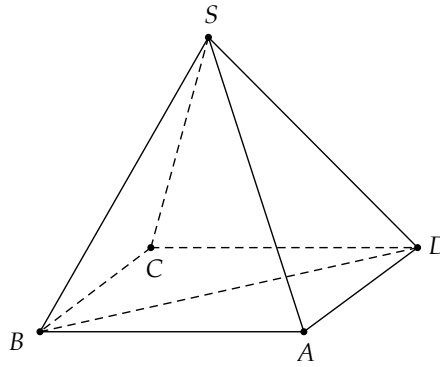
#### Câu 6.

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ , các tam giác  $SBC$  và  $SCD$  đều là các tam giác vuông cân đỉnh  $S$ . Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp  $S.ABCD$ .

#### Lời giải

Ta có  $\Delta SBC$  và  $\Delta SCD$  đều là các tam giác vuông cân đỉnh  $S$

$$\Rightarrow CS = \frac{a\sqrt{2}}{2}, BCS = DCS = 45^\circ$$



Đặt  $\angle BCD = \alpha$  ta có

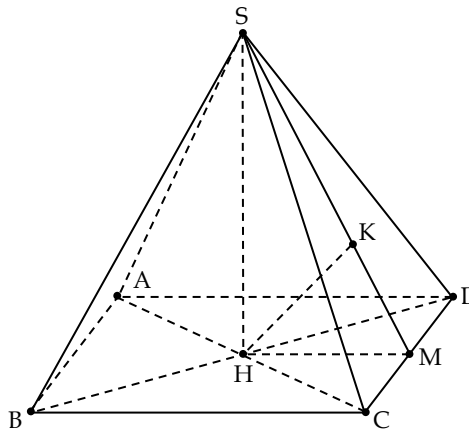
$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= 2V_{S.BCD} \\ &= \frac{1}{3} CB \cdot CD \cdot CS \sqrt{1 + 2 \cos \angle BCS \cdot \cos \angle DCS \cdot \cos \angle BCD - \cos^2 \angle BCS - \cos^2 \angle DCS - \cos^2 \angle BCD} \\ &= \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \cos \alpha\right)^2} \leq \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$  khi và chỉ khi  $\cos \angle BCD = \frac{1}{2}$

### Câu 7.

Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có cạnh bên bằng  $a$ , góc hợp bởi đường cao  $SH$  của hình chóp và mặt bên bằng  $\alpha$ . Tìm  $\alpha$  để thể tích  $S.ABCD$  là lớn nhất.

### Lời giải



Do hình chóp  $S.ABCD$  là hình chóp đều nên  $H$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$  ta có  $CD \perp (SHM)$  nên  $(SHM) \perp (SCD)$ .

Mà  $(SHM) \cap (SCD) = SM$  nên từ  $H$  dựng  $HK \perp SM$  tại  $K$  thì  $HK \perp (SCD)$

Hay  $SK$  là hình chiếu của  $SH$  lên mặt phẳng  $(SCD)$  suy ra  $(SH, (SCD)) = (SH, SK) = \angle HSK$ . Do tam giác  $SHK$  vuông tại  $K$  theo giả thiết ta có  $\angle HSM = \alpha$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\text{Đặt } SH = h \Rightarrow HC^2 = a^2 - h^2 \Rightarrow HM = \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{2}} \text{ và } BC = \sqrt{2(a^2 - h^2)}$$

$$\text{Tam giác } SHM \text{ vuông tại } H : \tan \alpha = \frac{HM}{SH} = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{\sqrt{2}h} \Leftrightarrow 2h^2 \tan^2 \alpha = a^2 - h^2$$

$$\Leftrightarrow h^2(1+2\tan^2\alpha)=a^2 \Rightarrow h=\frac{a}{\sqrt{1+2\tan^2\alpha}}$$

$$\text{Ta có } BC^2=2(a^2-h^2)=4h^2\tan^2\alpha=\frac{4a^2\tan^2\alpha}{1+2\tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}BC^2.SH=\frac{1}{3}\frac{4a^3\tan^2\alpha}{\sqrt{(1+2\tan^2\alpha)^3}}$$

Đặt  $t=1+2\tan^2\alpha$  với  $t\in(1;+\infty)\Rightarrow\tan^2\alpha=\frac{t-1}{2}$ . Xét hàm số  $f(t)=\frac{2a^3}{3}\cdot\frac{t-1}{t\sqrt{t}}$  trên  $(1;+\infty)$ .

$$\text{Ta có } f'(t)=\frac{a^3}{3}\cdot\frac{\left(t\sqrt{t}-\frac{3}{2}\sqrt{t}(t-1)\right)}{t^3}=\frac{a^3}{3}\cdot\frac{(3-t)}{2t^2\sqrt{t}}; f'(t)=0\Leftrightarrow t=3.$$

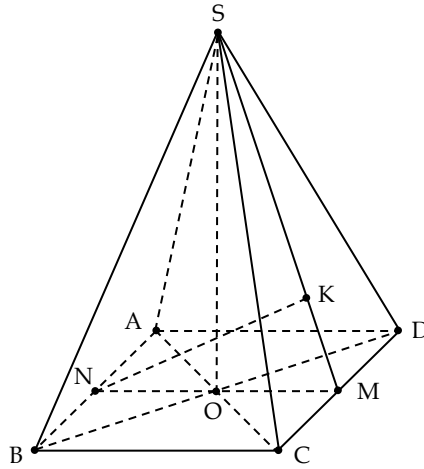
Từ đây lập bảng biến thiên ta dễ dàng chỉ ra rằng  $\max f(t)=\frac{4a^3}{9\sqrt{3}}$

Dấu “=” xảy ra khi  $t=3\Rightarrow\tan\alpha=1$  do  $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$  hay  $\alpha=45^\circ$ .

### Câu 8.

Cho khối chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  mà khoảng cách từ đỉnh  $A$  đến  $mp(SCD)$  bằng  $2a$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa mặt bên hình chóp với đáy của hình chóp đó. Với giá trị nào của  $\alpha$  thì thể tích của khối chóp  $S.ABCD$  đạt giá trị nhỏ nhất?

### Lời giải



Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$  thì  $SO$  vuông góc với  $(ABCD)$  và  $SO$  là chiều cao của khối chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Suy ra  $CD\perp(SMN)$ .

Gọi  $K$  là hình chiếu của  $N$  lên  $SM$ . Suy ra  $NK\perp(SCD)$  nên  $NK=d(N,(SCD))$ .

Từ  $AB\parallel CD$  suy ra  $AB\parallel(SCD)$ . Do đó  $NK=d(A,(SCD))=2a$ .

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} CD\perp MN \\ CD\perp SM \end{cases} \Rightarrow ((SCD),(ABCD))=\alpha.$$

$$\text{Do đó } MN=\frac{NK}{\sin\alpha}=\frac{2a}{\sin\alpha}\Rightarrow SO=OM.\tan\alpha=\frac{a}{\cos\alpha}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\frac{1}{3}MN^2.SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{4a^2}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{4a^3}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

Vì vậy  $V_{S.ABCD}$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $f(\alpha)=\sin^2\alpha\cos\alpha$  lớn nhất, với  $0^\circ<\alpha<90^\circ$ .

Đặt  $t = \cos \alpha, 0 < t < 1$  thì  $V_{S.ABCD}$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow f(t) = (1 - t^2)t = t - t^3$  lớn nhất với  $0 < t < 1$ .

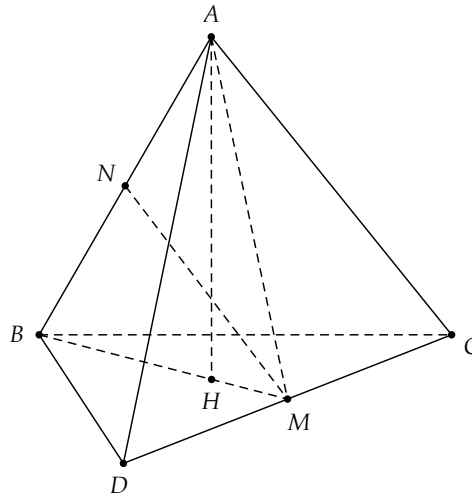
Dựa vào bảng biến thiên thì  $V_{S.ABCD}$  nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

### Câu 9.

Xét khối tứ diện  $ABCD$  có cạnh  $AB = x$ , các cạnh còn lại đều bằng  $2\sqrt{3}$ . Tìm  $x$  để thể tích khối tứ diện  $ABCD$  đạt giá trị lớn nhất?

#### Lời giải



Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $CD$  và  $AB$ ;  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $BM$ .

Ta có  $\begin{cases} CD \perp BM \\ CD \perp AM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM) \Rightarrow (ABM) \perp (BCD)$ .

Mà  $AH \perp BM; BM = (ABM) \cap (BCD); AH \perp (BCD)$ .

Do  $ACD$  và  $BCD$  là hai tam giác đều cạnh  $2\sqrt{3} \Rightarrow AM = BM = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ .

Tam giác  $AMN$  vuông tại  $N$ , có:  $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$ .

Mặt khác ta lại có  $S_{BCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$ .

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} \frac{x\sqrt{36-x^2}}{6} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} x\sqrt{36-x^2}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{BCD} = \frac{\sqrt{3}}{6} x\sqrt{36-x^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{x^2 + 36 - x^2}{2} = 3\sqrt{3}.$$

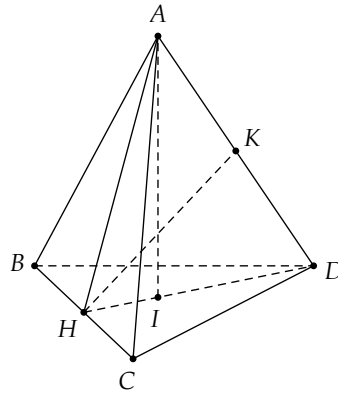
Dấu bằng xảy ra khi  $x = \sqrt{36 - x^2} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$ .

Vậy  $V_{ABCD}$  lớn nhất bằng  $3\sqrt{3}$  khi  $x = 3\sqrt{2}$ .

### Câu 10.

Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = BD = CD = 1$ . Khi thể tích của khối tứ diện  $ABCD$  lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$  bằng bao nhiêu?

#### Lời giải



Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ .

Theo giả thiết  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  và  $\triangle DBC$  cân tại  $D$

Ta có  $BC \perp AH, BC \perp DH \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp HK$  và  $AH = DH \Rightarrow AD \perp HK$

Do đó  $d(AD; BC) = HK$ . Đặt  $BC = x$  ( $0 < x < 2$ ). Ta có

$$AH = DH = \sqrt{DC^2 - HC^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Gọi  $I$  là hình chiếu của  $A$  lên  $HD \Rightarrow AI \perp (BCD)$

Ta có  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot AI \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot DH \cdot AH$ ; (vì  $AI \leq AH$ )  $\Rightarrow V_{ABCD} \leq \frac{1}{6} x \cdot \frac{1}{4} (4-x^2)$

Xét hàm số  $f(x) = x(4-x^2) = -x^3 + 4x$  trên  $(0; 2)$ ;  $f'(x) = -3x^2 + 4$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow \begin{cases} I \equiv H \\ x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH \perp (BCD) \\ DH = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

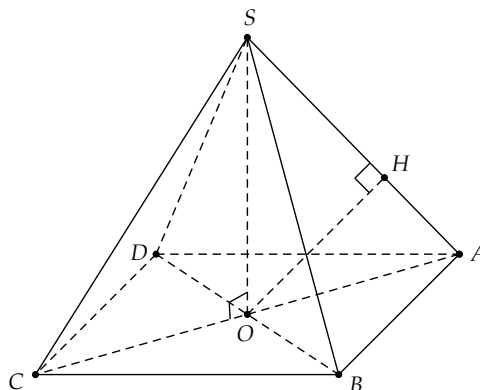
Vì  $\triangle AHD$  vuông cân tại  $H \Rightarrow HK = DH \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Nhận xét.** Ở bài toán này ta đã lợi dụng được tính chất  $AI \leq AH$  để làm lời giải của bài toán đơn giản hơn rất nhiều. Ngoài ra nếu chúng ta không phát hiện được tính chất trên thì chúng ta cũng có thể tính  $AI$  theo biến rồi khảo sát hàm số.

#### Câu 11.

Gọi  $V$  là thể tích nhỏ nhất của khối chóp tứ giác đều trong số các khối chóp tứ giác đều có khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau gồm một đường thẳng chứa một đường chéo của đáy và đường thẳng chứa một cạnh bên hình chóp bằng  $\sqrt{3}$ . Khi đó  $V$  bằng bao nhiêu?

#### Lời giải



Xét hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ , đặt  $AB = x, SO = h$ .

Với  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ .

Qua  $O$  kẻ đường thẳng  $OH$  vuông góc với  $SA$  với  $H \in SA$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$$

Suy ra  $OH$  là đoạn vuông góc chung của  $SA$  và  $BD$ .

Theo giả thiết, ta có  $d = d(SA, BD) = OH \Rightarrow OH = \sqrt{3}$ .

Tam giác  $SOA$  vuông tại  $O$ , có đường cao  $OH$  suy ra

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{x^2}.$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

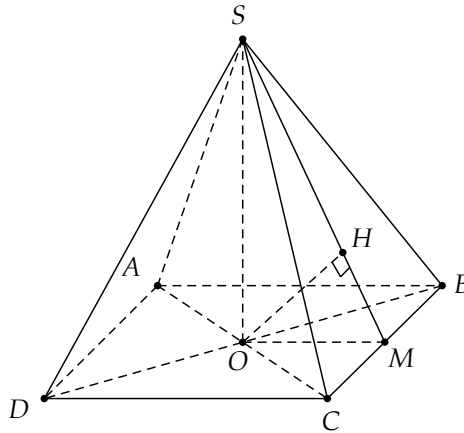
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \stackrel{AM-GM}{\geq} 3\sqrt{\frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{x^4}} \Leftrightarrow hx^2 \geq 27.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}hx^2 \geq 9 \Rightarrow V = 9.$$

### Câu 12.

Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có diện tích tam giác  $SAC$  bằng  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$ .

### Lời giải



Gọi  $O = AC \cap BD$ . Do  $S.ABCD$  là hình chóp đều nên  $SO \perp (ABCD)$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , ta có  $\begin{cases} SO \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOM)$

$$\Rightarrow (SBC) \perp (SOM); (SBC) \cap (SOM) = SM$$

Ta có  $OH$  Trong mặt phẳng  $(SOM)$ , kẻ  $OH \perp SM$  ( $H \in SM$ ) thì  $OH \perp (SBC)$ .

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2OH$$

Gọi cạnh hình vuông là  $x$  ( $x > 0$ ). Ta có  $AC = x\sqrt{2}$  khi đó

$$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SO.AC = \frac{1}{2}SO.x\sqrt{2} \Rightarrow SO = \frac{2S_{\Delta SAC}}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{x}.$$

Tam giác  $SOM$  vuông tại  $O$  có đường cao  $OH$  nên

$$OH = \frac{SO \cdot OM}{SM} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{4}}}$$

Mà  $\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{4}} = 1$  nên  $OH \leq \frac{1}{2} \Rightarrow d(O; (SBC)) \leq 1$ .

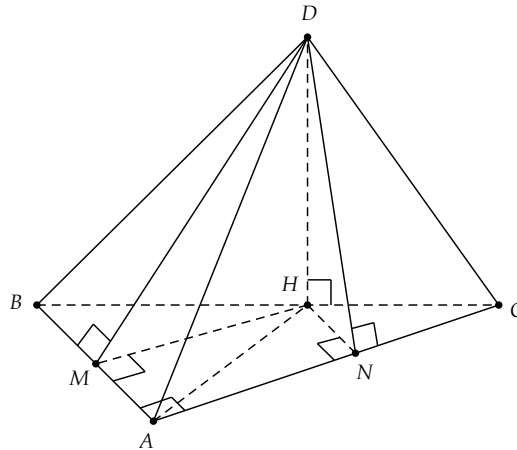
Dấu bằng xảy ra khi  $\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ .

Vậy giá trị lớn nhất của  $OH$  bằng 1 khi  $x = \sqrt{2}$ .

### Câu 13.

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3a$ ,  $AC = a$ . Gọi  $(Q)$  là mặt phẳng chứa  $BC$  và vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Điểm  $D$  di động trên  $(Q)$  sao cho tam giác  $DBC$  nhọn và hai mặt phẳng  $(DAB)$  và  $(DAC)$  lần lượt hợp với mặt phẳng  $(ABC)$  hai góc phụ nhau. Thể tích lớn nhất của khối chóp  $D.ABC$  bằng bao nhiêu?

### Lời giải



Kẻ  $DH \perp BC$  với  $H \in BC$ . Suy ra  $DH \perp (ABC)$ .

Vì diện tích tam giác  $ABC$  không đổi nên thể tích khối chóp  $D.ABC$  lớn nhất khi  $DH$  lớn nhất.

Kẻ  $HM \perp AB$  với  $M \in AB$ ,  $HN \perp AC$  với  $N \in AC$ .

Khi đó theo giả thiết, ta có  $(DAB), (ABC) = DMH = \alpha$  và  $(DAC), (ABC) = DNH = 90^\circ - \alpha$ .

Ta có  $S_{AHC} + S_{AHB} = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot DH \cot(90 - \alpha) \cdot a + \frac{1}{2} \cdot DH \cot \alpha \cdot 3a = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow DH = \frac{3a}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}$ .

Đặt  $\tan \alpha = x \Rightarrow DH = \frac{3ax}{x^2 + 3}$ . Xét  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$  trên  $(0; +\infty)$ , được  $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

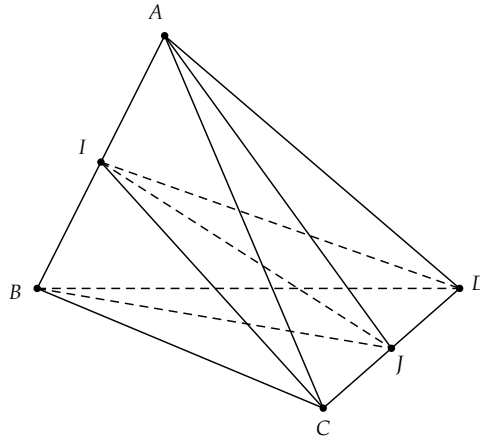
Khi đó  $DH_{\max} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  và  $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ .

### Câu 14.

Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = 2a$ ,  $CD = 2b$  và các cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích toàn phần tứ diện  $ABCD$ ?

### Lời giải

**Phân tích.** Ở bài toán này đề bài đã cho sẵn 2 ẩn rồi thì chắc chắn chúng ta phải biểu diễn đối tượng đề bài yêu cầu là diện tích toàn phần của tứ diện  $ABCD$  qua 2 ẩn đó, rồi bước tiếp theo một là tìm mối liên hệ của 2 ẩn này, 2 là sử dụng đánh giá bất đẳng thức.



Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Ta có

- Hai tam giác cân  $ACD$  và  $BCD$  bằng nhau.
- Hai tam giác cân  $ABC$  và  $ABD$  bằng nhau.

Khi đó ta được

$$CI \perp AB \text{ và } DI \perp AB \text{ và } IC = ID = \sqrt{1-a^2}.$$

$$JA \perp CD \text{ và } JB \perp CD \text{ và } JA = JB = \sqrt{1-b^2}.$$

Khi đó theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$S_{tp} = 2S_{\triangle ABC} + 2S_{\triangle BCD} = a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2} \leq \frac{a^2+1-a^2}{2} + \frac{b^2+1-b^2}{2} = 1.$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Câu 15.

Hình hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ , có đường chéo  $AC' = d$  hợp với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc  $\alpha$ , hợp với mặt bên  $(BCC'B')$  góc  $\beta$ . Biết  $d$  không đổi,  $A'D'CB$  là hình vuông và thể tích khối hộp lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức  $\alpha + \beta$  bằng bao nhiêu?

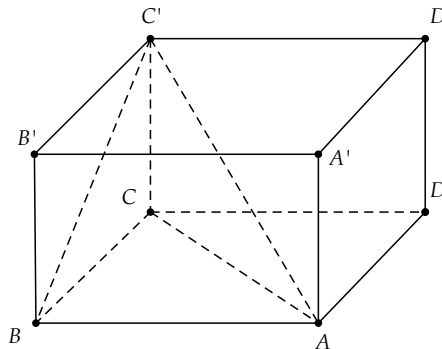
### Lời giải

**Phân tích.** Tương tự bài toán ở trên, giả thiết đã cho chúng ta 2 ẩn, do đó ta sẽ biểu diễn thể tích khối hộp theo 2 ẩn này.

Ta có  $\angle CAC' = \alpha$ ,  $\angle AC'B = \beta$ ,  $CC' = AC' \sin \alpha = d \sin \alpha$ ,  $AC = AC' \cos \alpha = d \cos \alpha$

$$AB = AC' \sin \beta = d \sin \beta, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = d \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$$

Thể tích khối lăng trụ là  $V = AB \cdot BC \cdot CC' = d^3 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$



Tứ giác  $A'D'CB$  là hình chữ nhật để  $A'D'CB$  là hình vuông thì  $A'C^2 = 2CB^2$

$$\Leftrightarrow 2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta) = 1 \Rightarrow \sin \beta = \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{1}{2}}$$

$$\text{Khi đó ta được } V = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d^3 \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d^3 \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha \left( \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$V \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot d^3 \cdot \left( \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{1}{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{32} \cdot d^3$$

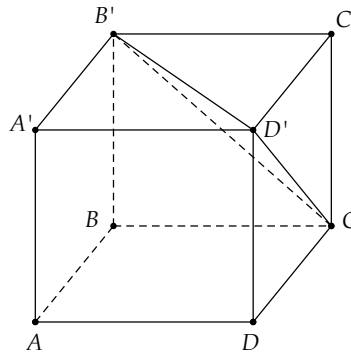
$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

Vậy  $\alpha + \beta = 60^\circ$ .

#### Câu 16.

Cho lăng trụ tứ giác đều  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh đáy bằng 1, chiều cao bằng  $x$ . Tìm  $x$  để góc tạo bởi  $B'D, (B'D'C')$  đạt giá trị lớn nhất?

#### Lời giải



Gọi H là hình chiếu của D lên mặt phẳng  $(B'D'C')$  suy ra

$$\sin(B'D, (B'D'C')) = \frac{DH}{B'D} = \frac{DH}{\sqrt{2+x^2}}$$

Mặt khác  $DH = d(C'; (B'D'C')) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$ , từ đây suy ra

$$\sin(B'D, (B'D'C')) = \frac{DH}{B'D} = \frac{DH}{\sqrt{2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+2)(2x^2+1)}} = \sqrt{\frac{x^2}{2x^4+5x^2+1}}$$

Góc lớn nhất khi  $\sin(B'D, (B'D'C'))$  lớn nhất.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t}{2t^2+5t+1} \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t^2+2}{(2t^2+5t+1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

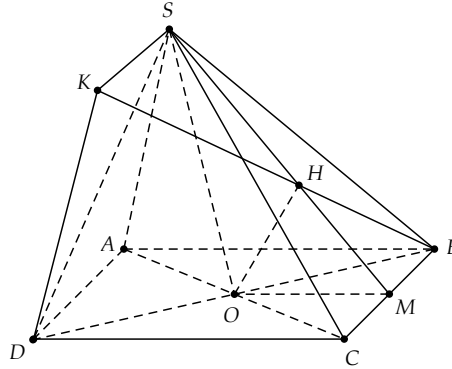
Vậy  $f(t)$  lớn nhất khi  $t = 1$  suy ra  $x = 1$ .

#### Câu 17.

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành,  $AD = 4a$ , các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng  $a\sqrt{6}$ . Tính cosine góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SCD)$  khi thể tích của chóp S.ABCD lớn nhất?

#### Lời giải

**Phân tích.** Sau rất nhiều bài toán ở trên ta đã nắm chắc được các bước làm một bài toán tìm cực trị rồi chứ? Đây là một bài toán hoàn toàn tương tự và đơn giản trong phần này để các bạn luyện tập. Sau đây là lời giải của nó!



Gọi O là hình chiếu của S trên  $(ABCD)$ . Do  $SA = SB = SC = SD$  nên  $OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$  là hình chữ nhật. Đặt  $DC = x (x > 0) \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + 16a^2} \Rightarrow OA = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 16a^2}$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{6a^2 - \frac{1}{4}(x^2 + 16a^2)} = \sqrt{2a^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2a^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot 4a \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 8a \cdot \sqrt{2a^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot \frac{x}{2} \leq \frac{1}{3} \cdot 8a \cdot \frac{2a^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}}{2} = \frac{8a^3}{3}.$$

Vậy thể tích  $S.ABCD$  đạt giá trị lớn nhất khi  $\frac{x^2}{4} = 2a^2 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 \Leftrightarrow x = 2a$

Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $O, D$  trên  $(SBC)$ .

Do  $SO = OM$  nên  $H$  là trung điểm  $SM$ . Do  $OD = OB$  nên  $H$  là trung điểm  $BK \Rightarrow \Delta SKC$  là hình chiếu của  $\Delta SDC$  trên  $(SBC)$ . Ta có  $x = 2a \Rightarrow \begin{cases} SO = a \\ OM = a \end{cases} \Rightarrow SM = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta SKC} = \frac{1}{2} S_{\Delta SBC} = \frac{1}{4} \cdot a\sqrt{2} \cdot 4a = a^2\sqrt{2}$

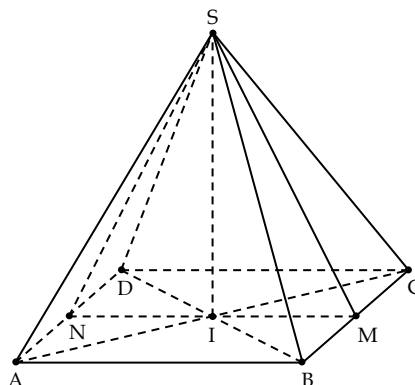
Gọi  $N$  là trung điểm  $DC \Rightarrow SN = \sqrt{6a^2 - a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{5} \cdot 2a = a^2\sqrt{5}$

Theo công thức hình chiếu ta có  $S_{\Delta SKC} = S_{\Delta SDC} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$ .

### Câu 18.

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng 2, góc giữa mặt phẳng  $(SBC)$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng  $\alpha$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .

### Lời giải



| Một số chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi hình học không gian

Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $BC$  và  $AD$ ,  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $N$  trên  $SM$ ,  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Ta có  $SI \perp (ABCD)$ ,  $BC \perp (SMN) \Rightarrow SMN = \alpha$ .

Do  $AD$  song song với mặt phẳng  $(SBC)$  nên  $d(A; (SBC)) = d(N; (SBC)) = NH = 2$ .

$$\text{Ta có } MN = \frac{NH}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha} \Rightarrow S_{ABCD} = MN^2 = \frac{4}{\sin^2 \alpha}$$

$$SI = MI \cdot \tan \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{ABCD} = \frac{4}{3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}$$

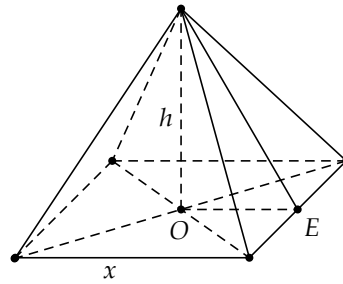
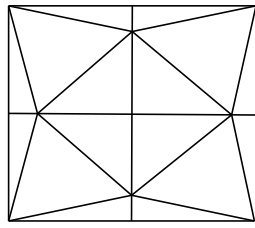
Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha \cdot 2 \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot 2 \cos^2 \alpha \\ &\leq \left( \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{3} \right)^3 = \left( \frac{2}{3} \right)^3 \Rightarrow \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

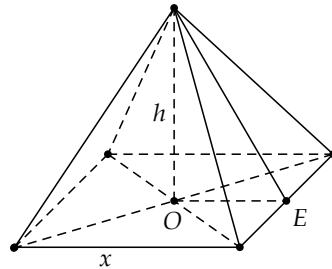
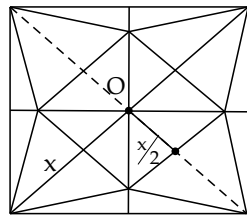
$$\text{Vậy } (V_{S.ABCD})_{\min} \Leftrightarrow (\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha)_{\max} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

### Câu 19.

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1 (m) như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần đậm của tấm nhôm rồi gấp lại thành một hình chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng  $x$  (m) sao cho bốn đỉnh của hình vuông gấp lại thành đỉnh của hình chóp. Tìm giá trị của  $x$  để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất?



### Lời giải



$$\text{Đường chéo hình vuông cạnh 1 là } \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} OC = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ OE = \frac{x}{2} \\ EC = OC - OE = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } h = \sqrt{CE^2 - OE^2} = \sqrt{\left( \frac{\sqrt{2} - x}{2} \right)^2 - \left( \frac{x}{2} \right)^2}$$

$$V = \frac{1}{3}x^2h = \frac{1}{3}x^2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}x^2\sqrt{\frac{2-2\sqrt{2}x}{4}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^4(1-\sqrt{2}x)}{2}}$$

Xét hàm số  $f(x) = x^4(1-x\sqrt{2})$  trên  $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ; có  $f'(x) = 4x^3 - 5x^4\sqrt{2}$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2\sqrt{2}}{5} \end{cases}$

Đến đây ta có thể chỉ ra hàm số  $f(x)$  lớn nhất khi  $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ .

**Câu 20.**

Trong các khối trụ có thể tích là  $V$  (không đổi), hãy tìm diện tích toàn phần nhỏ nhất của hình trụ này?

**Lời giải**

Gọi  $x, y$  theo thứ tự là bán kính đáy, chiều cao của hình trụ ( $x > 0, y > 0$ ).

Ta có  $V = \pi x^2 y$  và  $S_{tp} = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi(x^2 + xy) = 2\pi\left(x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương  $x^2; \frac{xy}{2}; \frac{xy}{2}$  ta có

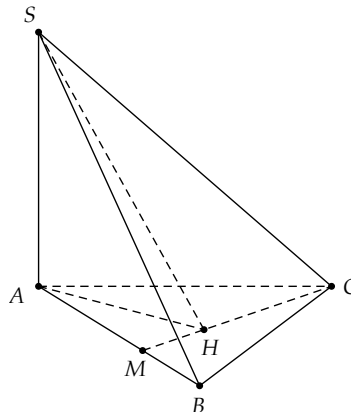
$$x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \left(\frac{xy}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2(x^2 y)^2} \Rightarrow S_{tp} \geq 3\pi\sqrt[3]{2\left(\frac{V}{\pi}\right)^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $x^2 = \frac{xy}{2}; x^2 y = \frac{V}{\pi} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; y = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ .

Vậy  $\min S_{tp} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$  khi chiều cao bằng với đường kính đáy.

**Câu 21.**

Cho hình chóp tam giác  $SABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABC)$  và  $SA = a$ .  $M$  là một điểm thuộc cạnh  $AB$ . Kẻ  $SH \perp CM$  tại  $H$ . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện  $SAHC$ .

**Lời giải**

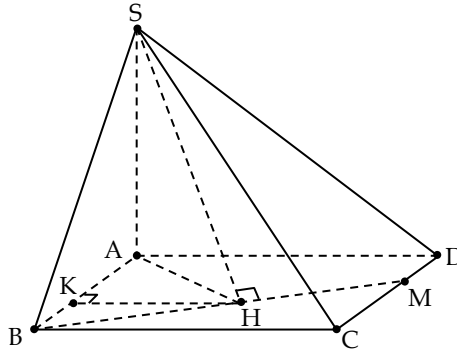
Ta có  $V_{S.AHC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta AHC}$ . Do  $SA = a$  không đổi nên  $V_{S.AHC}$  lớn nhất khi và chỉ khi  $S_{\Delta AHC}$  lớn nhất.

Mà  $S_{\Delta AHC}$  lớn nhất  $\Leftrightarrow \Delta AHC$  vuông cân tại H  $\Rightarrow V_{Max} = \frac{1}{3}a \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^3}{12}$ .

**Câu 22.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA = b$  và vuông góc với  $(ABCD)$ . Điểm  $M$  thay đổi trên cạnh  $CD$ ,  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  trên  $BM$ . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp  $S.ABH$  theo  $a, b$ .

**Lời giải**



**Cách 1.**

Do  $\begin{cases} BH \perp SH \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAH) \Rightarrow BH \perp AH$ , nên  $H$  thuộc đường tròn đường kính  $AB$ .

Gọi  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  lên cạnh  $AB$ . Dễ dàng suy ra được

$$\text{Thể tích } V_{S.ABH} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABH} = \frac{1}{3} b \cdot S_{\Delta ABH} = \frac{ab \cdot HK}{6}.$$

Do đó để thể tích lớn nhất thì  $HK$  lớn nhất.  $HK$  lớn nhất khi  $H$  là điểm chính giữa cung  $AB$ , tức là  $H$  trùng với tâm hình vuông  $ABCD$  hay  $M$  trùng với  $D$ .

$$\text{Khi đó } HK = \frac{a}{2}. \text{ Vậy } V_{\max} = \frac{a^2 b}{12}.$$

**Cách 2.**

Do  $\begin{cases} BH \perp SH \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAH) \Rightarrow BH \perp AH$

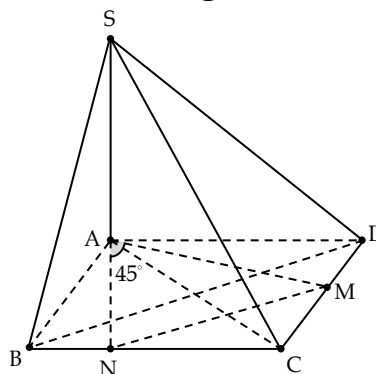
$$\text{Ta có } V_{S.ABH} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABH} = \frac{b}{6} HA \cdot HB \leq \frac{b}{6} \cdot \frac{HA^2 + HB^2}{2} = \frac{b \cdot AB^2}{12} = \frac{a^2 b}{12}$$

$$\text{Vậy } V_{\max} = \frac{a^2 b}{12} \text{ khi } HA = HB \Leftrightarrow H \text{ trùng với tâm đáy, hay } M \equiv D.$$

**Câu 23.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông,  $AB = 1$ , cạnh bên  $SA = 1$  và vuông góc với mặt phẳng đáy  $(ABCD)$ . Ký hiệu  $M$  là điểm di động trên đoạn  $CD$  và  $N$  là điểm di động trên đoạn  $CB$  sao cho  $\angle MAN = 45^\circ$ . Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp  $S.AMN$ ?

**Lời giải**



Đặt  $DM = x$ ,  $BN = y$  ta có

$$\tan 45^\circ = \tan(DAM + BAN) = \frac{\tan DAM + \tan BAN}{1 - \tan DAM \cdot \tan BAN} = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Suy ra  $y = \frac{1-x}{1+x}$  và  $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{x^2 + 1}$ ,

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{2(x^2 + 1)}}{x+1}$$

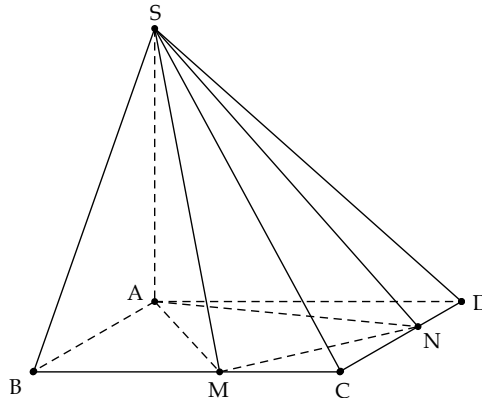
Vì vậy  $V = \frac{1}{3}SA.S_{AMN} = \frac{1}{6}SA.AM.AN \sin 45^\circ = f(x) = \frac{x^2 + 1}{6(x+1)} \geq f(\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$ .

#### Câu 24.

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA = a\sqrt{3}$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy.  $M$  và  $N$  là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh  $BC$  và  $DC$  sao cho  $MAN = 45^\circ$ . Tính tỉ số giữa giá trị lớn nhất với giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp  $S.AMN$ .

#### Lời giải

Ta có  $V_{S.AMN} = \frac{1}{3}SA.S_{AMN} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.S_{AMN}$ . Do  $M, N$  là 2 điểm di động và  $SA$  cố định nên thể tích của khối chóp  $SAMN$  phụ thuộc vào diện tích tam giác  $AMN$ . Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác  $AMN$  ta có 2 cách sau.



#### Cách 1.

Đặt  $BM = x, DN = y; x, y \in [0; a]$ .

Tam giác  $CMN$  vuông tại  $C$  nên

$$MN^2 = CM^2 + CN^2 \text{ hay } MN^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2.$$

Áp dụng định lý hàm số cosine cho tam giác  $AMN$  ta có

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN \cos MAN \Rightarrow MN^2 = 2a^2 + x^2 + y^2 - \sqrt{2(a^2 + x^2)}(a^2 + y^2)$$

Suy ra  $(a-x)^2 + (a-y)^2 = 2a^2 + x^2 + y^2 - \sqrt{2(a^2 + x^2)}(a^2 + y^2)$

$$\Leftrightarrow (ax + ay)^2 = (a^2 - xy)^2 \Leftrightarrow ax + ay = a^2 - xy \Leftrightarrow y = \frac{a^2 - ax}{a + x}.$$

Diện tích tam giác  $AMN$  là

$$S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{CMN} = \frac{1}{2}(a^2 - xy) = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 + x^2}{x + a}.$$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + a^2}{x + a}$  trên đoạn  $[0; a]$ .

| Một số chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi hình học không gian

Ta có  $f'(x) = \frac{x^2 + 2ax - a^2}{(x+a)^2}$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = (\sqrt{2} - 1)a$ .

Ta lại có  $f(0) = f(a) = a; f\left((\sqrt{2}-1)a\right) = 2(\sqrt{2}-1)a$ .

$$\text{Suy ra } \max_{[0;a]} f(x) = a; \min_{[0;a]} f(x) = 2(\sqrt{2}-1)a \Rightarrow a^2(\sqrt{2}-1) \leq S_{\Delta AMN} \leq \frac{a^2}{2}$$

Vậy tỉ số giữa giá trị lớn nhất với giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp  $S.AMN$  là  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

### Cách 2.

Đặt  $\widehat{DAN} = \varphi \Rightarrow \widehat{MAB} = 45^\circ - \varphi$

$$\text{Ta có } AM = \frac{a}{\cos(45^\circ - \varphi)}, AN = \frac{a}{\cos \varphi}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\Delta AMN} &= \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \frac{a^2}{\cos \varphi \cdot \cos(45^\circ - \varphi)} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{2a^2}{\cos 45^\circ + \cos(45^\circ - 2\varphi)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(45^\circ - 2\varphi)} \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } 0 \leq \cos(45^\circ - 2\varphi) \leq 1 \Rightarrow \frac{a^2 \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} = a^2 (\sqrt{2} - 1) \leq S_{\Delta AMN} \leq \frac{a^2}{2}$$

### Cách 3.

$$\text{Đ\grave{a}t } \begin{cases} BM = x \\ BN = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2 + a^2 \\ AN^2 = y^2 + a^2 \end{cases} \Rightarrow MN^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2$$

Theo định lý cosine ta có

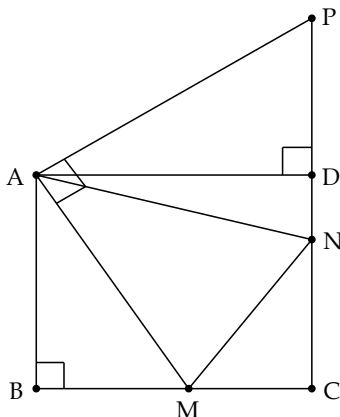
$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 45^\circ \Leftrightarrow a^2 - xy = a(x + y)$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 45^\circ = \frac{a^2 - xy}{2}$$

Đặt  $\sqrt{xy} = t \geq 0 \Rightarrow a^2 - t^2 \geq 2at \Leftrightarrow t \in \left[ 0; (\sqrt{2} - 1)a \right]$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{a^2 - t^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} S_{\triangle AMN_{\max}} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow t = 0 \\ S_{\triangle AMN_{\min}} = a^2(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow t = a(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

## Cách 4. Hình học thuần túy



Dựng đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $AM$  cắt đường thẳng  $DC$  tại  $P$ .

Khi đó ta chứng minh được

$$\triangle AMN = \triangle ANP \Rightarrow MN = NP \text{ và } BM + CN = MN \Rightarrow MN + NC + CM = 2a$$

$$\text{Vì } MN \leq MC + CN \text{ và } MN = \sqrt{MC^2 + CN^2} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}(MC + CN)$$

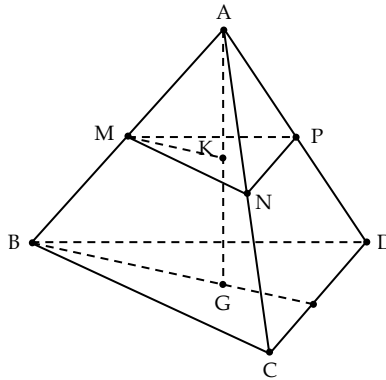
$$\text{Từ đó suy ra } 2(\sqrt{2} - 1)a \leq MN \leq a$$

### Câu 25.

Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Một mặt phẳng  $(Q)$  thay đổi luôn song song với mặt  $(BCD)$  cắt các cạnh  $AB, AC, AD$  thứ tự tại  $M, N, P$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Tìm bán kính nhỏ nhất của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $MNPG$  ?

#### Lời giải

Gọi  $K$  là tâm tam giác đều  $MNP$ . Đặt  $KG = x, AG = h$ . Khi đó  $AK = h - x$ .



$$\text{Suy ra } \frac{MK}{BG} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow MK = \frac{h-x}{h} \cdot BG = \frac{(h-x)a}{\sqrt{3}h}.$$

$$\text{Ta có } MG = \sqrt{GK^2 + MK^2} = \sqrt{x^2 + \frac{(h-x)^2 a^2}{3h^2}}$$

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp } MNPG \text{ có công thức } r = \frac{MG^2}{2 \cdot GK} = \frac{x^2 + \frac{(h-x)^2 a^2}{3h^2}}{2x}$$

$$\text{Ta có } h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow r = \frac{x^2 + \frac{(h-x)^2 a^2}{3h^2}}{2x} = \frac{2x^2 + (h-x)^2}{4x} = \frac{1}{4} \left( 3x + \frac{h^2}{x} - 2h \right)$$

$$\text{Suy ra } r \text{ nhỏ nhất khi } x = \frac{h}{3} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}. \text{ Khi đó } \min r = \frac{(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{6} a.$$

### Câu 26.

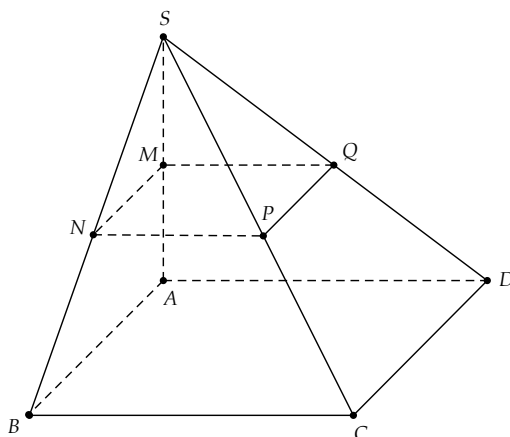
Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$  và đường cao  $SA = 2a$ .  $MNPQ$  là thiết diện song song với đáy,  $M \in SA$  và  $AM = x$ . Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $MNPQ$  và đường sinh  $MA$ . Giá trị của  $x$  để thể tích khối trụ lớn nhất là?

#### Lời giải

Ta có  $MNPQ$  là thiết diện song song với đáy do đó  $MNPQ$  đồng dạng với đáy.

$$\text{Suy ra } MNPQ \text{ là hình vuông. Theo định lý talét ta có } \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{2a-x}{2a} \Rightarrow MN = \frac{2a-x}{2}$$

Đường tròn đáy trụ (T) là đường tròn (C) ngoại tiếp hình vuông  $MNPQ$  nên ta có bán kính đáy của trụ là  $R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{2a-x}{2\sqrt{2}}$ .



Khi đó ta có thể tích khối trụ là  $V = \pi R^2 h = \pi \left( \frac{2a-x}{2\sqrt{2}} \right)^2 x = \frac{1}{8} \pi (2a-x)^2 x$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$V = \frac{1}{8} \pi (2a-x)^2 x = \frac{1}{16} \pi (2a-x)(2a-x)2x \leq \frac{1}{16} \pi \left( \frac{2a-x+2a-x+2x}{3} \right)^3 = \frac{4\pi a^3}{27}$$

$$\Rightarrow V \leq \frac{4\pi a^3}{27}; V = \frac{4\pi a^3}{27} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 2a) \\ 2a-x=2x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$$

Vậy  $V_{\max} = \frac{4\pi a^3}{27} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$ .

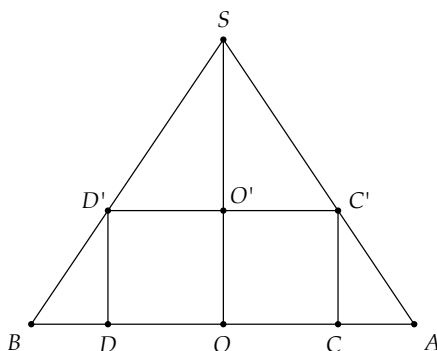
### Câu 27.

Cho hình trụ nội tiếp hình nón chiều cao  $h$ , bán kính đáy  $R$ , tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đã cho?

### Lời giải

Mặt phẳng qua trục của hình nón cắt hình nón theo thiết diện là tam giác cân  $SAB$  và cắt hình trụ nội tiếp theo thiết diện là hình chữ nhật nội tiếp tam giác  $SAB$

Đặt  $OC = x (0 < x < R)$ ;  $C'C = y (0 < y < h)$



Ta có  $\Delta SOA$  có  $C'C \parallel SO \Rightarrow \frac{C'C}{SO} = \frac{AC}{AO} \Rightarrow \frac{y}{h} = \frac{R-x}{R} \Rightarrow y = \frac{h(R-x)}{R}$

Thể tích của hình trụ nội tiếp hình nón là  $V = \pi x^2 y = \frac{\pi h x^2 (R-x)}{R}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có  $\sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (R-x)} \leq \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + R-x}{3} = \frac{R}{3}$

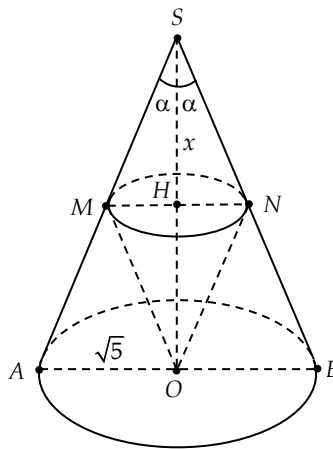
$$\Rightarrow \frac{x^2(R-x)}{4} \leq \frac{R^3}{27} \Rightarrow \frac{\pi h x^2(R-x)}{4} \leq \frac{4\pi h R^3}{27} \Rightarrow V \leq \frac{4\pi h R^2}{27} \Rightarrow \max V = \frac{4\pi h R^2}{27}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $x = \frac{2}{3}R$ .

### Câu 28.

Cho một hình nón đỉnh  $S$  có đáy là đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R = \sqrt{5}$  và góc ở đỉnh là  $2\alpha$  với  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ . Một mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với  $SO$  tại  $H$  và cắt hình nón theo một đường tròn tâm  $H$ . Tìm thể tích  $V$  lớn nhất của khối nón đỉnh  $O$  và đáy là đường tròn tâm  $H$ .

#### Lời giải



Đặt  $SH = x$ . Gọi  $SAB$  là thiết diện qua trục  $SO$  và  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $SA, SB$  với  $(P)$ .

Xét  $\triangle SOA$  vuông tại  $O$  ta có  $SO = OA \cot \alpha = R \cot \alpha \Rightarrow OH = SO - SH = R \cot \alpha - x$ .

Xét  $\triangle SHM$  vuông tại  $H$  ta có  $HM = SH \tan \alpha = x \tan \alpha$ .

Ta có  $V = \frac{1}{3} \pi \cdot HM^2 \cdot OH = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot \tan^2 \alpha \cdot (R \cot \alpha - x)$ . Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x^2(R \cot \alpha - x) = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (R \cot \alpha - x) \leq 4 \cdot \left( \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + R \cot \alpha - x}{3} \right)^3 = \frac{4}{27} R^3 \cot^3 \alpha$$

Vậy  $V_{\max} = \frac{4\pi}{81} R^3 \cot \alpha$  đạt được khi và chỉ khi  $x = \frac{2R}{3} \cot \alpha = \frac{2R}{3} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{3^2}{2^2} - 1} = \frac{5}{3}$ .

### Câu 29.

Cắt một khối trụ có chiều cao  $h$  bởi một mặt phẳng song song với hai mặt đáy, ta thu được hai khối trụ nhỏ. Một trong hai khối đó ngoại tiếp một lăng trụ đứng thể tích  $V$  có đáy là tam giác có chu vi là  $p$ . Khối còn lại ngoại tiếp một khối nón  $(H)$  có bán kính đáy là  $R$  ( $R$  thay đổi). Tìm giá trị của  $R$  sao cho thể tích của khối nón là lớn nhất?

#### Lời giải

Hình lăng trụ có đáy là tam giác với độ dài 3 cạnh là  $a, b, c$  và có chiều cao là  $x$ .

Khi đó  $S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$  và thể tích của hình lăng trụ là  $V = x \cdot \frac{abc}{4R}$ . Suy ra  $R = \frac{x \cdot abc}{4V}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương  $a, b, c$  ta có

$$R \leq \frac{x.(a+b+c)^3}{27.4.V} = \frac{x.p^3}{108V}$$

$$\text{Mặt khác } V_{(H)} = \frac{1}{3} \cdot (h-x) \cdot \pi \cdot R^2 \leq \frac{1}{3} \cdot (h-x) \cdot \pi \cdot \frac{x^2 p^6}{(108V)^2}.$$

Mà tiếp tục theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(h-x)x^2 = 4 \cdot (h-x) \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \leq 4 \cdot \frac{\left(h-x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)^3}{27} = \frac{4}{27} h^3$$

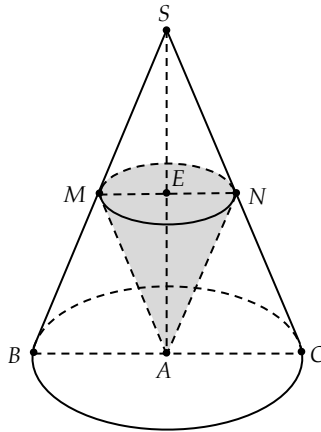
$$\text{Do đó } V_{(H)} \leq \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{4}{27} h^3 \cdot \frac{p^6}{(108V)^2}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} h-x = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2h}{3} \\ a=b=c \end{cases}$$

$$\text{Vậy } V_{(H)}(\max) = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{4}{27} h^3 \cdot \frac{p^6}{(108V)^2} \text{ khi } x = \frac{2h}{3} \text{ và } a=b=c. \text{ Khi đó } R = \frac{2h}{3} \cdot \frac{p^3}{108V} = \frac{hp^3}{162V}.$$

### Câu 30.

Cho hình nón  $(H)$  đỉnh  $O$ , chiều cao là  $h$  và mặt phẳng  $(P)$  song song với mặt phẳng đáy của khối nón. Một khối nón  $(T)$  có đỉnh là tâm của đường tròn đáy của  $(H)$  và đáy của  $(T)$  là thiết diện của  $(P)$  với hình nón. Thể tích lớn nhất của  $(T)$  là bao nhiêu?

#### Lời giải



$$\text{Đặt } AE = x (0 < x < h), AC = R. \text{ Xét } \triangle SAC, \text{ có } \frac{SE}{SA} = \frac{EN}{AC} \Leftrightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{EN}{R} \Rightarrow EN = \frac{R(h-x)}{h}$$

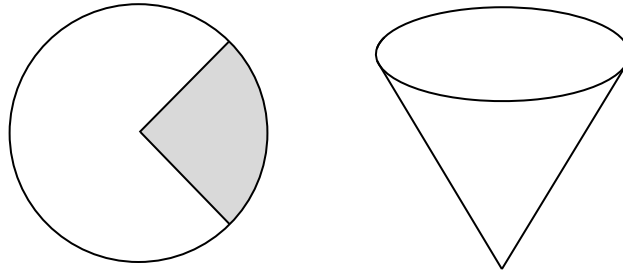
$$\text{Thể tích khối nón } (T) \text{ là } V = \frac{1}{3} \pi \cdot EN^2 \cdot x = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 \cdot x$$

$$\text{Đặt } f(x) = (h-x)^2 \cdot x, x \in (0; h); \text{ có } \begin{cases} f'(x) = 3x^2 - 4hx + h^2 \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = h \notin (0; h) \\ x = \frac{h}{3} \Rightarrow f\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{4h^3}{27} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } V_{\max} = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{4}{27} h^3 = \frac{4\pi \cdot R^2 h}{81} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} h.$$

**Câu 31.**

Hai bạn  $A$  và  $B$  chơi một trò chơi như sau: Mỗi người lấy 1 miếng tôn hình tròn bán kính như nhau, sau đó cắt bỏ đi 1 hình quạt rồi cuộn lại, dùng keo gắn lại thành 1 chiếc phễu như hình vẽ. Sau đó  $A$  dùng chiếc phễu của mình múc đầy nước rồi trút sang phễu của  $B$ . Nếu phễu của  $B$  đầy mà của  $A$  vẫn còn nước thì  $A$  thắng. Ngược lại, nếu phễu của  $A$  hết nước mà phễu của  $B$  chưa đầy thì  $B$  thắng. Hãy chỉ giúp  $A$  cắt miếng tôn của mình có góc ở tâm hình quạt là bao nhiêu để khi chơi không thua  $B$ .

**Lời giải**

Gọi  $x(rad)$  là góc ở tâm cần cắt ( $0 < x < 2\pi$ ) và  $R, r$  lần lượt là bán kính miếng tôn và bán kính miệng phễu. Diện tích phần còn lại của miếng tôn là  $S = \frac{(2\pi - x)R^2}{2}$

Diện tích xung quanh phễu là  $S = \pi r R \Rightarrow \pi r R = \frac{(2\pi - x)R^2}{2} \Rightarrow r = \frac{(2\pi - x)R}{2\pi}$

Đường cao của phễu là  $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi x - x^2}$ . Khi đó thể tích phễu là

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{(2\pi - x)^2 R^2}{4\pi^2} \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi x - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot t \sqrt{4\pi^2 - t}, t = (2\pi - x)^2 > 0$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

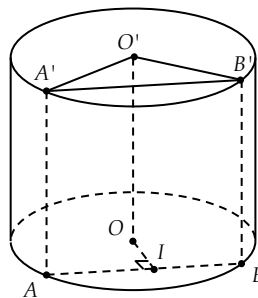
$$t \sqrt{4\pi^2 - t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{t \cdot t(8\pi^2 - 2t)} \leq \frac{16\pi^3 \sqrt{3}}{9}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $t = \frac{8\pi^2}{3}$

Từ đó ta tìm được  $V_{\max} \Leftrightarrow \left(t \sqrt{4\pi^2 - t}\right)_{\max} \Leftrightarrow t = \frac{8\pi^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{3} \pi$ .

**Câu 32.**

Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm  $O$  và  $O'$ , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng  $2a$ . Trên đường tròn đáy có tâm  $O$  lấy điểm  $A$ , trên đường tròn tâm  $O'$  lấy điểm  $B$ . Đặt  $\alpha$  là góc giữa  $AB$  và đáy. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện  $OO'AB$ ?

**Lời giải**

Gọi  $A'$  là hình chiếu của  $A$  lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm  $O'$ .

Gọi  $B'$  là hình chiếu của  $B$  lên mặt phẳng chứa đường tròn tâm  $O$ .

Gọi  $R$  là bán kính của đường tròn tâm  $O$ , suy ra  $R = 2a$ .

Ta có  $\alpha = BAB'$ . Suy ra  $AB' = 2R \tan \alpha$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB' \Rightarrow OI \perp AB'$ .

Ta có  $OI = \sqrt{OB'^2 - IB'^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \tan^2 \alpha} = R\sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$ .

Và  $S_{\triangle OAB'} = \frac{1}{2}OI \cdot AB' = \frac{1}{2}R \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha} \cdot 2R \tan \alpha = R^2 \tan \alpha \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$ .

Suy ra  $V_{OO'AB} = \frac{1}{3}V_{OAB' \cdot O'A'B} = \frac{1}{3}OO' \cdot S_{\triangle OAB'} = \frac{1}{3} \cdot 2R \cdot R^2 \tan \alpha \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$ .

Ta có  $V_{OO'AB}$  đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi  $\tan \alpha \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \alpha}$  đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số  $f(t) = t \cdot \sqrt{1 - t^2}$  với  $t \in [-1; 1]$ ; có  $f'(t) = \sqrt{1 - t^2} + \frac{t \cdot (-t)}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1 - 2t^2}{\sqrt{1 - t^2}}$  với  $t > 0$ .

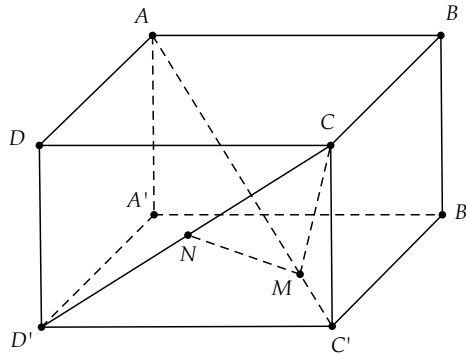
Xét  $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Lập bảng biến thiên, ta có  $V_{\max}$  khi  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$  hay  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

### Câu 33.

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Lấy điểm  $M$  thuộc đoạn thẳng  $AC'$  sao cho  $C'M = x \cdot C'A$ , và điểm  $N$  thuộc đoạn thẳng  $CD'$  sao cho  $D'N = 2x \cdot CD'$ . Tìm  $x$  để tứ diện  $CC'NM$  có thể tích lớn nhất?

### Lời giải



Để thấy  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ . Ta có  $\begin{cases} CD' = a\sqrt{2} \Rightarrow D'N = 2x \cdot a\sqrt{2} \Rightarrow CN = a\sqrt{2} - 2x \cdot a\sqrt{2} = a\sqrt{2}(1 - 2x) \\ AC' = a\sqrt{3} \Rightarrow C'M = x \cdot a\sqrt{3} \end{cases}$

Theo công thức tính thể tích khối tứ diện dựa vào khoảng cách và góc giữa 2 đường thẳng ta có

$$\begin{aligned} V_{CC'NM} &= \frac{1}{6} \cdot C'M \cdot CN \cdot d(C'M, CN) \cdot \sin(C'M, CN) \\ &= \frac{1}{6} x a \sqrt{3} \cdot a \sqrt{2} (1 - 2x) \cdot d(C'A, CD') \cdot \sin(C'A, CD') \end{aligned}$$

Tứ diện  $CC'NM$  có lớn nhất khi

$$g(x) = \frac{1}{6 \cdot 2} \cdot a^2 \sqrt{6} \cdot 2x(1 - 2x) \leq \frac{1}{6 \cdot 2} \cdot a^2 \sqrt{6} \cdot \frac{(2x + 1 - 2x)^2}{4} = \frac{a^2 \sqrt{6}}{48}$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow 2x = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ .

**Nhận xét.** Mấu chốt của bài toán này là sử dụng công thức

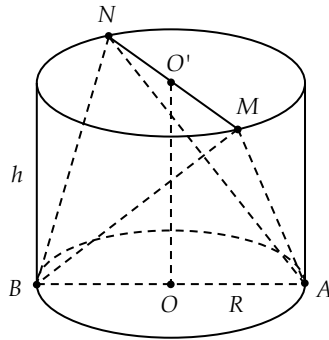
$$V_{CC'NM} = \frac{1}{6} \cdot C'M \cdot CN \cdot d(C'M, CN) \cdot \sin(C'M, CN)$$

Công thức này đã chứng minh ở các chương trước, bạn đọc có thể xem lại!

### Câu 34.

Cho hình trụ có chiều cao  $h = 2a$ , các đường tròn đáy lần lượt là  $(O; R)$  và  $(O'; R)$  với  $R = a$ . Biết  $AB$  là đường kính cố định của đường tròn  $(O; R)$  và  $MN$  là một đường kính thay đổi trên đường tròn  $(O'; R)$  sao cho  $AB$  và  $MN$  không đồng phẳng. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện  $ABMN$ .

#### Lời giải



Với mọi tứ diện  $ABCD$  ta có công thức tính thể tích  $V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB; CD) \cdot \sin(AB, CD)$

Áp dụng công thức trên ta có thể tích của khối tứ diện  $ABMN$  là

$$V_{MNAB} = \frac{1}{6} \cdot MN \cdot AB \cdot d(MN; AB) \cdot \sin(MN, AB)$$

Vì  $MN = AB = 2R = 2a$ ,  $d(MN; AB) = h = 2a$ ,  $\sin(MN, AB) \leq 1$  nên

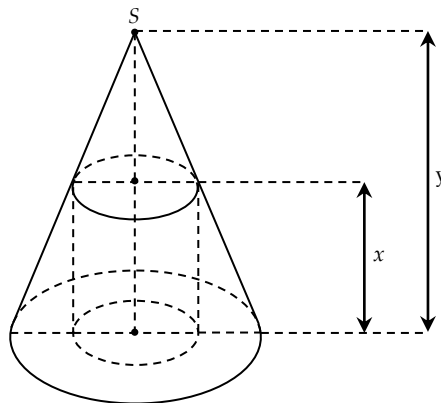
$$V_{MNAB} = \frac{4a^3}{3} \sin(MN, AB) \leq \frac{4a^3}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\sin(MN, AB) = 1 \Leftrightarrow MN \perp AB$ .

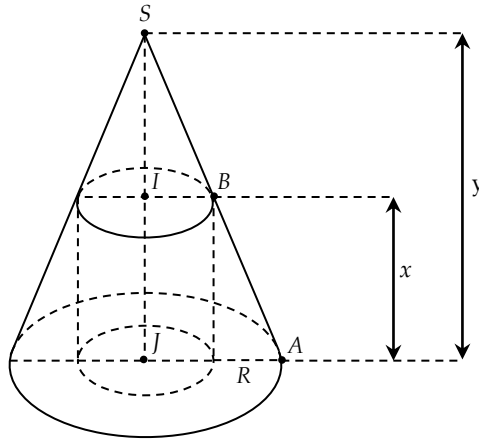
Vậy thể tích khối tứ diện  $ABMN$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $\frac{4}{3}a^3$  khi  $MN \perp AB$ .

### Câu 35.

Cho hình nón đỉnh  $S$  chiều cao là  $h$ . Một khối trụ khác có tâm của đáy trùng với tâm đáy của hình nón và đáy còn lại là một thiết diện song song với đáy của hình nón đỉnh  $S$  đã cho (hình vẽ). Khi khối trụ này có thể tích lớn nhất, biết  $0 < x < h$  thì tỉ số  $k$  giữa thể tích của khối nón và khối trụ là?



#### Lời giải



Thể tích khối nón là  $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ . Từ hình vẽ ta có  $\frac{JB}{IA} = \frac{SJ}{SI} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow JB = \frac{R(h-x)}{h}$ .

Thể tích khối trụ cần tìm là  $V_2 = \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 x$ . Xét hàm số  $V(x) = \pi \frac{R^2}{h^2} (h-x)^2 x$ ,  $0 \leq x \leq h$ .

Ta có  $V'(x) = \pi \frac{R^2}{h^2} [-2(h-x)x + (h-x)^2]$ ;  $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = h$  hay  $x = \frac{h}{3}$ .

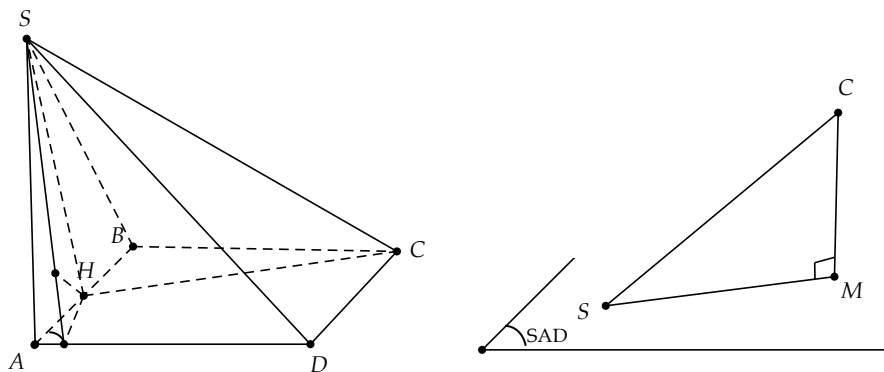
Có  $V(0) = 0; V(h) = 0; V\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{4\pi R^2 h}{27}$ . Suy ra GTLN của  $V_2$  là  $V_2 = \frac{4\pi R^2 h}{27}$

Lúc đó  $k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{4\pi R^2 h}{27}} = \frac{9}{4}$ .

### Câu 36.

Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\angle BAD = 60^\circ, AB = 2a$ . Gọi  $H$  là trung điểm  $AB$ , trên đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  tại  $H$  lấy điểm  $S$  thay đổi khác  $H$ . Tính  $SH$  khi góc giữa  $SC$  và  $(SAD)$  có số đo lớn nhất?

### Lời giải



Gọi  $M$  là hình chiếu của  $C$  lên  $(SAD)$  và  $\varphi$  là góc giữa  $SC$  và  $(SAD)$ .

Vì  $BC \parallel (SAD) \Rightarrow d(C; (SAD)) = d(B; (SAD)) = 2d(H; (SAD))$  nên ta có

$$\sin \varphi = \frac{CM}{SC} = \frac{d(C; (SAD))}{SC}$$

Gọi  $E$  là hình chiếu của  $H$  trên  $AD$ ,  $F$  là hình chiếu của  $H$  trên  $SE$  ta có  $d(H; (SAD)) = HF$ .

Khi đó  $\sin \varphi = \frac{2HF}{SC}$ . Đặt  $SH = x (x > 0)$  vì tam giác  $SHC$  vuông tại  $H$  nên

$$SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = \sqrt{SH^2 + BC^2 + BH^2 - 2BC \cdot BH \cdot \cos CBH} = \sqrt{x^2 + 7a^2}$$

Tam giác vuông  $EHA$  có  $\sin HAE = \frac{HE}{AH} \Rightarrow HE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Do  $HF$  là đường cao của tam giác vuông  $HSE$  nên

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow HF = \frac{ax\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}}.$$

Khi đó  $\sin \varphi = \frac{2HF}{SC} = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^2 + 3a^2)(x^2 + 7a^2)}} = \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{(4x^4 + 21a^4) + 31a^2x^2}}$ .

$$\Rightarrow \sin \varphi \leq \frac{2\sqrt{3}ax}{\sqrt{4\sqrt{21} \cdot a^2 x^2 + 31 \cdot a^2 x^2}} \Rightarrow \sin \varphi \leq \sqrt{\frac{12}{4\sqrt{21} + 31}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi  $x = \sqrt[4]{\frac{21}{4}} \cdot a$ . Vậy  $\varphi$  lớn nhất khi và chỉ khi  $SH = \sqrt[4]{\frac{21}{4}} \cdot a$ .

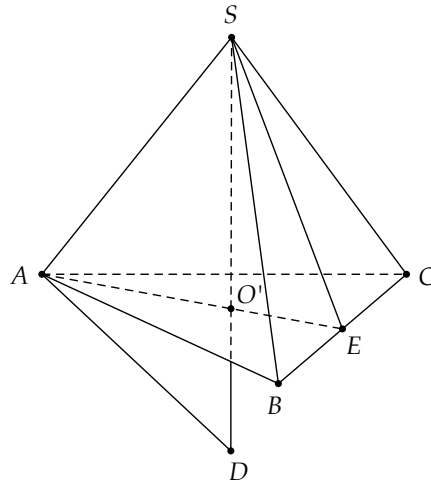
### Câu 37.

Cho mặt cầu tâm  $O$  và bán kính  $R$ . Từ một điểm  $S$  bất kỳ trên mặt cầu ta dựng ba cát tuyến bằng nhau, cắt mặt cầu tại các điểm  $A, B, C \neq S$  và  $ASB = BSC = CSA = \alpha$ . Khi  $\alpha$  thay đổi. Tính thể tích lớn nhất khối chóp  $S.ABC$ ?

#### Lời giải

Tam giác  $ABC$  đều, kẻ  $SO' \perp (ABC)$  thì  $O'$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  và  $O' \in SO$ . Giả sử  $SO'$  cắt mặt cầu tại  $D$  thì tam giác  $SAD$  vuông tại  $A$ .

Gọi  $SA = SB = SC = l$ . Trong tam giác  $SAD$  ta có  $SO' \cdot SD = SA^2 \Rightarrow SO' = \frac{SA^2}{SD} = \frac{l^2}{2R} (1)$ .



Gọi  $E$  là trung điểm của  $BC$ . Ta có  $BC = 2BE = 2l \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AO' = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2l \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow SO' = \sqrt{SA^2 - O'A^2} = l \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} (2).$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{l^2}{2R} = l\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow l = 2R\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow S_{ABC} = 4\sqrt{3}R^2 \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow SO' = 2R \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO' \cdot S_{ABC} = \frac{8\sqrt{3}}{3}R^3 \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Đặt  $x = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0 < x < 1$ . Xét hàm số  $y = x \left(1 - \frac{4}{3}x\right)^2 = \frac{1}{9}(16x^3 - 24x^2 + 9x)$

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{3}(16x^2 - 16x + 3); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

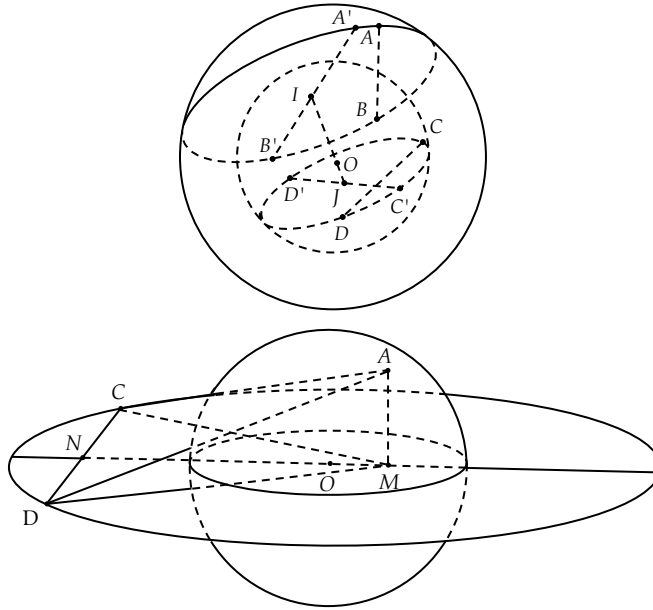
Thể tích khối chóp  $S.ABC$  lớn nhất khi  $x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$ . Vậy  $V_{\max} = \frac{8\sqrt{3}R^3}{27}$ .

### Câu 38.

Cho hai hình cầu đồng tâm  $O(0,0,0)$ , bán kính  $R_1 = 2, R_2 = \sqrt{10}$ . Biết rằng tứ diện  $ABCD$  có  $A, B \in (O, R_1); C, D \in (O, R_2)$ . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện  $ABCD$ ?

#### Lời giải

Dựng mặt phẳng  $(P)$  chứa  $AB$  và song song  $CD$  cắt  $(O, R_1)$  theo giao tuyến là đường tròn tâm  $I$ .



Dựng mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $CD$  và song song  $AB$  cắt  $(O, R_2)$  theo giao tuyến là đường tròn tâm  $J$ .

Lần lượt dựng 2 đường kính  $A'B', C'D'$  vuông góc nhau. Khi đó,  $IJ = d(AB, CD) = d(A'B', C'D')$

Ta có  $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD) \leq \frac{1}{6}A'B' \cdot C'D' \cdot IJ = V_{A'B'C'D'}$ .

Do đó chỉ cần xét các tứ diện dạng  $A'B'C'D'$ . Vậy điều kiện cần để  $V_{ABCD}$  lớn nhất là  $AB \perp CD$ .

Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Đặt  $AM = x, CN = y$ .  $\left(x \in (0, \sqrt{10}], y \in (0, 2]\right)$

$$\Rightarrow ON = \sqrt{10 - x^2}; OM = \sqrt{4 - y^2}; d(AB, CD) = MN = OM + ON = \sqrt{10 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$$

Khi đó

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) = \frac{1}{6} \cdot 2x \cdot 2y (\sqrt{10-x^2} + \sqrt{4-y^2}) = \frac{2}{3} xy (\sqrt{10-x^2} + \sqrt{4-y^2})$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

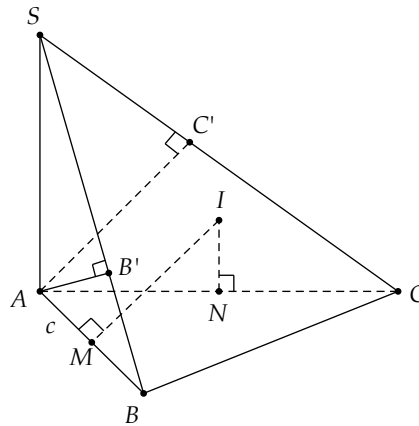
$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{2}{3} xy \left( \sqrt{2} \sqrt{\frac{10-x^2}{2}} + \sqrt{1} \cdot \sqrt{4-y^2} \right) \leq \frac{2}{3} xy \sqrt{(2+1) \left( \frac{10-x^2}{2} + 4-y^2 \right)} \\ \Rightarrow V_{ABCD} &\leq \frac{2}{3} xy \sqrt{\frac{3}{2} (18 - (x^2 + 2y^2))} \leq \frac{2}{3} xy \sqrt{\frac{3}{2} (18 - 2\sqrt{2}xy)} = \frac{2}{3} xy \sqrt{3(9 - \sqrt{2}xy)} \\ \Rightarrow V_{ABCD}^2 &\leq \frac{4}{9} (xy)^2 (3(9 - \sqrt{2}xy)) = \frac{8}{3} \cdot \frac{xy}{\sqrt{2}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{2}} (9 - \sqrt{2}xy) \leq \frac{8}{3} \left( \frac{\frac{xy}{\sqrt{2}} + \frac{xy}{\sqrt{2}} + 9 - \sqrt{2}xy}{3} \right)^3 \\ \Rightarrow V_{ABCD}^2 &\leq \frac{8}{3} \left( \frac{9}{3} \right)^3 = 72 \Rightarrow V_{ABCD} \leq 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy  $V_{\max} = 6\sqrt{2}$ . Dấu “=” xảy ra khi  $\begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{10-x^2}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-y^2}}{1} \\ \frac{xy}{\sqrt{2}} = 9 - \sqrt{2}xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}.$

### Câu 39.

Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ ,  $AC = 1$ ,  $AB = 2 + \sqrt{3}$ ,  $BAC = \alpha$ . Gọi  $B', C'$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $SB, SC$ . Với giá trị nào của  $\alpha$  thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $A.BCC'B'$  đạt giá trị nhỏ nhất?

### Lời giải



Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ .

- Tam giác  $ABB'$  vuông tại  $B'$  nên  $M$  chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABB'$ , suy ra trục đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABB'$  chính là đường trung trực  $\Delta$  của  $AB$  (xét trong mp  $(ABC)$ ).
- Tam giác  $ACC'$  vuông tại  $C'$  nên  $N$  chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ACC'$ , suy ra trục đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ACC'$  chính là đường trung trực  $\Delta_1$  của  $AC$  (xét trong mp  $(ABC)$ ).

Gọi  $I = \Delta \cap \Delta_1$ , ta suy ra  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp  $A.BCC'B'$ .

Gọi  $R$  là bán kính mặt cầu ngoại tiếp  $A.BCC'B'$  thì  $R$  chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } R &= \frac{BC}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{1^2 + (2 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 1 \cdot (2 + \sqrt{3}) \cdot \cos \alpha}}{2 \sin \alpha} \\ &= \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \cos \alpha}}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2 - \cos \alpha}}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{2 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}} \end{aligned}$$

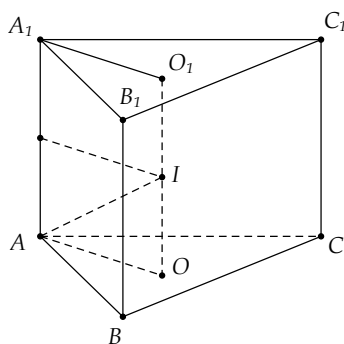
$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2-t}{1-t^2} \text{ với } -1 < t < 1; f'(t) = \frac{-t^2 + 4t - 1}{(1-t^2)^2}; f'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 + \sqrt{3} (L) \\ t = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Từ đây dễ dàng suy ra  $R$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $t = \cos \alpha = 2 - \sqrt{3}$ . Vậy  $\alpha = \arccos(2 - \sqrt{3})$

#### Câu 40.

Gọi  $R$  là bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng  $ABC.A_1B_1C_1$ . Giả sử  $BC = a, AA_1 = h$ . Khi  $R$  ngắn nhất thì tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

#### Lời giải



Gọi  $O, O_1$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  và  $A_1B_1C_1$ . Khi đó,  $OO_1$  là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy. Trong mặt phẳng  $(AOO_1A_1)$ , đường trung trực cạnh  $AA_1$  cắt  $OO_1$  tại  $I$ . Ta chứng minh được  $I$  là trung điểm  $OO_1$  và cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ  $ABC.A_1B_1C_1$ . Do

$$\text{đó, } R = IA. \text{ Ta có } IA^2 = OA^2 + OI^2 = OA^2 + \left(\frac{OO_1}{2}\right)^2 = OA^2 + \frac{h^2}{4} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý hàm sin trong tam giác  $ABC$ , ta được

$$\frac{BC}{\sin(BAC)} = 2OA \Rightarrow OA = \frac{BC}{2\sin(BAC)} = \frac{a}{2\sin(BAC)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } IA^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{a^2}{\sin^2(BAC)} + h^2 \right).$$

Do đó,  $R = IA$  ngắn nhất khi và chỉ khi  $IA^2$  bé nhất.

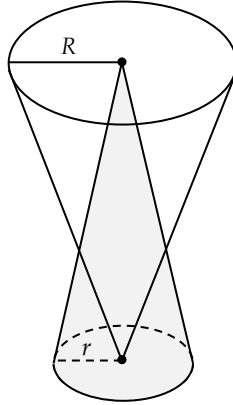
$$\text{Khi đó } \sin^2(BAC) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \sin^2(BAC) = 1 \Leftrightarrow BAC = 90^\circ.$$

Hay tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

**Câu 41.**

Khối  $(H)$  được tạo thành là phần chung khi giao nhau hai khối nón có cùng chiều cao  $h$ , có các bán kính đường tròn đáy lần lượt là  $R$  và  $r$  sao cho đỉnh của khối nón này trùng với tâm đường tròn đáy của khối nón kia. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối  $(H)$ , biết rằng  $R$  và  $r$  thoả mãn phương trình

$$X^2 - (x+y)^2 X + xy = 0 \left( x, y > \frac{1}{2} \right).$$

**Lời giải**

Giả sử  $R > r$ . Ta có hình minh hoạ như trên. Gọi  $a$  là bán kính đường tròn giao tuyến,  $b$  là khoảng cách từ tâm đường tròn giao tuyến đến tâm đường tròn có bán kính  $R$ .

Sử dụng các tam giác đồng dạng, ta suy ra

$$\begin{cases} \frac{a}{r} = \frac{b}{h} \\ \frac{a}{R} = \frac{h-b}{h} \end{cases} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{b}{h-b} \Rightarrow b = \frac{Rh}{R+r} \Rightarrow a = \frac{r}{h} b = \frac{Rr}{R+r}.$$

Mặt khác  $V_{(H)} = \frac{1}{3} \pi a^2 b + \frac{1}{3} \pi a^2 (h-b) = \frac{1}{3} \pi a^2 h$ .

Xét phương trình ẩn  $X : X^2 - (x+y)^2 X + xy = 0 (x, y > 0)$  có

$$\Delta_X = (x+y)^4 - 4xy \geq (2\sqrt{xy})^4 - 4xy > 0, \forall x, y > \frac{1}{2}$$

Theo viết ta có  $\begin{cases} S_X = (x+y)^2 > 0, \forall x, y > \frac{1}{2} \\ P_X = xy > 0 \end{cases}$

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm dương phân biệt  $R$  và  $r$ . Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$a = \frac{Rr}{R+r} = \frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{\frac{(x+y)^2}{4}}{(x+y)^2} = \frac{1}{4}, \forall x, y > \frac{1}{2}.$$

Suy ra  $V_{(H)} = \frac{1}{3} \pi h a^2 \leq \frac{1}{3} \pi h \left( \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{48} \pi h, \forall x, y > \frac{1}{2}.$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $x = y > \frac{1}{2}$ . Vậy  $\max V_{(H)} = \frac{1}{48} \pi h$ .

**Câu 42.**

Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Trên tia  $Ax$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  lấy điểm  $S$  khác  $A$ . Kẻ đường cao  $BH$  của tam giác  $ABC$  ( $H \in AC$ ). Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua điểm  $C$  và vuông góc với  $SB$ ; giả sử mặt phẳng  $(P)$  cắt tia đối của tia  $AS$  tại  $M$ . Đường thẳng  $MH$  cắt  $SC$  tại  $N$ .

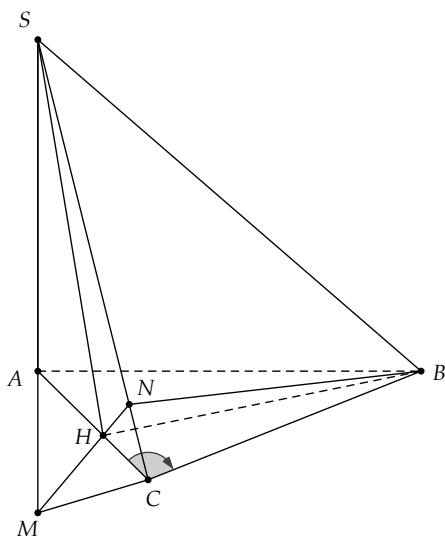
a) Chứng minh  $MC \perp (SHB)$  và  $SC \perp (MBN)$

b) Biết cạnh  $BC = a, \angle ABC = \alpha, \angle ACB = \beta$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác  $SMC$  theo  $a, \alpha, \beta$  khi  $S$  di động trên tia  $Ax$ .

**Đề HSG cấp tỉnh toán 11 – Tỉnh Hà Tĩnh năm học 2013 – 2014**

**Lời giải**



a) Ta có  $\begin{cases} MC \subset (P) \\ (P) \perp SB \end{cases} \Rightarrow MC \perp SB \quad (1)$

Mặt khác  $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow MC \perp BH \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra:  $MC \perp (SBH)$

Ta có  $BH \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BH \quad (3)$

Theo câu a) suy ra  $MC \perp SH$ .

Lại có  $CA \perp SM$ , do đó  $H$  là trực tâm của  $\triangle SMC$ .

Vì vậy  $SC \perp MN \quad (4)$

Từ (3) và (4) ta suy ra  $SC \perp (MBN)$ .

b) Theo định lý sine ta có  $\frac{a}{\sin A} = \frac{AC}{\sin A} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin[\pi - (\alpha + \beta)]} = \frac{AC}{\sin \alpha} \Rightarrow AC = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$

Đặt  $SA = x > 0$ .

Ta có  $CH = a \cos \beta \Rightarrow AH = AC - CH = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - a \cos \beta$ .

Lại có  $\begin{cases} \triangle SAC \sim \triangle HNA \\ \triangle HNA \sim \triangle HAM \end{cases} \Rightarrow \triangle SAC \sim \triangle HAM$ .

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } MA &= \frac{CA \cdot HA}{SA} = \frac{\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - a \cos \beta \right]}{x} \\ \Rightarrow SM &= SA + MA = x + \frac{\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - a \cos \beta \right]}{x} \\ \text{Khi đó suy ra } S_{SMC} &= \frac{1}{2} CA \cdot SM = \frac{1}{2} \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ x + \frac{\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - a \cos \beta \right]}{x} \right] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\begin{aligned} x + \frac{\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - a \cos \beta \right]}{x} &\geq 2 \sqrt{\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - a \cos \beta \right]} \\ \Leftrightarrow x + \frac{\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - a \cos \beta \right]}{x} &\geq 2a \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - \cos \beta \right]} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} S_{SMC} &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot 2a \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - \cos \beta \right]} \\ \Leftrightarrow S_{SMC} &\geq \frac{a^2 \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - \cos \beta \right]} \end{aligned}$$

Dấu "=" đạt được khi

$$x = \frac{\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - a \cos \beta \right]}{x} \Leftrightarrow SA = a \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - \cos \beta \right]}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích  $\Delta SMC$  theo  $a, \alpha, \beta$  là

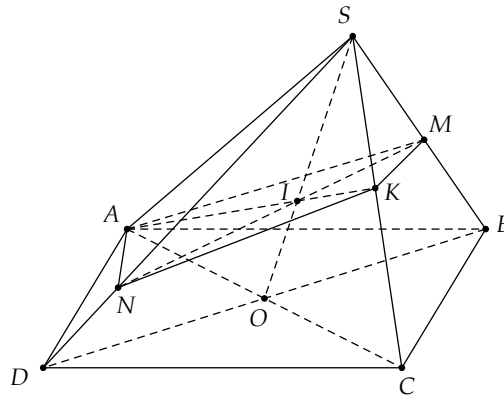
$$\frac{a^2 \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left[ \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - \cos \beta \right]}.$$

#### Câu 43.

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và  $K$  là trung điểm của  $SC$ . Một mặt phẳng  $(P)$  chứa  $AK$  và lần lượt cắt các cạnh  $SB, SD$  tại các điểm  $M, N$  khác  $S$ . Chứng minh rằng

$$\frac{4}{3} \leq \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} \leq \frac{3}{2}.$$

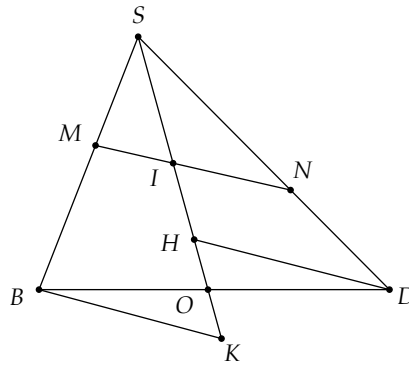
**Lời giải**



Đầu tiên chúng ta giải quyết bài toán sau

**Đề bài.** Cho tam giác  $SBD$ , đường trung tuyến  $AO$ , đường thẳng  $d$  bất kì cắt  $SB, AO, SD$  lần lượt tại  $M, I, N$ . Chứng minh rằng  $\frac{SD}{SN} + \frac{SB}{SM} = 2\frac{SO}{SI}$ .

**Giải**



Vẽ  $BK \parallel HD \parallel MN$ .

Dễ dàng chứng minh được  $\triangle BOK = \triangle DOH$  ( $g.c.g$ )  $\Rightarrow OK = OH$ .

Theo định lí Thales ta có

$$\begin{cases} \frac{SB}{SM} = \frac{SK}{SI} \\ \frac{SD}{SN} = \frac{SH}{SI} \end{cases} \Rightarrow \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = \frac{SK + SH}{SI} = \frac{SO + OK + SO - OH}{SI} = 2\frac{SO}{SI} \quad (Do OK = OH)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Ta giải quyết bài toán ban đầu**

Áp dụng bài toán vừa chứng minh trên ta suy ra

$$\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 2\frac{SO}{SI} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

Do  $I$  là trọng tâm tam giác  $SAC$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{SB}{SM} = a \geq 1 \\ \frac{SD}{SN} = b \geq 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3.$$

Với điều kiện  $a, b \geq 1$  và  $a + b = 3$  suy ra  $a, b \in [1; 2]$ .

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} \geq \frac{4}{3}. \quad (1)$$

Vì  $a \in [1; 2]$  suy ra  $(a-1)(2-a) \geq 0 \Leftrightarrow a(3-a) \geq 2 \Rightarrow ab \geq 2$  (Do  $a+b=3$ ).

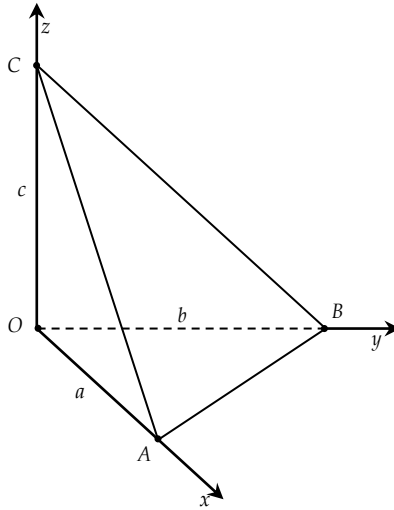
Vậy suy ra  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{ab} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD} \leq \frac{3}{2}$ . (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

#### Câu 44.

Cho góc tam diện vuông  $Oxyz$  đỉnh  $O$ . Lấy  $A, B, C$  lần lượt trên  $Ox, Oy, Oz$  sao cho  $OA + OB + OC + AB + AC + BC = l$ , ở đây  $l$  là số dương cho trước. Xác định vị trí các điểm  $A, B, C$  sao cho thể tích tứ diện  $OABC$  đạt giá trị lớn nhất và hãy tính giá trị lớn nhất ấy.

#### Lời giải



Nhắc lại kết quả quen thuộc

Với  $x, y > 0$  thì  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{2}(x+y)}{2}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $x = y$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} OA = a > 0 \\ OB = b > 0 \\ OC = c > 0 \end{cases}$$

Khi đó ta có  $l = a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}$ . Áp dụng đánh giá trên suy ra

$$l \geq a + b + c + \sqrt{2}(a + b + c) \Leftrightarrow l \geq (\sqrt{2} + 1)(a + b + c). \quad (1)$$

Ta có  $V = V_{O.ABC} = \frac{abc}{6}$ .

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a + b + c \geq 3\sqrt[3]{6V} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được  $l \geq (\sqrt{2} + 1) \cdot 3\sqrt[3]{6V} \Leftrightarrow V \leq \frac{l^3(\sqrt{2} - 1)^3}{162}$  (\*). Dấu = ở (\*) xảy ra khi

$$\begin{cases} l = a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{l(\sqrt{2} - 1)}{3}.$$

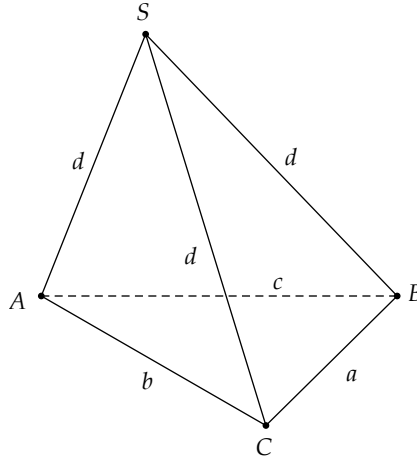
Vậy  $\max_{V_{OABC}} = \frac{l^3(\sqrt{2} - 1)^3}{162}$  đạt được khi  $a = b = c = \frac{l(\sqrt{2} - 1)}{3}$

Hay  $A, B, C$  cách  $O$  một khoảng đúng bằng  $\frac{l(\sqrt{2} - 1)}{3}$ .

**Câu 45.**

Cho tứ diện  $S.ABC$ . Đặt  $ASB = \alpha, BSC = \beta, CSA = \gamma$  biết rằng  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  và đồng thời  $SA = SB = SC = d$ . Chứng minh  $S_{\Delta ABC} \leq \frac{d^2 \sqrt{3}}{4}$ .

**Lời giải**



Đặt  $AB = c; BC = a; CA = b (a, b, c > 0)$ .

Gọi  $p = \frac{a+b+c}{2}$  là nửa chu vi của tam giác  $ABC$ .

Trong tam giác cân  $ASB$  ta dễ dàng tính được  $c = 2d \sin \frac{\alpha}{2}$ .

Tương tự  $a = 2d \sin \frac{\beta}{2}; b = 2d \sin \frac{\gamma}{2}$ .

Áp dụng bất đẳng thức  $AM - GM$  ta có

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p \cdot \frac{[3p - (a+b+c)]^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} \leq \frac{p^2 \sqrt{3}}{9}. (1)$$

Mặt khác  $p = \frac{a+b+c}{2} = d \left( \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \leq \frac{3d}{2}. (2)$

Có được (2) vì  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  nên  $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$ .

Từ (1) và (2) suy ra  $S_{\Delta ABC} \leq \frac{\left(\frac{3d}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow S_{\Delta ABC} \leq \frac{d^2 \sqrt{3}}{4}$ .

**Câu 46.**

Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau. Gọi  $\alpha, \beta, \gamma$  lần lượt là góc hợp bởi các mặt phẳng  $(OBC), (OCA), (OAB)$  với mặt phẳng  $(ABC)$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (\cot \alpha \cdot \cot \beta + \cot \beta \cdot \cot \gamma + \cot \gamma \cdot \cot \alpha)^2 + 6 \cot^2 \alpha \cdot \cot^2 \beta \cdot \cot^2 \gamma$$

**Lời giải**

Nhắc lại kết quả quen thuộc của  $\alpha, \beta, \gamma$  là  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. (*)$

Từ (\*) suy ra  $\frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{1}{1+\tan^2 \beta} + \frac{1}{1+\tan^2 \gamma} = 1$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma = \tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta \cdot \tan^2 \gamma - 2$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$(\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma)^2 \leq 3(\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma) = 3(\tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta \cdot \tan^2 \gamma - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{(\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma)^2 + 6}{\tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta \cdot \tan^2 \gamma} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow (\cot \alpha \cdot \cot \beta + \cot \beta \cdot \cot \gamma + \cot \gamma \cdot \cot \alpha)^2 + 6 \cot^2 \alpha \cdot \cot^2 \beta \cdot \cot^2 \gamma \leq 3$$

Do đó  $P \leq 3$ . Dấu "=" xảy ra khi  $\tan \alpha = \tan \beta = \tan \gamma \left( 0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$

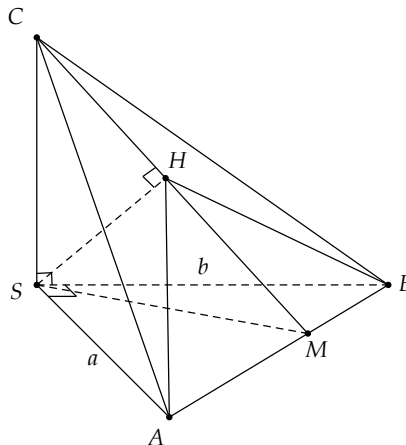
#### Câu 47.

Cho tứ diện  $S.ABC$  có  $SA, SB, SC$  vuông góc với nhau. Đặt  $SA = a, SB = b, SC = c$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  trên mặt phẳng  $(ABC)$ .

Chứng minh rằng  $P = a.S_{HBC} + b.S_{MCA} + c.S_{MAB} \leq \frac{abc\sqrt{3}}{2}$

#### Lời giải



Ta có  $\begin{cases} BA \perp SH \text{ (Do } SH \perp (ABC)) \\ BA \perp SC \text{ (Do } SC \perp SB, SC \perp SA) \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SHC)$

Gọi  $M = CH \cap BA$ . Khi đó ta suy ra  $\begin{cases} BA \perp CM \\ BA \perp SM \end{cases}$ .

Vì tứ diện  $S.ABC$  là tứ diện vuông đỉnh  $S$  nên dễ dàng chứng minh được

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow SH^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

Lại có, trong tam giác  $\Delta SAB$  thì  $\frac{1}{SM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Rightarrow SM^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$

Theo định lý Pythagoras ta có  $HM^2 = SM^2 - SH^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 b^2 c^2 a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$

$$\Rightarrow HM = ab \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}$$

Từ đó suy ra  $cS_{HAB} = c \cdot \frac{1}{2} HM \cdot BA = \frac{abc}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\Rightarrow c.S_{HAB} = \frac{abc}{2} \sqrt{1 - \frac{c^2 a^2 + b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}$$

Tương tự ta chứng minh được

$$a.S_{HBC} = \frac{abc}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2 + c^2 a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}$$

$$b.S_{HAC} = \frac{abc}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}$$

Từ đó ta suy ra

$$P = \frac{abc}{2} \left( \sqrt{1 - \frac{c^2 a^2 + b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} + \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2 + c^2 a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} + \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \right) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta lại có

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \frac{c^2 a^2 + b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} + \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2 + c^2 a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} + \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \\ & \leq \sqrt{3 \left[ 3 - \left( \frac{c^2 a^2 + b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} + \frac{a^2 b^2 + c^2 a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} + \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \right) \right]} \\ & \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{c^2 a^2 + b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} + \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2 + c^2 a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} + \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \leq \sqrt{3} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra  $P \leq \frac{abc\sqrt{3}}{2}$ .

Dấu "=" xảy ra khi  $a = b = c$ .

#### Câu 48.

Cho các tia  $Ox, Oy, Oz$  đôi một vuông góc với nhau.  $A, B, C$  lần lượt di động trên các tia  $Ox, Oy, Oz$  sao cho tam giác  $ABC$  có diện tích  $S$  không đổi.  $S_1, S_2, S_3$  lần lượt là diện tích các tam giác  $OBC, OCA, OAB$ . Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{S_1}{S + 2S_1} + \frac{S_2}{S + 2S_2} + \frac{S_3}{S + 2S_3}.$$

#### Lời giải

Vì  $OABC$  là tứ diện vuông. Ta chứng minh được  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$  (\*)

Khi đó ta có  $3 - 2P = S \left( \frac{1}{S + 2S_1} + \frac{1}{S + 2S_2} + \frac{1}{S + 2S_3} \right)$  (1)

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta được

$$\frac{1}{S + 2S_1} + \frac{1}{S + 2S_2} + \frac{1}{S + 2S_3} \geq \frac{9}{3S + 2(S_1 + S_2 + S_3)} \quad (2)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 \leq \sqrt{3(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)} = S\sqrt{3} \quad (\text{Do } (*)). \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra  $\frac{1}{S + 2S_1} + \frac{1}{S + 2S_2} + \frac{1}{S + 2S_3} \geq \frac{1}{S} \cdot \frac{9}{3 + 2\sqrt{3}}$  (4)

Từ (1) và (4) suy ra được  $3 - 2P \geq S \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{9}{3 + 2\sqrt{3}} \Leftrightarrow P \leq \frac{3\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}$

Dấu "=" xảy ra khi  $\begin{cases} S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S \\ S_1 = S_2 = S_3 \end{cases} \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{\sqrt{3}} \cdot \text{Vậy } \max_p = \frac{3\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}.$

**Câu 49.**

Cho tứ diện  $ABCD$ , chứng minh rằng  $(AC + BD)^2 + (AD + BC)^2 > (AB + CD)^2$

**Lời giải**

Gọi  $O, M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $CD, AC, CB, DB, DA$

Suy ra  $MNPQ$  là hình bình hành và  $O$  không thuộc  $(MNPQ)$

Ta có  $(MO + OP)^2 + (NO + OQ)^2 > MP^2 + NQ^2 = 2(PQ^2 + QM^2) > (PQ + QM)^2$

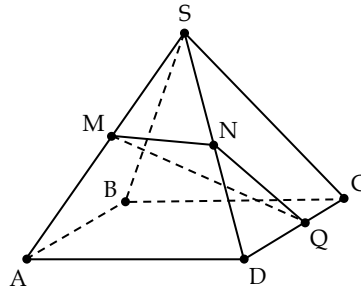
Vậy  $(MO + OP)^2 + (NO + OQ)^2 > (PQ + QM)^2$

Hay  $\left(\frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AC\right)^2 > (AB + CD)^2 \Leftrightarrow (AC + BD)^2 + (AD + BC)^2 > (AB + CD)^2$

Từ đây ta có điều phải chứng minh!

**Câu 50.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Từ một điểm  $M$  trên cạnh  $SA$  dựng đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $SD$  tại điểm  $N$ . Trên cạnh  $CD$  lấy điểm  $Q$  sao cho  $\frac{SM}{SA} = \frac{CQ}{CD}$ . Xác định vị trí điểm  $M$  trên  $SA$  sao cho diện tích của tam giác  $MNQ$  lớn nhất.

**Lời giải**

Do  $MN \parallel AD$  nên  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD}$ . Mà  $\frac{SM}{SA} = \frac{CQ}{CD} \Rightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{CQ}{CD} \Rightarrow NQ \parallel SC$

Ta có  $S_{\Delta MNQ} = \frac{1}{2}MN \cdot NQ \sin \angle MNQ = \frac{1}{2}MN \cdot NQ \sin \angle BCS$

Vậy để  $S_{\Delta MNQ}$  lớn nhất thì  $MN \cdot NQ$  lớn nhất  $\Leftrightarrow \frac{MN}{AD} \cdot \frac{NQ}{SC}$  lớn nhất

Mặt khác ta lại có  $\frac{MN}{AD} + \frac{NQ}{SC} = \frac{SN}{SD} + \frac{ND}{SD} = 1 = \text{const}$ . Do đó  $S_{\Delta MNQ}$  lớn nhất  $\Leftrightarrow \frac{MN}{AD} = \frac{NQ}{SC} = \frac{1}{2}$ .

Khi đó  $M$  là trung điểm của đoạn  $SA$

**Câu 51.**

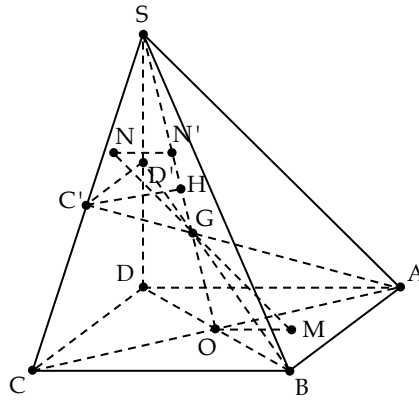
Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là một hình bình hành. Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SAC$ .  $M$  là một điểm thay đổi trong miền hình bình hành  $ABCD$ . Tia  $MG$  cắt mặt bên của

hình chóp  $S.ABCD$  tại điểm  $N$ . Đặt  $Q = \frac{MG}{NG} + \frac{NG}{MG}$

a) Tìm tất cả các vị trí của điểm  $M$  sao cho  $Q$  đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm giá trị lớn nhất của  $Q$ .

**Lời giải**



Theo bất đẳng thức AM – GM ta có  $Q = \frac{MG}{NG} + \frac{NG}{MG} \geq 2$ .

Dấu bằng khi và chỉ khi  $\frac{MG}{NG} = \frac{NG}{MG} = 1$ .

- SG cắt  $mp(ABCD)$  tại tâm O của hình bình hành ABCD. Gọi K là trung điểm của SG. Từ K dựng mặt phẳng song song với  $mp(ABCD)$  cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Từ N dựng mặt phẳng song song với  $mp(ABCD)$  cắt SG tại  $N'$ .

Ta có  $\frac{NG}{MG} = \frac{N'G}{OG}; \frac{NG}{MG} = 1$  khi và chỉ khi  $N'$  trùng K

$\Leftrightarrow N$  thuộc cạnh hình bình hành  $A_1B_1C_1D_1$

Nói NK cắt cạnh hình bình hành  $A_1B_1C_1D_1$  tại P, ta có  $PM // SG$ .

Từ đó  $Q = 2$  khi và chỉ khi M thuộc cạnh hình bình hành  $A_1'B_1'C_1'D_1'$ .

Ta thấy  $A_1'B_1'C_1'D_1'$  là hình chiếu song song của hình bình hành  $A_1B_1C_1D_1$  lên  $mp(ABCD)$  theo phương SG.

- Miền hình bình hành ABCD hợp bởi các miền tam giác OAB, OBC, OCD, ODA

Điểm M thuộc miền hình bình hành ABCD nên M thuộc một trong bốn miền tam giác này.

Chẳng hạn M thuộc miền OAB,  $M \equiv A \Rightarrow N \equiv C'$ ;  $M \equiv B \Rightarrow N \equiv D'$ ;  $M \equiv O \Rightarrow N \equiv S$ .

Do đó N thuộc miền  $\Delta SC'D'$  và N thuộc đoạn SH, với C, D và H lần lượt là trung điểm của SC, SD và SO.

Do đó  $HG \leq NG \leq SG$ . Vì vậy  $\frac{HG}{OG} \leq \frac{N'G}{OG} \leq \frac{SG}{OG}$  hay  $\frac{1}{2} \leq \frac{NG}{MG} \leq 2$ .

Đặt  $x = \frac{NG}{MG}$ . Ta có  $Q = \frac{1}{x} + x$  với  $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ .

Ta có  $Q' = 0$  và  $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow x = 1$ . Khi đó  $\max Q = \max \left\{ Q\left(\frac{1}{2}\right); Q(2); Q(1) \right\} = \frac{5}{2}$ .

Vậy ta tìm được giá trị lớn nhất của Q là  $\frac{5}{2}$ .

Dấu “=” xảy ra khi M trùng với O hoặc các đỉnh A, B, C, D.

#### Câu 52.

Cho tứ diện ABCD có trọng tâm là G. Các đường thẳng AG, BG, CG, DG kéo dài lần lượt cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ở  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Chứng minh rằng:

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 + GD_1 \geq GA + GB + GC + GD$$

#### Lời giải

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

$$\text{Có } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} \Rightarrow OA^2 = OG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{GA}$$

$$\text{Tương tự ta có } \begin{cases} OB^2 = OG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{GB} \\ OC^2 = OG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{GC} \\ OD^2 = OG^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{GD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(R^2 - OG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$

Trong đó R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

$$\text{Lại có } GA \cdot GA_1 = GB \cdot GB_1 = GC \cdot GC_1 = GD \cdot GD_1 = R^2 - OG^2$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } GA_1 + GB_1 + GC_1 + GD_1 &= (R^2 - OG^2) \left( \frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD} \right) \\ &= \frac{1}{4} (GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2) \cdot \left( \frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD} \right) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} GA_1 + GB_1 + GC_1 + GD_1 &\geq \frac{1}{16} (GA + GB + GC + GD)^2 \left( \frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD} \right) \\ &\geq GA + GB + GC + GD \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $GA = GB = GC = GD$ .

Điều này đồng nghĩa tứ diện ABCD gần đều hoặc tứ diện ABCD đều.

### Câu 53.

Chứng minh rằng mọi tứ diện luôn tồn tại ít nhất một đỉnh mà ba cạnh xuất phát từ đỉnh đó có độ dài thích hợp để lập thành một tam giác.

#### Lời giải

Xét tứ diện ABCD, không mất tính tổng quát giả sử AB là cạnh dài nhất của tứ diện đang xét.

Bằng phản chứng ta giả sử rằng: Khẳng định của bài toán là sai, nghĩa là không có đỉnh nào trong tứ diện để cho ba cạnh xuất phát từ đỉnh đó có độ dài thích hợp để lập thành một tam giác. Khi đó ta có

$$AB > AC + AD \text{ xét đỉnh } A$$

$$BA > BC + BD \text{ xét đỉnh } B$$

$$\text{Suy ra } 2AB > AC + AD + BC + BD \quad (1)$$

$$\text{Ta xét các tam giác } ABC \text{ và } ABD \text{ ta có } \begin{cases} AB < AC + CB \\ AB < AD + DB \end{cases} \Rightarrow 2AB < AC + AD + CB + DB \quad (2)$$

Mâu thuẫn giữa (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh!

### Câu 54.

Hình chóp S.ABC có tổng các mặt (góc ở đỉnh) của tam diện đỉnh S bằng  $180^\circ$  và các cạnh bên  $SA = SB = SC = 1$ . Chứng minh rằng diện tích toàn phần của hình chóp này không lớn hơn  $\sqrt{3}$ .

#### Lời giải

Ký hiệu độ lớn các mặt của góc tam diện đỉnh S như sau:

$$BSC = \alpha, CSA = \beta, ASB = \gamma \text{ và } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Ta có thể coi  $\alpha, \beta, \gamma$  là 3 góc một tam giác nào đó.

$$\text{Tổng diện tích 3 mặt bên của hình chóp là } \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$$

Gọi  $BA = a, AC = b, AB = c$ . Áp dụng định lý cosine trong tam giác BSC ta được:

$$a^2 = 2(1 - \cos \alpha) = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow a = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

Tương tự ta có  $b = 2\sin\frac{\beta}{2}, c = 2\sin\frac{\gamma}{2}$ . Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

Hay  $S_{\Delta ABC} \leq \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)^2}{3\sqrt{3}}$ . Ta có bất đẳng thức quen thuộc  $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$

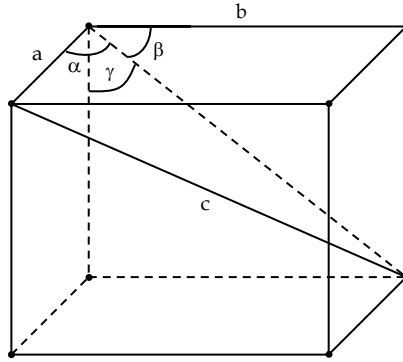
Khi đó ta được  $S_{\Delta ABC} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Diện tích toàn phần của hình chóp không lớn hơn  $\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$  tức là tứ diện đều.

### Câu 55.

Đường chéo hình hộp chữ nhật, tạo với ba kích thước  $a, b, c$  các góc  $\alpha, \beta, \gamma$ . Gọi  $V$  là thể tích của hình hộp. Chứng minh rằng  $\frac{a^6}{\cos^{12}\alpha} + \frac{b^6}{\cos^{12}\beta} + \frac{c^6}{\cos^{12}\gamma} \geq 2178V^2$ .

### Lời giải



Ta có  $\cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \cos^2\gamma = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Suy ra  $\frac{a^6}{\cos^{12}\alpha} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{\cos^6\alpha}, \frac{b^6}{\cos^{12}\beta} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{\cos^6\beta}, \frac{c^6}{\cos^{12}\gamma} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{\cos^6\gamma}$

Suy ra  $\frac{a^6}{\cos^{12}\alpha} + \frac{b^6}{\cos^{12}\beta} + \frac{c^6}{\cos^{12}\gamma} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{\cos^6\alpha} + \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{\cos^6\beta} + \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{\cos^6\gamma}$   
 $= (a^2+b^2+c^2)^3 \left( \frac{1}{\cos^6\alpha} + \frac{1}{\cos^6\beta} + \frac{1}{\cos^6\gamma} \right) \quad (1)$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

- $(a^2+b^2+c^2)^3 \geq 27a^2b^2c^2 \quad (2)$
- $\frac{1}{\cos^6\alpha} + \frac{1}{\cos^6\beta} + \frac{1}{\cos^6\gamma} \geq \frac{3}{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\gamma} \geq \frac{3}{\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{27}}$

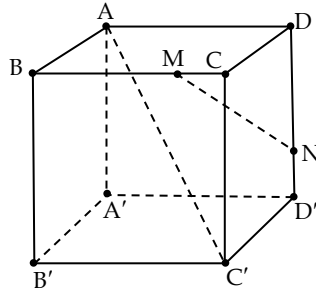
Vì  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$  nên  $\frac{1}{\cos^6\alpha} + \frac{1}{\cos^6\beta} + \frac{1}{\cos^6\gamma} \geq 81 \quad (3)$

Do  $V = abc$  nên từ (1), (2), (3) suy ra  $\frac{a^6}{\cos^{12}\alpha} + \frac{b^6}{\cos^{12}\beta} + \frac{c^6}{\cos^{12}\gamma} \geq 2187V^2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $\alpha = \beta = \gamma$  (tức là hình hộp đã cho là hình lập phương)

**Câu 56.**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Trên các cạnh  $BC$  và  $DD'$  lần lượt lấy các điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $BM = DN = x$  ( $0 \leq x \leq a$ ). Chứng minh rằng  $MN \perp AC'$  và tìm  $x$  để  $MN$  có độ dài nhỏ nhất.

**Lời giải**

Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}; \overrightarrow{AB} = \vec{b}; \overrightarrow{AD} = \vec{c}$  thì  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ ;  $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  và  $\overrightarrow{BM} = \frac{x}{a} \cdot \vec{c}; \overrightarrow{DN} = \frac{x}{a} \cdot \vec{a}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -\frac{x}{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} + \vec{c} + \frac{x}{a} \cdot \vec{a} = \frac{x}{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \vec{c}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC'} = \left[ \frac{x}{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \vec{c} \right] (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{x}{a} \cdot a^2 - a^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot a^2 = 0$$

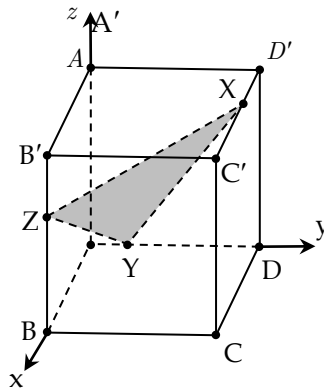
Vậy  $MN$  vuông góc với  $AC'$   $|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{x^2}{a^2} \cdot a^2 + a^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \cdot a^2 = 2\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{6a^2}{4} \geq \frac{6a^2}{4}$

$MN$  ngắn nhất bằng  $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

Trogn đó  $M, N$  tương ứng là trung điểm của  $BC$  và  $DD'$ .

**Câu 57.**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Các điểm  $X, Y, Z$  lần lượt di động trên các cạnh  $C'D', AD, BB'$ . Định vị trí của  $X, Y, Z$  để chu vi tam giác  $XYZ$  nhỏ nhất.

**Lời giải**

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ. Ta có

$$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), X(x;a;a), Y(0;y;0) \\ Z(a;0;z) \quad (x, y, z > 0).$$

Ta có chu vi tam giác  $XYZ$  là  $P = XY + YZ + ZX$

$$P = \sqrt{x^2 + (a-y)^2 + a^2} + \sqrt{a^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(a-x)^2 + a^2 + (a-z)^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned}
 \sqrt{6}P &= \sqrt{6\left(x^2 + (a-y)^2 + \frac{4a^2}{4}\right)} + \sqrt{6\left(\frac{4a^2}{4} + y^2 + z^2\right)} + \sqrt{6\left((a-x)^2 + \frac{4a^2}{4} + (a-z)^2\right)} \\
 &= \sqrt{(1+1+1+1+1+1)\left(x^2 + (a-y)^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right)} + \sqrt{6\left(\frac{4a^2}{4} + y^2 + z^2\right)} + \\
 &\quad \sqrt{6\left((a-x)^2 + (a-z)^2 + \frac{4a^2}{4}\right)} \\
 &\geq \left(x + (a-y) + \frac{4a}{2}\right) + \left(\frac{4a}{2} + y + z\right) + \left((a-x) + (a-z) + \frac{4a}{2}\right) = 9a
 \end{aligned}$$

Vậy  $P \geq \frac{9a}{\sqrt{6}} = \frac{3a\sqrt{6}}{2}$

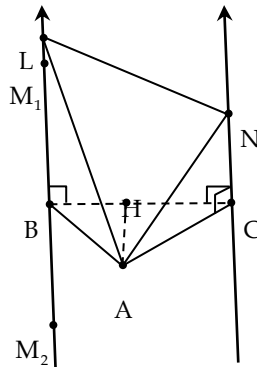
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} x = a - y = \frac{a}{2} \\ y = z = \frac{a}{2} \\ a - z = a - x = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{a}{2}$$

#### Câu 58.

Trong mặt phẳng  $(P)$ , cho  $\triangle ABC, A = 90^\circ, C = 60^\circ$ . Dựng các đường thẳng  $Bx, Cy \perp (P)$ .

- Xác định điểm  $M$  trên  $Bx$  sao cho mặt cầu đường kính  $BM$  tiếp xúc với  $Cy$ , biết rằng  $BC = 2a$ .
- Gọi điểm  $L$  là một điểm di động trên  $Bx$ ,  $L$  phải ở những vị trí nào để trên  $Cy$  có thể tìm được  $N$  sao cho  $\triangle BLN$  vuông tại  $N$ ?
- Trong các vị trí của điểm  $L$  ở câu b) hãy xác định vị trí sao cho hình chóp  $ABLNC$  có thể tích nhỏ nhất.

#### Lời giải



Mặt cầu đường kính  $BM$  tiếp xúc  $Cy$  khi và chỉ khi  $d(Bx, Cy) = BC = \frac{BM}{2} = \frac{a}{2}$ .

Vậy  $BM = 4a$ . Có 2 điểm  $M_1, M_2$  trên đường  $Bx$  thỏa mãn điều kiện này.

Muốn có điểm  $N$  để  $\angle BNL = \frac{\pi}{2}$ , thì mặt cầu đường kính  $BL$  phải cắt  $Cy$ . Suy ra  $BL \geq 4a$ , khi đó  $L$  phải nằm ngoài  $(M_1, M_2)$ . Nếu  $L$  nằm ngoài đoạn  $[M_1, M_2]$ , thì với mỗi điểm  $L$  trên  $Bx$  có 2 điểm

$N_1, N_2$  thuộc  $Cy$  sao cho  $\angle BN_1L = \angle BN_2L = \frac{\pi}{2}$ . Đặt  $BL = y, CN = x$ . Do tam giác  $BNL$  vuông tại  $N$  nên

$$BL^2 = BN^2 + NL^2 \Leftrightarrow y^2 = 4a^2 + x^2 + 4a^2 + (y-x)^2 = 8a^2 - 2xy + y^2 + 2x^2 \Rightarrow y = \frac{4a^2 + x^2}{x}.$$

Hạ đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ . Khi đó  $AH$  cũng là đường cao của hình chóp  $ABLNC$  và  $AH = a\sqrt{3}$ , đáy  $BLNC$  là hình thang vuông nên

$$\begin{aligned} V_{ABLNC} &= \frac{1}{3}AH \cdot \frac{1}{2}BC(CN + BL) = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}(x+y) = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{4a^2 + x^2}{x}\right) \\ &= \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2a^2}{x} + x\right) \geq \frac{2a^2\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{\frac{2a^2}{x} \cdot x} = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3} \\ \Rightarrow V_{\min} &= \frac{4a^3\sqrt{6}}{3} \text{ khi } \frac{2a^2}{x} = x \Leftrightarrow x = a\sqrt{2} \Rightarrow y = 3a\sqrt{2} \end{aligned}$$

Giá trị  $y = BL = 3a\sqrt{2} > 4a$ , nên chấp nhận được.

### Câu 59.

Chứng minh rằng thể tích  $V$  của khối nón tròn xoay và diện tích xung quanh  $S$  của hình nón tương ứng luôn luôn thoả mãn bất đẳng thức  $\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leq \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3$ . Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

### Lời giải

Diện tích đáy là  $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ . Gọi  $R, l$  lần lượt là bán kính đáy, đường sinh của hình nón.

Ta có  $S = \pi Rl$  và  $V = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2 - R^2}$  ( $0 < R < l$ ). Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$4R^4(l^2 - R^2) \leq \frac{8R^3l^3}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{R}{l} - \frac{R^3}{l^3} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Đặt  $x = \frac{R}{l}$  ( $0 < x < 1$ ). Ta cần chứng minh  $f(x) = x - x^3 \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}, \forall x \in (0; 1)$

Ta có  $f'(x) = 1 - 3x^2$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  (do  $x > 0$ ). Ta lại có  $f''(x) = -6x$ ,  $f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-6}{\sqrt{3}} < 0$ .

Suy ra  $f(x)$  đạt đại tại  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Vậy  $f(x) \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \forall x \in (0; 1)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  hay  $\frac{R}{l} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow l = R\sqrt{3}$

### Câu 60.

Cho tứ diện  $SABC$  có  $SA = a, SB = b, SC = c$  và  $SA \perp SB, SA \perp SC, SB \perp SC$ . Gọi  $R, V$  theo thứ tự là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và thể tích của tứ diện  $SABC$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$  theo  $a, b, c$  và chứng minh rằng  $R \geq \frac{\sqrt[6]{972V^2}}{2}$ .

### Lời giải

Ta có  $V = \frac{abc}{6}$  (1).

Gọi  $h$  là độ dài đường cao kẻ từ  $S$  của hình chóp  $SABC$  ta có  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$  (2).

Ta có  $S_{ABC} = \frac{3V}{h}$  (3).

Từ (1),(2),(3) ta có  $S_{ABC} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{2}$ .

Gọi  $I$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $SABC$ ,  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, SA$ .

Khi đó  $R = IS = \sqrt{SN^2 + SM^2} = \sqrt{\frac{1}{4}SA^2 + \frac{1}{4}(SB^2 + SC^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có  $R \geq \frac{\sqrt[6]{27a^2b^2c^2}}{2}$  (4).

Từ (1), (4) suy ra  $R \geq \frac{\sqrt[6]{927V^2}}{2}$ . Vậy ta có điều phải chứng minh.

#### Câu 61.

Cho tứ diện  $ABCD$  có góc  $BAC = CAD = DAB = 60^\circ$ . Chứng minh rằng

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 \leq 8R^2.$$

Trong đó  $R$  là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ .

#### Lời giải

Gọi  $G$  và  $O$  lần lượt là trọng tâm và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ , ta có

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4\vec{OG}$$

$$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 2(\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \vec{OA} \cdot \vec{OD} + \vec{OB} \cdot \vec{OC} + \vec{OB} \cdot \vec{OD} + \vec{OC} \cdot \vec{OD}) = 16OG^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 + DB^2 = 16R^2 - 16OG^2$$

Mặt khác theo định lý hàm số cosine ta có

$$BC^2 + CD^2 + DB^2 = 2(AB^2 + AC^2 + AD^2) - (AB \cdot AC + AC \cdot AD + AD \cdot AB)$$

$$\Rightarrow 3(AB^2 + AC^2 + AD^2) - (AB \cdot AC + AC \cdot AD + AD \cdot AB) = 16R^2 - 16OG^2 \leq 16R^2$$

$$\Rightarrow 2(AB^2 + AC^2 + AD^2) + (AB^2 + AC^2 + AD^2 - AB \cdot AC - AC \cdot AD - AD \cdot AB) \leq 16R^2$$

$$\Rightarrow 2(AB^2 + AC^2 + AD^2) \leq 16R^2$$

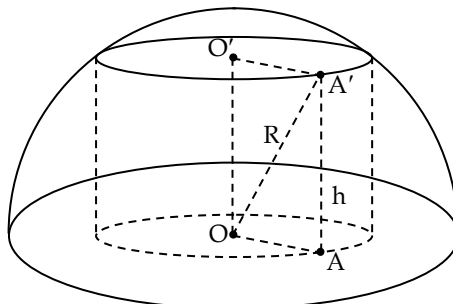
Vì  $AB^2 + AC^2 + AD^2 - AB \cdot AC - AC \cdot AD - AD \cdot AB \geq 0 \Rightarrow AB^2 + AC^2 + AD^2 \leq 8R^2$ .

#### Câu 62.

Khi cắt mặt cầu  $(O, R)$  bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu  $(O, R)$  nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Cho  $R = 1$ , hãy tính bán kính đáy và chiều cao của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu  $(O, R)$  để khối trụ đó có thể tích lớn nhất.

#### Lời giải

Hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu, nên theo giả thiết đường tròn đáy trên có tâm  $O'$  là hình chiếu của  $O$  trên đáy  $(O')$ . Suy ra hình trụ và nửa mặt cầu cùng chung trục đối xứng và tâm của đáy dưới hình trụ trùng với tâm  $O$  của nửa mặt cầu.



Gọi  $r$  và  $h$  lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ. Ta có

$$h = OO' = \sqrt{R^2 - r^2} \quad (0 < r \leq R = 1)$$

Thể tích khối trụ là  $V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$ . Ta có

$$V'(r) = \pi \left[ 2r\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right] = \frac{\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\pi r(2 - 3r^2)}{\sqrt{1 - r^2}} \quad (0 < r \leq 1).$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad V'(r) > 0 \Leftrightarrow r < \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Do đó trên khoảng  $(0; 1)$  hàm số  $V(r)$  đổi dấu từ âm sang dương, nên  $r_0 = \frac{\sqrt{6}}{3}$  là điểm cực đại của hàm số  $V(r)$ .

$$\text{Vậy } \max_{(0;1]} V(r) = V\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \text{ khi } r_0 = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ và } h_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

### Câu 63.

- 1) Cho tứ diện  $ABCD$ . Các mặt của tứ diện có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng tâm mặt cầu nội, ngoại tiếp tứ diện trùng nhau.
- 2) Cho tứ diện  $ABCD$  và một mặt phẳng  $(P)$ . Tìm trên mặt phẳng  $(P)$  điểm  $M$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$  nhỏ nhất.

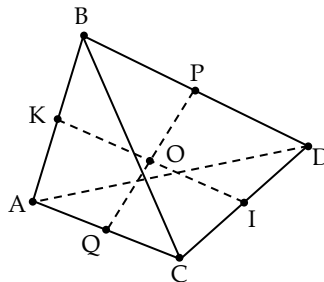
### Lời giải

1) Dựng mặt phẳng  $(P) \perp AB$  tại  $M$ . Gọi  $DK, CH$  là các đường cao của tam giác  $DAB$  và tam giác  $CAB$ . Do  $S_{\triangle DAB} = S_{\triangle CAB} \Rightarrow DK = CH$ .

Gọi  $C', D'$  lần lượt là hình chiếu của  $C, D$  trên  $(P) \Rightarrow MC' = MD'$

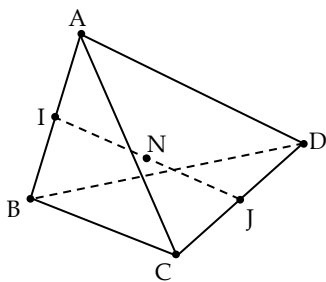
Vì  $CH \parallel (P); DK \parallel (P) \Rightarrow \triangle MC'D'$  cân tại  $M \Rightarrow MI' \perp C'D'; I'$  là trung điểm  $C'D'$ .

Kẻ  $II' \parallel AB, (I \in CD); IK \parallel MI' \Rightarrow MKI'$  là hình chữ nhật. Vậy  $IK$  là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$  và  $I$  là trung điểm  $CD$ . Vai trò  $A, B, C, D$  bình đẳng. Bằng cách dựng tương tự mặt phẳng  $(P') \perp CD$  ta chứng minh  $K'$  là trung điểm của  $AB$  và  $I'K'$  là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD \Rightarrow I' \equiv I; K' \equiv K$ . Do đó tứ diện  $ABCD$  có các đường trung bình đồng thời là đường vuông góc chung.



Gọi  $O$  là trung điểm  $IK \Rightarrow OA = OB = OC = OD$  vậy  $O$  là tâm mặt ngoại tiếp tứ diện  $ABCD$ . Ta có  $V_{KBCD} = V_{KACD} \Rightarrow KI$  thuộc mặt phẳng phân giác của góc phẳng nhị diện cạnh  $CD$  và  $AB$ . Tương tự  $PQ$  thuộc mặt phẳng phân giác của góc phẳng nhị diện cạnh  $AC$  và  $BD$ . Vì  $KI \cap PQ = O \Rightarrow O$  cách đều các mặt của tứ diện  $ABCD$ . Vậy  $O$  là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện  $ABCD$ .

2)



Gọi  $I, J$  là trung điểm  $AB$  và  $CD$ ;  $N$  là trung điểm của  $IJ$ .

$$\text{Với } M \text{ bất kỳ ta có } \left. \begin{array}{l} 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \\ 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = 4\overrightarrow{MN}$$

$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MN}|$  bé nhất khi và chỉ khi điểm  $M$  là hình chiếu của  $N$  trên mặt phẳng  $(P)$ .

# Tài liệu tham khảo

- [1]. Chuyên đề cực trị hình học không gian – Strong Team Toán VD – VDC.
- [2]. Tuyển tập các chuyên đề hình học không gian bồi dưỡng học sinh giỏi – Nhóm Toán Bắc Trung Nam.
- [3]. Tài liệu tham khảo trên Internet.