SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT
NĂM HỌC: 2017 - 2018
Môn: Toán – Lớp 12
Thời gian làm bài: 180 phút.

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$, với m là tham số thực. Chứng minh rằng $\forall m\in\mathbb{R}$ hàm số trên luôn có hai điểm cực trị. Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị hàm số trên thỏa mãn điều kiện điểm M vừa là điểm cực đại của đồ thị hàm số ứng với giá trị này của m đồng thời điểm M vừa là điểm cực tiểu của đồ thị ứng với giá trị khác của m.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C), điểm $I(3;3)$ và đường thẳng $d: y=-x+m$. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tứ giác $OAIB$ bằng 6 (O là gốc tọa độ).

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải bất phương trình sau trên tập số thực

$$x^2+9+\log_2\left(\frac{16x^2+96x+208}{\sqrt{12x+16}+\sqrt{45x+81}}\right)\le 2\sqrt{3x+4}-6x+3\sqrt{5x+9}.$$

2. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực $\begin{cases} 2.4^y+1=2^{\sqrt{2x}+1}+2\log_2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\right) \\ \sqrt{x+1}=\dfrac{x^2-x-2\sqrt[3]{4y^2+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3} \end{cases}$.

Câu 3. (2,0 điểm) Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{(x^2-1)\cos^2x+1-x\sin 2x}dx.$

Câu 4. (5,0 điểm)

1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *B*. Biết *AB=SD=3a*, *AD=SB=4a*, đường chéo *AC* vuông góc với mặt phẳng *(SBD)*. Tính theo *a* thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *BD* và *SA*.

2. Cho mặt cầu có tâm *O* và bán kính *R*. Từ một điểm *S* bất kỳ trên mặt cầu ta dựng ba cát tuyến bằng nhau, cắt mặt cầu tại các điểm *A, B, C* (khác với *S*) và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=\alpha$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* theo *R* và α. Khi α thay đổi, tìm α để thể tích khối chóp *S.ABC* lớn nhất.

Câu 5. (2,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2;-2;5)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng $(\alpha): x=1; (\beta): y=-1; (\gamma): z=1$. Viết phương trình mặt cầu (S).

Câu 6. (2,0 điểm) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab\ge 1$ và $c(a+b+c)\ge 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{b+2c}{1+a}+\dfrac{a+2c}{1+b}+6\ln(a+b+2c)$.

---HẾT---

Họ và tên thí sinh……………………………….Số báo danh………………………........................
Người coi thi số 1………………………………Người coi thi số 2.……………………..........................

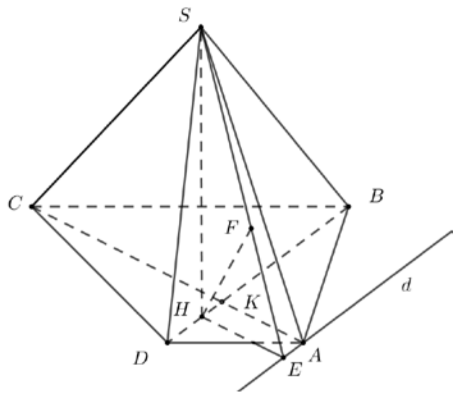
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM
(*Hướng dẫn chấm có 07 trang*)

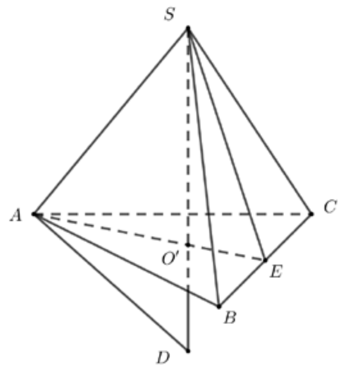
KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT
NĂM HỌC 2017 - 2018
Hướng dẫn chấm môn: Môn Toán – Lớp 12

Câu	ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 5,0đ	**1. (2,5đ)**	TXĐ: $D=\mathbb{R}$ $y'=-3x^2+6mx+3\left(1-m^2\right)$	0,25
		$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.$ Hàm số luôn có hai điểm cực trị	0,25
		$x=m-1\Rightarrow y=-m^2+3m-2$.	0,25
		Điểm cực tiểu của đồ thị $(m-1;-m^2+3m-2)$	0,25
		$x=m+1\Rightarrow y=-m^2+3m+2$.	0,25
		Điểm cực đại của đồ thị $(m+1;-m^2+3m+2)$	0,25
		Quỹ tích điểm cực tiểu của đồ thị là (P): $y=-x^2+x$	0,25
		Quỹ tích điểm cực đại của đồ thị là (P’): $y=-x^2+5x-2$	0,25
		Điểm M vừa là điểm cực đại ứng với giá trị này của *m*, vừa là điểm cực tiểu ứng với giá trị khác của *m* nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases}y=-x^2+x\\y=-x^2+5x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$	0,25
		Vậy $M(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4})$	0,25
	2. 2,5đ	TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ Phương trình hoành độ giao điểm : $\dfrac{2x+1}{x+1}=-x+m$.	0,25
		$\Leftrightarrow x^2+(3-m)x+1-m=0$.	0,25
		$\Delta=m^2-2m+5>0\forall m$. Đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B	0,25
		Gọi $A(x_1;-x_1+m),B(x_2;-x_2+m)$ Theo Vi-ét $x_1+x_2=m-3;x_1x_2=1-m$	0,25
		$\Rightarrow AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{2(m^2-2m+5)}$	0,25
		$OI=3\sqrt{2}$	0,25
		Tứ giác OAIB có $OI\perp AB$	0,25
		$S_{OAIB}=\dfrac{1}{2}OI.AB=\dfrac{1}{2}.3\sqrt{2}.\sqrt{2(m^2-2m+5)}$.	0,25
		$=3\sqrt{m^2-2m+5}$	0,25

		$\Rightarrow S_{\Delta OAIB}=6\Leftrightarrow\sqrt{m^2-2m+5}=2\Leftrightarrow m=1$	0,25
Câu 2 4,0đ	**1. 2,0đ**	ĐK: $x\ge-\frac{4}{3}$ BPT $\Leftrightarrow x^2+9+\log_2\frac{16(x^2+6x+13)}{2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}}\le2\sqrt{3x+4}-6x+3\sqrt{5x+9}$	0,25
		$x^2+6x+13+\log_2(x^2+6x+13)\le2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}+\log_2(2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9})$	0,25
		Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$, với $t>0$ có $f'(t)=\frac{1}{t\ln2}+1>0,\forall t>0$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.	0,25
		BPT có dạng $f(x^2+6x+13)\le f(2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9})$	0,25
		$\Leftrightarrow x^2+6x+13\le2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{4x+5}$	0,25
		$\Leftrightarrow x^2+x+2(x+2-\sqrt{3x+4})+3(x+3-\sqrt{5x+9})\le0$	0,25
		$\Leftrightarrow(x^2+x)+\frac{2(x^2+x)}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{3(x^2+x)}{x+3+\sqrt{5x+9}}\le0$ $\Leftrightarrow(x^2+x)(1+\frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}})\le0$	0,25
		$\Leftrightarrow x^2+x\le0\Leftrightarrow x\in[-1;0]$	0,25
	2. 2,0đ	$\begin{cases}2.4^y+1=2^{\sqrt{2x}+1}+2\log_2(\frac{\sqrt{x}}{y})\ (1)\\ \sqrt{x+1}=\frac{x^2-x-2\sqrt[3]{4y^2+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}\quad(2)\end{cases}$.	
		ĐK: $\begin{cases}0<x\ne13\\ y>0\end{cases}$ $(1)\Leftrightarrow4^y+\frac{1}{2}=2^{\sqrt{2x}}+\log_2\sqrt{x}-\log_2 y$ $\Leftrightarrow4^y+\log_2\sqrt{2}+\log_2 y=2^{2.\sqrt{\frac{x}{2}}}+\log_2\sqrt{2}\sqrt{\frac{x}{2}}$ $\Leftrightarrow2^{2y}+\log_2\sqrt{2}.y=2^{2.\sqrt{\frac{x}{2}}}+\log_2(\sqrt{2}.\sqrt{\frac{x}{2}})$	0,25
		$f(t)=2^{2t}+\log_2(\sqrt{2}.t)\Rightarrow f'(t)=2.2^{2t}.\ln2+\frac{1}{t\ln2}>0\forall t>0$ Hàm số f(t) đồng biến với t>0	0,25
		$PT\Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{\frac{x}{2}})\Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{x}{2}}\Leftrightarrow2y^2=x$	0,25
		Với $2y^2=x$ thay vào PT(2) ta có: $\sqrt{x+1}=\frac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}\Leftrightarrow\sqrt{x+1}+2=\frac{x^2-x-6}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$	0,25

		$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+2=\dfrac{(x-3)(x+2)}{\sqrt[3]{2x+1}-3}=\dfrac{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+1}-2)(x+2)}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$ $\Leftrightarrow 1=\dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(x+2)}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$ $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}-3=(\sqrt{x+1}-2)(x+2)$ $\Leftrightarrow 2x+1+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x+1}$	0,25
		Xét hàm số $g(u)=u^3+u \Rightarrow g'(u)=3u^2+1>0\forall u$ Hàm số $g(u)$ đồng biến, phương trình trở thành $g(\sqrt[3]{2x+1})=g(\sqrt{x+1})$ $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}=\sqrt{x+1}$ $\Leftrightarrow x^3-x^2-x=0$	0,25
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(l) \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}(l) \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(t/m) \end{array}\right.$	0,25
		$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2}$. Hệ phương trình có nghiệm $(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2})$	0,25
Câu 3 2,0đ		$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}dx$	0,25
		$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\sin x}.\dfrac{x\sin x dx}{(x\cos x-\sin x)^2}$	0,25
		Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{x}{\sin x} \\ dv=\dfrac{x\sin x}{(x\cos x-\sin x)^2}dx \end{cases}$	0,25
		$\begin{cases} u=\dfrac{x}{\sin x} \\ dv=\dfrac{-d(x\cos x-\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2} \end{cases}$	0,25

		$\Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}dx \\ v = \dfrac{1}{x\cos x - \sin x} \end{cases}$	0,25
		$\Rightarrow I = \dfrac{x}{\sin x}.\dfrac{1}{x\cos x - \sin x}\Bigg\|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sin^2 x}$	0,25
		$I = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{\pi - 4} - \cot x\Big\|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$	0,25
		Vậy $I = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{\pi - 4} + 1$	0,25
Câu 4 5,0đ	**1. 3,0đ**		
		$AC \perp (SBD)$ $\Rightarrow (SBD) \perp (ABCD)$	0,25
		$(SBD) \cap (ABCD) = BD$ Kẻ $SH \perp BD$ tại H $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$	0,25
		$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5a$	0,25
		Tam giác SBD vuông tại S nên: $SH = \dfrac{SB.SD}{BD} = \dfrac{12a}{5}$	0,25
		Gọi K là giao điểm của AC và BD. Ta có $AK.BD = AB.AD \Leftrightarrow AK = \dfrac{AB.AD}{BD} = \dfrac{12a}{5}$	0,25
		$AK.AC = AB^2 \Leftrightarrow AC = \dfrac{AB^2}{AK} = \dfrac{15a}{4}$	0,25
		$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}.\dfrac{15a}{4}.5a = \dfrac{75a^2}{8}$	0,25
		$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{12a}{5}.\dfrac{75a^2}{8} = \dfrac{15a^3}{2}$	0,25

		Kẻ đường thẳng d đi qua A và song song với BD Kẻ HE // KA, E thuộc d (SHE) $\perp$(SA,d); $(SHE)\cap(SA,d)=SE$ Kẻ HF vuông góc với SE tại F thì HF vuông góc với (SA,d)	0,25
		BD//(SA,d) nên d(BD,SA)=d(BD,(SA,d))=d(H, (SA,d))=HF	0,25
		Trong tam giác SHF ta có $\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HE^2}=\frac{25}{144a^2}+\frac{25}{144a^2}=\frac{25}{72a^2}$	0,25
		$HF=\frac{6\sqrt{2}a}{5}\Rightarrow d(BD,SA)=\frac{6\sqrt{2}a}{5}$	0,25
	2 2,0đ		
		Tam giác ABC đều, kẻ SO' vuông góc với (ABC) thì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và O' thuộc SO. Giả sử SO' cắt mặt cầu tại D thì tam giác SAD vuông tại A Gọi SA=SB=SC=l Trong tam giác SAD ta có $SO'.SD=SA^2\Rightarrow SO'=\frac{SA^2}{SD}=\frac{l^2}{2R}(1)$	0,25
		Gọi E trung điểm BC ta có $BC=2BE=2l\sin\frac{\alpha}{2}\Rightarrow AO'=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow SO'=\sqrt{SA^2-O'A^2}=l\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) ta có $\frac{l^2}{2R}=l\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\Leftrightarrow l=2R\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$	0,25
		$\Rightarrow S_{ABC}=4\sqrt{3}R^2(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2})\sin^2\frac{\alpha}{2}$	0,25
		$\Rightarrow SO'=2R(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2})$	0,25
		$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SO'.S_{ABC}=\frac{8\sqrt{3}}{3}R^3(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2})^2.\sin^2\frac{\alpha}{2}$	0,25
		Đặt $x=\sin^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow 0<x<1$	

Xét hàm số $y = x(1-\frac{4}{3}x)^2 = \frac{1}{9}(16x^3 - 24x^2 + 9x)$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3}(16x^2 - 16x + 3) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

x	0		¼		¾		1
y'		+	0	-	0	+	
y		↗	1/9	↘		↗	

0,25

Thể tích S.ABC lớn nhất là $\frac{8\sqrt{3}R^3}{27}$ khi $x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^0$ 0,25

Câu 5
2,0đ

Gọi mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R 0,25

Mặt cầu tiếp xúc với các mặt $(\alpha): x = 1; (\beta): y = -1; (\gamma): z = 1$

nên $R = |a-1| = |b+1| = |c-1|$ 0,25

Điểm $A(2;-2;5)$ thuộc miền thỏa mãn : $x > 1; y < -1; z > 1$

Mặt cầu có tâm I và đi qua A nên $a > 1; b < -1; c > 1$ 0,25

Vậy $R = a - 1 = -b - 1 = c - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = R + 1 \\ b = -R - 1 \\ c = R + 1 \end{cases}$ 0,25

$\Rightarrow I(R+1; -R-1; R+1) \Rightarrow IA = R \Leftrightarrow IA^2 = R^2$ 0,25

$\Leftrightarrow (R-1)^2 + (-R+1)^2 + (R-4)^2 = R^2$

$\Leftrightarrow 2R^2 - 12R + 18 = 0 \Leftrightarrow R = 3$ 0,25

Vậy mặt cầu *(S)* có tâm $I(4;-4;4)$, bán kính $R = 3$ 0,25

Phương trình mặt cầu : $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-4)^2 = 9$ 0,25

Câu 6
2,0đ

$$P + 2 = \frac{a+b+2c+1}{1+a} + \frac{a+b+2c+1}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$$

$$= (a+b+2c+1)(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}) + 6\ln(a+b+2c)$$ 0,25

Ta chứng minh BĐT sau

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} (a,b > 0; ab \geq 1)$$

Thật vậy

$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(\sqrt{ab} - 1) \geq 0$ (luôn đúng vì $ab \geq 1$) 0,25

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Lại có
$\sqrt{ab} \le \frac{ab+1}{2}$
$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} \ge \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \ge \frac{4}{3+ab} \ge \frac{4}{c^2+ab+bc+ca} = \frac{4}{(a+c)(b+c)} \ge \frac{16}{(a+b+2c)^2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\Rightarrow P+2 \ge \frac{16(a+b+2c+1)}{(a+b+2c)^2} + 6\ln(a+b+2c)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Đặt $t = a+b+2c > 0$ ta có $P+2 \ge \frac{16(t+1)}{t^2} + 6\ln t$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Xét hàm số
$f(t) = \frac{16(t+1)}{t^2} + 6\ln t \Rightarrow f'(t) = \frac{6t^2-16t-32}{t^3} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td><table>
<tr><td>t</td><td>0   4 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>f’(t)</td><td>-   0   +</td></tr>
<tr><td>f(t)</td><td>$\searrow$ $\nearrow$</td></tr>
</table>
$f(4) = 5 + 6\ln 4$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\Rightarrow P \ge 3 + 6\ln 4 \Rightarrow MinP = 3 + 6\ln 4$ khi $a = b = c = 1$</td><td>0,25</td></tr>
</table>

Lưu ý: Các cách giải khác, nếu đúng thì cho điểm tương đương theo từng phần như hướng dẫn chấm.

------ HẾT------