CHỦ ĐỀ 6: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I. QUY TẮC XÉT DẤU VÀ CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN ĐÃ HỌC

1) Quy tắc xét dấu biểu thức

Để xét dấu cho biểu thức $g(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ta làm như sau:

■ **Bước 1:** Điều kiện: $q(x)\neq 0$

Tìm tất cả các nghiệm của *p(x); q(x)* và sắp xếp các nghiệm đó theo thứ tự tăng dần và điền vào trục số *Ox*.

■ **Bước 2:** Cho $x\to+\infty$ để xác định dấu của *g(x)* khi $x\to+\infty$

■ **Bước 3:** Xác định dấu của các khoảng còn lại dựa vào quy tắc sau:

Quy tắc: Qua nghiệm bội lẻ thì *g(x)* đổi dấu còn qua nghiệm bội chẵn thì *g(x)* không đổi dấu. (chẵn giữ nguyên, lẻ đổi dấu).

Ví dụ: Xét dấu các biểu thức $f(x)=\dfrac{(x-4).(x-5)^4}{(x+2)(x+1)^2}$

■ **Bước 1:** Ta thấy nghiệm của biểu thức trên là $-2;-1;4;5$ sắp xếp thứ tự tăng dần trên trục số.

■ **Bước 2:** Khi $x\to+\infty$ (ví dụ cho x = 10000) ta thấy *f(x)* nhận giá trị dương.

■ **Bước 3:** Xác định dấu của các khoảng còn lại. Do $(x-5)^4$ mũ chẵn (nghiệm bội chẵn) nên qua 5 biểu thức không đổi dấu, do $(x-4)^1$ mũ lẻ (nghiệm bội lẻ) nên qua 4 biểu thức đổi dấu… ta được bảng xét dấu của *f(x)* như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		4		5		$+\infty$
f(x)		+	0	–	0	–	0	+	0	+	

2) Các dạng bất phương trình cơ bản đã học

✍ **Dạng 1:** $f(x)>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow f^2(x)>g(x)\geq 0$

✍ **Dạng 2:** $f(x)<\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)<0\\ g(x)\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)>f^2(x)\end{cases}\end{array}\right.$

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

Xét bất phương trình $a^x>b,(a>0,a\neq 1)$

• Nếu $b\leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}$ vì $a^x>0(\forall x\in\mathbb{R})$

• Nếu b > 0 thì:

- Với a > 1 thì bất phương trình $a^x>b\Leftrightarrow x>\log_a b$

- Với 0 < a < 1 thì bất phương trình $a^x>b\Leftrightarrow x<\log_a b$

III. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP

✍ Dạng 1: Phương pháp đưa về cùng cơ số

Xét bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

• Nếu a > 1 thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (cùng chiều khi a > 1)

• Nếu 0 < a < 1 thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (ngược chiều khi 0 < a < 1)

• Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right] > 0$ (hoặc xét 2 trường hợp của cơ số).

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{8x^2-17x+11} \ge \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{7-5x-x^2}$ b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} \ge 2^{\frac{2x}{x+1}}$

Lời giải

a) Do $0 > \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ nên BPT $\Leftrightarrow 8x^2 - 17x + 11 \le 7 - 5x - x^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 \le 0$

$\Leftrightarrow (3x-2)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Vậy nghiệm của BPT là $x = \frac{3}{2}$

b) ĐK: $x \ne -1$. BPT $\Leftrightarrow \left(-2^{-2}\right)^{x} > 2^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow 2^{-2x} > 2^{\frac{2x}{x+1}}$

Do 2 > 1 nên BPT $\Leftrightarrow -2x > \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow 2x + \frac{2x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+4x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của BPT là $x \in \left(-\infty; -2\right) \cup (-1; 0)$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ b) $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \le 2^{x-1}$

Lời giải

a) ĐK: $x \ne 1, x =\ne -3$

Do $\left(\sqrt{10}+3\right)\left(\sqrt{10}-3\right) = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{10}-3\right) = \left(\sqrt{10}+3\right)^{-1}$

Khi đó BPT $\Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} < -\frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x^2-5}{(x-1)(x+3)} < 0$. Lập bảng xét dấu ta được $\left[\begin{array}{l} -3 < x < -\sqrt{5} \\ 1 < x < \sqrt{5} \end{array}\right.$

Vậy BPT có nghiệm là $\left(-3; -\sqrt{5}\right) \cup \left(1; \sqrt{5}\right)$

b) Điều kiện $x^2-2x\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le 0\end{array}\right.$

Ta có $\dfrac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}}\le 2^{x-1}\Leftrightarrow 2^{x-1+\sqrt{x^2-2x}}\ge 1=2^0\Leftrightarrow x-1+\sqrt{x^2-2x}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x}\ge 1-x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x<0\\ x^2-2x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}1-x\ge 0\\ x^2-2x\ge(1-x)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ x^2-2x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 1\\ 0\ge 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\ge 2$$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $S=[2;+\infty)$

Ví dụ 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$ là :

A. $S=(-1;2]\cup[3;+\infty)$ **B.** $S=(-1;2)\cup[3;+\infty)$

C. $S=(-1;2]\cup(3;+\infty)$ **D.** $S=(3;+\infty)$

Lời giải

Ta có $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{-x}=\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}\Leftrightarrow\dfrac{6x-6}{x+1}\le x$

$\Leftrightarrow\dfrac{6x-6}{x+1}-x\le 0\Leftrightarrow\dfrac{-x^2+5x-6}{x+1}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ -1<x\le 2\end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-1;2]\cup[3;+\infty)$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}-2}<11$ là:

A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Ta có $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}-2}<11\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3}.3^{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{9}.3^{\sqrt{x}}<11\Leftrightarrow\dfrac{11}{9}.3^{\sqrt{x}}<11$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}}<3^2\Leftrightarrow\sqrt{x}<2\Leftrightarrow 0\le x<4$. Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=[0;4)$

Vậy BPT có 4 nghiệm nguyên. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}}\ge\dfrac{25}{4}$ là

A. $T=-3$ **B.** $T=-1$ **C.** $T=2$ **D.** $T=1$

Lời giải

Ta có

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} \ge \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} \ge \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow \frac{6-5x}{2+5x} \ge -2 \Leftrightarrow \frac{10+5x}{2+5x} \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x < \frac{-2}{5}$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left[-2; \frac{-2}{5}\right)$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{-2; -1\} \Rightarrow T = -3$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Số nghiệm nguyên âm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \ge \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là

A. 5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Ta có $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \ge \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \ge \left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} = \left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

$$\Leftrightarrow x-1 \ge -\frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow x-1+\frac{x-1}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ -2 \le x < 1 \end{array}\right.$$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow x = \{-2; -1\} \Rightarrow$ BPT có 2 nghiệm nguyên âm. **Chọn B.**

Ví dụ 7: Gọi S là tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > 3^{2-x}$

Tìm số phần tử của S.

A. 11 **B.** 0 **C.** 9 **D.** 1

Lời giải

BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10 \ge 0 \\ \sqrt{x^2-3x-10} < x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \\ x \le -2 \end{array}\right. \\ \sqrt{x^2-3x-10} < x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \\ x \le -2 \end{array}\right., x-2 > 0 \\ x^2-3x-10 < x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 5 \\ x < 14 \end{cases}$

$\Rightarrow 5 \le x < 14 \Rightarrow$ có 9 phần tử. **Chọn C.**

✍ Dạng 2: Phương pháp logarit hóa

Xét bất phương trình dạng: $a^{f(x)} > b^{g(x)}$ (*) với $1 \ne a; b > 0$

• Lấy logarit 2 vế với cơ số a > 1 ta được: $(*) \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)\log_a b$

• Lấy logarit 2 vế với cơ số 0 < a < 1 ta được: $(*) \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} < \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)\log_a b$

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $3^{x^2-5x+6} > 2^{x-2}$ b) $7.2^{x^2} > 16.7^{x-1}$ c) $2^{x^2-1} + 2^{x^2+2} < 3^{x^2} + 3^{x^2-1}$

Lời giải

a) Logarit cơ số 3 cả 2 vế ta có:

BPT $\Leftrightarrow \log_3 3^{x^2-5x+6} > \log_3 2^{x-2} \Leftrightarrow x^2-5x+6 > (x-2)\log_3 2$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3-\log_3 2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3+\log_3 2 \\ x < 2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của BPT là : $x < 2; x > 3+\log_3 2$

b) Logarit cơ số 3 cả 2 vế ta có:

BPT $\Leftrightarrow 2^{x^2-4} > 7^{x-2} \Leftrightarrow x^2-4 > (x-2)\log_2 7$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2-\log_2 7) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < \log_2 7-2 \end{array}\right.$

c) BPT $\Leftrightarrow \frac{2^{x^2}}{2}+4.2^{x^2} < 3^{x^2}+\frac{3^{x^2}}{3} \Leftrightarrow \frac{9}{2}.2^{x^2} < \frac{4}{3}.3^{x^2}$

$2^{x^2-3} < 3^{x^2-3} \Leftrightarrow x^2-3 < \left(x^2-3\right)\log_2 3$

$\Leftrightarrow (x^2-3)(1-\log_2 3) < 0 \Leftrightarrow x^2-3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{array}\right.$

Ví dụ 2: Tập nghiệm S của bất phương trình $3^{x^2} < 2^x$ là:

A. $S=\left(0;+\infty\right)$ **B.** $S=(0;\log_2 3)$ **C.** $S=(0;\log_3 2)$ **D.** $S=(0,1)$

Lời giải

Lấy logarit cơ số 3 cả 2 vế ta có: $x^2 < x\log_3 2 \Leftrightarrow x^2-x\log_3 2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \log_3 2$. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x.5^{x^2} < 1$ là :

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Lấy logarit cơ số 3 cả 2 vế ta có: $\log_3\left(3^x.5^{x^2}\right) < \log_3 1 \Leftrightarrow x+x^2\log_3 5 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\log_3 5} < x < 0$

Kết hợp $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ bất phương trình không có nghiệm nguyên. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=2^x.3^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\log_{\frac{1}{3}} 2-x^2 > 0$ **B.** $f(x) < 1 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 3 > 0$

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\log_3 2+x^2 < 0$ **D.** $f(x) < 1 \Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 3 < 0$

Lời giải

Ta có $f(x)<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{3}}(2^x.3^{x^2})<\log_{\frac{1}{3}}1 \\ \log_2(2^x.3^{x^2})<\log_2 1 \\ \log_3(2^x.3^{x^2})<\log_3 1 \\ \ln(2^x.3^{x^2})<\ln 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\log_{\frac{1}{3}}2-x^2>0 \\ x+x^2\log_2 3<0 \\ x\log_3 2+x^2<0 \\ x\ln 2+x^2\ln 3<0 \end{array}\right.$

Đáp án sai là **B. Chọn B**

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3^x}{7^{x^2-1}}$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. $f(x)>1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+\log_3 7}>\dfrac{x^2-1}{1+\log_7 3}$

B. $f(x)>1 \Leftrightarrow x\log_{\frac{1}{2}}3>(x^2-1)\log_2 7$

C. $f(x)>1 \Leftrightarrow x>(x^2-1)\log_3 7$

D. $f(x)>1 \Leftrightarrow x\ln 3>(x^2-1)\ln 7$

Lời giải

Ta có: $f(x)>1 \Leftrightarrow 3^x>7^{x^2-1} \Leftrightarrow \log_{21}3^x>\log_{21}7^{x^2-1} \Leftrightarrow x\log_{21}3>(x^2-1)\log_{21}7$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{\log_3 21}>\dfrac{x^2-1}{\log_7 21} \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+\log_3 7}>\dfrac{x^2-1}{1+\log_7 3}$

Tương tự lấy logarit cơ số 3 và e cả 2 vế ta được $f(x)>1 \Leftrightarrow x>(x^2-1)\log_3 7$

$f(x)>1 \Leftrightarrow x\ln 3>(x^2-1)\ln 7$

Đáp án sai là **B. Chọn B.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=2^x.7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là **sai ?**

A. $f(x)<1 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$

B. $f(x)<1 \Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$

C. $f(x)<1 \Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$

D. $f(x)<1 \Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0$

Lời giải

Ta có: $f(x)<1 \Leftrightarrow 2^x.7^{x^2}<1 \Leftrightarrow \log_2(2^x.7^{x^2})<\log_2 1$

$\Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0 \Rightarrow$ **A** đúng.

$f(x)<1 \Leftrightarrow \ln(2^x.7^{x^2})<\ln 1 \Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0 \Rightarrow$ **B** đúng

$f(x)<1 \Leftrightarrow \log_7(2^x.7^{x^2})<0 \Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0 \Rightarrow$ **C** đúng.

Đáp án sai là **D. Chọn D.**

✍ Dạng 3: Phương pháp đặt ẩn phụ

Ta sẽ làm tương tự như các dạng đặt ẩn phụ của phương trình nhưng lưu ý đến chiều biến thiên của hàm số.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}>12$

b) $3^x+9.3^{-x}-10<0$

Lời giải

a) Điều kiện: $x\neq 0$

BPT $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{3}>12 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-12>0$

Đặt $t=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\left(t>0\right)$ ta được $t^2+t-12>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>3 \\ t<-4\left(loai\right)\end{array}\right.$

Với $t>3 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}>3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x}<-1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x}<0$

Lập bảng xét dấu ta được nghiệm của bất phương trình là $-1<x<0$

b) Ta có $3^x+9.3^{-x}-10<0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3^x \\ t^2-10t+9<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0 \\ 1<t<9\end{cases} \Rightarrow 1<3^x<9 \Leftrightarrow 3^0<3^x<3^3 \Leftrightarrow 0<x<2$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $6.9^{\frac{1}{x}}-13.6^{\frac{1}{x}}+6.4^{\frac{1}{x}}\leq 0$

b) $5.4^x+2.25^x-7.10^x\leq 0$

Lời giải

a) Điều kiện: $x\neq 0$. Khi đó chia cả 2 vế cho $4^{\frac{1}{x}}$ ta có: $\Leftrightarrow 6.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}-13.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}+6.\leq 0$

$\rightarrow \begin{cases} t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}>0 \\ 6t^2-13t+6\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0 \\ \frac{2}{3}\leq t\leq \frac{3}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -1\leq \frac{1}{x}\leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x+1}{x}\geq 0 \\ \frac{x-1}{x}\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -1 \\ x\geq 1\end{array}\right.$

b) Ta có: $5.4^x+2.25^x-7.10^x\leq 0 \Leftrightarrow 5+2.\left(\frac{25}{4}\right)^x-7\left(\frac{5}{2}\right)^x\leq 0$

$\rightarrow \begin{cases} t=\left(\frac{5}{2}\right)^x \\ 2t^2-7t+5\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0 \\ 1\leq t\leq \frac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow 1\leq \left(\frac{5}{2}\right)^x\leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[0;1\right]$

Ví dụ 3: Số nghiệm nguyên trong khoảng $(-20;20)$ có bất phương trình $16^x-5.4^x+4\ge 0$ là

A. 19 **B.** 20 **C.** 39 **D.** 40

Lời giải

Đặt $t=4^x\,(t>0)$ ta có: $t^2-5t+4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 4\\ t\le 1\end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}4^x\ge 4\\ 4^x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le 0\end{array}\right.$

Kết hợp $\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\ x\in(-20;20)\end{cases}\Rightarrow$ có 39 nghiệm. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Biết $S=[a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x-10.3^x+3\le 0$. Tìm $b-a$

A. $T=\frac{8}{3}$ **B.** $T=1$ **C.** $T=\frac{10}{3}$ **D.** $T=2$

Lời giải

Đặt $t=3^x\,(t>0)$ ta có $3t^2-10t+3\ge 0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le t\le 3\Rightarrow 3^{-1}\le 3^x\le 3\Leftrightarrow -1\le x\le 1$

Suy ra $S=[-1;1]\Rightarrow b-a=2$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Tìm tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $9^{x-1}-36.3^{x-3}+3\le 0$

A. $T=4$ **B.** $T=3$ **C.** $T=0$ **D.** $T=1$

Lời giải

Ta có: BPT $\Leftrightarrow 3^{2(x-1)}-4.3^{x-1}+3\le 0\xrightarrow{t=3^{x-1}>0}t^2-4t+3\le 0\Leftrightarrow 1\le t\le 3$

Khi đó: $3^0\le 3^{x-1}\le 3\Leftrightarrow 0\le x-1\le 1\Leftrightarrow 1\le x\le 2$

Kết hợp $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\{1;2\}\Rightarrow T=3$. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Tìm tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\le 1$

A. $T=0$ **B.** $T=1$ **C.** $T=2$ **D.** $T=3$

Lời giải

$$\frac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\le 1\Leftrightarrow\frac{2.3^x-4.2^x}{3^x-2^x}\le 1\Leftrightarrow\frac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^x-4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\le 1\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-3}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\le 0$$

$$\xrightarrow{t=\left(\frac{3}{2}\right)^x>0}\Leftrightarrow\frac{t-3}{t-1}\le 0\Leftrightarrow 1<t\le 3\Rightarrow 1<\left(\frac{3}{2}\right)^x\le 3\Leftrightarrow 0<x<\log_{\frac{3}{2}}3$$

Kết hợp $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\{1;2\}\Rightarrow T=3$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(3-\sqrt{5}\right)^{2x-x^2}+\left(3+\sqrt{5}\right)^{2x-x^2}\le 2^{1-x^2+2x}$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

BPT $\Leftrightarrow\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2}+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2}\le 2$ Nhận xét $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=1$

Đặt $t=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2}$ $(t>0)$ suy ra $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-x^2}=\frac{1}{t}$

Ta có $t+\frac{1}{t}\le 2\Leftrightarrow t^2-2t+1\le 0\Leftrightarrow (t-1)^2\le 0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow 2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của BPT là: $x=0;x=2$. **Chọn A.**

Dạng 4: Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số, phương pháp phân tích nhân tử, phương pháp đánh giá

Cho hàm số *y = f(t)* xác định và liên tục trên *D*:

Nếu hàm số *f(t)* luôn đồng biến trên *D* và $\forall u,v\in D$ thì $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u>v$

Nếu hàm số *f(t)* luôn nghịch biến trên D và $\forall u,v\in D$ thì $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u<v$

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{3^{2-x}+3-2x}{4^x-2}>0$ **b)** $\frac{4^x+x-5}{2^x+x-6}>0$

Lời giải

a) ĐK: $x\ne\frac{1}{2}$. Xét $g(x)=3^{2-x}+3-2x$ với $x\in\mathbb{R}$ ta có: $g'(x)=-3^{2-x}\ln 3-2<0\forall x\in\mathbb{R}$

Do vậy hàm số g(x) nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ta có: $g(x)>0\Leftrightarrow g(x)>g(2)\Leftrightarrow x<2$

$g(x)<0\Leftrightarrow x>2$. Khi đó BPT $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>0\\4^x-2>0\end{cases}\\\begin{cases}g(x)<0\\4^x-2<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2\\x>\frac{1}{2}\end{cases}\\\begin{cases}x>2\\x<\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<2$

Vậy nghiệm của BPT là: $\left(\frac{1}{2};2\right)$

b) Xét $g(x)=4^x+x-5$ và $f(x)=2^x+x-6$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$g'(x)=4^x\ln 4+1>0, f(x)=2^x\ln 2+1>0$

Do vậy hàm số $f(x),g(x)$ đều đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó BPT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>0\\f(x)>0\end{cases}\\\begin{cases}g(x)<0\\f(x)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>g(1)\\f(x)>f(2)\end{cases}\\\begin{cases}g(x)<g(1)\\f(x)<f(2)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của BPT là $x>2$; $x<1$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x+1}-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x}+1\ge x$ **b*)** $4^x+2^x-4\ge -x+\sqrt{2^{x+1}-x+6}$

Lời giải

a) BPT $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{x+1}-\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}+1\ge x \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{x+1}+x+1\ge \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}+2x$

Xét hàm số $f(t)=\left(\sqrt{2}+1\right)^{t}+t\,(t\in\mathbb{R}), f'(t)=\left(\sqrt{2}+1\right)^{t}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+1>0$

Do vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(x+1)\ge f(2x)\Leftrightarrow x+1\ge 2x\Leftrightarrow x\le 1$

Vậy nghiệm của BPT là: $x\le 1$

b) Đặt $y=\sqrt{2^{x+1}-x+6}\Rightarrow -x=y^2-6-2^{x+1}$

Khi đó BPT $\Rightarrow 4^x+2^x-4\ge y^2-6-2^{x+1}+y\Leftrightarrow 4^x+3.2^x+2\ge y^2+y$

$\Leftrightarrow \left(2^x+1\right)^2+\left(2^x+1\right)\ge y^2+y$. Xét hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do vậy BPT $\Leftrightarrow f\left(2^x+1\right)\ge f(y)\Leftrightarrow 2^x+1\ge y\Leftrightarrow 2^x+1\ge\sqrt{2^{x+1}-x+6}$

$\Leftrightarrow 4^x+2^{x+1}+1\ge 2^{x+1}-x+6\Leftrightarrow 4^x+x\ge 5$. Xét hàm số $g(x)=4^x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

BPT $\Leftrightarrow g(x)\ge 5=g(1)\Leftrightarrow x\ge 1$

Vậy $x\ge 1$ là nghiệm của PT.

Ví dụ 3: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $25.2^x-10^x+5^x\ge 25$ là:

A. $T=5$ **B.** $T=3$ **C.** $T=2$ **D.** $T=1$

Lời giải

Ta có: $25.2^x-10^x+5^x\ge 25\Leftrightarrow 25\left(2^x-1\right)\ge 5\left(2^x-1\right)$

$\Leftrightarrow \left(2^x-1\right)\left(25-5^x\right)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x-1\ge 0\\25-5^x\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}2^x-1\le 0\\25-5^x\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^x\ge 2^0\\5^2\ge 5^x\end{cases}\\\begin{cases}2^x\le 2^0\\5^2\le 5^x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\le x\le 2$

Kết hợp $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\{0;1;2\}\Rightarrow T=3$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^{x^2-x-6}-3^{x+2}+x^2-2x-8\le 0$ là:

A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 9

Lời giải

Ta có: BPT $\Leftrightarrow 3^{x^2-x-6}+x^2-x-6\le 3^{x+2}+x+2$

Xét hàm số $f\left(t\right)=3^t+t$ trên tập $\mathbb{R}$

Khi đó $f'\left(t\right)=3^t\ln 3+1>0\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ suy ra $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $f\left(x^2-x-6\right)\le f\left(x+2\right)\Leftrightarrow x^2-x-6\le x+2\Leftrightarrow x^2-2x-8\le 0$

$\Leftrightarrow -2\le x\le 4\Rightarrow$ BPT có 7 nghiệm nguyên. **Chọn C**.

Ví dụ 5: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2-4x+7}-2^{5x-7}+x^2-9x+14\le 0$ là:

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải

Ta có: BPT $\Leftrightarrow 2^{x^2-4x+7}+x^2-4x+7\le 2^{5x-7}+5x-7$

Xét hàm số $f\left(t\right)=2^t+t$ trên tập $\mathbb{R}$

Khi đó $f'(t)=2^t\ln 2+1>0\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ suy ra *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $f\left(x^2-4x+7\right)\le f\left(5x-7\right)\Leftrightarrow x^2-4x+7\le 5x-7\Leftrightarrow x^2-9x+14\le 0$

$\Leftrightarrow 2\le x\le 7\Rightarrow$ BPT có 6 nghiệm nguyên. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2017^{2x+\sqrt{x+1}}-2017^{2+\sqrt{x+1}}+2018x\le 2018$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Điều kiện $x\ge -1$

BPT $\Leftrightarrow 2017^{2x+\sqrt{x+1}}+1004(2x+\sqrt{x+1})\le 2018^{2+\sqrt{x+1}}+1004(2+\sqrt{x+1})$ (*)

Hàm số $f(t)=2017^t+1004t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (*) $\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x\in\left[-1;1\right]$

Do đó BPT có 3 nghiệm nguyên. **Chọn C.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-12}>1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** Vô số

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{3x+1}\ge\frac{1}{25}$ là

A. $x\in\left[1;+\infty\right)$ **B.** $x\in\left[-1;+\infty\right)$ **C.** $x\in\left(-\infty;-3\right]$ **D.** $x\in\left(-\infty;3\right]$

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $10^{2x}<10^{x+6}$ là

A. $(0,6)$ **B.** $(-\infty;6)$ **C.** $(0;64)$ **D.** $(6;+\infty)$

Câu 4: Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$ là

A. $S=(-\infty;3)$ **B.** $S=(3;+\infty)$ **C.** $S=(-\infty;-3)$ **D.** $S=(-\frac{1}{2};3)$

Câu 5: Cho $f(x)=x.e^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình *f'(x) > 0* là

A. $S=\left(0;\frac{1}{3}\right)$ **B.** $S=(0;1)$ **C.** $S=\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ **D.** $S=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

Câu 6: Tập nghiệm S của bất phương trình $2^{\sqrt{x}}<2$ là

A. $S=\left[0;1\right)$ **B.** $S=(-\infty;1)$ **C.** $S=\mathbb{R}$ **D.** $S=(1;+\infty)$

Câu 7: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}>3^{-x}$ là

A. $S=\left(2;+\infty\right)$ **B.** $S=\left(1;2\right)$ **C.** $S=\left(1;2\right]$ **D.** $S=\left[2;+\infty\right)$

Câu 8: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\sqrt{3}\right)^{x^2+1}\le 3^{-x+2}$ là

A. $S=\mathbb{R}\setminus(-3;1)$ **B.** $S=\mathbb{R}\setminus\left[-3;1\right]$ **C.** $S=\left[-3;1\right]$ **D.** $S=(-3;1)$

Câu 9: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\le\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1}$ là

A. $S=\left(-\infty;1\right]$ **B.** $S=\left[1;+\infty\right)$ **C.** $S=(-\infty;1)$ **D.** $S=(1;+\infty)$

Câu 10: Tập nghiệm S của bất phương trình $2^x>3^{x+1}$ là

A. $\varnothing$ **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$ **C.** $\left(-\infty;\log_2 3\right]$ **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$

Câu 11: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^{2x-1}>243$

A. $S=(-\infty;3)$ **B.** $S=(3;+\infty)$ **C.** $S=(2;+\infty)$ **D.** $S=(-\infty;2)$

Câu 12: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4}$

A. $S = (-\infty; 1)$ **B.** $S = (1; 2)$ **C.** $S = [1; 2]$ **D.** $S = (2; +\infty)$

Câu 13: Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

A. $x > -\frac{2}{3}$ **B.** $x > \frac{3}{2}$ **C.** $x > \frac{2}{3}$ **D.** $x < \frac{2}{3}$

Câu 14: Nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$ là

A. $x = \frac{2}{3}$ **B.** $x > \frac{2}{3}$ **C.** $x \neq \frac{2}{3}$ **D.** $x \leq \frac{2}{3}$

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}-1} > 4$ là

A. $S = (9; +\infty)$ **B.** $S = [9; +\infty)$ **C.** $S = (-\infty; 9]$ **D.** $S = (-\infty; 9)$

Câu 16: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$

A. $S = (2; +\infty)$ **B.** $S = (-\infty; 0)$ **C.** $S = (0; +\infty)$ **D.** $S = (-\infty; +\infty)$

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$ là

A. $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$ **B.** $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$

C. $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ **D.** $S = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

Câu 18: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x + 9.3^{-x} < 10$ là

A. Vô số **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1

Câu 19: Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2.6^x + 4^x > 0$ là

A. $S = (0; +\infty)$ **B.** $S = \mathbb{R}$ **C.** $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **D.** $S = [0; +\infty)$

Câu 20: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{2}.5^{2x+1}$ và $g(x) = 5^x + 4x.\ln 5$. Tập nghiệm của bất phương trình *f'(x) > g'(x)* là

A. $S = (-\infty; 0)$ **B.** $S = (1; +\infty)$ **C.** $S = (0; 1)$ **D.** $S = (0; +\infty)$

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = \frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2).\log 3 - (x^2-4).\log 7 > 0$

B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2).\log_{0,3} 3 - (x^2-4).\log_{0,3} 7 > 0$

C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2).\ln 3 - (x^2-4).\ln 7 > 0$

D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2) - (x^2-4).\log_3 7 > 0$

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=x^2e^{-x}$. Bất phương trình $f'(x)\ge 0$ có tập nghiệm là

A. $S=\left[-2;2\right]$ **B.** $S=\left(-\infty;-2\right]\cup\left[0;+\infty\right)$

C. $S=\left(-\infty;0\right]\cup\left[2;+\infty\right)$ **D.** $S=\left[0;2\right]$

Câu 23: Giải bất phương trình $3^{x^2}<2^x$

A. $x\in(0;+\infty)$ **B.** $x\in(0;\log_2 3)$ **C.** $x\in(0;\log_3 2)$ **D.** $x\in(0;1)$

Câu 25: Tập nghiệm của bất phương trình $(2-\sqrt{3})^x>(7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{x+1}$ là

A. $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ **B.** $S=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

C. $S=\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ **D.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$

Câu 26: Giải bất phương trình $(\sqrt{5}-2)^{\frac{2x}{x-1}}\le(\sqrt{5}+2)^x$

A. $S=\left(-\infty;-1\right]\cup\left[0;1\right]$ **B.** $S=\left[-1;0\right]$

C. $S=\left(-\infty;-1\right)\cup\left[0;+\infty\right)$ **D.** $S=\left[-1;0\right]\cup(1;+\infty)$

Câu 27: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{x}+5}$

A. $S=\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)$ **B.** $S=\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right)\cup(0;+\infty)$

C. $S=(0;+\infty)$ **D.** $S=\left(-\frac{2}{5};+\infty\right)$

Câu 28: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x^2-x}<25$ là

A. $S=(2;+\infty)$ **B.** $S=\left(-\infty;1\right)\cup(2;+\infty)$ **C.** $S=(-1;2)$ **D.** $S=\mathbb{R}$

Câu 29: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}<\frac{1}{16}$ là

A. $S=(2;+\infty)$ **B.** $S=\left(-\infty;0\right)$ **C.** $S=(0;1)$ **D.** $S=\left(1;\frac{5}{4}\right)$

Câu 30: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x}>3^{x+4}$

A. $S=(0;4)$ **B.** $S=\left(-\infty;4\right)$ **C.** $S=(4;+\infty)$ **D.** $S=(-4;+\infty)$

Câu 31: Giải bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4}>\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}$

A. $S=\left[5;+\infty\right)$ **B.** $S=\left(-\infty;5\right)$ **C.** $S=\left(-\infty;-1\right)$ **D.** $S=\left(-1;2\right)$

Câu 32: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $(2+\sqrt{3})^{3-x} > 7-4\sqrt{3}$

A. $S=(-\infty;5)$ **B.** $S=(5;+\infty)$ **C.** $S=(1;+\infty)$ **D.** $S=(-\infty;1)$

Câu 33: Xét bất phương trình $5^{2x}-3.5^{x+2}+32<0$. Nếu đặt $t=5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2-3t+32<0$ **B.** $t^2-16t+32<0$

C. $t^2-6t+32<0$ **D.** $t^2-75t+32<0$

Câu 34: Biết $S=[a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x-10.3^x+3\le 0$. Tìm *b - a*

A. $\frac{8}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{10}{3}$ **D.** 2

Câu 35: Giải bất phương trình $4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3\le 0$ được tập nghiệm $S=(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$, với a, b là các số thực và *a* < *b*. Tính *a + 2b*

A. a + 2b = -4 **B.** a + 2b = 1 **C.** a + 2b = 7 **D.** a + 2b = 9

Câu 36: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(\sqrt{10}-3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10}+3)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 37: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1}>3^{x+2}$

A. $S=\left(-\infty;\log_{\frac{3}{2}}\frac{9}{2}\right)$ **B.** $S=\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2}\right)$ **C.** $S=\left(-\infty;\log_2\frac{9}{2}\right]$ **D.** $S=\left(\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2};+\infty\right)$

Câu 38: Biết tập nghiệm của bất phương trình $2.4^x-5.2^x+2\le 0$ là $S=[a;b]$. Tính $b-a$

A. $b-a=\frac{3}{2}$ **B.** $b-a=\frac{5}{2}$ **C.** $b-a=1$ **D.** $b-a=2$

Câu 39: Tìm nghiệm nguyên dương lớn nhất của bất phương trình $4^{x-1}-2^{x-2}\le 3$

A. x = 1 **B.** x = 2 **C.** x = 3 **D.** x = 4

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^x$. Khẳng định nào **sai?**

A. $f(x)>1\Leftrightarrow x^2+x\log_2 5>0$ **B.** $f(x)>1\Leftrightarrow x-x^2\log_2 5<0$

C. $f(x)>1\Leftrightarrow x^2-x\log_5 2>0$ **D.** $f(x)>1\Leftrightarrow -x\ln 2+x^2\ln 5>0$

Câu 41: Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3;\sqrt{10})$ **B.** $(-4;2)$ **C.** $(\sqrt{7};4\sqrt{10})$ **D.** $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: BPT $\Leftrightarrow x^2-4x-12<0 \Leftrightarrow -2<x<6 \Rightarrow x\in\{-1;0;1;2;3;4;5\}$. **Chọn C.**

Câu 2: BPT $\Leftrightarrow 5^{3x+1}\ge 5^{-2} \Leftrightarrow 3x+1\ge -2 \Leftrightarrow x\ge -1$. **Chọn B.**

Câu 3: BPT $\Leftrightarrow \left(10^x\right)^2-10^6.10^x<0 \Leftrightarrow 10^x<10^6 \Leftrightarrow x<6$. **Chọn B.**

Câu 4: BPT $\Leftrightarrow 2x+1>3x-2 \Leftrightarrow x<3$. **Chọn A.**

Câu 5: Ta có $f(x)=\dfrac{x}{e^{3x}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{e^{3x}-x.3e^{3x}}{(e^{3x})^2}=\dfrac{1-3x}{e^{3x}}>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{3}$. **Chọn D.**

Câu 6: BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x<1$. **Chọn A.**

Câu 7: BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ \sqrt{x+2}<x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x>0 \\ x^2>x+2 \end{cases} \Rightarrow x>2$. **Chọn A.**

Câu 8: BPT $\Leftrightarrow 3^{\frac{x^2+1}{2}}\le 3^{2-x} \Leftrightarrow 2-x\ge \dfrac{x^2+1}{2} \Leftrightarrow -3\le x\le 1$. **Chọn C.**

Câu 9: BPT $\Leftrightarrow (2+\sqrt{5})^{x-1}\le \dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^{x-1}} \Leftrightarrow (2+\sqrt{5})^{x-1}.(2+\sqrt{5})^{x-1}\le 1$

$\Leftrightarrow (2+\sqrt{5})^{x-1}\le 1 \Leftrightarrow x-1\le 0 \Leftrightarrow x\le 1$. **Chọn A.**

Câu 10: BPT $\Leftrightarrow 2^x>3.3^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x>3 \Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$. **Chọn B.**

Câu 11: BPT $\Leftrightarrow 2x-1>\log_3 243=5 \Leftrightarrow x>3$. **Chọn B.**

Câu 12: BPT $\Leftrightarrow -x^2+3x>2 \Leftrightarrow 1<x<2$. **Chọn B.**

Câu 13: BPT $\Leftrightarrow 3.\left(3^x\right)^2>\dfrac{27}{3^x} \Leftrightarrow \left(3^x\right)^3>3^2 \Leftrightarrow 3x>2 \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{3}$. **Chọn C.**

Câu 14: BPT $\Leftrightarrow 9x^2-17x+11\le 7-5x \Leftrightarrow (3x-2)^2\le 0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$. **Chọn A.**

Câu 15: BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}-1>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x>9 \end{cases} \Leftrightarrow x>9$. **Chọn A.**

Câu 16: BPT $\Leftrightarrow 2^{x-1}>\left(2^{-4}\right)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x-1>-\dfrac{4}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+4}{x}>0 \Leftrightarrow x>0$. **Chọn C.**

Câu 17: BPT $\Leftrightarrow \left(4^x\right)^2-5.4^x+4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x\ge 4 \\ 4^x\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le 0 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 18: BPT $\Leftrightarrow 3^x+\dfrac{9}{3^x}<10 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-10.3^x+9<0 \Leftrightarrow 1<3^x<9 \Leftrightarrow 0<x<2 \Rightarrow x=1$. **Chọn D.**

Câu 19: BPT $\Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x - 2\left(\frac{6}{4}\right)^x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1\right]^2 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$. **Chọn C.**

Câu 20: Ta có $f'(x) = \frac{1}{2}.2.5^{2x+1}\ln 5, g'(x) = 5^x \ln 5 + 4\ln 5$

$\to f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 5^{2x+1} > 5^x + 4 \Leftrightarrow 5.(5^x)^2 - 5^x - 4 > 0 \Leftrightarrow 5^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$. **Chọn D.**

Câu 21: Ta có $f(x) > 1 \Leftrightarrow 3^{x-2} > 7^{x^2-4} \Leftrightarrow \log 3^{x-2} > \log 7^{x^2-4} \Leftrightarrow (x-2)\log 3 > (x^2-4)\log 7$

+) $f(x) > 1 \Leftrightarrow 3^{x-2} > 7^{x^2-4} \Leftrightarrow \log_{0,3} 3^{x-2} < \log_{0,3} 7^{x^2-4} \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,3} 3 < (x^2-4)\log_{0,3} 7$

+) $f(x) > 1 \Leftrightarrow 3^{x-2} > 7^{x^2-4} \Leftrightarrow \ln 3^{x-2} > \ln 7^{x^2-4} \Leftrightarrow (x-2)\ln 3 > (x^2-4)\ln 7$

+) $f(x) > 1 \Leftrightarrow 3^{x-2} > 7^{x^2-4} \Leftrightarrow \log_3 3^{x-2} > \log_3 7^{x^2-4} \Leftrightarrow x-2 > (x^2-4)\log_3 7$. **Chọn B.**

Câu 22: BPT $\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{e^x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$. **Chọn D.**

Câu 23: BPT $\Leftrightarrow \log_3 3^{x^2} < \log_3 2^x \Leftrightarrow x^2 < x\log_3 2 \Leftrightarrow 0 < x < \log_3 2$. **Chọn C.**

Câu 25: BPT $\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})^x > (2-\sqrt{3})^2.\frac{1}{(2-\sqrt{3})^{x+1}} \Leftrightarrow (2-\sqrt{3})^{x-1} > 1 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Chọn A.

Câu 26: Điều kiện $x \neq 1$

BPT $\Leftrightarrow (2+\sqrt{5})^{\frac{2x}{x-1}} \leq (2+\sqrt{5})^x \Leftrightarrow -\frac{2x}{x-1} \leq x \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 27: BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{x} < \frac{3}{x} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2+5x}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -\frac{2}{5} \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 28: $5^{x^2-x} < 25 \Leftrightarrow x^2 - x < 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$. **Chọn C.**

Câu 29: Điều kiện $x \neq 1$. Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > 4 \Leftrightarrow \frac{4x-5}{x-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{5}{4}$. **Chọn D.**

Câu 30: $3^{2x} > 3^{x+4} \Leftrightarrow 2x > x + 4 \Leftrightarrow x > 4$. **Chọn C.**

Câu 31: $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 2x - 4 < x + 1 \Leftrightarrow x < 5$. **Chọn B.**

Câu 32: $(2+\sqrt{3})^{3-x} > 7 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{3-x} > (2+\sqrt{3})^{-2} \Leftrightarrow 3 - x > -2 \Leftrightarrow x < 5$. **Chọn A.**

Câu 33: $5^{2x} - 3.5^{x+2} + 32 < 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 75.5^x + 32 < 0 \Rightarrow t^2 - 75t + 32 < 0$. **Chọn D.**

Câu 34: $3.9^x - 10.3^x + 3 \le 0 \Leftrightarrow (3.3^x - 1)(3^x - 3) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le 3^x \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

Do đó suy ra $a = -1, b = 1 \Rightarrow b - a = 2$. **Chọn D.**

Câu 35: $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}.\left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2 - \frac{1}{4}.2^{\frac{1}{x}} - 3 \le 0 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}} \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \le 2 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \frac{1}{2} \\ x < 0 \end{array}\right.$

Do đó suy ra $a = 0, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + 2b = 1$. **Chọn B.**

Câu 36: $\left(\sqrt{10} - 3\right)^{\frac{3-x}{x-1}} > \left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} > \left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} > \frac{x+1}{x+3}$

$\Leftrightarrow \frac{8}{(x-1)(x+3)} < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1 \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0\}$. **Chọn D.**

Câu 37: $2^{x+1} > 3^{x+2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{9}{2} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{2}$. **Chọn B.**

Câu 38: $2.4^x - 5.2^x + 2 \le 0 \Leftrightarrow (2.2^x - 1)(2^x - 2) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le 2^x \le 2 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$. **Chọn D.**

Câu 39: $4^{x-1} - 2^{x-2} \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}.(2^x)^2 - \frac{1}{4}.2^x - 3 \le 0 \Leftrightarrow 2^x \le 4 \Leftrightarrow x \le 2$. **Chọn B.**

Câu 40: Ta có đáp án A sai. **Chọn A**

Câu 41: $2.7^{x+2} + 7.2^{x+2} \le 351.\sqrt{14^x} \Leftrightarrow 98.7^x - 351\sqrt{14^x} + 28.2^x \le 0 \Leftrightarrow 98\left(\frac{7}{2}\right)^x - 351\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{x}{2}} + 28 \le 0$

$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{7}{2}\right)^x - \frac{7}{2}\right]\left[\left(\frac{7}{2}\right)^x - \frac{4}{49}\right] \le 0 \Leftrightarrow \frac{4}{49} \le \left(\frac{7}{2}\right)^x \le \frac{7}{2} \Leftrightarrow -2 \le x \le 1 \Rightarrow b - a = 3$. **Chọn A.**