



NHẬN DẠNG THÂN TỐC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Giáo viên: Lưu Huy Thương

1.1. Dấu hiệu nhận biết (dấu âm dương) các hệ số của hàm bậc ba dựa vào đồ thị

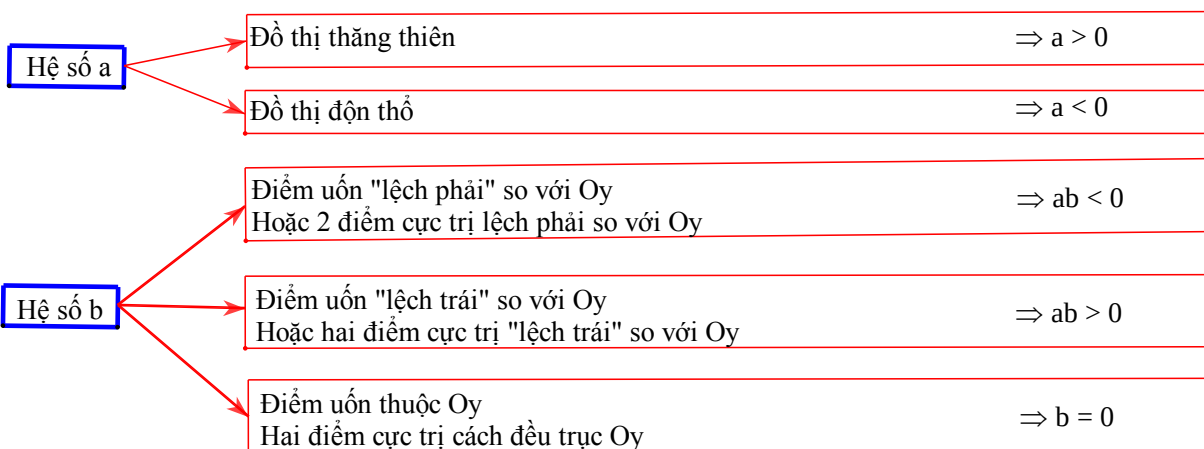
Hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

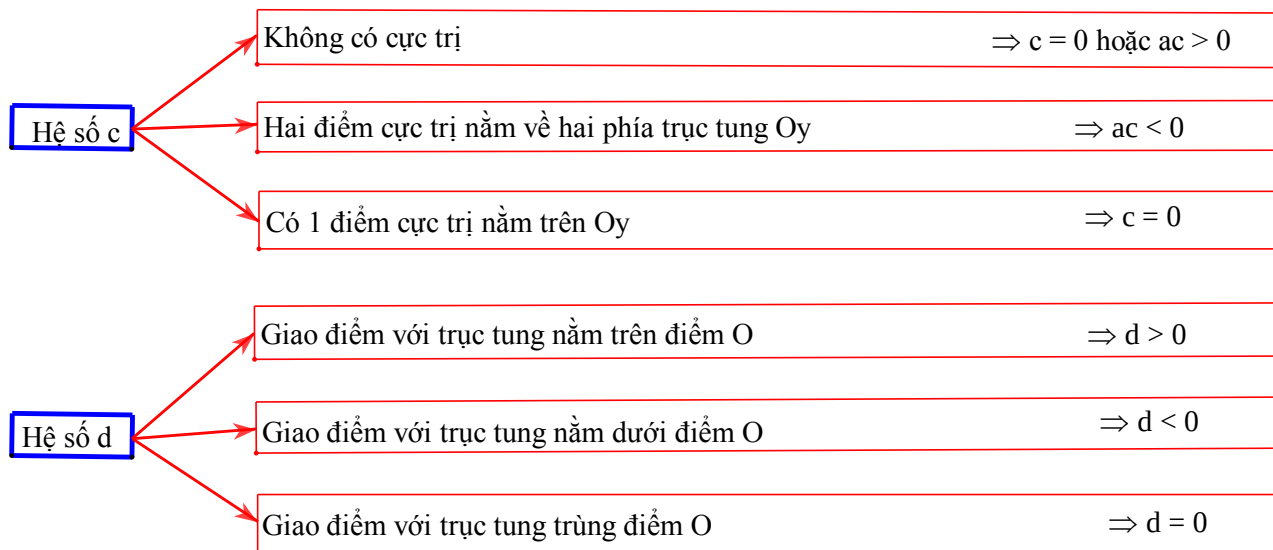
- $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $\Delta'_{y'} = b^2 - 3ac$
- Hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$.
- Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0$.
- Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số. Theo Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

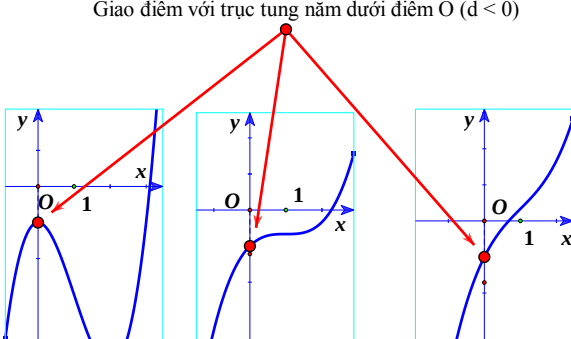
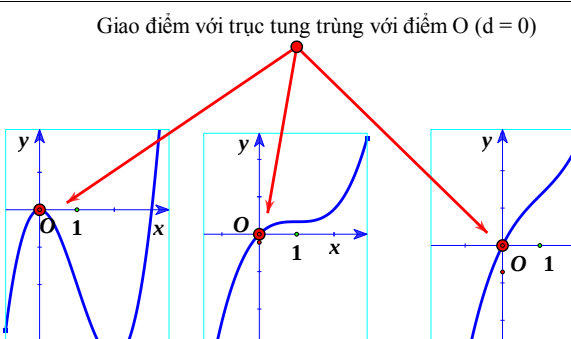
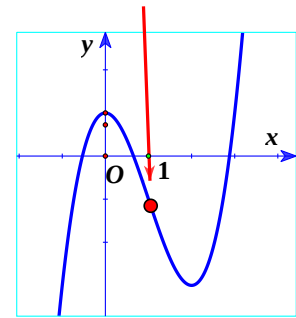
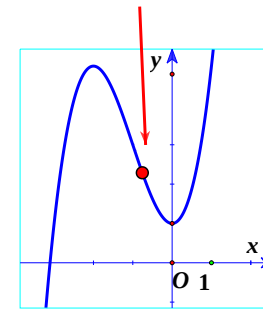
- Với $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{3a}$ chính là hoành độ của điểm uốn.

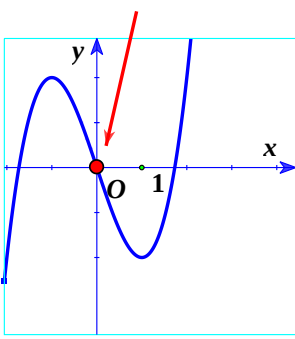
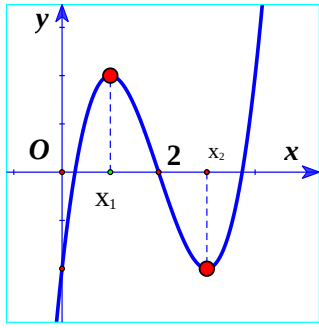
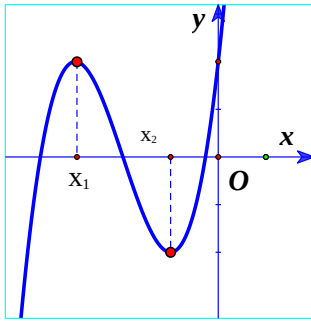
Cách nhận biết dấu của các hệ số

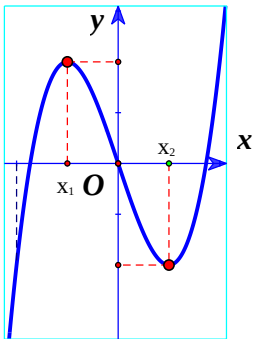
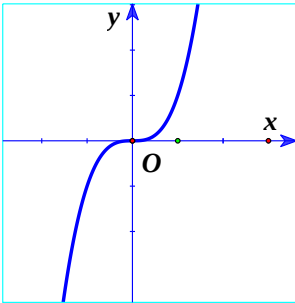
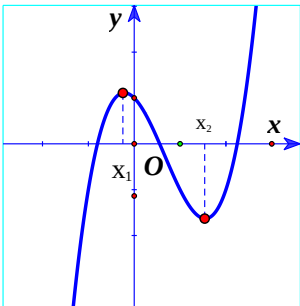


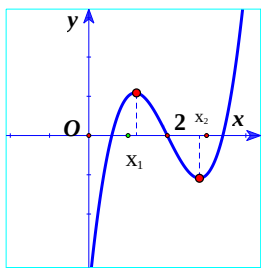
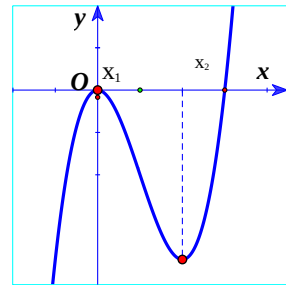


Hệ số	Tiêu chí	Điều kiện	Minh họa
a	Dựa vào xu hướng đi lên hay đi xuống của phần cuối đồ thị	Đi lên (thăng thiên) $\Rightarrow a > 0$.	
		Đi xuống (Độn thổ) $\Rightarrow a < 0$	
d	Dựa vào vị trí giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung (Oy).	Nằm phía trên gốc tọa độ $O \Rightarrow d > 0$	Giao điểm với trục tung nằm trên điểm O ($d > 0$)

		Nằm dưới gốc tọa độ $O \Rightarrow d < 0$.	Giao điểm với trục tung nằm dưới điểm O ($d < 0$) 
		Đi qua gốc tọa độ $O \Rightarrow d = 0$.	Giao điểm với trục tung trùng với điểm O ($d = 0$) 
b	Dựa vào vị trí của điểm uốn so với trục Oy	Điểm uốn nằm phía phải Oy $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0$ $\Rightarrow ab < 0$	Điểm uốn nằm bên "phải" Oy $\Rightarrow ab < 0$ Trong trường hợp này $a > 0 \Rightarrow b < 0$ 
		Điểm uốn nằm phía trái Oy $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0$ $\Rightarrow ab < 0$	Điểm uốn nằm bên "trái" Oy $\Rightarrow ab > 0$ Trong trường hợp này $a > 0 \Rightarrow b > 0$ 

Dựa vào vị trí của 2 điểm cực trị so với trục Oy	Điểm uốn nằm phía trên trục Oy $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} = 0$ $\Rightarrow b = 0$	Điểm uốn trùng gốc tọa độ O $\Rightarrow b = 0$ 
	2 điểm cực trị nằm lệch về phía bên phải Oy $\Rightarrow ab < 0$ ($x_1 + x_2 > 0$)	2 điểm cực trị lệch về bên "phải" Oy $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow ab < 0$ Trong trường hợp này $a > 0 \Rightarrow b < 0$. 
	2 điểm cực trị nằm lệch về phía bên trái Oy $\Rightarrow ab > 0$ ($x_1 + x_2 < 0$)	2 điểm cực trị lệch về bên "trái" Oy $x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow ab > 0$ Trong trường hợp này $a > 0 \Rightarrow b > 0$. 

		Khoảng cách 2 điểm cực trị đến Oy bằng nhau $\Rightarrow b = 0$ $(x_1 + x_2 = 0)$	Hai điểm cực trị cách đều trục Oy (Khoảng cách từ 2 điểm cực trị đến trục tung bằng nhau) $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow b = 0$ 
c	Cực trị	Không có cực trị $c = 0$ hoặc $ac > 0$.	Đồ thị hàm số không có cực trị $c = 0$ hoặc $ac > 0$ 
		Có 2 điểm cực trị nằm 2 phía trục oy $\Rightarrow ac < 0$.	Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung Oy $\Rightarrow ac < 0$. Trong trường hợp này, $a > 0 \Rightarrow c < 0$ 

		Có 2 điểm cực trị nằm cùng phía trục $Oy \Rightarrow ac > 0$.	Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Rightarrow ac > 0$. Trong trường hợp này, $a > 0 \Rightarrow c > 0$ 
		Có 1 điểm cực trị thuộc trục tung $Oy. x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} = 0$ $\Rightarrow c = 0$.	Đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị nằm trên trục tung $Oy \Rightarrow c = 0$ 

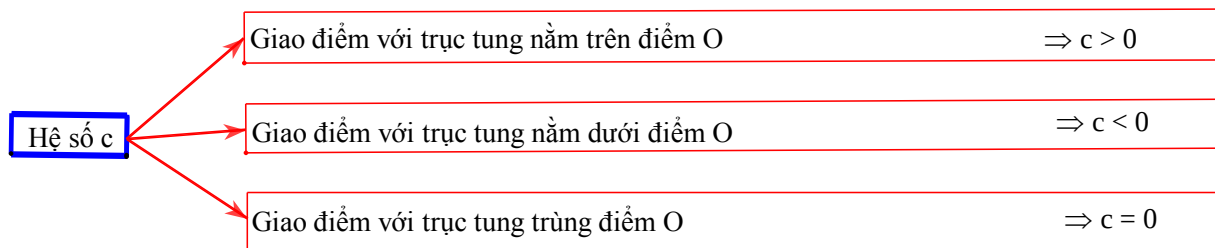
1.2. Đồ thị hàm bậc 4 trùng phương

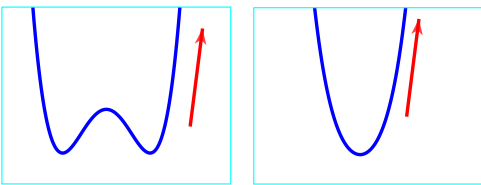
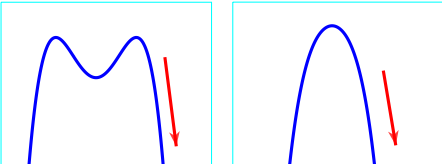
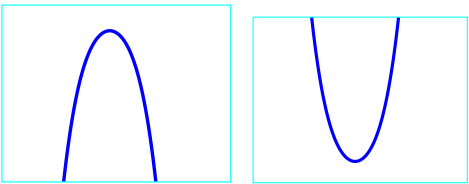
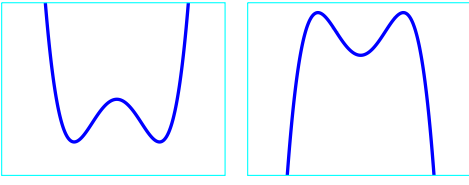
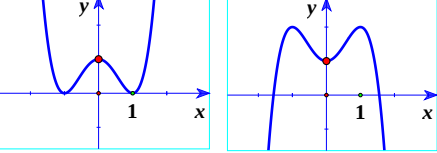
Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

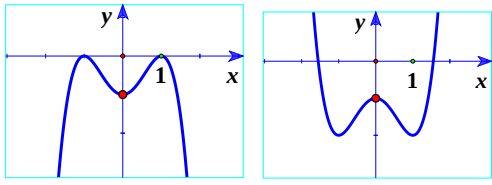
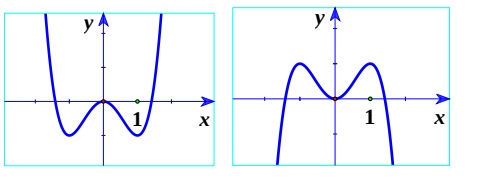
$$y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Nhận biết dấu của các hệ số.

Hệ số a	Đồ thị tăng thiên	$\Rightarrow a > 0$
	Đồ thị giảm tho	$\Rightarrow a < 0$
Hệ số b	Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị	$\Rightarrow ab < 0$
	Đồ thị hàm số chỉ có 1 điểm cực trị (Đang xét $a \neq 0$)	$\Rightarrow ab \geq 0$



Hệ số	Tiêu chí	Điều kiện	Minh họa
a	Dựa vào xu hướng đi lên hay đi xuống của phần cuối đồ thị	Đi lên (thăng thiên) $\Rightarrow a > 0$.	
		Đi xuống (Độn thổ) $\Rightarrow a < 0$	
b	Dựa vào số điểm cực trị của hàm số	Có 1 điểm cực trị $\Rightarrow ab \geq 0$.	
		Có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$	
c	Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số	Nằm phía trên gốc tọa độ $O \Rightarrow c > 0$	

	với trục tung (Oy).	Nằm dưới gốc tọa độ $O \Rightarrow c < 0$.	
		Đi qua gốc tọa độ $O \Rightarrow c = 0$.	

1.3. Đồ thị hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0; c \neq 0$)

- Đạo hàm: $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$. ($d=0 \Rightarrow$ tiệm cận đứng là trục Oy : $x=0$.)
- Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$. ($a=0 \Rightarrow$ tiệm cận ngang là trục Ox : $y=0$)
- Giao Ox $\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ với $a \neq 0$; Nếu $a=0$ thì không cắt Ox.
- Giao Oy $\Rightarrow y = \frac{b}{d}$

Với bài hàm số với các tham số là các giá trị cụ thể. Các tiêu chí để nhận dạng:

- Dựa vào tiệm cận đứng + tiệm cận ngang
- Dựa vào giao Ox, Oy
- Dựa vào sự đồng biến, nghịch biến

Với hàm số có chứa các tham số

Nhận biết dấu của 6 cặp tích số:

ab : Dựa vào vị trí giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox : $x = -\frac{b}{a}$.

ac : Dựa vào vị trí đường tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$.

bd : Dựa vào vị trí giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy : $y = \frac{b}{d}$.

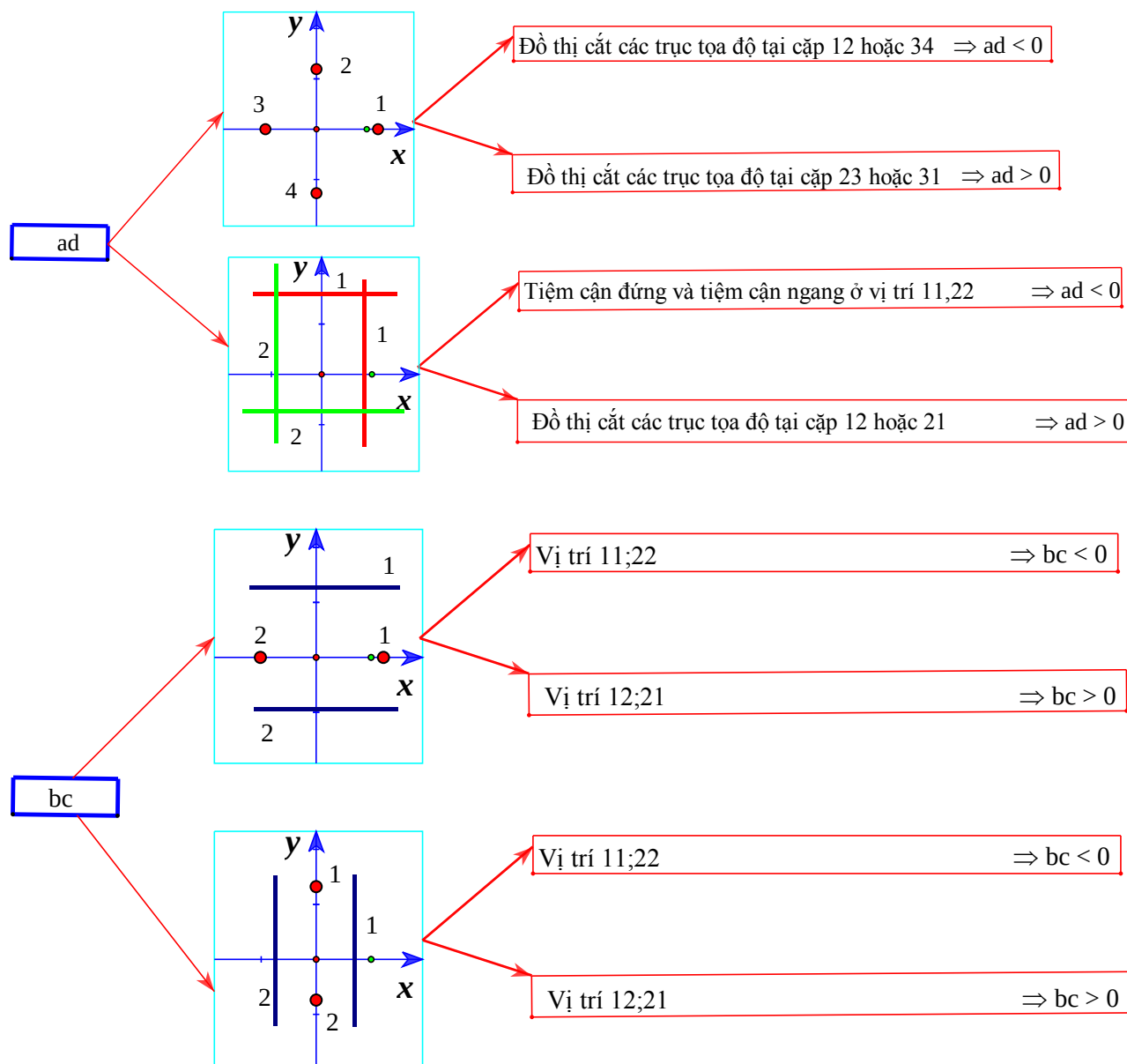
cd : Dựa vào vị trí đường tiệm cận đứng: $y = -\frac{d}{c}$.

ad : Dựa vào vị trí giao điểm của đồ thị hàm số với các trục tọa độ **HOẶC** dựa vào vị trí đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

bc : Dựa vào vị trí giao Ox và tiệm cận ngang **HOẶC** dựa vào vị trí giao Oy với tiệm cận đứng.



4 tích số này học sinh có thể ghi nhớ bằng cách hiểu bản chất của các yếu tố: Tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, giao Ox , giao Oy , tính đồng biến, nghịch biến.



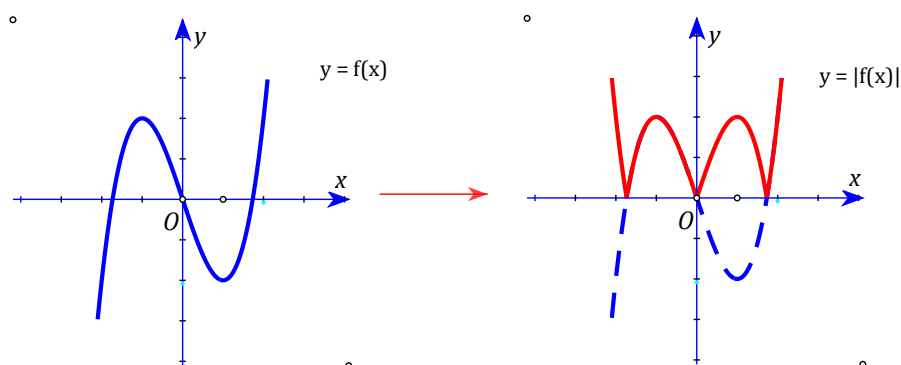
1.4. Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

1.4.1. Từ đồ thị hàm số $f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $|f(x)|$

Thần chú: Trên giữ nguyên, dưới lấy đối xứng lên trên

Nghĩa là: Toàn bộ đồ thị nằm **phía trên** Ox của $f(x)$ được giữ nguyên.

Toàn bộ đồ thị nằm **phía dưới** Ox của $f(x)$ được lấy đối xứng lên trên.

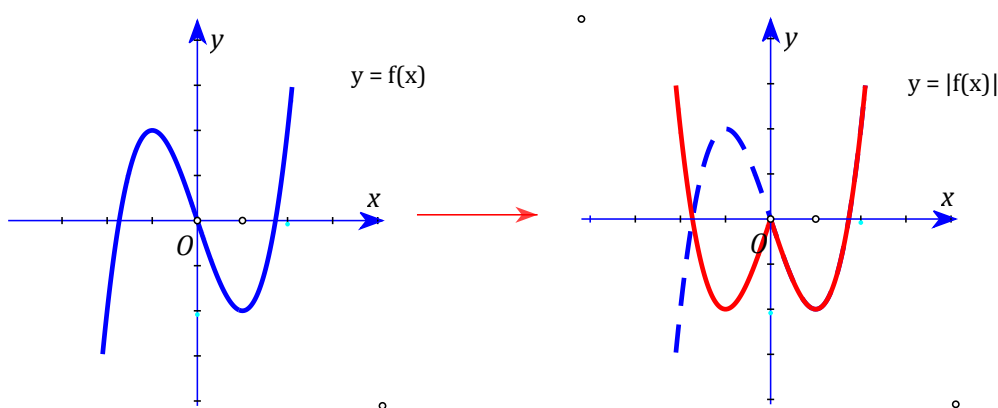


1.4.2. Từ đồ thị hàm số $f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $f(|x|)$

Thần chú: Phải giữ nguyên, lấy đối xứng sang trái.

Nghĩa là: Toàn bộ đồ thị nằm **phía bên phải** Oy của $f(x)$ được giữ nguyên, phần bên trái Oy của $f(x)$ **bỏ đi**.

Lấy đối xứng phần bên phải sang trái.



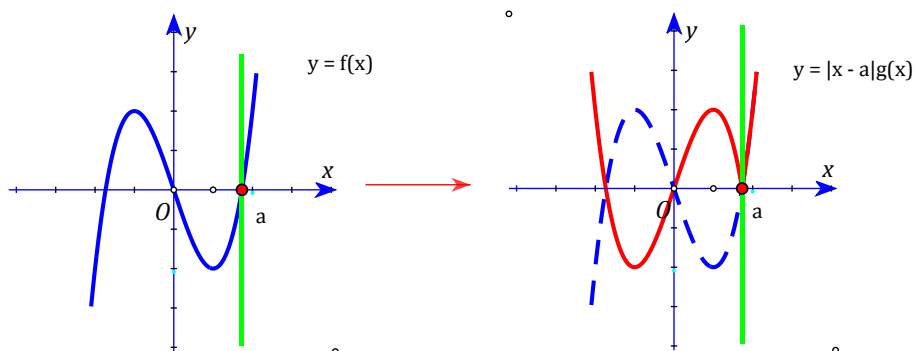
1.4.3. Từ đồ thị hàm số $f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $|x-a|g(x)$ với $(x-a).g(x)=f(x)$

Thần chú: Phải a giữ nguyên, trái a lấy đối xứng qua Ox.

Nghĩa là:

Toàn bộ đồ thị ứng với $x > a$ của $f(x)$ (Nằm phía bên phải đường thẳng $x=a$) được giữ nguyên.

Toàn bộ đồ thị ứng với $x < a$ của $f(x)$ (Nằm phía bên trái đường thẳng $x = a$) lấy đối xứng qua Ox .



1.5. Đồ thị hàm số $f'(x)$

- Số **giao điểm** với trục hoành $\Rightarrow$ số lần đổi dấu của $f'(x) \Rightarrow$ số điểm cực trị
- Nằm trên hay dưới trục hoành $\Rightarrow f'(x) > 0$ hoặc $f'(x) < 0$ trên 1 miền $\Rightarrow$ Tính đơn điệu của hàm số.